ZUR LEHRE VON DEN HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALEN

VON

PAUL EPSTEIN
in STRASSBURG.

Bekanntlich hat Herr WEIERSTRASS in folgender Weise ein System zusammengehöriger hyperelliptischer Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung definiert.[1]

Es sei

$$s = \sqrt{z - e_0 . z - e_1 \ldots z - e_{2p+1}} = \sqrt{f(z)}$$

die dem hyperelliptischen Gebilde zu Grunde liegende Irrationalität, (z, s) und (ζ, σ) zwei Punkte der zugehörigen zweiblättrigen Fläche, und

$$g_1(z), \quad g_2(z), \ldots, g_p(z),$$
$$g_{p+1}(z), g_{p+2}(z), \ldots, g_{2p}(z)$$

seien zwei Reihen ganzer Funktionen von z — die Funktionen der ersten Reihe höchstens vom Grade $p - 1$, die der zweiten vom Grade $2p$ —, die die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d}{d\zeta}\frac{s + \sigma}{(z - \zeta)2s} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{g_{p+\nu}(\zeta)}{\sigma}\frac{g_\nu(z)}{s} = \frac{d}{dz}\frac{s + \sigma}{(\zeta - z)2\sigma} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{g_{p+\nu}(z)}{s}\frac{g_\nu(\zeta)}{\sigma}$$

[1] Vgl. WILTHEISS, *Über die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunktionen.* Crelles Journal Bd. 99. Ferner BOLZA, *On the Logarithmic Derivatives of Hyperelliptic σ-Functions.* American Journal of Mathematics Bd. 17. Letztere Abhandlung erschien nach Vollendung vorliegender Arbeit.

identisch erfüllen. Dann bilden

$$\int \frac{g_\nu(z)}{s}\,dz \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

das System der Fundamentalintegrale erster Gattung,

$$\int \frac{g_{p+\nu}(z)}{s}\,dz \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

das der Fundamentalintegrale zweiter Gattung.

Bei dieser Definition bleiben von den $p(3p+1)$ Coeffizienten der Funktionen $g_\nu(z)$, $g_{p+\nu}(z)$ noch eine grosse Menge frei verfügbar. Im besonderen kann man die Integranden erster Gattung willkürlich annehmen und auch dann bleibt noch ein Teil der Coeffizienten der Funktionen $g_{p+\nu}(z)$ unbestimmt. Über diese übrig bleibenden Coeffizienten hat nun Herr KLEIN von invariantentheoretischen Gesichtspunkten geleitet dadurch verfügt, dass er in der mit (1) gleichwertigen Relation

$$(2) \qquad \frac{d}{d\zeta}\frac{s+\sigma}{(z-\zeta)2s} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{g_{p+\nu}(\zeta)}{\sigma}\frac{g_\nu(z)}{s} = \frac{s\sigma + F(z,\zeta)}{2(z-\zeta)^2 s\sigma},$$

worin $F(z,\zeta)$ eine in z und ζ symmetrische ganze Funktion vom Grade $p+1$ bedeutet, die die Bedingungen erfüllt

$$F(z,z) = f(z), \qquad \left(\frac{\partial F(z,\zeta)}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=z} = \frac{1}{2}f'(z),$$

für $F(z,\zeta)$ die $(p+1)^{\text{te}}$ Polare von $f(z)$ in Bezug auf ζ ansetzte und dieser Festsetzung ist dann Herr WILTHEISS in seinen späteren Arbeiten gefolgt.

Nun finden wir aber in der ersten Abhandlung von Herrn WILTHEISS[1] eine Form der Funktionen $g_\nu(z)$, $g_{p+\nu}(z)$ erwähnt, die er sehr bemerkenswert nennt, die aber anscheinend noch nicht einer eingehenderen Untersuchung unterworfen worden sind. Diese Funktionen entspringen aus der Entwicklung von $\frac{s}{z-\zeta}$ als Funktion von z im Unendlichen und sie sind es, die den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit gebildet haben. Die

[1] WILTHEISS, a. a. O., S. 245.

mit ihrer Hülfe gebildeten Integrale — wir nennen sie der Kürze halber *Hauptintegrale* — zeichnen sich erstens durch ein ausserordentlich einfaches Verhalten im Unendlichen aus, das es möglich macht, jedes zum hyperelliptischen Gebilde gehörige Integral, dessen Unstetigkeiten bekannt sind, sofort durch die Hauptintegrale auszudrücken, vor allem aber erscheinen sie ganz besonders geeignet, *um bei Untersuchung der Abhängigkeit hyperelliptischer Integrale von den Verzweigungspunkten als Grundlage zu dienen.*

Im ersten Teil der Arbeit werden zunächst einige Eigenschaften der ganzen Funktionen φ, mittels deren die Hauptintegrale gebildet werden, abgeleitet. Aus diesen ergibt sich dann in § 3, dass die Derivierten sämtlicher Hauptintegrale nach den Verzweigungspunkten sich in einfachster Weise durch die Derivierten $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ eines einzigen Hauptintegrals ω ausdrücken, woraus dann weiter partielle Differentialgleichungen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale fliessen. In § 4 werden die Integrale $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ durch die Hauptintegrale dargestellt, das Integral dritter Gattung eingeführt, das nur in den unendlich fernen Gebieten und einem Punkt im Endlichen unstetig wird und aus diesem das algebraisch normierte Integral dritter Gattung mit Vertauschbarkeit von Argument und Parameter gewonnen. In § 5 werden die Weierstrass'schen Relationen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale abgeleitet und gezeigt, dass die in ihnen auftretenden bilinearen Verbindungen als Periodicitätsmoduln von $2p$ Integralen A_μ und B_μ aufgefasst werden können, die ein zweites System von Fundamentalintegralen bilden. Diese Integrale sind selbst wieder Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung. Mit Hülfe der Weierstrass'schen Relationen wird dann der Wert der Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades ermittelt, die die Verallgemeinerung der Legendre'schen Relation für $p = 1$ darstellt. Am Schluss dieses Paragraphen werden wir dazu geführt, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen bei einer gegebenen Reihe von ganzen Funktionen $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... der Ausdruck $\frac{1}{\psi_k(e_i)} \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi_k(z)}{s}\right)$ für jedes k denselben Wert hat. Es besteht nämlich der merkwürdige Umstand, dass die Integranden sämtlicher in dieser Arbeit auftretenden Integrale erster und zweiter Gattung, diejenigen der

Hauptintegrale, der Integrale A_μ und B_μ und der Normalintegrale erster und zweiter Gattung diese Eigenschaft besitzen.

Im zweiten Teil wird zu den bekannten Riemann'schen Normalintegralen erster Gattung als notwendige Ergänzung ein System von Normalintegralen zweiter Gattung hinzugefügt und eine Reihe von $2p+2$ Integralen T_i aufgestellt, die zu den Derivierten dieser Normalintegrale in ebenderselben Beziehung stehen, wie die Integrale $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ zu den Derivierten der Hauptintegrale. Es gelingt dabei zu der eleganten von Herrn THOMAE gefundenen Relation zwischen den Derivierten der Periodicitätsmoduln $a_{\mu\nu}$ der Normalintegrale 1. Gattung und deren Integranden eine Reihe gleichartiger Relationen hinzuzufügen und als gemeinsame Quelle derselben ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nachzuweisen, zu deren Lösungen die Integrale T_i gehören. Ein sehr allgemeiner Satz, der für je zwei Lösungssysteme dieser partiellen Differentialgleichungen besteht, führt dazu, eine enge Beziehung zwischen den Integralen T_i und den Derivierten des transcendent normierten Integrals dritter Gattung aufzufinden und eine Spezialisierung dieser Beziehung liefert eine Funktion Ω von z, die genau der Funktion $Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$ entspricht, mit deren Hülfe Herr KLEIN seine Primform bildet. Eine kurze Erörterung des Zusammenhangs dieser Funktion Ω mit der hyperelliptischen Thetafunktion bildet den Schluss der Arbeit.

Schliesslich soll nicht unerwähnt bleiben, dass Verfasser die Anregung zu dieser Arbeit, nämlich die Kenntnis der Funktionen φ und der mit ihrer Hülfe zu bildenden Integrale einer Vorlesung von Herrn CHRISTOFFEL über elliptische Integrale (Winter 1890/91) verdankt, doch hat Herr CHRISTOFFEL sich darauf beschränkt, das Verhalten der Integrale im Unendlichen anzugeben, und hat ohne Beweis die wichtige Gleichung (7) in § 2 mitgeteilt.

ERSTER TEIL.

Die Hauptintegrale und ihre Derivierten nach den Verzweigungspunkten.

§ 1. *Definition des hyperelliptischen Gebildes.*

Der Theorie der hyperelliptischen Integrale legen wir die Irrationalität

$$s = \sqrt{f(z)}$$

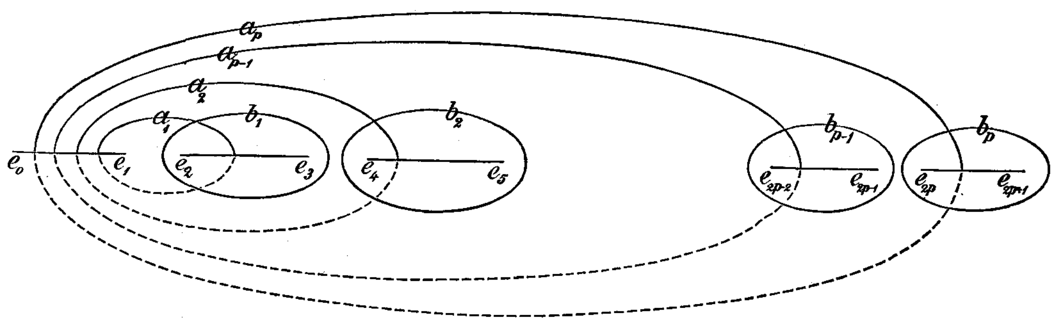
zu Grunde, wo $f(z)$ die ganze Funktion $2p + 2^{\text{ten}}$ Grades von z:

$$f(z) = z - e_0 \,.\, z - e_1 \,.\, z - e_2 \ldots z - e_{2p+1}$$

bedeutet.

Jede zum Rationalitätsbereich (z, s) gehörige Funktion heisst eine »Funktion der Klasse», das Integral einer solchen Funktion ein »Integral der Klasse».

Alle Funktionen der Klasse sind einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche T mit den Verzweigungspunkten $e_0, e_1, \ldots, e_{2p+1}$ eindeutig zugeordnet. Die Durchsetzungslinien mögen zwischen e_0 und e_1, e_2 und $e_3, \ldots, e_{2p}$ und e_{2p+1} verlaufen, und die Fläche möge einfach zusammenhängend gemacht werden durch ein Querschnittsystem, dessen Anlage aus der Figur leicht ersichtlich ist.



Das System von Herrn PRYM[1] geht aus diesem hervor, indem man

[1] PRYM, *Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche.* 1866.

die Querschnitte (a) und (b) vertauscht.[1] Die so mit Querschnitten versehene Fläche nennen wir die Fläche T'. Die Querschnitte $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sollen *Querschnitte erster Art,* die $b_1, b_2, \ldots, b_p$ *Querschnitte zweiter Art* heissen. Der Verzweigungspunkt e_0 fällt ausserhalb des Querschnittsystems und heisst »freier Verzweigungspunkt».

Bezüglich der Bezeichnungen sei folgendes bemerkt: Den variablen Punkt (z, s) der Fläche T bezeichnen wir durchweg mit x; dazu kommt vielfach ein zweiter Punkt ξ und in diesem soll $z = \zeta$, $s = + \sigma$ sein. Die unendlich fernen Gebiete unterscheiden wir durch die Bezeichnung ∞_1 und ∞_2.

In der Bezeichnung der Indices sind in der ganzen Arbeit die folgenden Festsetzungen consequent durchgeführt worden:

1) Die Indices i, k können alle ganzzahligen Werte von 0 bis $2p + 1$ annehmen.[2]

2) Die Indices n, l können alle ganzzahligen Werte von $-p$ bis $+p$ annehmen.

3) Die Indices λ, μ, ν können alle ganzzahligen Werte von 1 bis p annehmen.

§ 2. *Die Funktionen* φ.

Die Funktion s verhält sich ausserhalb der Verzweigungspunkte überall wie eine eindeutige Funktion von z, kann also in der Umgebung eines jeden Punktes ξ der Fläche T, der nicht Verzweigungspunkt ist, nach ganzen Potenzen von $z - \zeta$ entwickelt werden. In den unendlich fernen Gebieten schreitet die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fort. Setzt man dem entsprechend

$$(1) \qquad \text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad s = \pm z^{p+1}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots\right),$$

[1] Natürlich sind die Verzweigungspunkte in der Figur nur der Übersichtlichkeit wegen in grader Linie angenommen. Die Schnitte $c_1, \ldots, c_{p-1}$, die nötig sind, um die Fläche vollends einfach zusammenhängend zu machen, sind weggelassen, da sie bekanntlich für die Theorie der Integrale irrelevant sind.

[2] Wo i nicht Index ist, bedeutet es stets $\sqrt{-1}$.

so ist leicht einzusehen, dass die $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ganze homogene Funktionen der Verzweigungspunkte sind.

Mit Hülfe dieser Coefficienten a bilden wir die Funktionen:

$$(2) \qquad \varphi_k(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \ldots + a_k. \qquad {\scriptstyle (k=0,1,2,\ldots)}$$

Diese Funktionen φ bilden die Grundlage der weiteren Untersuchungen und wir leiten zunächst eine Anzahl Sätze für sie ab, von denen wir in der Folge Gebrauch zu machen haben.

Es ist

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \frac{s}{z-\zeta} = \frac{s}{z}\left(1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{\zeta^2}{z^2} + \ldots\right),$$

also mit Benutzung der Entwicklung (1)

$$(3) \qquad \frac{s}{z-\zeta} = \pm z^p\left[1 + \frac{\varphi_1(\zeta)}{z} + \frac{\varphi_2(\zeta)}{z^2} + \frac{\varphi_3(\zeta)}{z^3} + \ldots\right].$$

Durch Differentiation von (1) nach dem Verzweigungspunkt e_i findet man

$$\frac{\partial s}{\partial e_i} = \pm z^p\left[\frac{\partial a_1}{\partial e_i} + \frac{1}{z}\frac{\partial a_2}{\partial e_i} + \frac{1}{z^2}\frac{\partial a_3}{\partial e_i} + \ldots\right]$$

und da andrerseits auch

$$\frac{\partial s}{\partial e_i} = -\frac{s}{2(z-e_i)} = \mp\frac{1}{2}z^p\left[1 + \frac{\varphi_1(e_i)}{z} + \frac{\varphi_2(e_i)}{z^2} + \ldots\right]$$

ist, so folgt

$$(4) \qquad \frac{\partial a_k}{\partial e_i} = -\frac{1}{2}\varphi_{k-1}(e_i).$$

Dies benutzen wir bei der Differentiation von $\varphi_k(z)$ nach e_i und erhalten

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -\frac{1}{2}\left[z^{k-1} + \varphi_1(e_i)z^{k-2} + \varphi_2(e_i)z^{k-3} + \ldots + \varphi_{k-1}(e_i)\right].$$

Nun liefert eine einfache Division

$$\frac{\varphi_k(z) - \varphi_k(e_i)}{z - e_i} = z^{k-1} + \varphi_1(e_i)z^{k-2} + \varphi_2(e_i)z^{k-3} + \ldots + \varphi_{k-1}(e_i),$$

also haben wir die Formel

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -\frac{\varphi_k(z) - \varphi_k(e_i)}{2(z - e_i)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{1}{s}\frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} + \frac{1}{2s(z-e_i)}\varphi_k(z) = \frac{\varphi_k(e_i)}{2s(z-e_i)},$$

und da weiter $\frac{1}{2s(z-e_i)} = \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{1}{s}\right)$, also die linke Seite gleich der Derivierten von $\frac{\varphi_k(z)}{s}$ nach e_i ist:

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right) = \frac{\varphi_k(e_i)}{2s(z-e_i)}.$$

Diese Gleichung, die Herr Christoffel in seinen Vorlesungen ohne Beweis mitgeteilt hat, findet sich auch in der ersten Abhandlung von Herrn Wiltheiss,[1] doch erwähnt Herr W. nicht, dass die in seinen Formeln auf der rechten Seite auftretenden Constanten c_{-2a+1} resp. c_{2a-1} gleich den Werten der ganzen Funktionen $H(x)_a$ resp. $G(x)_a$ in dem Verzweigungspunkt a_i sind, nach dem differentiiert wird, was für uns grade von wesentlicher Bedeutung sein wird.

Wir haben mit der Gleichung (7) den wichtigen Satz gefunden:

Der Ausdruck $\frac{1}{\varphi_k(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right)$ *hat für alle Funktionen* $\varphi_k(z)$ *den nämlichen Wert, und zwar* $\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2s(z-e_i)}$.

Weitere Eigenschaften der Funktionen φ ergeben sich, wenn wir nach (1) bilden:

$$\frac{ds}{dz} = \pm\left[(p+1)z^p + pa_1z^{p-1} + (p-1)a_2z^{p-2} + \ldots + a_p - \frac{a_{p+2}}{z^2} - \frac{2a_{p+3}}{z^3} - \ldots\right].$$

Andererseits ist

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2p+1}\frac{s}{z-e_i}$$

[1] Wiltheiss, Crelles Journal, Bd. 99, S. 246.

und

$$\frac{s}{z - e_i} = \pm z^p \left[1 + \frac{\varphi_1(e_i)}{z} + \frac{\varphi_2(e_i)}{z^2} + \dots \right];$$

also bestehen die Gleichungen

$$(8) \qquad \sum_{i=0}^{2p+1} \varphi_k(e_i) = 2(p + 1 - k)a_k. \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

Da nun

$$\varphi_k(z) = z\varphi_{k-1}(z) + a_k$$

ist, so erhalten wir, wenn wir hier $z = e_i$ setzen und über sämtliche Verzweigungspunkte summieren, mit Benutzung von (8) weiter:

$$(9) \qquad \sum_{i=0}^{2p+1} e_i \varphi_{k-1}(e_i) = - 2ka_k.$$

Diese Gleichungen sind, wie aus (4) zu ersehen ist, nichts anderes, als die Euler'schen Gleichungen für die homogenen Funktionen a_k und zeigen, dass diese in den Verzweigungspunkten von der Dimension k sind.

Sie können auch dazu dienen, um die Coeffizienten $a_1, a_2, \dots$ in übersichtlicher Weise wirklich darzustellen.

Ist nämlich σ_k die Summe der k^{ten} Potenzen der Wurzeln von $f(z) = 0$, also

$$\sigma_k = \sum_i e_i^k,$$

so ist offenbar nach (9)

$$\sigma_k + a_1\sigma_{k-1} + a_2\sigma_{k-2} + \dots + a_{k-1}\sigma_1 + 2ka_k = 0. \qquad (k=1,2,\dots)$$

Aus diesen Gleichungen kann man successive die $a_1, a_2, \dots$ berechnen und allgemein erhält man:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k . \underline{|k}} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 6 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \dots & 2k-2 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

Ich summiere jetzt in (5) über alle Verzweigungspunkte und benutze die Gleichungen (8). Dann kommt:

$$(10)\quad \sum_i \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -(p+1)a_0 z^{k-1} - pa_1 z^{k-2} - \dots - (p+2-k)a_{k-1}$$
$$= -\frac{d\varphi_k(z)}{dz} - (p-k+1)\varphi_{k-1}(z).$$

Hier ersetzen wir links $\frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i}$ nach (6) durch $-\frac{\varphi_k(z)-\varphi_k(e_i)}{2(z-e_i)}$ und haben

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial e_i} = -\frac{\varphi_k(z)}{s}\frac{ds}{dz} + \sum_i \frac{\varphi_k(e_i)}{2(z-e_i)},$$

also ergibt sich aus (10), wenn wir noch beide Seiten durch s dividieren und (7) heranziehen:

$$(11)\quad \sum_i \frac{\varphi_k(e_i)}{2s(z-e_i)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi_k(z)}{s}\right) - (p-k+1)\frac{\varphi_{k-1}(z)}{s}.$$
$$(k=1,2,\dots)$$

§ 3. *Die Hauptintegrale.*

Wir führen jetzt $2p+1$ Integrale ein:

$$(1)\quad \omega_n(x) = \int \frac{\varphi_{p+n}(z)}{s}dz \text{ für } n = -p, -(p-1), \dots, -1, 0, +1, \dots, p,$$

und nennen sie die hyperelliptischen *Hauptintegrale.*

Diese sind in der Fläche T' im Endlichen überall stetig; im Unendlichen zeigen sie ein sehr einfaches Verhalten. Es gilt nämlich der Satz:

In der Entwicklung eines jeden Hauptintegrals im Unendlichen nach Potenzen von z fehlen, bis auf eines, alle variablen Glieder bis zu der Potenz $\frac{1}{z^{p+1}}$.

Beweis. Es ist

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad s = \pm z^{p+1}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right),$$

also

$$\pm z^{n-1}s = \varphi_{p+n}(z) + \frac{a_{p+n+1}}{z} + \dots,$$

folglich

$$\frac{\varphi_{p+n}(z)}{s} = \pm z^{n-1} - \frac{1}{zs}(a_{p+n+1} + \dots).$$

Wir wollen jetzt durch das Symbol Σ_n eine Entwicklung von der Form

$$a + \frac{b}{z^n} + \frac{c}{z^{n+1}} + \dots$$

andeuten und eine solche kurz als »Σ_n-reihe» bezeichnen. Dann können wir also schreiben:

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \frac{\varphi_{p+n}(z)}{s} = \pm z^{n-1} + \Sigma_{p+2}$$

und durch Integration folgt hieraus, wenn n von null verschieden ist:

$$\text{(2)} \qquad \text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \omega_n = \pm \frac{z^n}{n} + \Sigma_{p+1};$$

ist aber $n = 0$, so hat man

$$\text{(2 a)} \qquad \text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \omega_0 = \pm \log z + \Sigma_{p+1}.$$

Die beiden letzten Formeln enthalten den oben ausgesprochenen Satz. Sie zeigen aber auch, dass die p Integrale mit negativem Index $\omega_{-p}, \dots, \omega_{-1}$ auch im Unendlichen stetig, also *Integrale erster Gattung,* die Integrale $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ dagegen *Integrale zweiter Gattung* sind, die nur im Unendlichen unstetig werden. Diese Integrale bilden zusammen ein vollständiges System von Integralen erster und zweiter Gattung.

Das Integral ω_0 endlich ist Integral dritter Gattung, wird aber in der weiteren Untersuchung keine Rolle spielen, da die Hauptintegrale stets mit ihrem Index multipliciert auftreten werden.

Auf dem ausgezeichneten Verhalten der Hauptintegrale im Unendlichen beruht die Leichtigkeit, mit der sich jedes Integral der Klasse bei gegebenen Unstetigkeiten durch Hauptintegrale darstellen lässt. Wir werden hiervon im nächsten Paragraphen Beispiele haben.

Über die Integrationsconstanten der Hauptintegrale verfügen wir in der Weise, dass die Summe der Werte, die die Integrale im Unendlichen auf beiden Blättern haben, null ist. Wir erreichen das, wenn wir den Anfangspunkt der Integration in den freien Verzweigungspunkt e_0 legen.

Die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale bezeichnen wir in folgender Weise: Es bedeute $\int_{\mathfrak{l}} du$ ein Integral über einen geschlossenen Weg $\mathfrak{l}$, wobei die eingeschlossene Fläche beim Integrieren zur Linken bleibt. Dann ist

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\text{an } a_\mu: \quad \overset{+}{\omega}_n - \overset{-}{\omega}_n = \int_{b_\mu} d\omega_n = \alpha_{n\mu}, \\ &\text{an } b_\mu: \quad \overset{+}{\omega}_n - \overset{-}{\omega}_n = -\int_{a_\mu} d\omega_n = \beta_{n\mu}. \end{aligned} \qquad \binom{n=-p\ldots+p}{\mu=1,2,\ldots,p}$$

Zwischen diesen Periodicitätsmoduln bestehen zwei Reihen bilinearer Relationen, die man als Riemann'sche und Weierstrass'sche Relationen bezeichnet. Wir entwickeln in diesem Paragraphen nur die ersteren — die Weierstrass'schen Relationen werden wir in § 5 finden — indem wir das Integral

$$I_{nl} = \int_{T'} \omega_l d\omega_n, \qquad (n, l = -p \ldots +p)$$

erstreckt über die Berandung der Fläche T', also über die Querschnitte in bekannter Weise doppelt ausführen. Es sollen dabei die Indices l und n beide von null verschieden sein. Ein erster Wert des Integrals ist

$$I_{nl} = \sum_{\mu=1}^{p} (\alpha_{l\mu}\beta_{n\mu} - \alpha_{n\mu}\beta_{l\mu}).$$

Durch Betrachtung der logarithmischen Unstetigkeiten des unbestimmt genommenen Integrals finden wir nun:

Die Summe I_{nl} ist nur dann von Null verschieden, wenn $l = -n$ ist. Dann ist $I_{nl} = \frac{4\pi i}{n}$.

Sei das Symbol $(nl) = 1$ *oder* 0, *je nachdem* $n = l$ *oder nicht,*[1] so kann man diesen Satz durch die Formel ausdrücken

$$\sum_{\mu}(\alpha_{-l\mu}\beta_{n\mu} - \alpha_{n\mu}\beta_{-l\mu}) = \frac{4\pi i}{n}(nl). \qquad (4) \qquad {\scriptstyle (n,l=-p\ldots+p)}$$

Wenden wir jetzt die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf die Hauptintegrale an, so haben wir zunächst den Satz:

Der Ausdruck $\frac{1}{\varphi_{p+n}(e_i)}\frac{\partial\omega_n}{\partial e_i}$ *hat für alle Hauptintegrale den nämlichen Wert und ist gleich dem Integral* $\int\frac{dz}{2s(z-e_i)} = \frac{\partial}{\partial e_i}\int\frac{dz}{s}$.

Wir bezeichnen dieses Integral in der Folge mit $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$, so dass also

$$\omega = \int\frac{dz}{s} = \omega_{-p}$$

ist und haben:

$$\frac{\partial\omega_n}{\partial e_i} = \varphi_{p+n}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i}. \qquad (5) \qquad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots,2p+1)}$$

Das Integral $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ habe die Periodicitätsmoduln

$$\text{an } a_\mu: \quad p_{i\mu} = \int_{b_\mu}\frac{dz}{2s(z-e_i)},$$

$$\text{an } b_\mu: \quad q_{i\mu} = -\int_{a_\mu}\frac{dz}{2s(z-e_i)},$$

dann haben wir

$$\frac{\partial\alpha_{n\mu}}{\partial e_i} = \varphi_{p+n}(e_i)p_{i\mu}, \qquad \frac{\partial\beta_{n\mu}}{\partial e_i} = \varphi_{p+n}(e_i)q_{i\mu}. \qquad (6)$$

---

[1] Herr CHRISTOFFEL gebraucht in gleicher Bedeutung das Symbol $\binom{n}{l}$. (Crelles Journal Bd. 68, p. 254.)

Weiter finden wir aus der letzten Formel in § 2 durch Integrieren, wenn wir noch $p+n+1$ an Stelle von k setzen:

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{2p+1}\varphi_{p+n+1}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i}=\sum_i\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial e_i}=-\frac{\varphi_{p+n+1}(z)}{s}+n\omega_n,\qquad (n=-p\ldots+p)$$

also auch

$$(8)\qquad \begin{aligned}\sum_i\varphi_{p+n+1}(e_i)p_{i\mu}&=\sum_i\frac{\partial\alpha_{n+1,\mu}}{\partial e_i}=n\alpha_{n\mu},\\ \sum_i\varphi_{p+n+1}(e_i)q_{i\mu}&=\sum_i\frac{\partial\beta_{n+1,\mu}}{\partial e_i}=n\beta_{n\mu}.\end{aligned}$$

Wir fügen hierzu noch die leicht zu beweisende Formel

$$(7')\qquad \sum_i\frac{\partial\omega}{\partial e_i}=-\frac{1}{s},$$

also

$$(8')\qquad \sum_i p_{i\mu}=0\quad\text{und}\quad\sum_i q_{i\mu}=0,$$

ersetzen ferner in (7) und (8) $\varphi_{p+n+1}(e_i)$ durch $e_i\varphi_{p+n}(e_i)+a_{p+n+1}$ und erhalten

$$(9)\qquad \sum_i e_i\varphi_{p+n}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i}=\sum_i e_i\frac{\partial\omega_n}{\partial e_i}=-\frac{z\varphi_{p+n}(z)}{s}+n\omega_n$$

und

$$(10)\qquad \begin{aligned}\sum_i e_i\varphi_{p+n}(e_i)p_{i\mu}&=\sum_i e_i\frac{\partial\alpha_{n\mu}}{\partial e_i}=n\alpha_{n\mu},\\ \sum_i e_i\varphi_{p+n}(e_i)q_{i\mu}&=\sum_i e_i\frac{\partial\beta_{n\mu}}{\partial e_i}=n\beta_{n\mu}.\end{aligned}\qquad \binom{n=-p\ldots+p}{\mu=1,2,\ldots,p}$$

Das sind die Euler'schen Gleichungen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale und sie zeigen, dass die $\alpha_{n\mu}$ und $\beta_{n\mu}$ homogene Funktionen der Verzweigungspunkte von der Dimension n sind.

Wir können hier an die Differentialgleichungen anknüpfen, die Herr Wiltheiss[1] für die Periodicitätsmoduln der Integrale 1. und 2. Gattung

[1] Wiltheiss, *Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunktionen.* Math. Ann. Bd. 31, S. 140 f.

gefunden hat. In den Gleichungen von Herrn WILTHEISS treten nicht, wie bei uns die Differentialquotienten der Periodicitätsmoduln nach den Wurzeln, sondern nach den Coeffizienten der ganzen Funktion $f(z) = s^2$ auf. Wir wollen daher auch diese Coeffizienten in unsere Gleichungen einführen und machen dazu folgenden Ansatz:

Es sei

$$f(z) = z^{2p+2} + c_1 z^{2p+1} + c_2 z^{2p} + \dots + c_{2p+2}.$$

Wir führen die Reihe von Funktionen ein

$$f_k(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \dots + c_k, \qquad (k=0,1,\dots,2p+2)$$

und gewinnen ganz entsprechend, wie bei der Betrachtung der Funktionen φ in § 2 die Sätze:

$$\frac{\partial c_k}{\partial e_i} = -f_{k-1}(e_i), \qquad \sum_i f_k(e_i) = (2p+2-k)c_k, \qquad \sum_i e_i f_{k-1}(e_i) = -kc_k.$$

Die linken Seiten der Gleichungen (8) werden jetzt bei Einführung der Coeffizienten c:

$$\sum_{i=0}^{2p+1}\sum_{m=1}^{2p+2} \frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial e_i} = -\sum_m \sum_i f_{m-1}(e_i)\frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m}$$

$$= -\sum_m (2p+3-m)c_{m-1}\frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m};$$

folglich haben wir

$$\text{(8 a)} \qquad \sum_{m=1}^{2p+2}(2p+3-m)c_{m-1}\frac{\partial a_{n+1,\mu}}{\partial c_m} = -na_{n\mu}.$$

Ebenso formen wir die linken Seiten der Gleichungen (10) um in:

$$\sum_{i=0}^{2p+1}\sum_{m=1}^{2p+2} e_i \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial e_i} = -\sum_m \sum_i e_i f_{m-1}(e_i)\frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m} = \sum_m mc_m \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m}$$

und haben also

$$\text{(10 a)} \qquad \sum_{m=1}^{2p+2} mc_m \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial c_m} = na_{n\mu}.$$

Die Ähnlichkeit dieser Differentialgleichungen (8 a) und (10 a) mit denen des Herrn Wiltheiss ist augenfällig. Die Unterschiede rühren daher, dass Herr Wiltheiss die Klein'sche Form der Integrale 1. und 2. Gattung zu Grunde legt und die Coeffizienten von $f(z)$ in etwas anderer Weise, wie wir, bezeichnet.

Aus $\dfrac{\partial\omega}{\partial e_i} = \displaystyle\int \frac{dz}{2s(z-e_i)}$ folgt durch Differentiation nach einem *von* e_i *verschiedenen* Verzweigungspunkt e_k:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial e_i \partial e_k} = \int \frac{dz}{4s(z-e_i)(z-e_k)} = \frac{1}{2(e_i - e_k)}\left[\int \frac{dz}{2s(z-e_i)} - \int \frac{dz}{2s(z-e_k)}\right]$$

oder

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial e_i \partial e_k} = \frac{1}{2(e_i - e_k)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{\partial\omega}{\partial e_k}\right) \tag{11}$$

und wenn wir zu den Periodicitätsmoduln übergehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{i\mu}}{\partial e_k} &= \frac{\partial p_{k\mu}}{\partial e_i} = \frac{p_{i\mu} - p_{k\mu}}{2(e_i - e_k)}, \\ \frac{\partial q_{i\mu}}{\partial e_k} &= \frac{\partial q_{k\mu}}{\partial e_i} = \frac{q_{i\mu} - q_{k\mu}}{2(e_i - e_k)}. \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (i, k = 0, 1, \ldots, 2p+1) \\ (\mu = 1, 2, \ldots, p) \end{matrix} \quad (i \gtrless k) \tag{12}$$

Für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale setzen sich diese Gleichungen um in partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, in denen immer nur zwei Verzweigungspunkte vorkommen. Wir erhalten nach (6), wenn wir noch aus § 2 Gleichung (6) zuziehen, diese Differentialgleichungen in der Form:

$$2(e_i - e_k)\varphi_{p+n}(e_i)\varphi_{p+n}(e_k)\frac{\partial^2 a_{n\mu}}{\partial e_i \partial e_k} = \varphi_{p+n}(e_k)^2 \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial e_i} - \varphi_{p+n}(e_i)^2 \frac{\partial a_{n\mu}}{\partial e_k}.$$

§ 4. *Die Integrale $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ und das Integral dritter Gattung.*

Wir haben gesehen, dass sich die Derivierten der Hauptintegrale nach den Verzweigungspunkten in einfachster Weise durch die Derivierten

$\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ des einen Integrals $\omega = \int \frac{dz}{s}$ ausdrücken, welche selbst wieder Integrale der Klasse sind, indem

$$\frac{\partial \omega}{\partial e_i} = \int \frac{dz}{2s(z - e_i)}.$$

Da diese Integrale nur algebraisch unstetig werden, müssen sie sich linear durch die Hauptintegrale 1. und 2. Gattung darstellen lassen. Wir können diese Darstellung finden, wenn wir die Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen in Verbindung mit (7') nach den $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ auflösen, doch müssten wir zur Ermittlung der dabei auftretenden Determinanten noch einige Eigenschaften der Funktionen φ entwickeln. Wir ziehen es daher vor, die Darstellung direkt aus der Betrachtung der Unstetigkeiten der Integrale $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ herzuleiten mit Hülfe eines Verfahrens, das in ähnlicher Weise bei jedem Integral der Klasse angewandt werden kann.

Das Integral $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ wird nur im Verzweigungspunkt e_i unstetig, und zwar wie $-\frac{1}{s}$, sodass

$$\text{in } e_i: \quad \frac{\partial \omega}{\partial e_i} = -\frac{1}{\sqrt{f'(e_i)}\sqrt{z - e_i}} + \text{fct. cont.}$$

Die gleiche Unstetigkeit und sonst keine im Endlichen zeigt die Funktion der Klasse:

$$-\frac{s}{f'(e_i)(z - e_i)},$$

also ist

$$V = \frac{\partial \omega}{\partial e_i} + \frac{s}{f'(e_i)(z - e_i)}$$

ein Integral der Klasse, das im Endlichen überall stetig ist.

Wir entwickeln V im Unendlichen nach Potenzen von z bis zur Potenz $\frac{1}{z^{p+1}}$, also bis auf eine Σ_{p+1}-reihe.

Wie man sieht, wird $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ im Unendlichen 0^{p+1} (von einer Constanten können wir absehen, da wir sie zu der Σ_{p+1}-reihe nehmen können), also liefert $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ keinen Beitrag zu der beabsichtigten Entwicklung von V. Wir haben daher

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \quad V = \frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} + \Sigma_{p+1}$$

$$= \pm \frac{1}{f'(e_i)}\left[z^p + \varphi_1(e_i)z^{p-1} + \varphi_2(e_i)z^{p-2} + \ldots + \frac{\varphi_{2p}(e_i)}{z^p}\right] + \Sigma_{p+1}.$$

Nun haben wir aber im vorigen Paragraphen gesehen, dass

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad \pm z^n = n\omega_n + \Sigma_{p+1}$$

ist, also ist auch

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad V = \frac{1}{f'(e_i)} \sum_{n=-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\omega_n(x) + \Sigma_{p+1}.$$

Die Differenz

$$\Delta = V - \frac{1}{f'(e_i)} \sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\omega_n(x)$$

ist überall stetig, also entweder Integral 1. Gattung oder constant. Nun ist aber Δ im Unendlichen eine Σ_{p+1}-reihe, andererseits ist, infolge der Formeln (2) des vorigen Paragraphen, *kein Integral der Klasse im Unendlichen eine reine* Σ_{p+1}-*reihe,* folglich muss Δ constant sein. Ich nehme es als Integrationsconstante zu V und habe

$$(1) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial e_i} = -\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} + \frac{1}{f'(e_i)} \sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\omega_n(x). \qquad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots,2p+1)}$$

Die Periodicitätsmoduln von $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ ergeben sich daraus in der Form:

$$(2) \qquad \begin{aligned} p_{i\mu} &= \frac{1}{f'(e_i)} \sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\alpha_{n\mu}, \\ q_{i\mu} &= \frac{1}{f'(e_i)} \sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(e_i)\,\beta_{n\mu}. \end{aligned} \qquad \binom{i=0,1,\ldots,2p+1}{\mu=1,2,\ldots,p}$$

Fügen wir zu den Hauptintegralen noch das Integral[1]

(3)
$$r(x\,,\,\xi) = \int \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{dz}{2s},$$

so haben wir alle Integrale, die zur Darstellung eines beliebigen Integrals der Klasse nötig sind.

Das Integral $r(x\,,\,\xi)$ besitzt als Funktion von z nur logarithmische Unstetigkeiten, hat also den Charakter eines Integrals 3. Gattung, und zwar ist

$$\text{in } \xi: \qquad r = \log(z-\zeta) + \text{fct. cont.}$$

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix}: \qquad r = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{z}\right) + \text{fct. cont.}$$

Die Periodicitätsmoduln von r an den Querschnitten seien:

(4)
$$\begin{aligned} &\text{an } a_\mu: && A_\mu(\xi) = \int\limits_{b_\mu} \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{dz}{2s}, \\ &\text{an } b_\mu: && B_\mu(\xi) = -\int\limits_{a_\mu} \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{dz}{2s}. \end{aligned} \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

Ausserdem besitzt r constante (d. h. von ξ unabhängige) Periodicitätsmoduln an Schnitten, die von einem beliebigen Punkt nach den logarithmischen Unstetigkeiten führen.

Die Derivierten des Integrals $r(x\,,\,\xi)$ nach den Verzweigungspunkten drücken sich in sehr einfacher Weise durch die Integrale $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ aus. Man findet nämlich leicht, wenn man in (3) unter dem Integralzeichen differentiiert:

(5)
$$\frac{\partial r(x\,,\,\xi)}{\partial e_i} = -\frac{\sigma}{2(\zeta - e_i)}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i} \qquad (i=0,1,\ldots,2p+1)$$

---

[1] Dies Integral ist ein bekannter Spezialfall der von Herrn Christoffel in die Lehre von den Abel'schen Integralen eingeführten Funktion R. (Annali di Mat., t. 10, p. 97.) Es ist identisch mit dem Integral $\int H(x'y', xy)dx$ von Herrn Weierstrass.

und daraus weiter durch Übergang zu den Periodicitätsmoduln:

$$\frac{\partial A_\mu(\xi)}{\partial e_i} = -\frac{\sigma}{2(\zeta - e_i)} p_{i\mu}, \qquad \frac{\partial B_\mu(\xi)}{\partial e_i} = -\frac{\sigma}{2(\zeta - e_i)} q_{i\mu}. \tag{6}$$

Die Derivierte des Integrals $r(x, \xi)$ nach dem Parameter ζ liefert das Integral 2. Gattung, das nur in einem Punkt im Endlichen zur ersten Ordnung unendlich wird, nämlich:

$$\begin{aligned} t(x, \xi) &= -\frac{\partial r(x, \xi)}{\partial \zeta} \\ &= -\int \frac{s + \sigma + (z - \zeta)\sigma'}{2s(z - \zeta)^2} dz, \qquad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{d\zeta}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Wir wollen es durch die Hauptintegrale darstellen.

$t(x, \xi)$ wird als Funktion von z nur in ξ unstetig, und zwar wie $\frac{1}{z - \zeta}$. Die gleiche Unstetigkeit und keine andere im Endlichen zeigt die Funktion der Klasse:

$$\frac{s + \sigma}{z - \zeta} \frac{1}{2\sigma},$$

also ist die Differenz

$$V = t(x, \xi) - \frac{s + \sigma}{z - \zeta} \frac{1}{2\sigma}$$

Integral der Klasse und im Endlichen stetig.

Entwickeln wir wieder V im Unendlichen nach Potenzen von z bis auf eine Σ_{p+1}-reihe, so ist zunächst

$$t(x, \xi) = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{(z - \zeta)^2} + \frac{\sigma}{s(z - \zeta)^2} + \frac{\sigma'}{s(z - \zeta)} \right] dz.$$

Das zweite und dritte Glied unter dem Integralzeichen liefern zu $t(x, \xi)$ Beiträge, die im Unendlichen zu höherer, als der p^{ten} Ordnung null werden, also können wir ansetzen:

$$\text{in } \begin{matrix} \infty_1 \\ \infty_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} t(x, \xi) &= -\int \frac{dz}{2(z - \zeta)^2} + \Sigma_{p+1} \\ &= \frac{1}{2(z - \zeta)} + \Sigma_{p+1}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{1}{2\sigma} = \frac{1}{2(z-\zeta)} + \frac{s}{2\sigma(z-\zeta)},$$

also

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix} \qquad V = -\frac{s}{2\sigma(z-\zeta)} + \Sigma_{p+1}$$

$$= \mp\frac{1}{2\sigma}\left[z^p + \varphi_1(\zeta)z^{p-1} + \varphi_2(\zeta)z^{p-2} + \ldots + \frac{\varphi_{2p}(\zeta)}{z^p}\right] + \Sigma_{p+1}.$$

Wir finden jetzt genau, wie oben bei den Integralen $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$:

$$(8) \qquad t(x\,,\,\xi) = \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{1}{2\sigma} - \frac{1}{2\sigma}\sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(\zeta)\,\omega_n(x).$$

Aus dieser Formel erhalte ich durch Differentiation nach z:

$$(9) \quad \frac{d}{d\zeta}\frac{s+\sigma}{(z-\zeta)2s} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}\nu\,\frac{\varphi_{p+\nu}(\zeta)}{\sigma}\frac{\varphi_{p-\nu}(z)}{s} = \frac{d}{dz}\frac{s+\sigma}{(\zeta-z)2\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}\nu\,\frac{\varphi_{p+\nu}(z)}{s}\frac{\varphi_{p-\nu}(\zeta)}{\sigma}$$

oder nach leichter Rechnung

$$\sum_{-p}^{+p} n\varphi_{p-n}(\zeta)\varphi_{p+n}(z) = \frac{f'(z)+f'(\zeta)}{2(z-\zeta)} - \frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}.$$

Wie man sieht, entspricht die Gleichung (9) der in der Einleitung erwähnten Weierstrass'schen Hauptgleichung (1) und sie zeigt, dass die Hauptintegrale, bis auf constante Faktoren, ein System zusammengehöriger Fundamentalintegrale im Sinn von Herrn Weierstrass bilden. Natürlich kann man verlangen, diese Gleichung auch ohne Benutzung der Integrale lediglich mit Hülfe der Funktionen φ abzuleiten und dies gelingt auch in der That ohne grosse Mühe. Man kann dann umgekehrt von hier aus zu den Integralen $t(x\,,\,\xi)$ und $\frac{\partial\omega}{\partial e_i}$ gelangen, wobei man mit Vorteil von den Gleichungen

$$\frac{\partial\omega}{\partial e_i} = -\frac{2}{f'(e_i)}\lim_{\zeta=e_i}\sigma t(x\,,\,\xi),$$

$$t(x\,,\,\xi) = \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\frac{1}{2s} - \sum_i \frac{\sigma}{2(\zeta-e_i)}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i}$$

Gebrauch machen kann.

Multipliciere ich Gleichung (8) mit $-d\zeta$ und integriere, so kommt:

$$(10)\qquad r(x\,,\,\xi) = r(\xi\,,\,x) + \frac{1}{2}\sum_{-p}^{+p} n\omega_{-n}(\xi)\,\omega_n(x).$$

Bilde ich also die Funktion

$$(11)\qquad \Pi(x\,,\,\xi) = r(x\,,\,\xi) + \frac{1}{2}\sum_{1}^{p} \nu\omega_\nu(\xi)\,\omega_{-\nu}(x),$$

so ist

$$(12)\qquad \Pi(x\,,\,\xi) = \Pi(\xi\,,\,x).$$

Diese Funktion Π unterscheidet sich, als Funktion von z, von $r(x\,,\,\xi)$ nur durch ein Integral 1. Gattung, hat also genau dieselben Unstetigkeiten, wie $r(x\,,\,\xi)$. Wir können sie, nach einer von Herrn Klein eingeführten Terminologie, als das *algebraisch normierte Integral* 3. *Gattung* bezeichnen.

Man kann, nach dem Vorgang von Herrn Klein, dieses Normalintegral in Form eines Doppelintegrals schreiben, wodurch die Eigenschaft (12) der Vertauschbarkeit von Parameter und Argument in Evidenz tritt. Es wird nämlich

$$(13)\qquad \Pi(x\,,\,\xi) = \iint \frac{s\sigma + F(z\,,\,\zeta)}{2(z-\zeta)^2 s\sigma}\,dz\,d\zeta,$$

und darin ist nach (9):

$$(14)\qquad F(z\,,\,\zeta) = f(z) - \frac{1}{2}f'(z)(z-\zeta) + (z-\zeta)^2\sum_{\nu=1}^{p}\nu\varphi_{p+\nu}(z)\varphi_{p-\nu}(\zeta).$$

Diese Funktion $F(z\,,\,\zeta)$ muss, wie schon in der Einleitung erwähnt und durch Gleichung (9) bestätigt wird, in z und ζ symmetrisch sein. Durch eine eingehendere Untersuchung der Formel (14), die wir hier übergehen können, kann man diese Symmetrie auch äusserlich zum Ausdruck bringen, nämlich durch die Gleichung:

$$(14\text{a})\qquad F(z\,,\,\zeta) = \frac{f(z) - \varphi_{p+1}(z)^2}{2} + \frac{f(\zeta) - \varphi_{p+1}(\zeta)^2}{2}$$
$$+ \varphi_{p+1}(z)\varphi_{p+1}(\zeta) + (z-\zeta)[\chi(z) - \chi(\zeta)],$$

worin

$$\chi(z) = a_{p+2}\varphi_{p-1}(z) + 2a_{p+3}\varphi_{p-2}(z) + 3a_{p+4}\varphi_{p-3}(z) + \cdots + pa_{2p+1}.$$

Wie man sieht, ist der von dem letzten Glied in (14 a) herrührende Teil von $\Pi(x, \xi)$ als Funktion von z wie auch von ζ Integral 1. Gattung. Lasse ich ihn daher fort, so ist auch das mit Hülfe der Funktion

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{f(z) - \varphi_{p+1}(z)^2}{2} + \frac{f(\zeta) - \varphi_{p+1}(\zeta)^2}{2} + \varphi_{p+1}(z)\varphi_{p+1}(\zeta)$$

gebildete Integral

$$\iint \frac{s\sigma + \Phi(z, \zeta)}{2(z - \zeta)^2 s\sigma} dz d\zeta$$

ein algebraisch normiertes Integral 3. Gattung.

§ 5. *Die Periodicitätsmoduln von* $r(x, \xi)$.

Die Formel (10) im letzten Paragraphen liefert auch eine Darstellung der Periodicitätsmoduln $A_\mu(\xi)$ und $B_\mu(\xi)$ von $r(x, \xi)$ durch die Hauptintegrale. Es besitzt nämlich das dort rechts stehende Integral $r(\xi, x)$ als Funktion von z keine Periodicitätsmoduln an den Querschnitten, sodass wir erhalten

$$(1)\quad \begin{aligned} A_\mu(\xi) &= \frac{1}{2}\sum_{-p}^{+p} n\alpha_{n\mu}\,\omega_{-n}(\xi), \\ B_\mu(\xi) &= \frac{1}{2}\sum_{-p}^{+p} n\beta_{n\mu}\,\omega_{-n}(\xi). \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Wir entnehmen daraus zunächst den Satz:

Die Periodicitätsmoduln der Funktion $r(x, \xi)$, also die Querschnittintegrale (4) *im vorigen Paragraphen, sind als Funktionen des Parameters ζ Integrale der Klasse, die nur im Unendlichen und zwar zur Ordnung p unstetig werden.*

Diese Integrale A_μ und B_μ zeichnen sich durch besonders einfache

Eigenschaften hinsichtlich ihrer Periodicitätsmoduln aus, die wir jetzt ableiten wollen.[1]

Wir multiplicieren von den Gleichungen (1) die erste mit $\beta_{l\mu}$, die zweite mit $\alpha_{l\mu}$, subtrahieren die erste von der zweiten und summieren über alle μ von 1 bis p. Dann erhalten wir

$$\sum_{\mu}(\alpha_{l\mu}B_{\mu}(\xi) - \beta_{l\mu}A_{\mu}(\xi)) = \frac{1}{2}\sum_{n=-p}^{+p} n\omega_{-n}(\xi)\sum_{\mu}(\alpha_{l\mu}\beta_{n\mu} - \alpha_{n\mu}\beta_{l\mu}).$$

Nun haben wir in § 3 gesehen, dass die Summe nach μ auf der rechten Seite nur für $n = -l$ von null verschieden ist, und dass ihr Wert in diesem Falle gleich $-\frac{4\pi i}{l}$ ist, also haben wir

$$(2) \qquad \sum_{\mu}(\alpha_{l\mu}B_{\mu}(\xi) - \beta_{l\mu}A_{\mu}(\xi)) = 2\pi i\omega_l(\xi), \qquad \begin{matrix}(l=-p\ldots+p)\\(l\neq 0)\end{matrix}$$

als Darstellung der Hauptintegrale durch die Integrale A_{μ} und B_{μ}.

Andererseits können wir die Hauptintegrale durch Auflösung der $2p$ Gleichungen (1) finden. Wir führen zu diesem Ende die aus sämtlichen Periodicitätsmoduln sämtlicher Hauptintegrale gebildete Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades ein:

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_{-p1} & \alpha_{-p2} & \cdots & \alpha_{-pp} & \beta_{-p1} & \beta_{-p2} & \cdots & \beta_{-pp} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{-11} & \alpha_{-12} & \cdots & \alpha_{-1p} & \beta_{-11} & \beta_{-12} & \cdots & \beta_{-1p} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \beta_{p2} & \cdots & \beta_{pp} \end{vmatrix}.$$

Ihre ersten Unterdeterminanten sind

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\mu}}, \frac{\partial D}{\partial \beta_{n\mu}} \qquad \begin{matrix}(n=-p\ldots+p)\\(\mu=1,2,\ldots,p)\end{matrix}$$

[1] Eine Herleitung dieser Eigenschaften auf ganz anderem Wege findet sich schon in der Dissertation von PAULS, *Über die Beziehung des Riemann'schen Integrals 2. Gattung zu den Periodicitätsmoduln der Funktion* $R(O \mid \varepsilon)$. Strassburg 1882. Die Funktionen $\mathfrak{A}_{\mu}(O)$ und $\mathfrak{B}_{\mu}(O)$ von Herrn PAULS sind identisch mit unseren $-A_{\mu}(x)$, $-B_{\mu}(x)$.

also gibt die Auflösung der Gleichungen (1) nach den Hauptintegralen:

$$n\omega_{-n}(\xi) = 2\sum_{\mu}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\mu}}A_{\mu}(\xi) + \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \beta_{n\mu}}B_{\mu}(\xi)\right);$$

vergleichen wir dies mit (2), indem wir dort $l = -n$ setzen, so erhalten wir

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\mu}} = -\frac{n}{4\pi i}D\beta_{-n\mu}, \qquad \frac{\partial D}{\partial \beta_{n\mu}} = \frac{n}{4\pi i}D\alpha_{-n\mu}. \tag{4}$$

Nun bestehen nach einem Fundamentalsatz der Lehre von den Determinanten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\sum_{n}\alpha_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \beta_{n\nu}} = 0,\\
&\sum_{n}\beta_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\nu}} = 0,\\
&\sum_{n}\alpha_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n\nu}} = (\mu\nu)D,\\
&\sum_{n}\beta_{n\mu}\frac{\partial D}{\partial \beta_{n\nu}} = (\mu\nu)D,
\end{aligned}
\qquad \begin{matrix}(n=-p\ldots+p)\\ (\mu,\nu=1,2,\ldots,p)\end{matrix} \tag{5}$$

worin $(\mu\nu)$ das schon in § 3 gebrauchte Symbol bedeutet. In diese Gleichungen setzen wir die in (4) gefundenen Werte der Unterdeterminanten von D ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{n} n\alpha_{n\mu}\alpha_{-n\nu} = 0,\\
&\sum_{n} n\beta_{n\mu}\beta_{-n\nu} = 0,\\
&\sum_{n} n\alpha_{n\mu}\beta_{-n\nu} = -4\pi i(\mu\nu).
\end{aligned}
\qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,p) \tag{6}$$

Die vierte Gleichung liefert dasselbe, wie die dritte.

Dies ist die, schon in § 3 erwähnte, zweite Reihe bilinearer Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale. Man nennt sie die *Weierstrass'schen Relationen.*

Nun sehen wir aber aus (1) sofort, dass wir in den linken Seiten der Weierstrass'schen Relationen die doppelten Periodicitätsmoduln der

Integrale $A_\mu(\xi)$ und $B_\mu(\xi)$ vor uns haben. Wir ersehen daraus, dass diese Integrale das einfachste überhaupt mögliche Verhalten an den Querschnitten zeigen, indem *jedes nur einen einzigen von null verschiedenen Periodicitätsmodul* und zwar an dem Querschnitt besitzt, der in der Darstellung durch Querschnittintegrale (§ 4 (4)) als Integrationsweg dient. Wir bringen dies Verhalten übersichtlich in folgender Tabelle zum Ausdruck:

	a_1	a_2	$\dots$	a_p	b_1	b_2	$\dots$	b_p
A_1	0	0	$\dots$	0	$-2\pi i$	0	$\dots$	0
A_2	0	0	$\dots$	0	0	$-2\pi i$	$\dots$	0
.	.	.	$\dots$	.	.	.	$\dots$	.
A_p	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$-2\pi i$
B_1	$2\pi i$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
B_2	0	$2\pi i$	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
.	.	.	$\dots$	.	.	.	$\dots$	.
B_p	0	0	$\dots$	$2\pi i$	0	0	$\dots$	0

Die Gleichungen (4) für die Unterdeterminanten von D setzen uns in Stand, die Determinante D selber zu bestimmen.[1]

Bilden wir nämlich aus einer Reihe Unterdeterminanten die Determinante p^{ten} Grades:

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial \beta_{11}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{12}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{1p}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial D}{\partial \beta_{p1}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{p2}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{pp}} \end{vmatrix},$$

so haben wir erstens nach (4):

$$D' = \frac{\underline{|p}}{(4\pi i)^p} D^p \Delta,$$

[1] Vgl. hierzu die ganz analoge Untersuchung bei KRAZER und PRYM, *Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen.* S. 63 f.

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{-11} & \alpha_{-12} & \dots & \alpha_{-1p} \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{-p1} & \alpha_{-p2} & \dots & \alpha_{-pp} \end{vmatrix}$$

ist, eine Determinante, die uns im nächsten Paragraphen wieder begegnen wird. Ihr Wert ist bekanntlich stets von null verschieden.

Einen zweiten Wert von D' finden wir, wenn wir in bekannter Weise diese Determinante zu einer Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades erweitern, sodass wir erhalten:

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha_{11}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \alpha_{1p}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{11}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{1p}} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha_{p1}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \alpha_{pp}} & \frac{\partial D}{\partial \beta_{p1}} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \beta_{pp}} \end{vmatrix}.$$

Multiplicieren wir diese Determinante mit der Determinante D, so erhalten wir mit Benutzung der Gleichungen (5):

$$DD' = \begin{vmatrix} \alpha_{-p1} & \dots & \alpha_{-pp} & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ \alpha_{-11} & \dots & \alpha_{-1p} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} & D & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pp} & 0 & \dots & D \end{vmatrix}$$

$$= D^p \begin{vmatrix} \alpha_{-p1} & \dots & \alpha_{-pp} \\ . & \dots & . \\ \alpha_{-11} & \dots & \alpha_{-1p} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} D^p \Delta.$$

Vergleichen wir dies mit dem eben erhaltenen Wert von D', so folgt

$$(7)\qquad D = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \frac{(4\pi i)^p}{\underline{|p}}.$$

Als wichtigstes Ergebnis folgt hieraus, dass die Determinante D von den Verzweigungspunkten unabhängig ist. Für $p = 1$ haben wir die Legendre'sche Relation.

Die entsprechende Determinante für die Periodicitätsmoduln anderer Fundamentalintegrale ist öfters Gegenstand der Untersuchung gewesen,[1] zuletzt von Herrn VAHLEN in Crelles Journal, Bd. 114, S. 47, doch scheint die hier gegebene Ableitung neu zu sein.

Wir wollen schliesslich für die Integrale $A_\mu(x)$ und $B_\mu(x)$ einen Satz ableiten, an den sich eine allgemeinere Betrachtung anschliessen wird, die uns im folgenden Paragraphen von Nutzen sein wird.

Aus den Darstellungen (1) von A_μ und B_μ sehen wir, dass wir diese Integrale in der Form ansetzen können:

$$(8)\qquad A_\mu(x) = \int \frac{P_\mu(z)}{s}\,dz, \qquad B_\mu(x) = \int \frac{Q_\mu(z)}{s}\,dz,$$

worin die $P_\mu(z)$, $Q_\mu(z)$ ganze Funktionen von z vom Grade $2p$ sind. Aus denselben Formeln in Verbindung mit den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen folgt:

$$P_\mu(e_i) = \lim_{z=e_i} s\frac{dA_\mu(x)}{dz} = \frac{1}{2} f'(e_i) p_{i\mu},$$

$$Q_\mu(e_i) = \lim_{z=e_i} s\frac{dB_\mu(x)}{dz} = \frac{1}{2} f'(e_i) q_{i\mu}.$$

Nun haben wir aber nach (6) im vorigen Paragraphen:

$$p_{i\mu} = -\frac{2(z-e_i)}{s}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial e_i}, \qquad q_{i\mu} = -\frac{2(z-e_i)}{s}\frac{\partial B_\mu(x)}{\partial e_i},$$

also ist

$$\frac{1}{P_\mu(e_i)}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial e_i} = \frac{1}{Q_\mu(e_i)}\frac{\partial B_\mu(x)}{\partial e_i} = -\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

---

[1] Vgl. FUCHS, Crelles Journ. Bd. 71, S. 128 ff. KÖNIGSBERGER, *Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale,* S. 70—78. WINCKLER, Wiener Sitzungsber. Bd. 62, S. 115.

und wenn wir nach z differentiieren:

$$(9)\qquad \frac{1}{P_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{P_\mu(z)}{s}\right) = \frac{1}{Q_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{Q_\mu(z)}{s}\right) = -\frac{1}{f'(e_i)}\frac{d}{dz}\frac{s}{z-e_i}. \quad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

Wir erkennen also, dass für die $2p$ ganzen Funktionen $P_\mu(z)$ und $Q_\mu(z)$ derselbe Satz gilt, wie für die Funktionen $\varphi_k(z)$, *dass nämlich die Ausdrücke* $\frac{1}{P_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{P_\mu(z)}{s}\right)$ *und* $\frac{1}{Q_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{Q_\mu(z)}{s}\right)$ *für alle Funktionen* P_μ *und* Q_μ *denselben Wert haben.*

Wir wollen jetzt, wenn $\psi(z)$ irgend eine ganze Funktion von z ist, die auch von den Verzweigungspunkten abhängt, den Ausdruck $\frac{1}{\psi(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi(z)}{s}\right)$ durch das Symbol

$$(10)\qquad \Delta_i(\psi) = \frac{1}{\psi(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi(z)}{s}\right)$$

bezeichnen und fragen, welche Bedingungen eine Schar von ganzen Funktionen $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ erfüllen muss, damit

$$\Delta_i(\psi_0) = \Delta_i(\psi_1) = \ldots = \Delta_i(\psi_n) = \tau_i$$

ist.

Wir können jede ganze Funktion linear aus den Funktionen $\varphi_k(z)$ zusammensetzen, sodass wir ansetzen können:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= a_{00}\varphi_0 + a_{01}\varphi_1 + \ldots + a_{0k}\varphi_k,\\
\psi_1 &= a_{10}\varphi_0 + a_{11}\varphi_1 + \ldots + a_{1k}\varphi_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi_n &= a_{n0}\varphi_0 + a_{n1}\varphi_1 + \ldots + a_{nk}\varphi_k,
\end{aligned}$$

wenn k der höchste unter den Funktionen ψ vorkommende Grad ist.

Bilden wir jetzt das Symbol Δ_i, so ist

$$\Delta_i(\varphi_0) = \Delta_i(\varphi_1) = \ldots = \Delta_i(\varphi_k) = \frac{1}{2s(z-e_i)} = \theta_i,$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta_i(\psi_0) &= \theta_i + \frac{1}{\psi_0(e_i)}\left[\frac{\partial a_{00}}{\partial e_i}\frac{\varphi_0}{s} + \frac{\partial a_{01}}{\partial e_i}\frac{\varphi_1}{s} + \ldots + \frac{\partial a_{0k}}{\partial e_i}\frac{\varphi_k}{s}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_i(\psi_n) &= \theta_i + \frac{1}{\psi_n(e_i)}\left[\frac{\partial a_{n0}}{\partial e_i}\frac{\varphi_0}{s} + \frac{\partial a_{n1}}{\partial e_i}\frac{\varphi_1}{s} + \ldots + \frac{\partial a_{nk}}{\partial e_i}\frac{\varphi_k}{s}\right].
\end{aligned}$$

Soll nun für jedes z

$$\Delta_i(\psi_0) = \Delta_i(\psi_1) = \ldots = \Delta_i(\psi_n) = \tau_i$$

sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(11)\quad \begin{array}{l} \frac{1}{\psi_0(e_i)}\frac{\partial a_{00}}{\partial e_i} = \frac{1}{\psi_1(e_i)}\frac{\partial a_{10}}{\partial e_i} = \ldots = \frac{1}{\psi_n(e_i)}\frac{\partial a_{n0}}{\partial e_i} = c_0^{(i)}, \\ \frac{1}{\psi_0(e_i)}\frac{\partial a_{01}}{\partial e_i} = \frac{1}{\psi_1(e_i)}\frac{\partial a_{11}}{\partial e_i} = \ldots = \frac{1}{\psi_n(e_i)}\frac{\partial a_{n1}}{\partial e_i} = c_1^{(i)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{\psi_0(e_i)}\frac{\partial a_{0k}}{\partial e_i} = \frac{1}{\psi_1(e_i)}\frac{\partial a_{1k}}{\partial e_i} = \ldots = \frac{1}{\psi_n(e_i)}\frac{\partial a_{nk}}{\partial e_i} = c_k^{(i)}, \end{array} \quad (i=0,1,\ldots,2p+1)$$

und es ist

$$(12)\qquad \tau_i = \theta_i + c_0^{(i)}\frac{\varphi_0}{s} + c_1^{(i)}\frac{\varphi_1}{s} + \ldots + c_k^{(i)}\frac{\varphi_k}{s}.$$

Wir können dies in dem Satz zusammenfassen:

Damit für ein System von ganzen Funktionen $\psi_0, \ldots, \psi_n$, die sich in der angegebenen Weise durch die φ ausdrücken, $\Delta_i(\psi_0) = \Delta_i(\psi_1) = \ldots = \Delta_i(\psi_n)$ ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\frac{1}{\psi_\mu(e_i)}\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial e_i} = c_\lambda^{(i)}$$

vom Index μ unabhängig ist.

Diese Schlüsse bleiben unverändert, wenn wir statt der Darstellung der ψ durch die Funktionen φ eine solche durch irgend eine andere Funktionenreihe χ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ansetzen, für die $\Delta_i(\chi_k)$ bei jedem Wert des Index k denselben Wert hat. Wir haben somit den allgemeineren Satz:

Sind $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ und $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ zwei Reihen ganzer Funktionen von z, für die

$$\Delta_i(\psi_1) = \Delta_i(\psi_2) = \Delta_i(\psi_3) = \ldots = \tau_i,$$

$$\Delta_i(\chi_1) = \Delta_i(\chi_2) = \Delta_i(\chi_3) = \ldots = \theta_i,$$

und lassen sich die Funktionen der einen Reihe linear durch die der andern darstellen, so dass

$$\chi_\mu = \sum_\lambda c_{\mu\lambda} \psi_\lambda,$$

so ist

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\chi_\mu(e_i)} \frac{\partial c_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$$

vom Index μ unabhängig und

$$\theta_i = \tau_i + \sum_\lambda c_\lambda^{(i)} \frac{\psi_\lambda}{s}.$$

Liegt im Besonderen, wie dies im nächsten Paragraphen der Fall sein wird, eine Darstellung der ψ durch die Funktionen $P_\mu(z)$ und $Q_\mu(z)$ vor, so dass

$$\psi_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{p} A_{\mu\lambda} P_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\mu\lambda} Q_\lambda,$$

so müssen

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\psi_\mu(e_i)} \frac{\partial A_{\mu\lambda}}{\partial e_i} \quad \text{und} \quad d_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\psi_\mu(e_i)} \frac{\partial B_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$$

vom Index μ unabhängig sein und es ist

$$(13) \qquad \Delta_i(\psi_\mu) = \tau_i = \theta_i + \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda^{(i)} \frac{P_\lambda}{s} + \sum_{\lambda=1}^{p} d_\lambda^{(i)} \frac{Q_\lambda}{s},$$

wo aber jetzt

$$\theta_i = -\frac{1}{f'(e_i)} \frac{d}{dz} \frac{s}{z - e_i}$$

zu setzen ist.

ZWEITER TEIL.

Die Normalintegrale erster und zweiter Gattung und ihre Derivierten nach den Verzweigungspunkten.

§ 6. *Die Normalintegrale erster Gattung.*

Das Normalintegral erster Gattung $u_\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ wird bekanntlich definiert durch die Bedingung, am Querschnitt a_μ den Periodicitätsmodul πi zu haben, an allen übrigen Querschnitten erster Art aber stetig zu sein. Bezeichnet wieder Δ die Determinante der Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale erster Gattung an den Querschnitten erster Art, also

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{-11} & \alpha_{-12} & \cdots & \alpha_{-1p} \\ \alpha_{-21} & \alpha_{-22} & \cdots & \alpha_{-2p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{-p1} & \alpha_{-p2} & \cdots & \alpha_{-pp} \end{vmatrix}$$

und werden die Unterdeterminanten durch

$$(2) \qquad \Delta_{\lambda\mu} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{-\lambda\mu}}$$

bezeichnet, so ist das μ^{te} Normalintegral 1. Gattung

$$(3) \qquad u_\mu(x) = \pi i \sum_\lambda \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{\Delta} \omega_{-\lambda}(x). \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Irgend ein Integral erster Gattung w, das an den Querschnitten erster Art die Periodicitätsmoduln $a_1, a_2, \ldots, a_p$ hat, wird durch die Normalintegrale in der Form

$$(4) \qquad w = \frac{1}{\pi i} \sum_\mu a_\mu u_\mu$$

dargestellt.

An den Querschnitten 2. Art hat das Normalintegral u_μ die Periodicitätsmoduln

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{\Delta}\beta_{-\lambda\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und es ist bekanntlich

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}.$$

Neben die Darstellung (3) der Normalintegrale 1. Gattung durch ein System von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung tritt eine andere durch die Integrale $A_\lambda(x)$ und $B_\lambda(x)$, die in mancher Hinsicht Vorzüge vor der ersteren bietet. Es ist nämlich die Untersuchung der in der ersten Darstellung auftretenden, aus Periodicitätsmoduln gebildeten Determinanten bis jetzt noch nicht in wünschenswerter Weise durchgeführt worden und scheint auch beträchtliche Schwierigkeiten zu bieten, während man auf der anderen Seite in den verschiedenen Ausdrücken für die Funktionen A_λ und B_λ und ihren ausgezeichnet einfachen Eigenschaften Mittel besitzt, um in vielen Fällen mit ihnen vorteilhaft arbeiten zu können.

Diese Beziehung zwischen den Normalintegralen 1. Gattung und den Periodicitätsmoduln des Integrals r entspricht dem Satz aus der Theorie der Abel'schen Integrale, dass sich die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln eines Integrals 3. Gattung (das stets als eine Differenz von r-Funktionen aufgefasst werden kann) ausdrückt durch die erste Hälfte und die zwischen den Unstetigkeitspunkten als Grenzen genommenen Normalintegrale 1. Gattung.[1] Wir leiten sie in folgender Weise ab:

Es gilt der Satz:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $b_1, b_2, \ldots, b_p$ die Periodicitätsmoduln irgend eines Integrals erster Gattung w an den gleichbezeichneten Querschnitten, so ist bis auf eine Integrationsconstante

$$w = \frac{1}{2\pi i}\sum_\lambda (a_\lambda B_\lambda(x) - b_\lambda A_\lambda(x)). \tag{5}$$

Offenbar hat die rechte Seite infolge des im vorigen Paragraphen gefundenen Verhaltens der A_λ und B_λ an den Querschnitten die gleichen

[1] Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Funktionen.* S. 119.

Periodicitätsmoduln, wie das Integral w. Es ist also zum Beweise des Satzes nur zu zeigen, dass die Summe rechts in T' von jeder Unstetigkeit frei ist. Zu diesem Behufe führen wir die Darstellungen der A_λ und B_λ durch die Hauptintegrale (§ 5 Gleichungen (1)) ein und erhalten

$$w = \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=-p}^{+p} n\omega_{-n}(x)\sum_\lambda(a_\lambda\beta_{n\lambda} - b_\lambda\alpha_{n\lambda})$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{p} n\omega_{-n}(x)\sum_\lambda(a_\lambda\beta_{n\lambda} - b_\lambda\alpha_{n\lambda}) - \frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{p} n\omega_{n}(x)\sum_\lambda(a_\lambda\beta_{-n\lambda} - b_\lambda\alpha_{-n\lambda}).$$

Hier setzt sich die erste Summe aus den Hauptintegralen 1. Gattung zusammen, ist also überall stetig. Die zweite Summe dagegen fällt fort, da wegen der bekannten bilinearen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln je zweier Integrale 1. Gattung

$$\sum_\lambda(a_\lambda\beta_{-n\lambda} - b_\lambda\alpha_{-n\lambda}) = 0$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir erhalten jetzt sofort als Darstellung der Normalintegrale 1. Gattung durch die Integrale A_λ und B_λ:

$$2u_\mu(x) = B_\mu(x) - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda a_{\mu\lambda}A_\lambda(x). \tag{6}$$

Wir führen nun für die Integranden der Normalintegrale 1. Gattung die Bezeichnung ein:

$$\frac{du_\mu}{dz} = \frac{\Phi_\mu(z)}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Es sind also die $\Phi_\mu(z)$ *ganze Funktionen von z vom Grade $p - 1$* und ich behaupte:

Die Funktionen $\Phi_\mu(z)$ haben die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$\Delta_i(\Phi_\mu) = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_\mu(z)}{s}\right)$$

für jede derselben den nämlichen Wert hat.

Beweis. Differenziiren wir Gleichung (6) nach z und multiplicieren mit $\frac{s}{2}$, so erhalten wir

$$\Phi_\mu(z) = \frac{1}{2} Q_\mu(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_\lambda a_{\mu\lambda} P_\lambda(z).$$

Hier haben wir also Φ_μ durch die im vorigen Paragraphen eingeführten Funktionen P_λ und Q_λ dargestellt und es ist in den dort am Schluss benutzten Bezeichnungen:

$$A_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2\pi i} a_{\mu\lambda}, \qquad B_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}(\mu\lambda).$$

Soll nun der obige Satz richtig sein, so müssen, wie wir gesehen haben,

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial A_{\mu\lambda}}{\partial e_i} \quad \text{und} \quad d_\lambda^{(i)} = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial B_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$$

vom Index μ unabhängig sein. Von den $d_\lambda^{(i)}$ ist das evident, denn sie sind alle null. Dagegen sind die $c_\lambda^{(i)}$ von μ unabhängig, wenn $\frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial e_i}$ von μ unabhängig ist. Das ist aber in der That der Fall, denn es ist, wie Herr THOMAE [1] gefunden hat

$$\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial e_i} = 4 \frac{\Phi_\mu(e_i) \Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)}. \qquad \binom{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, p}{i = 0, 1, \ldots, 2p+1} \tag{7}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Aus der letzten Gleichung finden wir weiter

$$c_\lambda^{(i)} = -\frac{2}{\pi i} \frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)},$$

[1] THOMAE, Crelles Journ. Bd. 71, S. 212. Vgl. auch SCHRÖDER, *Über den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-funktionen,* Diss. Göttingen 1890, S. 35. Die Formel ergibt sich übrigens sofort durch Ausführung des über die Querschnitte erstreckten Integrals $\int\limits_{T'} \frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} du_\lambda = \int\limits_{T'} \frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} dz$.

also liefert Formel (13) im vorigen Paragraphen:

$$(8\,\mathrm{a})\qquad \tau_i = \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_\mu(z)}{s}\right) = -\frac{1}{f'(e_i)}\frac{d}{dz}\frac{s}{z-e_i} - \frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)}\frac{P_\lambda(z)}{s}$$

und durch Integration erhalten wir

$$(9\,\mathrm{a})\qquad \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} = T_i(x) = -\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} - \frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)} A_\lambda(x).$$

Eine zweite Darstellung der Funktionen τ_i und T_i liefert der vorletzte Satz im vorigen Paragraphen. Es ist nämlich nach (4)

$$\omega_{-\mu} = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda} u_\lambda,$$

also

$$\varphi_{p-\mu}(z) = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda}\,\Phi_\lambda(z),$$

daher können wir nach dem erwähnten Satz sofort hinschreiben

$$\frac{1}{2s(z-e_i)} = \tau_i + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \frac{1}{\varphi_{p-\mu}(e_i)}\frac{\partial \alpha_{-\mu\lambda}}{\partial e_i}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}$$

oder da nach (6) in § 3:

$$\frac{1}{\varphi_{p-\mu}(e_i)}\frac{\partial \alpha_{-\mu\lambda}}{\partial e_i} = p_{i\lambda}$$

ist:

$$(8\,\mathrm{b})\qquad \tau_i = \frac{1}{2s(z-e_i)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}$$

und

$$(9\,\mathrm{b})\qquad T_i(x) = \frac{\partial \omega(x)}{\partial e_i} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda} u_\lambda(x).$$

Die Integrale $\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i}$ sind schon wiederholt bei Untersuchungen im Gebiete der hyperelliptischen Integrale verwandt worden, besonders von Herrn

Thomae,[1] doch habe ich den Satz, dass $\frac{1}{\Phi_\mu(e_i)}\frac{\partial u_\mu}{\partial e_i}$ für jedes μ denselben Wert hat, nirgends ausgesprochen gefunden.

Das Integral $T_i(x)$ unterscheidet sich, wie (9b) zeigt, von $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ nur durch ein Integral erster Gattung, wird also auch nur im Verzweigungspunkt e_i unstetig.

Wir wollen mit Hülfe der Darstellung (9a) die ersten Glieder der Entwicklung von $T_i(x)$ in irgend einem Verzweigungspunkt ermitteln und fassen daher zunächst die Entwicklung der Integrale $A_\lambda(x)$ ins Auge. Wir gehen dabei zurück auf die Definition dieser Funktionen als Querschnittintegrale (§ 4, (4)), also auf die Formel

$$A_\lambda(x) = \int\limits_{b_\lambda} \frac{\sigma + s}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{2\sigma}.$$

Hier entwickeln wir die Funktion unter dem Integralzeichen als Funktion von z in der Umgebung irgend eines Verzweigungspunkts e_k und erhalten

$$\text{in } e_k: \qquad A_\lambda(x) = \int\limits_{b_\lambda} \frac{\sigma + \sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z - e_k} + \cdots}{2(\zeta - e_k)\sigma} d\zeta.$$

Bedenken wir nun, dass

$$\int\limits_{b_\lambda} \frac{d\zeta}{2\sigma(\zeta - e_k)} = p_{k\lambda}$$

ist, so folgt hieraus

$$A_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{b_\lambda} \frac{d\zeta}{\zeta - e_k} + p_{k\lambda}\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z - e_k} + \cdots.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nur dann von null verschieden, wenn der Integrationsweg b_λ den Verzweigungspunkt e_k einschliesst, also

[1] Thomae, Crelles Journ. Bd. 71, ferner Bd. 93, 94, 101 über Integrale zweiter Gattung.

wenn λ gleich der grössten in $\frac{k}{2}$ enthaltenen Zahl ist. Nennen wir diese Zahl k', so dass

$$(10) \qquad k' = E\left(\frac{k}{2}\right),$$

so ist offenbar $\int\limits_{b_\lambda} \frac{d\zeta}{\zeta - e_k} = 2\pi i(\lambda k')$, also

$$(11) \qquad \text{in } e_k: \quad A_\lambda(x) = \pi i(\lambda k') + p_{k\lambda}\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z - e_k} + \dots.$$

Um die Entwicklung von $\dot{T}_i(x)$ zu finden brauchen wir noch diejenige von $\frac{s}{z - e_i}$ und haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Ist e_k *ein von* e_i *verschiedener Verzweigungspunkt,* so ist

$$(12\text{a}) \qquad \text{in } e_k: \quad \frac{s}{z - e_i} = \frac{\sqrt{f'(e_k)}}{e_k - e_i}\sqrt{z - e_k} + \dots.$$

2) Im Verzweigungspunkt e_i ist

$$(12\text{b}) \qquad \frac{s}{z - e_i} = \sqrt{f'(e_i)}\left[\frac{1}{\sqrt{z - e_i}} + \frac{1}{4}\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)}\sqrt{z - e_i} + \dots\right].$$

Die Entwicklungen (11) und (12) führen wir jetzt in (9a) ein und erhalten

in e_k: $(k \gtrless i)$

$$T_i(x) = -2\frac{\Phi_{k'}(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{2\sqrt{f'(e_k)}}{f'(e_i)}\left[\frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i)p_{k\lambda}\right]\sqrt{z - e_k} + \dots,$$

$$\text{in } e_i: \quad T_i(x) = -\frac{1}{\sqrt{f'(e_i)}\sqrt{z - e_i}} - 2\frac{\Phi_{i'}(e_i)}{f'(e_i)}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{f'(e_i)}}\left[\frac{1}{8}\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i)p_{i\lambda}\right]\sqrt{z - e_i} + \dots.$$

Wir wollen diese Formeln noch etwas weiter ausarbeiten. Es ist nämlich nicht ohne Interesse, dass sich die Coeffizienten von $\sqrt{z - e_k}$ resp. $\sqrt{z - e_i}$ auf der rechten Seite in recht eleganter Weise durch die Determinante Δ ausdrücken lassen. Differentiieren wir nämlich Δ nach dem Verzweigungspunkt e_i, so ist offenbar

$$\frac{\partial\Delta}{\partial e_i} = \sum_\lambda \sum_\mu \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{-\lambda\mu}} \frac{\partial\alpha_{-\lambda\mu}}{\partial e_i} = \sum_\lambda \sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \frac{\partial\alpha_{-\lambda\mu}}{\partial e_i},$$

oder da nach (6) in § 3:

$$\frac{\partial\alpha_{-\lambda\mu}}{\partial e_i} = \varphi_{p-\lambda}(e_i) p_{i\mu}$$

so ist:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial e_i} = \sum_\lambda \sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \varphi_{p-\lambda}(e_i) p_{i\mu}. \tag{13}$$ [1]

Nun folgt aber aus Gleichung (3) dieses Paragraphen, wenn wir nach z differentiieren

$$\sum_\lambda \Delta_{\lambda\mu} \varphi_{p-\lambda}(z) = \frac{1}{\pi i} \Delta \Phi_\mu(z),$$

also finden wir aus Gleichung (13)

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial e_i} = \frac{1}{\pi i} \sum_\mu \Phi_\mu(e_i) p_{i\mu}. \tag{14}$$

Das ist aber grade die Summe, die in der obigen Entwicklung von $T_i(x)$ im Coeffizienten von $\sqrt{z - e_i}$ auftritt. Wir nehmen hierzu die leicht zu beweisende Formel

$$\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)} = \frac{\partial \log F}{\partial e_i},$$

wo

F die Discriminante von $f(z)$

bedeutet und haben

$$\frac{1}{8}\frac{f''(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{i\lambda} = \frac{\partial \log(\Delta \sqrt[8]{F})}{\partial e_i}. \tag{15}$$

---

[1] Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (8) und (10) in § 3 erhält man leicht die Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial\Delta}{\partial e_i} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i e_i \frac{\partial\Delta}{\partial e_i} = -\frac{p(p+1)}{2} \Delta.$$

(Vgl. WILTHEISS, Math. Ann. Bd. 31, S. 142.)

Wir wenden uns jetzt zu dem Coeffizienten von $\sqrt{z-e_k}$ in der Entwicklung von $T_i(x)$. Den hier in der Klammer stehenden Ausdruck erhalten wir offenbar, wenn wir in Gleichung (8 b) den Index i durch k ersetzen, mit s multiplicieren und dann $z = e_i$ setzen. Dann wird

$$
(16\text{a}) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{k\lambda} &= \lim_{z=e_i} s\tau_k = \lim_{z=e_i} \frac{s}{\Phi_\mu(e_k)} \frac{\partial}{\partial e_k}\left(\frac{\Phi_\mu(z)}{s}\right) \\ &= \frac{1}{\Phi_\mu(e_k)}\left[\frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} + \frac{\Phi_\mu(e_i)}{2(e_i - e_k)}\right]. \end{aligned}
$$

Die rechte Seite lässt sich umformen. Es ist nämlich

$$\frac{1}{e_i - e_k} = -\frac{1}{f'(e_i)} \frac{\partial f'(e_i)}{\partial e_k},$$

also

$$\frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} + \frac{\Phi_\mu(e_i)}{2(e_i - e_k)} = \frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} - \frac{1}{2f'(e_i)} \frac{\partial f'(e_i)}{\partial e_k} \Phi_\mu(e_i) = \frac{f'(e_i)}{2\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial}{\partial e_k}\left[\frac{\Phi_\mu(e_i)^2}{f'(e_i)}\right].$$

Nun folgt aber aus Gleichung (7) in diesem Paragraphen

$$\frac{\Phi_\mu(e_i)^2}{f'(e_i)} = \frac{1}{4} \frac{\partial a_{\mu\mu}}{\partial e_i},$$

also ist

$$\frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{k\lambda} = \frac{1}{8} \frac{f'(e_i)}{\Phi_\mu(e_i)\Phi_\mu(e_k)} \frac{\partial^2 a_{\mu\mu}}{\partial e_i \partial e_k}.$$

Setze ich nun

$$(17) \quad \frac{1}{8\Phi_\mu(e_i)\Phi_\mu(e_k)} \frac{\partial^2 a_{\mu\mu}}{\partial e_i \partial e_k} = \eta_{ik},$$

so bleibt η_{ik} *unverändert, wenn ich i und k vertausche* und hat überdies für jedes μ den nämlichen Wert. Wir haben dann

$$(16\text{b}) \quad \frac{1}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \Phi_\lambda(e_i) p_{k\lambda} = f'(e_i)\eta_{ik}.$$

Wir finden jetzt schliesslich, wenn wir (15) und (16 b) in die Entwicklung von $T_i(x)$ eintragen:

$$(18)\quad \begin{aligned} &\text{in } e_k\colon (k \gtrless i)\ T_i(x) = && -2\frac{\Phi_{k'}(e_i)}{f'(e_i)} + 2\sqrt{f'(e_k)}\,\eta_{ik}\sqrt{z-e_k} + \cdots,\\ &\text{in } e_i\colon \quad T_i(x) = -\frac{1}{\sqrt{f'(e_i)}\sqrt{z-e_i}} - 2\frac{\Phi_{i'}(e_i)}{f'(e_i)} \\ &&& -\frac{2}{\sqrt{f'(e_i)}}\frac{\partial \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i}\sqrt{z-e_i} + \cdots. \end{aligned}$$

Um nun noch η_{ik} durch die Determinante Δ auszudrücken, differentiieren wir Gleichung (14) nach e_k und benutzen dabei gleich die Formel (12) in § 3. Dann kommt

$$\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial e_i \partial e_k} = \frac{1}{\pi i}\sum_\mu \frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} p_{i\mu} + \frac{1}{2\pi i(e_i - e_k)}\sum_\mu \Phi_\mu(e_i)(p_{i\mu} - p_{k\mu}).$$

Nun ist nach (16a) und (16b)

$$\frac{\partial \Phi_\mu(e_i)}{\partial e_k} = f'(e_i)\Phi_\mu(e_k)\eta_{ik} - \frac{\Phi_\mu(e_i)}{2(e_i - e_k)},$$

also haben wir

$$\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial e_i \partial e_k} = \frac{f'(e_i)}{\pi i}\sum_\mu \Phi_\mu(e_k) p_{i\mu}\eta_{ik} - \frac{1}{2\pi i(e_i - e_k)}\sum_\mu \Phi_\mu(e_i) p_{k\mu},$$

oder nach (16b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial e_i \partial e_k} &= f'(e_i)\eta_{ik}\left(\frac{1}{2(e_k - e_i)} - f'(e_k)\eta_{ik}\right) - \frac{1}{2(e_i - e_k)}\left(\frac{1}{2(e_i - e_k)} - f'(e_i)\eta_{ik}\right) \\ &= -f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}^2 - \frac{1}{4(e_i - e_k)^2}. \end{aligned}$$

Es ist aber, was leicht einzusehen

$$\frac{1}{(e_i - e_k)^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log F}{\partial e_i \partial e_k},$$

folglich erhalten wir schliesslich als die gesuchte Formel:

$$(19)\qquad f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}^2 = -\frac{\partial^2 \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i \partial e_k},$$

von der wir noch weiterhin Gebrauch machen werden.

Wir notieren noch als Periodicitätsmoduln von $T_i(x)$ nach der Darstellung (9 a):

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\text{an } a_\mu: \quad \overset{+}{T}_i - \overset{-}{T}_i = 0, \\ &\text{an } b_\mu: \quad \overset{+}{T}_i - \overset{-}{T}_i = 4\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}, \end{aligned}$$

und beginnen jetzt eine neue Betrachtung, die uns wiederum zu den Integralen $T_i(x)$ führen wird.

§ 7. *Die Normalintegrale zweiter Gattung.*

Bekanntlich bedient man sich der Normalintegrale erster Gattung, um zu einem beliebigen Integral der Klasse V, das aber nicht Integral 1. Gattung ist, ein anderes W zu finden, das an sämtlichen Querschnitten erster Art stetig ist. Wir nennen W das *zu V gehörige transcendent normierte Integral.* Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ die Periodicitätsmoduln von V an den Querschnitten erster Art, so ist

$$W = V - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_\lambda u_\lambda .$$

Danach ist also beispielsweise, wie (9 b) zeigt, $T_i(x)$ das zu $\frac{\partial \omega}{\partial e_i}$ gehörige transcendent normierte Integral.

Wir wollen nun die Integrale untersuchen, die wir durch solche transcendente Normierung aus den Hauptintegralen zweiter Gattung gewinnen.

Wir definieren sie, indem wir jedes mit einem constanten Faktor multiplicieren, durch die Gleichung

$$(1\text{ a})\qquad 2v_\mu(x) = \mu\omega_\mu(x) - \frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} u_\lambda, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

und nennen sie die *Normalintegrale zweiter Gattung.*

Wir werden für diese Normalintegrale 2. Gattung eine Reihe von Eigenschaften nachweisen, die durchaus mit bekannten Eigenschaften der Normalintegrale erster Gattung correspondieren, so dass es gerechtfertigt erscheint, zu dem System der Normalintegrale 1. Gattung grade dieses System von Normalintegralen 2. Gattung hinzuzufügen, die dann zusammen ebenso ein vollständiges System von Fundamentalintegralen bilden, wie die Hauptintegrale oder die Integrale A_μ und B_μ.

Wir wollen zunächst das über sämtliche Querschnitte erstreckte Integral

$$I=\int_{T'}\omega_\mu du_\nu=\int_{T'}\omega_\mu\frac{\Phi_\nu(z)}{s}dz$$

betrachten. Ein erster Wert desselben ist

$$I=-\pi i\Big[\beta_{\mu\nu}-\frac{1}{\pi i}\sum_\lambda\alpha_{\mu\lambda}a_{\lambda\nu}\Big]$$

und hier ist, wie man aus (1) sieht, die Klammer proportional dem Periodicitätsmodul des Integrals v_μ am Querschnitt b_ν.

Einen zweiten Wert erhält man durch Entwicklung des Integranden im Unendlichen. Es ist aber

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix}\qquad \omega_\mu=\pm\frac{z^\mu}{\mu}+\Sigma_{p+1},$$

$$\frac{\Phi_\nu(z)}{s}=\pm\pi i\Big[\frac{\Delta_{1\nu}}{\Delta}\frac{1}{z^2}+\frac{\Delta_{2\nu}}{\Delta}\frac{1}{z^3}+\dots+\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\frac{1}{z^{\mu+1}}+\dots\Big]+\Sigma_{p+2},$$

also

$$\omega_\mu\frac{\Phi_\nu(z)}{s}=\dots+\frac{\pi i}{\mu}\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\frac{1}{z}+\dots,$$

folglich ist auch

$$I=-2\pi i\,.\,2\pi i\frac{1}{\mu}\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}$$

und wir haben daher die Formel

$$(2)\qquad \beta_{\mu\nu}-\frac{1}{\pi i}\sum_\lambda\alpha_{\mu\lambda}a_{\lambda\nu}=\frac{4\pi i}{\mu}\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}. \qquad (\mu,\nu=1,2,\dots,p)$$

Es sind also die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale 2. Gattung:

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\text{an } a_\nu: && \overset{+}{v}_\mu-\overset{-}{v}_\mu=0,\\ &\text{an } b_\nu: && \overset{+}{v}_\mu-\overset{-}{v}_\mu=2\pi i\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun in die Definitionsgleichung (1) der Normalintegrale 2. Gattung an Stelle der Integrale u_λ die Hauptintegrale 1. Gattung mit Hülfe von Gleichung (3) des vorigen Paragraphen einführen. Es kommt dann

$$(1\text{ b}) \qquad 2v_\mu(x) = \mu\omega_\mu(x) - \sum_\nu c_{\mu\nu}\omega_{-\nu}(x)$$

und darin ist

$$(4) \qquad c_{\mu\nu} = \mu \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\frac{\Delta_{\nu\lambda}}{\Delta}. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Für diese Grössen $c_{\mu\nu}$ besteht der merkwürdige Satz

$$(5) \qquad c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu},$$

denn das Querschnittintegral $K = \int\limits_{T'} \omega_\nu dv_\mu$ ist erstens:

$$2\pi i \sum_\lambda \alpha_{\nu\lambda}\frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} = \frac{2\pi i}{\nu}c_{\nu\mu}.$$

Andererseits ist

$$\text{in } \begin{matrix}\infty_1\\ \infty_2\end{matrix}: \qquad \omega_\nu = \pm\frac{z^\nu}{\nu} + \Sigma_{p+1},$$

$$\frac{dv_\mu}{dz} = \pm\frac{1}{2}\left[\mu z^{\mu-1} - \frac{c_{\mu 1}}{z^2} - \frac{c_{\mu 2}}{z^3} - \cdots - \frac{c_{\mu\nu}}{z^{\nu+1}} - \cdots - \frac{c_{\mu p}}{z^{p+1}}\right] + \Sigma_{p+2}$$

also

$$\omega_\nu\frac{dv_\mu}{dz} = \cdots - \frac{c_{\mu\nu}}{2\nu}\frac{1}{z} + \cdots$$

und

$$K = \frac{2\pi i}{\nu}c_{\mu\nu},$$

womit (5) bewiesen ist.

Als dritte Darstellung der Normalintegrale 2. Gattung notieren wir die durch die Periodicitätsmoduln der Funktion r:

$$(1\text{ c}) \qquad v_\mu(x) = -\sum_\lambda \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta}A_\lambda(x).$$

Wir führen jetzt durch

(6) $$\frac{dv_\mu}{dz} = \frac{\Psi_\mu(z)}{s} \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

die ganzen Funktionen $(p+\mu)^{\text{ten}}$ Grades ein:

(7) $$2\Psi_\mu(z) = \mu\varphi_{p+\mu}(z) - \frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\Phi_\lambda(z)$$

und differentiieren (1 a) nach e_i. Dann kommt, wenn wir frühere Ergebnisse benutzen:

$$2\frac{\partial v_\mu}{\partial e_i} = \mu\varphi_{p+\mu}(e_i)\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \varphi_{p+\mu}(e_i)p_{i\lambda}u_\lambda - \frac{\mu}{\pi i}T_i\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\Phi_\lambda(e_i)$$

$$= \mu\varphi_{p+\mu}(e_i)\left[\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}u_\lambda\right] - T_i\frac{\mu}{\pi i}\sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\Phi_\lambda(e_i),$$

folglich nach (9 b) in § 6 und (7):

(8) $$\frac{\partial v_\mu}{\partial e_i} = \Psi_\mu(e_i)T_i(x).$$

Wir finden also den Satz:

Der Ausdruck $\frac{1}{\Psi_\mu(e_i)}\frac{\partial v_\mu}{\partial e_i}$ *ist vom Index* μ *unabhängig und ebenso wie der entsprechende aus den Normalintegralen* 1. *Gattung gewonnene Ausdruck gleich dem Integral* $T_i(x)$.

Als erste Folgerung ergibt sich aus diesem Satz, wenn wir in (8) zu den Periodicitätsmoduln an den Querschnitten 2. Art übergehen:

(9) $$\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta}\right) = \frac{2}{\pi i}\frac{\Phi_\nu(e_i)\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}.$$

Hat diese Formel schon grosse Ähnlichkeit mit der Thomae'schen partiellen Differentialgleichung (7) des vorigen Paragraphen, so entspricht dieser doch noch vollständiger eine andere Gleichung, die wir folgendermassen finden.

Es ist nach dem auch im Paragraphen 5 benutzten Hauptsatze der Determinantenlehre

$$\sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda} \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} = 1.$$

Wir differentiieren diese Gleichung nach e_i und haben in Rücksicht auf Gleichung (6) in § 3 und auf die eben gefundene Formel

$$0 = \varphi_{p-\mu}(e_i) \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} + \frac{2}{\pi i} \frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)} \sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda}\, \Phi_\lambda(e_i),$$

oder da

$$\frac{1}{\pi i} \sum_\lambda \alpha_{-\mu\lambda}\, \Phi_\lambda(e_i) = \varphi_{p-\mu}(e_i)$$

ist:

$$\frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)} = -\frac{1}{2} \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta}. \tag{10}$$

Jetzt wollen wir die durch Gleichung (4) definierte Grösse $c_{\mu\nu}$ nach e_i differenziieren. Wir erhalten dann, wieder mit Benutzung von (9)

$$\frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = \mu \varphi_{p+\mu}(e_i) \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\Delta_{\nu\lambda}}{\Delta} + \frac{2\mu}{\pi i} \frac{\Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)} \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\, \Phi_\lambda(e_i),$$

oder nach der zuletzt gefundenen Formel:

$$\frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = -2 \frac{\Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)} \Big[\mu \varphi_{p+\mu}(e_i) - \frac{\mu}{\pi i} \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda}\, \Phi_\lambda(e_i) \Big].$$

Hier steht aber nach (7) in der Klammer grade $2\Psi_\mu(e_i)$, also ist schliesslich

$$\frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = -4 \frac{\Psi_\mu(e_i)\, \Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)}. \tag{11}$$

Eine Gegenüberstellung der Eigenschaften der Normalintegrale erster und zweiter Gattung wird ihren durchgehenden Parallelismus deutlich hervortreten lassen.

$$u_\mu = \pi i \sum_\lambda \frac{\Delta_{\lambda\mu}}{\Delta} \omega_{-\lambda}, \qquad v_\mu = -\sum_\lambda \frac{\Delta_{\mu\lambda}}{\Delta} A_\lambda,$$

$$2u_\mu = B_\mu - \frac{1}{\pi i} \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu, \qquad 2v_\mu = \mu\omega_\mu - \sum_\nu c_{\mu\nu}\omega_{-\nu},$$

$$a_{\mu\nu} = \pi i \sum_\lambda \beta_{-\lambda\mu} \frac{\Delta_{\lambda\nu}}{\Delta}, \qquad c_{\mu\nu} = \mu \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} \frac{\Delta_{\nu\lambda}}{\Delta},$$

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}, \qquad c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu},$$

$$\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 4\frac{\Phi_\mu(e_i)\,\Phi_\nu(e_i)}{f'(e_i)}, \qquad \frac{\partial c_{\mu\nu}}{\partial e_i} = -4\frac{\Psi_\mu(e_i)\,\Psi_\nu(e_i)}{f'(e_i)},$$

$$(12) \qquad \frac{1}{\Phi_\mu(e_i)} \frac{\partial u_\mu}{\partial e_i} = \frac{1}{\Psi_\nu(e_i)} \frac{\partial v_\nu}{\partial e_i} = T_i.$$

Die bisherigen Entwicklungen in diesem und dem vorigen Paragraphen haben uns zu einer Reihe von Sätzen geführt ((7) in § 6 und (9), (11), (12) in diesem Paragraphen), deren gemeinsamer Charakter sich in folgendem Satze ausspricht:

Es seien t_i und t'_i irgend zwei der $(2p+1)(2p+2)$ Grössen

$$T_i\,;\ \frac{\Phi_1(e_i)}{f'(e_i)},\ \frac{\Phi_2(e_i)}{f'(e_i)},\ \ldots,\ \frac{\Phi_p(e_i)}{f'(e_i)}\,;\ \frac{\Psi_1(e_i)}{f'(e_i)},\ \frac{\Psi_2(e_i)}{f'(e_i)},\ \ldots,\ \frac{\Psi_p(e_i)}{f'(e_i)}, \quad (i=0,1,\ldots,2p+1)$$

dann ist das Produkt $f'(e_i)t_it'_i$ jedesmal gleich der Derivierten einer gewissen Funktion W der Verzweigungspunkte nach e_i:

$$f'(e_i)t_it'_i = \frac{\partial W}{\partial e_i}.$$

Die folgenden Betrachtungen werden nun dazu führen, für alle diese Grössen t_i $(i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$ ein System partieller Differentialgleichungen aufzustellen, aus dem sich dieser Satz in einfacher Weise ergibt.

Wir differentiieren die Gleichung (9 b) des vorigen Paragraphen nach einem von e_i verschiedenen Verzweigungspunkt e_k und erhalten mit Rücksicht auf die Formeln (11) und (12) in § 3:

$$\frac{\partial T_i}{\partial e_k} = \frac{1}{2(e_i-e_k)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial e_i} - \frac{\partial\omega}{\partial e_k}\right) - \frac{1}{2\pi i(e_i-e_k)} \sum_\lambda (p_{i\lambda} - p_{k\lambda})u_\lambda - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda p_{i\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial e_k}$$

oder offenbar

$$\frac{\partial T_i}{\partial e_k} = \frac{T_i - T_k}{2(e_i - e_k)} - \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda p_{i\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial e_k}.$$

Hier ersetzen wir in der Summe rechts $\frac{\partial u_\lambda}{\partial e_k}$ durch $\Phi_\lambda(e_k) T_k$. Dann erhält T_k den Faktor

$$\frac{1}{2(e_k - e_i)} - \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda p_{i\lambda} \Phi_\lambda(e_k)$$

und dies ist, wie man aus (16b) im vorigen Paragraphen ersieht, gleich $f'(e_k)\eta_{ik}$, folglich haben wir

$$\frac{\partial T_i}{\partial e_k} = \frac{T_i}{2(e_i - e_k)} + f'(e_k)\eta_{ik} T_k. \tag{13} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{(i, k = 0, 1, \ldots, 2p+1)}{(i \gtrless k)}$$

Dieses System partieller Differentialgleichungen hat nun nicht nur die Integrale T_i $(i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$, sondern auch alle andern oben aufgeführten Grössen t_i zu Lösungen. Dies folgt für die Grössen $\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ aus ihrer Eigenschaft, (bis auf constante Faktoren) Periodicitätsmoduln der Integrale T_i zu sein, für die Grössen $\frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ ergibt es sich beispielsweise mit Leichtigkeit aus Gleichung (10), wenn man sie nach e_k differentiiert und (9) berücksichtigt. Ausserdem werden die Gleichungen erfüllt durch jedes System von Derivierten der Integrale $T_0(x), \ldots, T_{2p+1}(x)$ nach z zu beliebig hoher Ordnung.

Es seien jetzt

$$t_0, t_1, \ldots, t_{2p+1}$$

und

$$t'_0, t'_1, \ldots, t'_{2p+1}$$

zwei Systeme von Lösungen, so dass

$$\frac{\partial t_i}{\partial e_k} = \frac{t_i}{2(e_i - e_k)} + f'(e_k)\eta_{ik} t_k; \tag{13a}$$

$$\frac{\partial t'_i}{\partial e_k} = \frac{t'_i}{2(e_i - e_k)} + f'(e_k)\eta_{ik} t'_k. \tag{13b}$$

Zu beiden Gleichungen nehme ich die aus ihnen durch Vertauschung von i und k folgenden, wodurch η_{ik} ungeändert bleibt:

(13 c) $$\frac{\partial t_k}{\partial e_i} = -\frac{t_k}{2(e_i - e_k)} + f'(e_i)\eta_{ik} t_i,$$

(13 d) $$\frac{\partial t'_k}{\partial e_i} = -\frac{t'_k}{2(e_i - e_k)} + f'(e_i)\eta_{ik} t'_i$$

und eliminiere η_{ik} sowohl aus (13a) und (13d), wie aus (13b) und (13c). Dann kommt:

$$f'(e_i)t'_i\frac{\partial t_i}{\partial e_k} - f'(e_k)t_k\frac{\partial t'_k}{\partial e_i} = \frac{1}{2(e_i - e_k)}[f'(e_i)t_i t'_i + f'(e_k)t_k t'_k],$$

$$f'(e_i)t_i\frac{\partial t'_i}{\partial e_k} - f'(e_k)t'_k\frac{\partial t_k}{\partial e_i} = \frac{1}{2(e_i - e_k)}[f'(e_i)t_i t'_i + f'(e_k)t_k t'_k].$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$f'(e_i)\frac{\partial(t_i t'_i)}{\partial e_k} - f'(e_k)\frac{\partial(t_k t'_k)}{\partial e_i} = -\frac{f'(e_i)}{e_k - e_i}t_i t'_i + \frac{f'(e_k)}{e_i - e_k}t_k t'_k.$$

Nun ist aber:

$$\frac{f'(e_i)}{e_k - e_i} = \frac{\partial f'(e_i)}{\partial e_k}, \qquad \frac{f'(e_k)}{e_i - e_k} = \frac{\partial f'(e_k)}{\partial e_i},$$

also folgt

$$\frac{\partial}{\partial e_k}[f'(e_i)t_i t'_i] = \frac{\partial}{\partial e_i}[f'(e_k)t_k t'_k]$$

und diese Gleichung führt uns nun zu dem Satz:

Sind $t_0, t_1, \ldots, t_{2p+1}$, $t'_0, t'_1, \ldots, t'_{2p+1}$ *zwei Lösungssysteme der partiellen Differentialgleichungen* (13), *so existiert eine Funktion* W *der Verzweigungspunkte von der Eigenschaft, dass*

(14) $$f'(e_i)t_i t'_i = \frac{\partial W}{\partial e_i}. \qquad (i=0, \ldots, 2p+1)$$

Nun können aber die beiden Lösungssysteme auch identisch sein und daher besteht der Satz:

Jedem Lösungssystem $t_0, t_1, \ldots, t_{2p+1}$ *ist eine Funktion* V *der Verzweigungspunkte derart zugeordnet, dass*

(15) $$f'(e_i)t_i^2 = \frac{\partial V}{\partial e_i}. \qquad (i=0, 1, \ldots, 2p+1)$$

Die Funktionen V genügen einer partiellen Differentialgleichung zweiten Grades, die wir aus (13a) erhalten, wenn wir diese Gleichung mit $2f'(e_i)t_i$ multiplicieren. Dann kommt

$$2f'(e_i)t_i\frac{\partial t_i}{\partial e_k}+\frac{f'(e_i)}{e_k-e_i}t_i^2=2f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}t_it_k.$$

Die linke Seite ist hier offenbar gleich $\frac{\partial}{\partial e_k}[f'(e_i)t_i^2]=\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\partial e_k}$, also folgt durch Quadrieren

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\partial e_k}\right)^2=4f'(e_i)f'(e_k)\eta_{ik}^2\frac{\partial V}{\partial e_i}\frac{\partial V}{\partial e_k}$$

oder nach Formel (19) im vorigen Paragraphen

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial e_i\partial e_k}\right)^2+4\frac{\partial^2\log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i\partial e_k}\frac{\partial V}{\partial e_i}\frac{\partial V}{\partial e_k}=0. \qquad {\scriptstyle (i,k=0,1,\ldots,2p+1)}$$

Die Gleichungen (15) und (16) ersetzen das Gleichungssystem (13).

Den Lösungssystemen $\frac{\Phi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ und $\frac{\Psi_\mu(e_i)}{f'(e_i)}$ der Gleichungen (13) sind als Funktionen V die Grössen $a_{\mu\mu}$ resp. $c_{\mu\mu}$ zugeordnet, also sind

$$a_{11},\, a_{22},\, \ldots,\, a_{pp}$$

und

$$c_{11},\, c_{22},\, \ldots,\, c_{pp}$$

Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (16).

Wir wollen jetzt die Funktion V aufsuchen, die gemäss (15) den Integralen T_i zugeordnet ist, fragen aber zuvor etwas allgemeiner nach der Funktion W, die sich gemäss (14) ergibt, wenn wir

$$t_i=T_i(x),\qquad t_i'=T_i(\xi)$$

annehmen, wo ξ ein zweiter variabler Punkt ist. Es ist dann W Funktion von z und ζ und wenn wir setzen

$$W=2\rho(x,\xi),$$

so ist

$$(17)\qquad f'(e_i)T_i(x)T_i(\xi)=2\frac{\partial\rho(x,\xi)}{\partial e_i}.$$

Wir wollen hier für $T_i(x)$ die Darstellung (9 b), für $T_i(\xi)$ die Darstellung (9 a) im vorigen Paragraphen einsetzen und erhalten dann

$$f'(e_i)\,T_i(x)\,T_i(\xi) = -\frac{\sigma}{\zeta - e_i}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i} + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \frac{p_{i\lambda}\sigma}{\zeta - e_i}u_\lambda(x) - \frac{2}{\pi i}\sum_\lambda A_\lambda(\xi)\,\Phi_\lambda(e_i)\,T_i(x).$$

Nun ist aber nach § 4 Gleichungen (5) und (6):

$$-\frac{\sigma}{\zeta - e_i}\frac{\partial\omega(x)}{\partial e_i} = 2\frac{\partial r(x\,,\,\xi)}{\partial e_i}, \qquad \frac{p_{i\lambda}\sigma}{\zeta - e_i} = -\,2\frac{\partial A_\lambda(\xi)}{\partial e_i},$$

ferner ist

$$\Phi_\lambda(e_i)\,T_i(x) = \frac{\partial u_\lambda(x)}{\partial e_i},$$

also folgt

$$f'(e_i)\,T_i(x)\,T_i(\xi) = 2\frac{\partial r(x\,,\,\xi)}{\partial e_i} - \frac{2}{\pi i}\frac{\partial}{\partial e_i}\sum_\lambda A_\lambda(\xi)u_\lambda(x),$$

und wir sehen, dass

(18) $$\rho(x\,,\,\xi) = r(x\,,\,\xi) - \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda A_\lambda(\xi)u_\lambda(x).$$

Das ist aber offenbar das *transcendent normierte Integral dritter Gattung.* Es hat als Funktion von z dieselben Unstetigkeiten, wie $r(x\,,\,\xi)$, ist an den Querschnitten erster Art stetig und besitzt am Querschnitt b_λ den Periodicitätsmodul $2u_\lambda(\xi)$. Ferner ist

$$\rho(x\,,\,\xi) = \rho(\xi\,,\,x),$$

wie sich unschwer mit Hülfe von (10) in § 4 ergibt.

Jetzt lassen wir die variablen Punkte x und ξ zusammenrücken, setzen

$$V = 2\,\Omega(x)$$

und haben

(19) $$f'(e_i)\,T_i(x)^2 = 2\frac{\partial\Omega(x)}{\partial e_i}.$$

Die Funktion $\Omega(x)$ selber lässt sich nicht durch Funktionen und Integrale der Klasse darstellen, wohl aber ihre Derivierte nach z. Man erhält diese, wenn man in die Gleichung

$$f'(e_i)\,T_i\frac{dT_i}{dz} = \frac{\partial \Omega'(x)}{\partial e_i}$$

für T_i die Darstellung (9 a), für $\frac{dT_i}{dz} = \tau_i$ die Darstellung (8 b) in § 6 einsetzt. Es ergibt sich dann auf ähnliche Weise, wie oben

$$\text{(20 a)} \qquad \frac{d\Omega}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{2}{\pi i}\sum_{\lambda}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}A_\lambda(x).$$

Die Funktion $\Omega(x)$ kann Unstetigkeiten nur in den Verzweigungspunkten und im Unendlichen besitzen.

In den Verzweigungspunkten verhält sich $\Omega(x)$ wie $-\frac{1}{2}\log f(x)$, wir können jedoch auch, die oben gegebene Entwicklung der Integrale T_i in den Verzweigungspunkten benutzend, die ersten Glieder der Entwicklung von Ω in irgend einem Verzweigungspunkt ermitteln.

Wir entwickeln zunächst $\frac{d\Omega}{dz}$ nach (20 a) in der Umgebung des Verzweigungspunkts e_k, indem wir nach (11) im vorigen Paragraphen die Anfangsglieder der Entwicklung der Integrale $A_\lambda(x)$ einführen. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\text{in } e_k\text{:}\quad 2\frac{d\Omega}{dz} &= -\frac{1}{z-e_k} - \lim_{z=e_k}\left[\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z-e_k}\right] \\ &\quad - \frac{4}{\pi i}\sum_{\lambda}\frac{\Phi_\lambda(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z-e_k}}\left[\pi i(\lambda k') + p_{k\lambda}\sqrt{f'(e_k)}\sqrt{z-e_k} + \ldots\right] \\ &= -\frac{1}{z-e_k} - \frac{1}{2}\frac{f''(e_k)}{f'(e_k)} - 4\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\frac{1}{\sqrt{z-e_k}} - \frac{4}{\pi i}\sum_{\lambda}\Phi_\lambda(e_k)p_{k\lambda} - \ldots\end{aligned}$$

oder nach (15) im vorigen Paragraphen

$$\text{in } e_k\text{:}\qquad 2\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{1}{z-e_k} - 4\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\frac{1}{\sqrt{z-e_k}} - 4\frac{\partial \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_k} - \ldots.$$

Daraus folgt durch Integration

$$2\Omega = -\log(z-e_k) + 2c_k - 8\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\sqrt{z-e_k} - 4\frac{\partial \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_k}(z-e_k) - \ldots$$

und hierin ist noch die nach z constante Grösse c_k zu bestimmen. Wir differentiieren zu dem Ende die letzte Gleichung nach e_i und erhalten

$$\text{in } e_k: \qquad 2\frac{\partial \Omega}{\partial e_i} = f'(e_i)\,T_i^2$$

$$= 2\frac{\partial c_k}{\partial e_i} - 8\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\right)\sqrt{z-e_k} - 4\frac{\partial^2 \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_i \partial e_k}(z-e_k) - \ldots .$$

Andererseits haben wir nach (18) im vorigen Paragraphen

$$\text{in } e_k: \qquad f'(e_i)\,T_i^2 = 4\frac{\Phi_{k'}(e_i)^2}{f'(e_i)} - 8\sqrt{f'(e_k)}\,\Phi_{k'}(e_i)\,\eta_{ik}\sqrt{z-e_k} - \ldots ,$$

also folgt

$$2\frac{\partial c_k}{\partial e_i} = 4\frac{\Phi_{k'}(e_i)^2}{f'(e_i)} = \frac{\partial a_{k'k'}}{\partial e_i}$$

und da diese Gleichung für jedes i besteht, so ist

$$c_k = \frac{1}{2}a_{k'k'} .$$

Die weitere durch Vergleichung der beiden Entwicklungen folgende Relation

$$\sqrt{f'(e_k)}\,\Phi_{k'}(e_i)\,\eta_{ik} = \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\right)$$

wird durch (17) im vorigen Paragraphen bestätigt.

Wir haben also hiermit für Ω in der Umgebung des Verzweigungspunkts e_k die Entwicklung

$$\Omega = -\frac{1}{2}\log(z-e_k) + \frac{1}{2}a_{k'k'} - 4\frac{\Phi_{k'}(e_k)}{\sqrt{f'(e_k)}}\sqrt{z-e_k} - 2\frac{\partial \log(\Delta\sqrt[8]{F})}{\partial e_k}(z-e_k) - \ldots$$

$$\left(k' = E\left(\frac{k}{2}\right)\right).$$

Über das Verhalten von Ω im Unendlichen unterrichten wir uns durch eine Umformung der in $\frac{d\Omega}{dz}$ auftretenden Summe $\frac{2}{\pi i}\sum_{\lambda}\frac{\Phi_\lambda(z)}{s}A_\lambda(x)$. Wir werden nämlich finden, dass diese trotz der im Unendlichen vorhandenen Unstetigkeiten der Funktionen $A_\lambda(x)$ dort zur ersten Ordnung null wird.

Es ist nach der Partialbruchzerlegung von LAGRANGE:

$$\frac{\Phi_\lambda(z)}{s} = s\frac{\Phi_\lambda(z)}{f(z)} = \sum_i \frac{s\,\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)(z-e_i)},$$

folglich

$$\frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x) = \sum_i \left[\frac{s}{z-e_i}\sum_\lambda \frac{2}{\pi i}\frac{\Phi_\lambda(e_i)}{f'(e_i)} A_\lambda(x)\right].$$

Hier steht aber in der Klammer grade die in der Darstellung (9a) im vorigen Paragraphen auftretende Summe, also ist

$$\frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x) = -\sum_i \frac{s}{z-e_i}\left[\frac{s}{f'(e_i)(z-e_i)} + T_i(x)\right].$$

Nun ist

$$\sum_i \frac{1}{f'(e_i)(z-e_i)^2} = -\frac{d}{dz}\sum_i \frac{1}{f'(e_i)(z-e_i)} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{f'(z)}{f(z)^2},$$

also kommt

$$\frac{2}{\pi i}\sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)}{s} A_\lambda(x) = -\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_i \frac{s\,T_i(x)}{z-e_i}$$

und aus (20a) wird

(20b)
$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{i=0}^{2p+1}\frac{s\,T_i(x)}{z-e_i}.$$

Es ist demnach im Unendlichen, wenn wir die Entwicklung von $\frac{s}{z-e_i}$ in § 2 benutzen:

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{p+1}{z} \pm \Big[z^p\sum_i T_i(x) + z^{p-1}\sum_i \varphi_1(e_i)T_i(x) + \dots$$
$$+ \sum_i \varphi_p(e_i)T_i(x) + \frac{1}{z}\sum_i \varphi_{p+1}(e_i)T_i(x)\Big] + \Sigma_2.$$

Hier treten rechts Summen auf von der Gestalt $\sum_i \varphi_n(e_i)T_i(x)$.

Es sei nun $\psi(x)$ irgend eine ganze Funktion von z vom Grade $\overline{\gtrless} p+1$, so gilt der Satz: [1]

[1] Dieser Satz folgt sofort aus (9a) in § 6, wenn wir bedenken, dass für jede derartige Funktion $\sum_i \frac{\Phi_\lambda(e_i)\psi(e_i)}{f'(e_i)} = 0$ ist. Diese Identität ergibt beiläufig für die Periodicitätsmoduln $a_{\mu\nu}$ gemäss (7) im vorigen Paragraphen die Differentialgleichungen:

$$\sum_i \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 0, \qquad \sum_i e_i\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 0, \qquad \sum_i e_i^2\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial e_i} = 0. \quad (\mu,\nu = 1,2,\dots,p)$$

$$\sum_i \psi(e_i)\,T_i(x) = -\frac{\psi(z)}{s}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf die obigen Summen an, so erhalten wir

$$\text{in } \frac{\infty_1}{\infty_2}: \qquad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{p+1}{z} \mp \left[\frac{z^p}{s} + \frac{z^{p-1}\varphi_1(z)}{s} + \ldots + \frac{\varphi_p(z)}{s} + \frac{\varphi_{p+1}(z)}{zs}\right] + \Sigma_2.$$

Hier wird aber jedes Glied in der Klammer im Unendlichen gleich $\pm\frac{1}{z} + \Sigma_2$, also ist

$$\text{in } \frac{\infty_1}{\infty_2}: \qquad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{p+1}{z} - \frac{p+2}{z} + \Sigma_2 = -\frac{1}{z} + \Sigma_2$$

und daher

$$\text{in } \frac{\infty_1}{\infty_3}: \qquad \Omega = -\log z + \text{fct. cont.}$$

Über das Verhalten von $\Omega(x)$ an den Querschnitten gibt uns die Gleichung (19) Aufschluss. Es folgt aus ihr, dass an irgend einem Querschnitt

$$2\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) = f'(e_i)(\overset{+}{T_i} + \overset{-}{T_i})(\overset{+}{T_i} - \overset{-}{T_i})$$

ist, also ist, infolge des am Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Verhaltens von T_i an den Querschnitten:

$$\text{an } a_\mu: \qquad 2\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) = 0,$$

$$\text{an } b_\mu: \qquad 2\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega}) = 4\,\Phi_\mu(e_i)(\overset{+}{T_i} + \overset{-}{T_i}) = 4\frac{\partial}{\partial e_i}(\overset{+}{u_\mu} + \overset{-}{u_\mu}),$$

sodass wir erhalten

$$\text{an } a_\mu: \qquad \overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = c_\mu,$$

$$\text{an } b_\mu: \qquad \overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = 2(\overset{+}{u_\mu} + \overset{-}{u_\mu}) + d_\mu = 4\overset{-}{u_\mu} + 2a_{\mu\mu} + d_\mu,$$

wo die c_μ und d_μ von den Verzweigungspunkten unabhängige, also numerische Constanten sind, und zwar ganze Vielfache von $4\pi i$.

Ausserdem hat Ω constante Stetigkeitsunterbrechungen an Schnitten, die von einem beliebigen Punkte nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten, also den Verzweigungspunkten und den unendlich fernen Gebieten verlaufen.

Eine aufmerksame Betrachtung der hier abgeleiteten Eigenschaften der Funktion Ω, besonders ihres Verhaltens an den Querschnitten, weist auf eine enge Beziehung zwischen ihr und der hyperelliptischen Thetafunktion hin und in der That leistet sie für diese, was die Klein'sche Funktion $Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$ für die Sigmafunktionen leistet,[1] indem sie die explicite Darstellung der Thetafunktion ermöglicht. Ein näheres Eingehen auf diesen Zusammenhang liegt ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit, wir wollen daher nur kurz im einfachsten Fall den Thatbestand angeben.

Die durch die Reihe

$$\vartheta((u_\mu - \eta_\mu)) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{+\infty} e^{Q((m)) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{p} m_\mu (u_\mu - \eta_\mu)},$$

worin

$$Q((m)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu,$$

definierte Funktion, wird, wenn nicht die Reihensumme identisch verschwindet, als Funktion von z zur ersten Ordnung null in p vereinigt oder getrennt liegenden Punkten

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$$

und wenn die mit den $2p$ ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots, g_p, \qquad h_1, h_2, \ldots, h_p$$

gebildeten Simultanperioden symbolisch durch

$$(gh)_\mu = g_\mu \pi i + h_1 a_{1\mu} + h_2 a_{2\mu} + \ldots + h_p a_{p\mu}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

bezeichnet werden, so besteht zwischen den Nullpunkten und den Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_p$ die Beziehung

$$\eta_\mu = \sum_\nu u_\mu(\varepsilon_\nu) + (g'h')_\mu - \frac{1}{2}(GH)_\mu. \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

---

[1] vgl. Klein, Math. Ann. Bd. 32.

Hierin sind die $g'_1, g'_2, \ldots, g'_p, h'_1, h'_2, \ldots, h'_p$ ganze Zahlen, die von dem Verhalten von $\log\vartheta$ an den Querschnitten, die $G_1, \ldots, G_p, H_1, \ldots, H_p$ solche, die von dem Verhalten von $\log f(z)$ an den Querschnitten abhängen, und zwar derart, dass

$$\text{an } a_\mu:\quad \log\frac{\overset{+}{f}(z)}{\overset{-}{f}(z)} = 4H_\mu\pi i, \qquad \text{an } b_\mu:\quad \log\frac{\overset{+}{f}(z)}{\overset{-}{f}(z)} = -4G_\mu\pi i$$

ist. Bei dem von uns gewählten Querschnittsystem ist[1]

$$G_1 = 1,\quad G_2 = 2, \ldots, G_p = p,$$
$$H_1 = 1,\quad H_2 = 1, \ldots, H_p = 1.$$

Es mögen nun die Nullpunkte $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ sämtlich in Verzweigungspunkte

$$e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(p)}$$

fallen. Dann gestaltet sich der μ^{te} Parameter folgendermassen:

Man bilde die Funktion

$$A(z) = \sqrt{\overline{z-e^{(1)}}\,.\,\overline{z-e^{(2)}}\ldots\ldots\overline{z-e^{(p)}}}$$

und bestimme $2p$ ganze Zahlen $g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p$ derart, dass

$$\text{an } a_\mu:\quad \log\frac{\overset{+}{A}(z)}{\overset{-}{A}(z)} = h_\mu\pi i, \qquad \text{an } b_\mu:\quad \log\frac{\overset{+}{A}(z)}{\overset{-}{A}(z)} = -g_\mu\pi i$$

ist, dann ist der μ^{te} Parameter

$$\eta_\mu = -\frac{1}{2}(G+g\,,\,H+h)_\mu + (g'h')_\mu$$

[1] Zum ersten Male treten diese Zahlen wohl in der Abhandlung von Herrn PRYM, *Zur Theorie der Funktionen der zweiblättrigen Fläche*, 1866 (S. 35 Charakteristik ($\varkappa$)) auf, ohne freilich ausdrücklich genannt und bezeichnet zu werden, doch haben sie dort wegen des anderen Querschnittsystems entsprechend andere Werte.

und die in den p Verzweigungspunkten verschwindende Thetafunktion ist, abgesehen von einem nirgends verschwindenden Exponentialfaktor

$$\vartheta\left|\begin{matrix} H+h \\ G+g \end{matrix}\right|((u_\mu)) = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{Q\left(\left(m+\frac{H+h}{2}\right)\right)+2\sum\limits_{\mu}\left(m_\mu+\frac{H_\mu+h_\mu}{2}\right)\left(v_\mu+\pi i\frac{G_\mu+g_\mu}{2}\right)},$$

und *diese Thetafunktion nun wird mittels der Funktion Ω durch die Gleichung*

$$\vartheta\left|\begin{matrix} H+h \\ G+g \end{matrix}\right|((u_\mu)) = c\,\frac{A(z)}{\sqrt[4]{f(z)}}\,e^{-\frac{1}{2}\Omega}$$

dargestellt, worin c von z unabhängig ist.

Strassburg i. E., September 1894.