

## SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

EMILE BOREL

à PARIS.

La découverte par M. WEIERSTRASS de la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires, a donné une importance particulière à l'étude de la distribution de leurs zéros. La notion de genre, introduite par LAGUERRE et intimement liée à cette distribution, s'est rapidement révélée comme fondamentale; nous verrons qu'une notion analogue, mais en quelque mesure plus précise, celle de l'*ordre*, peut aussi rendre des services.

C'est M. POINCARÉ qui a fait le premier cette remarque capitale, que le genre d'une fonction entière est en relation étroite avec l'ordre de grandeur de la fonction pour les grandes valeurs de la variable; dans un mémoire fondamental,<sup>1</sup> M. HADAMARD a complété sur plusieurs points les résultats de M. POINCARÉ. Il a notamment montré que la connaissance de l'ordre de grandeur de la fonction permet de fixer une limite supérieure du nombre de ses zéros inférieurs à un nombre donné. Mais, sauf le cas très particulier des fonctions de genre zéro, il a laissé de côté ce que l'on peut appeler la réciproque de cette proposition, c'est à dire la question de savoir si le nombre des zéros atteint effectivement cette limite supérieure. La principale difficulté de cette recherche était due à ce fait qu'il existe des fonctions entières, croissant aussi vite que l'on veut, et n'ayant aucun zéro; on ne pouvait donc espérer que la réciproque

---

<sup>1</sup> Journal de mathématiques pures et appliquées 1893.

*Acta mathematica.* 20. Imprimé le 20 juillet 1897.

dont nous venons de parler serait vraie d'une manière absolue; mais un théorème remarquable, dû à M. PICARD, qui l'a découvert en 1880 par une voie indirecte, indiquait dans quelle direction on pouvait espérer aboutir. C'est, en effet, en généralisant ce théorème d'une manière convenable, après en avoir donné une démonstration directe, que j'ai pu indiquer la véritable relation entre l'ordre de grandeur des fonctions entières et le nombre de leurs zéros: désignons par  $G$  une fonction entière donnée et par  $\varphi$  une fonction entière quelconque croissant beaucoup moins rapidement que  $G$ ; parmi les équations de la forme

$$\varphi_1(z)G(z) = \varphi_2(z)$$

*il y en a au plus une* dont le nombre des racines soit notablement inférieur à la limite supérieure qu'on obtient en précisant convenablement un résultat de M. HADAMARD.

Ce travail est divisé en deux parties. Dans la première, prenant pour point de départ les résultats de MM. POINCARÉ et HADAMARD, je les complète sur quelques points et les précise notamment en introduisant, au lieu du genre, l'*ordre*, qui est un nombre  $\rho$  ainsi défini:  $a_n$  étant le module de la  $n^{\text{ième}}$  racine, la série  $\sum \frac{1}{a_n^{\rho+\varepsilon}}$  est convergente et la série  $\sum \frac{1}{a_n^{\rho-\varepsilon}}$  est divergente, quelque petit que soit  $\varepsilon$ . Pour le cas où le genre est infini, j'indique la très grande importance qu'il y a à ne pas augmenter le degré des polynômes qui figurent en exposant dans les facteurs primaires, plus qu'il n'est strictement nécessaire pour assurer la convergence. On peut ainsi étendre aux produits de facteurs primaires la propriété essentielle des exponentielles  $e^{G(z)}$ , qui peut s'énoncer ainsi: lorsque le module de  $z$  augmente indéfiniment, les plus grandes valeurs du module de la fonction d'une part, et les inverses des plus petites valeurs de ce module d'autre part, sont sensiblement du même ordre de grandeur. Ces remarques jouent un rôle essentiel dans la deuxième partie, qui est consacrée au théorème de M. PICARD et à sa généralisation; cette deuxième partie se termine par une nouvelle rédaction de la première démonstration que j'ai donnée de ce théorème dans les Comptes Rendus, démonstration que, sur la demande qu'a bien voulu me faire M. MITTAG-LEFFLER, j'ai développée dans tous ses détails. Je l'ai fait d'autant plus

volontiers, que cela m'a paru une occasion de donner un exemple de procédés de raisonnement qui permettront sans peine au lecteur de compléter certaines démonstrations que j'ai dû abréger.

Enfin, en terminant, j'indique quelques sujets de recherches dont l'un est étroitement lié avec la formule donnée par RIEMANN, pour déterminer le nombre des racines de la fonction  $\xi(t)$ , dans son célèbre mémoire sur la fonction  $\zeta(s)$ . En admettant, en effet, une proposition générale que je n'ai réussi qu'à rendre probable, on trouve immédiatement, pour le nombre des racines de  $\xi(t)$  inférieures à un nombre donné, la formule même de RIEMANN.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

---

### La décomposition en facteurs primaires.

Suivant l'usage, nous appellerons facteur primaire l'expression  $F_p(u)$  définie par l'égalité:

$$F_p(u) = (1 - u)e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}};$$

on sait que, si une fonction entière  $G(z)$  admet les zéros  $z = a_n$  et si la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$  est convergente, on a

$$G(z) = e^{H(z)} \prod F_p\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

$H(z)$  étant une fonction entière. On choisit d'ailleurs en général pour  $p$  le plus petit nombre tel que la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$  soit convergente. Nous verrons qu'il est *essentiel* de procéder ainsi, sous peine de masquer complètement les propriétés de la fonction. Lorsqu'il n'existe pas de nombre fixe  $p$  tel que la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$  soit convergente, on est conduit à prendre

pour  $p$  une fonction croissante de  $n$ . On pose généralement  $p = n$ , c'est à dire que l'on forme le produit

$$\prod F_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Il est manifeste que cette valeur de  $p$  est beaucoup trop grande; il suffit évidemment de prendre  $p + 1 \geq \log n > p$ ; car on a

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\log n}} = \sum \frac{1}{n^{\log |a_n|}}$$

et le nombre des  $a_n$  dont le module est inférieur à  $e^2$  étant en nombre limité, les termes de la série qui figure dans le second membre sont, à partir d'un certain rang, inférieurs à ceux de la série convergente  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

Il suffirait, en supposant les  $a_n$  rangés par modules croissants, de prendre pour  $p$  l'entier le plus voisin du nombre  $p'$  défini par l'égalité

$$|a_n^{p'}| = n^2.$$

Nous voyons que le nombre  $p$  croît certainement moins vite que  $\log n$  et que la série  $\sum \frac{1}{a_n^p}$  est comparable à la série  $\sum \frac{1}{n^2}$ ; lorsque la densité des racines sera très grande, nous aurons intérêt à prendre  $p = (\log n)^{1+\varepsilon}$ .

Nous allons nous borner d'abord au cas où  $p$  est une constante et où  $H(z)$  est un polynome; si son degré est  $q$ , on appelle genre de la fonction le plus grand des deux entiers  $p$  et  $q$ . Nous introduisons un nombre  $\rho$  défini par la condition que la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$  soit convergente et la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$  divergente, quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ . Lorsque  $\rho$  n'est pas entier,  $p$  est égal à la partie entière de  $\rho$ ; si  $\rho$  est entier,  $p$  peut être égal à  $\rho$  ou à  $\rho - 1$ ; ce dernier cas présente des difficultés spéciales, analogues à celles qui se rencontrent dans la recherche d'un criterium général de convergence;  $\rho$  sera dit l'ordre de la fonction.

Nous allons étudier séparément le produit de facteurs primaires et le facteur exponentiel. Considérons d'abord un produit de facteurs primaires dont l'ordre  $\rho$  n'est pas entier et a  $p$  pour partie entière:

$$G(z) = \prod F_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Dans le mémoire déjà cité, M. HADAMARD a démontré que l'on pouvait trouver une suite de nombres  $R$  croissant au delà de toute limite <sup>1</sup> et tels que pour  $|z| = R$ , l'on ait

$$|G(z)| > e^{-R^{\rho+\varepsilon}},$$

$\varepsilon$  étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Nous allons montrer, d'autre part, que, pour les valeurs suffisamment grandes de  $R$ , la limite supérieure du module de  $G(z)$  (lorsque  $|z| = R$ ) est comprise entre  $e^{R^{\rho-\varepsilon}}$  et  $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Supposons, en effet, que le module de  $x$  soit égal à  $R$  et considérons d'abord les facteurs pour lesquels  $|a_n| > R$ ; le logarithme de l'un quelconque d'entre eux est

$$-\frac{x^{p+1}}{(p+1)a_n^{p+1}} - \frac{x^{p+2}}{(p+2)a_n^{p+2}} - \dots$$

On a d'ailleurs sensiblement  $|a_n| = n^{\frac{1}{\rho}}$  et  $p < \rho < p+1$ . On en conclut, en remplaçant, s'il est nécessaire,  $\rho$  par  $\rho + \varepsilon$ ,

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \int_n^\infty \frac{dn}{n^{\frac{p+1}{\rho}}} = \frac{\rho}{p+1-\rho} n^{1-\frac{p+1}{\rho}}.$$

Donc, si  $|x| = R$  et  $|a_n| \geq R = n^{\frac{1}{\rho}}$ , on a

$$\sum_n \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)|a_n^{p+1}|} < \frac{\rho}{(p+1-\rho)(p+1)} R^\rho.$$

De même

$$\sum_n \frac{|x|^{p+2}}{(p+2)|a_n^{p+2}|} < \frac{\rho}{(p+2-\rho)(p+2)} R^\rho.$$

On en conclut immédiatement que la somme des logarithmes des facteurs pour lesquels  $|a_n| \geq R$  est inférieure à  $KR^\rho$ . Quand aux autres facteurs,

<sup>1</sup> Nous ajouterons que l'on peut aisément, en modifiant légèrement la démonstration de M. HADAMARD, affirmer que,  $\eta$  étant un nombre positif donné plus petit que un, les rayons de ces cercles compris dans un intervalle  $A$  suffisamment grand peuvent être pris quelconques dans une série d'intervalles d'étendue totale supérieure à  $\eta A$ .

il est aisé d'en calculer le produit, puisque leur nombre est limité; ce produit est:

$$\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{x \sum_1^n \frac{1}{a_i} + \frac{x^2}{2} \sum_1^n \frac{1}{a_i^2} + \dots + \frac{x^p}{p} \sum_1^n \frac{1}{a_i^p}}$$

et un calcul facile montre que chacun de ses facteurs, en vertu des hypothèses faites sur les  $a_n$ , est inférieur à  $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$ . Rappelons que  $|a_n|$  est égal à  $R$  et que  $a_m$  est comparable à  $m^{\frac{1}{\rho}}$ . Par exemple le produit des facteurs binomes a un module inférieur à  $R^n = R^{R^\rho} = e^{R^\rho \log R}$  et, quelque petit que soit  $\varepsilon$ , cette expression est, pour  $R$  suffisamment grand, inférieure à  $e^{R^{\rho+\varepsilon}}$ .

D'ailleurs la fonction  $G(z)$  ne peut pas croître moins vite que  $e^{R^{\rho'}}$ ,  $\rho'$  étant un nombre fixe inférieur à  $\rho$  car, d'après les formules de M. HADAMARD, il en résulterait que son ordre est au plus égal à  $\rho'$  et par suite ne peut atteindre  $\rho$ . Nous arrivons donc à la conclusion suivante, qui s'étendrait sans peine au cas où  $\rho$  est entier, que nous avons écarté pour plus de netteté<sup>1</sup>: Etant donnée une fonction entière d'ordre  $\rho$ , son module maximum croît comme  $e^{R^\rho}$  et, d'autre part, on peut trouver des cercles de rayons croissants  $R$  sur lesquels son minimum soit supérieur à  $e^{-R^\rho}$ , c'est à dire à l'inverse du maximum. Ces mots soulignés constituent pour nous le résultat principal; nous verrons qu'il s'étend, à quelques modifications près, à toutes les fonctions entières. Un cas intéressant est celui où  $\rho = 0$ ; c'est ce qui a lieu si l'on a par exemple  $a_n = n!$ ; il se traite aisément directement et nous ne nous y arrêterons pas.

Il est à peine besoin d'ajouter que les mêmes conclusions s'appliquent à une exponentielle de la forme  $e^{H(z)}$  dans laquelle  $H(z)$  est un polynome de degré  $q$ ; il est clair que les plus grandes valeurs de la fonction sont comparables à  $e^{R^q}$  et les plus petites à  $e^{-R^q}$ .

D'après cela, considérons une fonction entière  $G(z)$  qui croisse aussi rapidement que  $e^{R^\rho}$ ; nous dirons que  $\rho$  est l'ordre apparent de la fonction. Si  $\rho$  n'est pas un entier, l'ordre réel est égal à l'ordre apparent, c'est à

---

<sup>1</sup> Il y aurait lieu, dans ce cas, d'écrire le produit des facteurs primaires comme si la fonction était de genre  $\nu = \rho$ , même si elle était de genre  $p - 1$ .

dire que l'équation  $G(z) = 0$  a des racines précisément en nombre tel que la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$  soit divergente et la série  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$  convergente. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction serait de la forme

$$e^{H(z)} G_1(z),$$

l'ordre  $\rho'$  de  $G_1(z)$  étant inférieur à  $\rho$ . Si le degré de  $H(z)$  est inférieur à  $\rho$ , cette expression croît beaucoup moins vite que  $e^{R\rho}$  et si le degré de  $H(z)$  est supérieur à  $\rho$  elle croît plus vite, comme on le voit aisément d'après ce que nous savons sur le minimum de  $G_1(z)$  sur des cercles de rayons croissants.

D'ailleurs si  $P(z)$  est une fonction entière d'ordre apparent inférieur à  $\rho$ , la fonction  $G(z) - P(z)$  a encore  $\rho$  pour ordre apparent et par suite pour ordre réel, c'est à dire que la densité des racines de l'équation

$$G(z) = P(z)$$

est la même que celle des racines de l'équation

$$G(z) = 0.$$

Il en serait d'ailleurs évidemment de même pour l'équation

$$P_0(z)[G(z)]^n + P_1(z)[G(z)]^{n+1} + \dots + P_n(z) = 0$$

dans laquelle les  $P$  sont d'ordre apparent inférieur à  $\rho$ : car son premier membre est évidemment d'ordre apparent  $\rho$ .

Dans le cas où  $\rho$  est un nombre entier ces conclusions ne subsistent pas, mais nous pouvons affirmer que, si  $P(z)$  est une fonction quelconque d'ordre apparent inférieur à  $\rho$ , l'une au plus des fonctions  $G(z) - P(z)$  a un ordre réel inférieur à  $\rho$ . Supposons en effet que l'on ait

$$G(z) - P(z) = G_1(z)e^{H_1(z)},$$

$$G(z) - Q(z) = G_2(z)e^{H_2(z)},$$

l'ordre des fonctions  $P, Q, G_1, G_2$  étant inférieur à un nombre  $\rho' < \rho$ .

$G(z)$  étant d'ordre apparent  $\rho$ ,  $H_1(z)$  et  $H_2(z)$  sont des polynomes de degré  $\rho$  et l'on a

$$(1) \quad e^{H_1(z)} G_1(z) - e^{H_2(z)} G_2(z) = Q(z) - P(z),$$

$$(2) \quad e^{H_1(z)} [G_1(z) - e^{H_2(z) - H_1(z)} G_2(z)] = Q(z) - P(z).$$

Si le degré de  $H_2(z) - H_1(z)$  était inférieur à  $\rho$ , la quantité entre crochets serait d'ordre apparent inférieur à  $\rho$  et par suite le premier membre serait d'ordre  $\rho$  comme le facteur  $e^{H_1(z)}$ , ce qui est absurde puisque le second membre est d'ordre inférieur à  $\rho$ . Cela posé, reprenons l'égalité (1) et écrivons-la, en posant  $Q - P = R$ ,

$$\frac{G_1(z)}{R(z)} e^{H_1(z)} - \frac{G_2(z)}{R(z)} e^{H_2(z)} = 1.$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à  $z$ ; nous aurons:

$$[G_1' R - G_1 R' + G_1 R H_1'] e^{H_1(z)} - [G_2' R - G_2 R' + G_2 R H_2'] e^{H_2(z)} = 0,$$

c'est à dire une relation de la forme:

$$M(z) + N(z) e^{H_2(z) - H_1(z)} = 0,$$

$M$  et  $N$  sont des fonctions d'ordre évidemment inférieur à  $\rho$  et qu'on s'assure immédiatement n'être pas identiquement nulles

$$\left[ \text{si } M = 0, \frac{G_1'}{G_1} - \frac{R'}{R} + H_1' = 0, \text{ etc.} \right]$$

d'autre part nous avons vu que  $H_2 - H_1$  était bien de degré  $\rho$ ; donc cette égalité est impossible. L'on démontrerait d'une manière analogue l'impossibilité de l'existence de plus d'une fonction de la forme

$$P_0(z) [G(z)]^n + \dots + P_n(z)$$

dont l'ordre soit inférieur à  $\rho$ , l'ordre des  $P$  étant inférieur à  $\rho$ . Mais nous nous étendrons davantage sur ce sujet dans la deuxième partie, ainsi que sur le fait que nous avons admis implicitement: une fonction et sa dérivée ont même ordre apparent.

Nous allons maintenant nous occuper des fonctions dont l'ordre est infini; nous étudierons d'abord les exponentielles de la forme  $e^{G(z)}$ .



Nous allons voir qu'en désignant par  $\varphi(r)$  le maximum du module de  $e^{G(z)}$  lorsque  $|z| \leq r$  et par  $\psi(r)$  l'inverse du minimum dans les mêmes conditions<sup>1</sup>, l'on a, pour une infinité de valeurs de  $r$  croissant indéfiniment

$$[\log \varphi(r)]^\alpha < \log \psi(r) < [\log \varphi(r)]^\beta$$

$\alpha$  étant un nombre quelconque plus petit que  $un$  et  $\beta$  un nombre quelconque plus grand que  $un$ . Posons en effet  $z = re^{i\theta}$  et

$$G(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta) = a_0 + ia'_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m + \dots,$$

$P$  et  $Q$  étant réels ainsi que  $a_0$  et  $a'_0$ . Désignons d'ailleurs par  $A(r)$  la plus grande valeur positive de  $P$  pour  $|z| = r$  et par  $B(r)$  la plus grande valeur positive de  $-P$  dans les mêmes conditions; on a  $\log \varphi(r) = A$  et  $\log \psi(r) = B$ , de sorte que la proposition à démontrer devient

$$[A(r)]^\alpha < B(r) < [A(r)]^\beta$$

il suffit d'ailleurs démontrer l'une de ces inégalités car elles se ramènent évidemment l'une à l'autre en changeant  $G$  en  $-G$ , ce qui permute  $A$  et  $B$ .

Or on a manifestement:

$$\pi r^m a_m = \int_0^{2\pi} P(r, \theta) e^{-im\theta} d\theta,$$

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} P d\theta$$

et par suite

$$\pi r^m |a_m| < \int_0^{2\pi} |P| d\theta,$$

$$\pi r^m |a_m| + 2\pi a_0 < \int_0^{2\pi} (|P| + P) d\theta < 4\pi A(r).$$

Donnons maintenant au module de  $z$  une valeur  $\rho$  inférieure à  $r$ ; nous aurons évidemment

$$B(\rho) < |a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \dots + |a_m|\rho^m + \dots,$$

---

<sup>1</sup> On sait d'ailleurs que ce maximum et ce minimum sont atteints pour une valeur de  $z$  dont le module est  $r$ .

d'où, en se servant de la dernière inégalité,

$$B(\rho) < |a_0| + [4A(r) + 2|a_0|] \left( \frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} + \dots + \frac{\rho^m}{r^m} + \dots \right)$$

Le nombre  $a_0$  étant donné, nous pouvons supposer  $r$  assez grand pour que  $A(r)$  soit grand par rapport à  $a_0$  et nous pourrions écrire alors

$$(1) \quad B(\rho) < \frac{8\rho A(r)}{r - \rho}$$

cette inégalité ayant lieu pour toutes les valeurs de  $r$  dépassant une certaine limite,  $\rho$  pouvant avoir une valeur quelconque inférieure à  $r$ .

Nous allons montrer qu'on ne peut pas avoir pour toutes les valeurs de  $r$  dépassant un nombre donné<sup>1</sup>

$$(2) \quad B(r) > [A(r)]^2;$$

on verrait aisément d'ailleurs que l'exposant 2 pourrait être remplacé par un exposant quelconque supérieur à un. On déduit en effet de (1) et de (2):

$$[A(\rho)]^2 < \frac{8\rho A(r)}{r - \rho}$$

ce que l'on peut écrire en posant  $r = \rho + \varepsilon$

$$(3) \quad A(\rho + \varepsilon) > \varepsilon \frac{[A(\rho)]^2}{8\rho}$$

et cette inégalité serait vérifiée à partir d'une *valeur donnée* de  $\rho$ , pour toute *valeur positive* de  $\varepsilon$ . Nous allons voir que c'est impossible. Remplaçons, en effet, dans l'inégalité (3),  $\rho$  par  $\rho + \varepsilon$  et  $\rho + \varepsilon$  par  $\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$ ; posons d'ailleurs  $A(\rho) = A$  et  $8(\rho + 2\varepsilon) = C$ ; nous aurons

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \frac{[A(\rho + \varepsilon)]^2}{8(\rho + \varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2} \frac{[A(\rho + \varepsilon)]^2}{C}$$

---

<sup>1</sup> Notre démonstration légèrement modifiée prouverait même qu'il n'est pas possible que cette inégalité soit vérifiée dans une série d'intervalles  $[r_1 < r < r_2]$  tels que l'étendue totale de ces intervalles qui sont compris entre 0 et  $R$  reste, lorsque  $R$  croît, constamment supérieure à  $kR$ ,  $k$  étant un nombre positif quelconque. Ce point aura de l'importance plus loin.

et comme l'on a

$$A(\rho + \varepsilon) > \varepsilon \frac{[A(\rho)]^2}{C},$$

on en conclut

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right) > \frac{\varepsilon}{2C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{C^2} A^4.$$

Nous avons de même

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) > \frac{\varepsilon}{2^2} \frac{\left[A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2}{C},$$

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) > \frac{\varepsilon}{2^2 \cdot C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^2 C^2} \cdot \frac{\varepsilon^{2^2}}{C^{2^2}} A^{2^3}.$$

On trouverait ensuite

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3}\right) > \frac{\varepsilon}{2^3 \cdot C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^{2 \times 2} C^2} \cdot \frac{\varepsilon^{2^2}}{2^{2^2} C^{2^2}} \frac{\varepsilon^{2^3}}{C^{2^3}} A^{2^4},$$

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4}\right) > \frac{\varepsilon}{2^4 \cdot C} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^{3 \times 2} C^2} \cdot \frac{\varepsilon^{2^2}}{2^{2 \times 2^2} C^{2^2}} \cdot \frac{\varepsilon^{2^3}}{2^{2^3} C^{2^3}} \frac{\varepsilon^{2^4}}{C^{2^4}} A^{2^5}$$

et enfin

$$A\left(\rho + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) > \frac{\varepsilon^{1+2+2^2+\dots+2^n}}{2^{n+(n-1)2+(n-2)2^2+\dots+2^{n-1}}} \frac{A^{2^{n+1}}}{C^{1+2+\dots+2^n}}.$$

Les exposants de  $\varepsilon$  et de  $C$  sont inférieurs à  $2^{n+1}$ ; celui de 2 est inférieur à

$$2^n \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots \right]$$

on constate aisément que la série convergente qui est entre crochets a une somme inférieure à 4; et on a:

$$2^{4 \times 2^n} = 4^{2^{n+1}}.$$

En supposant d'ailleurs  $\varepsilon < 1$  et  $C > 1$ , on a enfin

$$A\left(\rho + 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) > \left(\frac{\varepsilon A}{4C}\right)^{2^{n+1}}.$$

Or il est clair que l'on peut supposer  $\rho$  et  $\varepsilon$  choisis de manière que

l'on ait  $\frac{\varepsilon A}{4C} > 1$ , c'est à dire  $\varepsilon A(\rho) > 32(\rho + 2\varepsilon)$ ; on en conclut que  $A(\rho + 2\varepsilon)$  dépasserait toute limite assignable, ce qui est évidemment absurde. Notre proposition est donc établie.

Nous allons maintenant étendre ce résultat à un produit de facteurs primaires d'ordre infini et montrer que l'on peut trouver une série de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels le maximum d'un tel produit est comparable à l'inverse de son minimum. Mais, avant d'aborder cette recherche, il est indispensable de préciser cet énoncé en présentant quelques remarques sur les fonctions positives croissantes.

Soit  $X = F(x)$  une fonction positive croissante: la fonction inverse  $x = f(X)$  est aussi une fonction positive croissante. Nous dirons que la fonction  $F(x)$  est à croissance *très rapide* si, quelque soit le nombre des exponentielles superposées, l'on a, à partir d'une valeur de  $x$  suffisamment grande

$$F(x) > e^{e^{e^{\dots e^x}}}$$

La fonction inverse  $f(X)$  sera dite alors à croissance très lente et l'on aura, à partir d'une valeur assez grande de  $X$ ,

$$f(X) < \log \log \dots \log X$$

quelque soit le nombre des signes  $\log$  (il est bien clair que la valeur de  $X$  dépend du nombre de ces signes).

Nous ne nous occuperons que des fonctions à croissance très lente ou très rapide; les autres sont faciles à étudier directement.

Il s'agit tout d'abord de définir dans quel cas nous dirons que deux fonctions sont *du même ordre de grandeur* ou *croissent sensiblement de la même manière*. Nous allons voir qu'il est possible d'adopter pour ces expressions des définitions *extrêmement différentes*, de sorte qu'en se plaçant à des points de vue en apparence tout à fait légitimes, on pourrait se trouver conduit à adopter des définitions contradictoires. D'ailleurs il est bien clair que, du moment que l'on a suffisamment précisé la définition adoptée, on est libre de la choisir comme on le veut; et même de la varier suivant le genre de recherches auquel on se livre, pourvu qu'il n'y ait pas de confusion. Je ne prétends donc pas que la définition à laquelle je me suis arrêté soit *la meilleure*; celle que je vais indiquer en

premier lieu est peut être préférable dans certaines recherches; mais elle n'aurait, je crois, conduit à rien dans la question qui fait l'objet principal de ce mémoire. Je tiens cependant à la faire connaître, car son exposition nous fera pénétrer la nature des difficultés qui se présentent dans l'étude des fonctions à croissance très rapide.

Indiquons d'abord un procédé simple pour former de telles fonctions; posons

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_1(x) = e^{\varphi_0(x)}, \quad \dots, \quad \varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)}, \quad \dots$$

et désignons par  $\alpha_n$  des nombres positifs croissant indéfiniment avec  $n$ . La série

$$F(x) = \sum \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(\alpha_n)}$$

évidemment convergente pour toute valeur de  $x$ , représente une fonction à croissance très rapide. Lorsque  $x$  est compris entre  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n+1}$ , cette fonction est plus grande que  $\varphi_{n-1}(\alpha_n)$ , en supposant que  $\alpha_n$  ne soit pas une fonction de  $x$  à croissance très lente; on a en effet

$$\begin{aligned} \varphi_n(x + \varepsilon) &> \varphi_n(x) + \varepsilon \varphi'_n(x), \\ \frac{\varphi_n(\alpha_n + \varepsilon)}{\varphi_n(\alpha_n)} &> \varepsilon \frac{\varphi'_n(\alpha_n)}{\varphi(\alpha_n)} > \varepsilon \varphi_{n-1}(\alpha_n) \varphi_{n-2}(\alpha_n). \end{aligned}$$

Donc si  $\varepsilon \varphi_{n-2}(\alpha_n) > 1$ , cette expression est supérieure à  $\varphi_{n-1}(\alpha_n)$ ; or  $\alpha_n + \frac{1}{\varphi_{n-2}(\alpha_n)}$  est compris entre  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n+1}$ , au moins à partir d'une certaine valeur de  $n$ , puisque  $\alpha_n$  n'est pas à croissance très lente.

Nous voyons ainsi que la fonction  $F(x)$  peut être, pour des valeurs croissantes de  $x$ , successivement regardée comme comparable aux fonctions successives  $\varphi_n(x)$ ; d'ailleurs il est clair que si  $F(x)$  est comparable à  $\varphi_n(x)$ ,  $e^{F(x)}$  est comparable à  $\varphi_{n+1}(x)$ ; cette remarque va nous conduire à un résultat très curieux. Prenons en effet  $\alpha_n = \log n$  et considérons la fonction  $F(x + \varepsilon)$  en même temps que  $F(x)$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, *mais fixe*. Il est clair que, à partir d'une certaine valeur de  $n$ , on aura

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < \varepsilon$$

et que par suite  $x + \varepsilon$  sera supérieur à  $\alpha_{n+1}$  lorsque  $x$  sera compris entre  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n+1}$ . De là et de la remarque précédente résulte immédiatement que l'on aura

$$(1) \quad F(x + \varepsilon) > e^{F(x)}$$

et cela, quelque soit le nombre fixe  $\varepsilon$ , pourvu que  $x$  soit suffisamment grand. Nous avons vu, d'autre part, que l'on ne peut avoir, à partir d'une valeur fixe de  $x$ , et pour toute valeur de  $\varepsilon$

$$F(x + \varepsilon) > \varepsilon [F(x)]^2$$

à moins que  $F(x)$  ne devienne infini pour une valeur finie de  $x$ .

L'inégalité (1) exprime que, pour certaines fonctions  $F(x)$ ,  $F(x + \varepsilon)$  croît plus vite que  $e^{F(x)}$ ; on est donc amené, ou bien à admettre que  $e^{F(x)}$  est du même ordre de grandeur que  $F(x)$ , ou bien que  $F(x + \varepsilon)$  n'est pas du même ordre de grandeur que  $F(x)$ ; c'est cette dernière convention que nous choisirons finalement; nous allons indiquer brièvement à quel point de vue on pourrait se placer pour justifier la première.

Remarquons d'abord que, quelque rapidement que croisse la fonction  $\theta(x)$ , on peut trouver une fonction  $F(x)$  croissant assez vite pour que, quelque petit que soit  $\varepsilon$ , l'on ait

$$F(x + \varepsilon) > \theta[F(x)],$$

pourvu que  $x$  soit suffisamment grand. Il suffirait, pour le montrer, de remplacer dans les raisonnements précédents  $e^x$  par  $\theta(x)$ ,  $e^{e^x}$  par  $\theta[\theta(x)]$ , etc. Mais c'est là un point accessoire qu'il est inutile de développer en détail; nous voulions seulement montrer que, si l'on regarde  $F(x + \varepsilon)$  comme du même ordre de grandeur que  $F(x)$ , on sera amené, au moins pour certaines fonctions  $F(x)$  à regarder  $\theta[F(x)]$  comme du même ordre de grandeur que  $F(x)$ , quelque rapidement que croisse la fonction donnée  $\theta(x)$ . Il en résulte que, si l'on se place à ce point de vue, la définition de l'ordre de grandeur ne saurait être absolue, c'est à dire indépendante de  $F(x)$ , car il serait évidemment absurde,  $F(x)$  étant donné, de dire que  $\theta[F(x)]$  est du même ordre de grandeur que  $F(x)$ , quelque rapidement que croisse  $\theta(x)$ . On devra donc adopter une définition relative, c'est à dire dans laquelle interviendra l'ordre de grandeur de  $F(x)$ . Voici, par

exemple, celle que l'on pourrait choisir. Soient  $F(x)$  et  $G(x)$  deux fonctions à croissance très rapide et supposons que  $G(x)$  croisse plus vite<sup>1</sup> que  $F(x)$ . Si nous posons  $F(x) = X$ , nous aurons

$$G(x) = \theta(X)$$

et la fonction  $\theta(X)$  sera une fonction positive croissante. D'ailleurs elle croîtra plus vite que  $X$ , puisque  $G$  croît plus vite que  $F$  et par suite les fonctions

$$\theta_2(X) = \theta[\theta(X)] , \dots , \theta_n(X) = \theta[\theta_{n+1}(X)] , \dots$$

croîtront de plus en plus vite. On pourrait appeler  $\theta$  le rapport des fonctions  $F$  et  $G$  et dire que  $F$  et  $G$  sont du même ordre de grandeur, si l'on a, quelque soit  $n$

$$F(x) > \theta_n(x)$$

à partir d'une valeur de  $x$  suffisamment grande (qui dépend évidemment de  $n$ ); avec cette définition, il est aisé de voir que  $F(x + \varepsilon)$  est du même ordre de grandeur que  $F(x)$ , quelque soit  $\varepsilon$ . Soit en effet:

$$F(x + \varepsilon) = \theta[F(x)]$$

on en conclura

$$(1) \quad F(x + n\varepsilon) = \theta_n[F(x)].$$

Dire que  $F(x + \varepsilon)$  et  $F(x)$  ne sont pas du même ordre de grandeur, c'est dire que, pour une certaine valeur de  $n$ , il existe des valeurs de  $X$  indéfiniment croissantes et pour lesquelles

$$(2) \quad F(X) < \theta_n(X).$$

Si l'on fait  $F(x) = X$  dans (1) on aura

$$F(x + n\varepsilon) = \theta_n(X) > F(X)$$

<sup>1</sup> Nous écartons le cas où l'on trouverait des valeurs de  $x$  aussi grandes que l'on veut et telles que  $G > F$  et aussi des valeurs de  $x$  aussi grandes que l'on veut et telles que  $G < F$ . Ce cas, dont nous dirons un mot plus loin à un autre point de vue, mériterait d'être étudié avec soin.

c'est à dire

$$x + n\varepsilon > X$$

ce qui est absurde puisque  $X = F(x)$  est une fonction à croissance très rapide et que cette inégalité devrait être vérifiée pour une infinité de valeurs de  $X$  (ou de  $x$ ) indéfiniment croissantes.

Pour les fonctions à croissance très lente, on pourrait donner une définition analogue; si  $f(X)$  et  $g(X)$  sont deux telles fonctions et si  $x = f(X)$ , on posera

$$g(X) = \theta(x)$$

et la fonction  $\theta$  sera une fonction croissante, mais qui croitra moins vite que  $x$  si  $g$  croît moins vite que  $f$ . Par suite les fonctions  $\theta_n(x)$  croîtront de moins en moins vite et  $f$  et  $g$  seront dits du même ordre de grandeur si les fonctions  $\theta_n(X)$  croissent toutes plus vite que  $f(X)$ .

On conclura aisément de là que, si deux fonctions sont du même ordre de grandeur, il en est de même des deux fonctions inverses, mais nous n'insisterons pas sur ces considérations, car, comme on s'en convaincra aisément par la suite, ces définitions, quelque intérêt qu'elles puissent avoir, ne conviennent pas au but que nous nous proposons, parce qu'elles sont beaucoup trop larges. Nous allons exposer maintenant celles que nous adopterons dans la suite de ce mémoire.

Considérons d'abord deux fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  à croissance très rapide. Nous dirons qu'elles sont du même ordre de grandeur si l'on a:

$$[G(x)]^{1-\varepsilon} < F(x) < [G(x)]^{1+\varepsilon},$$

quelque soit le nombre positif  $\varepsilon$ , pourvu que  $x$  soit suffisamment grand.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> On voit qu'il ne résulte pas de cette définition que  $\log G(x)$  et  $\log F(x)$  soient du même ordre de grandeur lorsque  $F(x)$  et  $G(x)$  le sont. On pourrait convenir que  $F(x)$  et  $G(x)$  sont du même ordre de grandeur si, au lieu des inégalités écrites dans le texte, l'on a

$$[\log G(x)]^{1-\varepsilon} < \log F(x) < [\log G(x)]^{1+\varepsilon}$$

on même des inégalités analogues avec des signes *log* superposés un nombre quelconque fini de fois. Ces définitions permettraient de simplifier certains des raisonnements qui suivent et conduiraient aux mêmes résultats généraux; mais, pour plus de netteté, nous nous en tiendrons à la définition donnée dans le texte.



Cette définition est très précise et semble ne pouvoir donner lieu à aucune difficulté; mais elle conduit, lorsqu'on considère les fonctions inverses, à des conséquences très curieuses et en même temps tout à fait essentielles pour ce qui va suivre.

Nous dirons que deux fonctions à croissance très lente  $x = f(X)$  et  $x_1 = g(X_1)$  sont du même ordre de grandeur, lorsque les fonctions inverses (à croissance très rapide)  $X = F(x)$  et  $X_1 = G(x_1)$  sont du même ordre de grandeur (pour  $x = x_1$ ). Cette définition étant posée, la conséquence curieuse dont nous voulons parler est la suivante: les fonctions à croissance très lente

$$(1) \quad x = F(X),$$

$$(2) \quad x_1 = G(X) = F(X) + \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant une constante, ne sont pas nécessairement du même ordre de grandeur. Supposons en effet que de la relation (1) on tire:

$$X = f(x),$$

la relation (2) donnera

$$X = f(x_1 - \varepsilon) = g(x_1).$$

On a donc  $g(x) = f(x - \varepsilon)$  et nous savons que la fonction  $g(x)$  et la fonction  $f(x)$  ne sont pas nécessairement du même ordre de grandeur, d'après la définition que nous avons adoptée, puisque l'on peut avoir

$$f(x) > e^{g(x)}$$

quelque petit que soit  $\varepsilon$ , pourvu que  $x$  soit assez grand, si la fonction  $g$  est convenablement choisie. Donc les fonctions inverses  $F(X)$  et  $F(X) + \varepsilon$  ne devront pas être considérées non plus comme étant du même ordre de grandeur.

Cet exemple prouve avec quelles précautions on doit raisonner sur les ordres de grandeur des fonctions à croissance très rapide ou très lente. Si l'on appelle *définir l'ordre de grandeur d'une fonction*, donner une fonction du même ordre de grandeur, on voit que, pour définir l'ordre de grandeur d'une fonction à croissance très rapide par la connaissance de la fonction inverse, il est nécessaire de donner celle-ci avec une précision extrême. Par exemple, dans le mémoire que nous avons déjà cité, M. HA-

DAMARD, considérant une fonction entière  $\sum a_m \xi^m$ , appelle  $\varphi(m)$  une fonction positive croissant plus vite que  $\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}$  et  $\psi(R)$  une fonction telle que le module de la fonction considérée (pour  $|z| = R$ ) croisse moins vite que  $e^{\int \frac{\psi(R)}{R}$ . Il montre (au n° 6) que si l'on donne la fonction  $\varphi$  on peut prendre pour  $\psi$  la fonction inverse de  $\varphi$ . Supposant ensuite que la fonction  $\psi$  soit donnée il montre, dans le cas où elle est à croissance très rapide, que, en désignant par  $\varphi$  la fonction inverse de  $\psi$ , l'on a

$$(1) \quad \sqrt[m]{\frac{1}{a_m}} > (1 - \varepsilon)\varphi(m),$$

$\varepsilon$  pouvant être aussi petit que l'on veut, pourvu que  $m$  soit assez grand. M. HADAMARD ajoute (p. 185) »Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° 6. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne *la véritable relation cherchée*». Il est clair que cela est parfaitement exact, à un certain point de vue; mais pour nous, ce résultat ne serait pas suffisamment précis et nous serons obligés de le compléter. En effet, si l'on considère  $\varepsilon$  comme une constante, les fonctions  $\varphi(m)$  et  $(1 - \varepsilon)\varphi(m)$  peuvent admettre des fonctions inverses  $\psi(R)$  d'ordres de grandeur très différents et l'ordre de grandeur de  $\psi(R)$  ne serait pas suffisamment défini. Il aurait d'ailleurs été assez singulier que les méthodes ingénieuses de M. HADAMARD, qui ne fournissent que des *inégalités* dans le cas où  $\psi(R)$  n'est pas à croissance très rapide, donnent une relation précise dans le cas plus difficile où  $\psi(R)$  croît très rapidement. Nous allons voir que l'on peut, dans ce cas, définir l'ordre de grandeur de  $\psi(R)$ , au sens que nous avons donné à cette expression, c'est à dire donner des inégalités plus précises que celles qui résulteraient de la relation (1) dans laquelle  $\varepsilon$  serait regardé comme une constante arbitrairement petite.

Nous allons pour cela, sans aborder dans toute sa généralité la question de reconnaître directement dans quels cas deux fonctions à croissance très lente sont du même ordre de grandeur, indiquer un cas très important où il en est ainsi. Nous montrerons que, si l'on pose:

$$f(X) = g(X) + \frac{1}{[\log X]^a}$$

$\alpha$  étant un nombre *positif* quelconque (qui peut être inférieur à *un*) les deux fonctions  $g(X)$  et  $f(X)$  sont du même ordre de grandeur. Par définition, cela revient à dire que les fonctions inverses sont du même ordre de grandeur, c'est à dire que la fonction à croissance très rapide

$$X = G(x)$$

est du même ordre de grandeur que la fonction

$$X_1 = F(x) = G\left[x + \frac{1}{[\log X]^\alpha}\right].$$

Remarquons d'abord que la fonction  $F(x)$  est constamment supérieure à la fonction  $G(x)$ ; il nous suffit donc de démontrer l'inégalité

$$F(x) < [G(x)]^{1+\varepsilon},$$

$\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire. Si cette inégalité n'était pas vérifiée, quelque petit que soit  $\varepsilon$ , à partir d'une certaine valeur de  $x$ , il existerait un nombre positif  $\varepsilon$  tel que l'on ait

$$(1) \quad F(x) > [G(x)]^{1+\varepsilon},$$

pour une infinité de valeurs de  $x$  croissant indéfiniment. D'ailleurs il est manifeste que cette infinité de valeurs ne peut être dénombrable; car, si  $x_1$  est l'une d'elles, en diminuant, s'il est nécessaire,  $\varepsilon$ , les fonctions  $F$  et  $G$  étant supposées continues, l'inégalité serait vérifiée dans un petit intervalle comprenant  $x_1$ . Nous nous contenterons de démontrer que l'inégalité (1) ne peut être vérifiée pour les valeurs de  $x$  remplissant des intervalles dont la somme soit infinie; ce n'est pas tout à fait la proposition énoncée, mais cela nous suffira pleinement pour les applications que nous avons en vue.

L'inégalité (1) peut en effet s'écrire, en posant  $X = G(x)$

$$(2) \quad G\left(x + \frac{1}{(\log X)^\alpha}\right) > [G(x)]^{1+\varepsilon}.$$

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que cette inégalité soit vérifiée pour toute valeur de  $x$ ; posons  $x_1 = x + \frac{1}{(\log X)^\alpha}$  et  $X_1 = G(x_1)$ ; nous aurons

$$X_1 > X^{1+\varepsilon}.$$

Remplaçons ensuite dans (2),  $x$  par  $x_1$ ; nous obtiendrons

$$(3) \quad G\left[x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha}\right] > [G(x_1)]^{1+\varepsilon}$$

ou, en posant

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha}; \quad X_2 = G(x_2);$$

$$X_2 > X_1^{1+\varepsilon}.$$

En continuant de même, nous aurons généralement

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{(\log X_{n-1})^\alpha}; \quad X_n = G(x_n);$$

$$X_n > X_{n-1}^{1+\varepsilon}$$

et par suite

$$\log X_n > (1 + \varepsilon) \log X_{n-1};$$

$$\frac{1}{(\log X_n)^\alpha} < \frac{1}{(\log X_{n-1})^\alpha} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon)^\alpha}$$

et par suite

$$(4) \quad x_{n+1} = x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha} + \frac{1}{(\log X_2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(\log X_n)^\alpha}$$

$$< x_1 + \frac{1}{(\log X_1)^\alpha} \left[ 1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{(n-1)\alpha}} \right].$$

On en conclut que l'on a  $x_{n+1} < \xi$ ,  $\xi$  étant un nombre fixe aisé à calculer et par suite:

$$G(\xi) > G(x_{n+1}) > X_1^{(1+\varepsilon)^n},$$

ce qui est évidemment absurde puisque  $\xi$  est fixe et que  $n$  peut être pris aussi grand que l'on veut.

Il reste à examiner le cas où l'inégalité (2) ne serait pas vérifiée pour toute valeur de  $x$ ; on remplacera alors au besoin  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  respectivement par des nombres plus grands  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , tels que cette inégalité soit vérifiée. La fonction  $G$  étant croissante, toutes nos inégalités seront vérifiées à fortiori. Mais, pour que nous puissions affirmer que  $x_{n+1}$  est inférieur à un nombre fixe  $\xi$ , il est nécessaire de supposer que l'étendue totale des intervalles, dans lesquels l'inégalité (2) est vérifiée,

est inférieure à la somme de la série convergente qui figure dans le second membre de l'inégalité (4); c'est ce qui aura lieu dans tous les cas si nous supposons cette étendue totale infinie. Nous pouvons donc affirmer que, si la différence de deux fonctions à croissance très lente est inférieure à  $\frac{1}{(\log X)^a}$ , les fonctions inverses sont du même ordre de grandeur, *en écartant tout au plus des intervalles d'étendue totale finie*. Nous verrons que cette dernière restriction, qu'il serait sans doute possible de lever, n'est jamais gênante.

Il est aisé maintenant de compléter la proposition de M. HADAMARD; il considère (p. 184—185) une fonction  $X = \phi(x)$  qui croît comme  $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ; M. HADAMARD suppose que  $\phi(x)$  croît plus vite que  $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ; nous supposons qu'elle croisse précisément comme  $x^{\frac{1}{\alpha}}$ , c'est à dire que  $\alpha$  soit la fonction<sup>1</sup> de  $x$  définie par l'égalité

$$X = \phi(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Cela étant M. HADAMARD obtient l'inégalité

$$\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}} > e^{-\alpha} \varphi(m) = (1 - \varepsilon) \varphi(m),$$

$\varphi$  étant la fonction inverse de  $\phi$ . Il s'agit d'évaluer  $\varepsilon$  en fonction de  $m = X$ ; or on a

$$1 - \varepsilon = e^{-\alpha}$$

et  $\alpha$  est très petit; on a donc  $\varepsilon < 2\alpha$ ; or

$$\alpha = \frac{\log x}{\log X}$$

et  $X$  étant une fonction à croissance très rapide cette expression est inférieure à  $\frac{1}{2x\sqrt{\log X}}$ ; donc  $\varepsilon\varphi(m) = \varepsilon x < \frac{1}{\sqrt{\log X}}$ ; cela suffit pour que les fonctions  $\varphi(m)$  et  $(1 - \varepsilon)\varphi(m)$  soient considérées par nous comme du même ordre de grandeur.

<sup>1</sup> Le fait que  $\alpha$  est une fonction de  $x$  au lieu d'être une constante n'introduit pas de difficulté sérieuse.

On compléterait aisément de la même manière le théorème fondamental qu'énonce M. HADAMARD p. 201 :

»Si le coefficient  $a_m$  décroît plus vite que  $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ , la  $p^{\text{ième}}$  racine a un module supérieur à  $(1 - \varepsilon)\zeta(p)$ , où  $\varepsilon$  est infiniment petit pour  $p$  infini.»

Nous ajouterons que  $\varepsilon$  est inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{\log p}}$  et cette remarque donne un sens *beaucoup plus précis* à cette proposition; l'on se rendra compte sans peine que cette précision est indispensable pour ce qui va suivre.

Il n'y a plus, en effet, maintenant, aucune difficulté à étendre aux produits de facteurs primaires d'ordre infini la proposition fondamentale que nous avons démontrée pour les fonctions d'ordre fini et pour les exponentielles  $e^{G(z)}$ . Nous allons montrer que l'on peut trouver des cercles de rayons croissant indéfiniment et sur lesquels le logarithme des plus grandes valeurs du module de la fonction d'une part, et le logarithme de l'inverse des plus petites valeurs de ce module, d'autre part, sont du même ordre de grandeur. Nous verrons même que l'on peut donner aux rayons de ces cercles toutes les valeurs comprises dans une série d'intervalles tels, que l'étendue totale de ceux de ces intervalles qui correspondent à des rayons inférieurs à  $R$  soit une fraction de  $R$  aussi voisine que l'on veut de l'unité (mais fixe, bien entendu). Cette remarque nous sera très utile.

Considérons donc un produit de facteurs primaires

$$F(z) = \prod F_{\rho}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right);$$

les  $\alpha_n$  sont supposés rangés par ordre de modules croissants et  $\rho$  est suppose égal à  $(\log n)^2$ .  $\rho$  est une fonction croissante de  $n$ ; nous pouvons le regarder aussi comme une fonction croissante de  $|\alpha_n| = r$ ; nous supposons que  $\rho$  est une fonction de  $r$  à croissance très rapide; le cas où il n'en serait pas ainsi se traiterai aisément d'une manière directe.<sup>1</sup> La

---

<sup>1</sup> Ce cas se subdivise en deux principaux, celui où la fonction  $\rho(r)$  croît moins vite que  $e^{e^r}$  le nombre des exposants étant limité et celui où la fonction  $\rho(r)$  n'est pas comparable à ces fonctions c'est à dire est alternativement plus grande et plus petite pour

fonction inverse  $r = F(\rho)$  sera une fonction à croissance très lente; nous avons d'ailleurs  $\rho = [\log n]^2$  de sorte que  $r$  est aussi une fonction de  $n$  à croissance très lente. Le théorème de M. HADAMARD cité en dernier lieu exprime que l'ordre de grandeur de  $r$ , considéré comme fonction de  $n$ , n'est pas inférieur à l'ordre de grandeur de  $\varphi(n) = \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}$ ,  $a_n$  étant le coefficient de  $z^n$  dans le développement de TAYLOR de la fonction. Nous verrons que, pour le produit de facteurs primaires considéré,  $r$  est précisément de l'ordre de grandeur de  $\varphi(n)$ .

Nous allons chercher à évaluer la rapidité de la convergence du produit infini considéré, pour une valeur de  $z$  dont le module est  $r$ , c'est à dire rechercher combien il faut prendre de facteurs pour que le produit des facteurs restants ait un module compris entre  $\frac{1}{2}$  et 2, par exemple. Il suffit manifestement pour cela d'étudier la convergence de la série

$$\sum \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{\rho(|a_n|)}$$

et de chercher quelle valeur il faut donner à  $n$  pour que *le reste* de la série, à partir du  $n^{\text{ième}}$  terme, soit inférieur à  $\log 2$ . Supposons que  $r$  soit compris entre  $|a_p|$  et  $|a_{p+1}|$  et soit  $|a_n| = r + \varepsilon$ . Le terme de rang  $n$  de la série a pour module

$$\left(\frac{r}{r + \varepsilon}\right)^{\rho(r + \varepsilon)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r + \varepsilon}\right)^{\rho(r + \varepsilon)}.$$

Cette expression est sensiblement égale à  $e^{-\frac{\varepsilon \rho(r + \varepsilon)}{r + \varepsilon}}$ . D'autre part, le rapport du terme de rang  $n + 1$  au terme de rang  $n$  est

$$\left(\frac{r}{|a_{n+1}|}\right)^{\rho_{n+1} - \rho_n} \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)^{\rho_n}$$

des valeurs indéfiniment grandes de  $r$ . Le premier cas peut se traiter directement et le second se ramène, soit au premier, soit à celui qui est traité dans le texte, en raisonnant comme à la page 386.

en faisant pour abrégier  $\rho(|\alpha_p|) = \rho_p$ . Ce rapport est très voisin de  $un$ ; il est inférieur à

$$\left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{\rho_{n+1}-\rho_n} = \left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{\rho_{n+1}-\rho_n}$$

or

$$\rho_n = (\log n)^2, \quad \rho_{n+1} = (\log(n+1))^2.$$

Donc

$$\rho_{n+1} - \rho_n = [(\log(n+1))^2 - (\log n)^2] > \frac{1}{n}.$$

Le rapport considéré est donc inférieur à

$$\left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}} < 1 - \frac{\varepsilon}{n(r+\varepsilon)}.$$

On en conclut que le reste de la série considérée, bornée au  $n^{\text{ième}}$  terme, est comparable à

$$\frac{n(r+\varepsilon)}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon \rho(r+\varepsilon)}{r+\varepsilon}}$$

En remarquant que  $\rho(r+\varepsilon) = [\log n]^2$ , cette expression a pour logarithme

$$\log(r+\varepsilon) + \log(n) + \log \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon} [\log n]^2.$$

Il suffit de prendre  $\varepsilon = \frac{1}{[\log n]^a}$ ,  $a$  étant plus petit que un, pour que cette expression soit négative et très grande en valeur absolue et par suite le reste de la série négligeable. Cette valeur de  $\varepsilon$  est très importante parce qu'elle nous montre que si  $|z| = r$ , la fonction est assimilable à une fonction d'ordre au plus égal à  $\rho(r+\varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  étant comparable à une puissance positive de  $\frac{1}{\rho}$ , c'est à dire que *l'ordre de la fonction est de l'ordre de grandeur de  $\rho(r)$* . De même  $n$ , considéré comme fonction de  $r$ , est du même ordre de grandeur que  $n(r+\varepsilon)$ .

Cela étant, on voit immédiatement que, pour des valeurs de  $z$  de module  $r$ , les plus grandes et les plus petites valeurs<sup>1</sup> du module de

<sup>1</sup> Pour les plus petites valeurs, on doit considérer seulement ce qui se passe sur



la fonction se comportent comme si la fonction était d'ordre  $\rho(r)$  et par suite que les plus grandes valeurs et l'inverse des plus petites sont du même ordre de grandeur. Il est nécessaire de préciser un peu cette proposition; en prenant  $\rho = (\log n)^2$ , nous prenons une valeur plus élevée qu'il n'est nécessaire pour que le produit infini soit convergent; il suffirait de prendre  $\rho^{\frac{1}{2}}$ , mais non  $\rho^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$  étant positif. On en conclut aisément que nous pouvons affirmer que, si les plus grandes valeurs  $M(r)$  ont pour expression  $e^{r^\rho}$ , les plus petites  $\frac{1}{N(r)}$  ont pour expression  $e^{-r^{\rho'}}$ ,  $\rho'$  étant compris entre  $\rho$  et  $\rho^{\frac{1}{2}}$ . D'ailleurs le nombre 2 aurait pu être remplacé par un autre nombre quelconque supérieur à un. *En d'autres termes*  $\log M(r)$  et  $\log N(r)$  sont du même ordre de grandeur. Tel est le résultat précis auquel nous arrivons; il est aisé d'en tirer des conséquences importantes.

Considérons en effet une fonction entière quelconque  $G(z)$ ; connaissant son ordre de grandeur, nous pouvons, par le théorème de M. HADAMARD précisé comme nous l'avons fait, calculer un ordre de grandeur maximum pour la fonction  $\rho(r)$ . Si d'ailleurs nous connaissons les zéros de  $G(z)$  nous pourrions former un produit de facteurs primaires  $\Pi(z)$  auquel correspondra une fonction  $\rho_1(r)$  au plus égale à  $\rho(r)$ . Nous aurons d'ailleurs

$$G(z) = \Pi(z)e^{H(z)}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'ordre de grandeur de  $\Pi(z)$  et aussi, sur une infinité de cercles, l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{\Pi(z)}$ , ne dépasse pas celui de  $G(z)$ . *Il en résulte que l'ordre de grandeur de  $e^{H(z)}$  ne dépasse pas celui de  $G(z)$ .* C'est là une propriété très importante de la décomposition en facteurs primaires, quand on n'introduit pas dans ceux-ci des facteurs exponentiels superflus.

On est naturellement conduit à regarder une fonction entière comme d'autant plus compliquée qu'elle croît plus vite. On voit que les deux

---

certaines cercles; voir plus haut p. 361 et le mémoire de M. HADAMARD p. 204. On verrait aisément que l'on peut exclure pour les rayons de ces cercles compris dans un intervalle donné une fraction aussi petite que l'on veut de cet intervalle.

facteurs fondamentaux  $\Pi(z)$  et  $e^{H(z)}$ , en lesquels se décompose  $G(z)$  ne croissent pas plus vite que  $G(z)$ .<sup>1</sup> On en conclut relativement à l'inverse des plus petites valeurs de  $G(z)$  les mêmes propriétés que pour  $\Pi(z)$  et  $e^{H(z)}$ . En procédant sans règle fixe, au contraire, on pourrait être conduit à décomposer une fonction en un produit de fonctions *plus compliquées*; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si, pour les fonctions de genre fini, on procédait comme si le genre dépassait de plusieurs unités sa valeur réelle.

---

## DEUXIÈME PARTIE.

---

### Le théorème de M. Picard.

Nous allons établir tout d'abord une relation importante entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de sa dérivée. Considérons une fonction entière

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots;$$

nous désignerons par  $\mu(r)$  le maximum du module de  $G(z)$  lorsque  $|z| = r$ , et par  $\mu_1(r)$  la quantité analogue pour la dérivée  $G'(z)$

$$G'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} + \dots$$

nous nous proposons de trouver une relation entre l'ordre de grandeur de  $\mu(r)$  et de  $\mu_1(r)$ ; mais  $\mu_1(r)$  n'est pas, en général, la dérivée de  $\mu(r)$ ; voici comment nous procéderons, posons

$$M(r) = |a_0| + |a_1| r + \dots + |a_n| r^n + \dots$$

nous aurons évidemment

$$M'(r) = |a_1| + 2|a_2| r + \dots + n|a_n| r^{n-1} + \dots$$

---

<sup>1</sup> Pour être tout à fait exact, nous devons dire que ce sont les logarithmes de ces facteurs qui sont au plus du même ordre de grandeur  $\log |G(z)|$ .

Pour comparer  $\mu$  et  $\mu_1$ , nous comparerons  $\mu$  à  $M$ ,  $M$  à  $M'$ , et  $M'$  à  $\mu_1$ . D'ailleurs on voit que la relation entre  $\mu_1$  et  $M'$  est la même que la relation entre  $\mu$  et  $M$ ; nous avons donc à comparer successivement  $\mu(r)$  et  $M(r)$ , puis  $M(r)$  et  $M'(r)$ .

Occupons nous d'abord de  $\mu(r)$  et de  $M(r)$ ; on a d'abord visiblement

$$(1) \quad M(r) \geq \mu(r).$$

D'autre part, on a évidemment (cf. p. 365—366)

$$r^m |a_m| < \mu(r)$$

et par suite,  $\rho$  étant inférieur à  $r$

$$M(\rho) < \frac{r\mu(r)}{r-\rho}.$$

On déduit de là comme on l'a vu plus haut que,  $\alpha$  étant un nombre positif quelconque, l'on a

$$(2) \quad M(r) < [\mu(r)]^{1+\alpha}$$

sauf tout au plus dans une série d'intervalles dont l'étendue totale, dans un intervalle assez grand donné, est une fraction aussi petite que l'on veut de cet intervalle donné.

Les inégalités (1) et (2) expriment les relations que nous voulions établir entre  $M(r)$  et  $\mu(r)$ ; on en établirait de semblables entre  $M'(r)$  et  $\mu_1(r)$ .

Considérons maintenant les fonctions  $M(r)$  et  $M'(r)$ , c'est à dire une fonction positive croissante et sa dérivée. Supposons que dans un intervalle,  $r_0, r_1$  on ait

$$M'(r) > [M(r)]^{1+\alpha}.$$

On en conclurait, en désignant par  $M_0$  et  $M_1$  les valeurs de  $M(r)$  pour  $r = r_0$  et  $r = r_1$ :

$$r_1 - r_0 = \int_{M_0}^{M_1} \frac{dM(r)}{M'(r)} < \int_{M_0}^{M_1} \frac{dM}{M^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha M_0^\alpha}.$$

Donc l'intervalle  $r_1 - r_0$  ne peut dépasser  $\frac{1}{\alpha M_0^\alpha}$ . Lorsque le nombre  $\alpha$  est

donné, quelque petit qu'il soit, on peut déterminer  $r_0$  de manière que cette expression soit aussi petite que l'on veut et on peut affirmer que pour toutes les valeurs de  $r$  supérieures à  $r_0$ , sauf peut être dans une série d'intervalles d'étendue totale finie,<sup>1</sup> on a

$$(3) \quad M'(r) < [M(r)]^{1+\alpha}.$$

La comparaison des inégalités (1), (2), (3) prouve que l'on a

$$[\mu(r)]^{1+\alpha} > \mu_1(r) > [\mu(r)]^{1-\alpha},$$

quelque soit le nombre positif  $\alpha$ , sauf au plus dans une série d'intervalles satisfaisant à la condition souvent répétée.<sup>2</sup>

Nous pouvons tirer de là la conclusion suivante: considérons un nombre fini de fonctions entières  $G_1, G_2, \dots, G_n$  et une expression de la forme

$$\frac{\Sigma A G_i^{a_i} G_k'^{b_k} \dots}{\Sigma M G_i^{m_i} G_k'^{n_k} \dots}$$

c'est à dire une fraction rationnelle par rapport à ces fonctions et leurs dérivées d'ordre fini quelconque. Supposons d'ailleurs que les modules des fonctions données, par  $|z| = r$ , soient tous inférieurs à  $e^{\mu(r)}$ ,  $\mu(r)$  étant une fonction positive croissante. Nous savons que, dans ces conditions, sur une infinité de cercles, les inverses des minimums sont inférieurs à  $e^{\mu^{1+\alpha}}$ . Dès lors nous pourrions affirmer que sur une infinité de cercles (dont les rayons remplissent toujours des intervalles satisfaisant à la même condition), la fraction rationnelle considérée est comprise entre

$$e^{\mu^{1+\alpha}} \text{ et } e^{-\mu^{1+\alpha}}.$$

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires, pour démontrer la proposition fondamentale qui est la généralisation du théorème de M. PICARD. Nous allons d'abord en étudier un cas particulier, d'ailleurs très étendu, dans lequel la démonstration est plus simple. Considérons deux séries de  $n$  fonctions entières  $G_1(z), G_2(z), \dots, G_n(z); H_1(z), H_2(z),$

<sup>1</sup> La continuité des fonctions  $M$  et  $M'$  permet d'exclure le cas où l'inégalité (3) serait vérifiée pour des valeurs de  $r$  formant une suite discontinue, mais présentant des points dans tout intervalle.

<sup>2</sup> Nous avons jugé inutile d'écrire l'inégalité évidente  $rM'(r) > M(r) - a_0$ .

...,  $H_n(z)$ . Nous supposons que ces fonctions entières (au plutôt le maximum de leur module pour  $|z| = r$ ), croissent *toutes* moins vite que  $e^{\mu(r)}$ ; nous supposons, de plus, que les fonctions entières de la seconde série  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , sont telles que les différences  $H_i - H_k$  croissent *toutes* plus vite que  $[\mu(r)]^2$ . Cela posé, l'identité

$$(1) \quad G_1(z)e^{H_1(z)} + G_2(z)e^{H_2(z)} + \dots + G_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne nécessairement:

$$G_1(z) = G_2(z) = \dots = G_n(z) = 0.$$

Ce théorème est évident pour  $n = 1$ ; pour le démontrer en général, il nous suffit donc de montrer que l'identité (1) entraîne une identité analogue ayant un terme de moins et dont les coefficients ne peuvent être nuls que si ceux de l'identité (1) le sont. Pour le voir, il suffit de prendre la dérivée du premier membre de l'identité (1) après l'avoir divisée par son dernier terme; on obtient ainsi:

$$(2) \quad (G'_1 G_n - G_1 G'_n + G_1 G_n H'_1 - G_1 G_n H'_n) e^{H_1 - H_n} + \dots = 0.$$

Il est clair que les coefficients et les exposants de cette identité satisfont aux mêmes conditions d'inégalité que ceux de l'identité (1); il reste à montrer que, si les coefficients de l'identité (2) sont nuls, il en est de même de ceux de l'identité (1). Or, dire que le premier coefficient dans (2) est nul revient à dire que l'expression:

$$\frac{G_1}{G_n} e^{H_1 - H_n}$$

est une constante. Or cela est impossible; car, si ni  $G_1$  ni  $G_n$  ne sont nuls, nous pouvons trouver une infinité de cercles sur lesquels  $\frac{G_1}{G_n}$  est supérieur  $e^{-2\mu(r)}$ ; de même sur une infinité de cercles,  $e^{H_1 - H_n}$  est supérieur<sup>1</sup> à  $e^{[\mu(r)]^2}$ ; leur produit peut donc, sur des cercles dont les rayons remplissent une

<sup>1</sup> Voir plus haut, en ce qui concerne la relation entre les plus grandes valeurs du module de  $H_1 - H_2$  et les plus grandes valeurs positives de sa partie réelle. Pour être tout à fait rigoureux il faudrait remplacer  $[\mu(r)]^2$  par  $[\mu(r)]^{2-\varepsilon}$ ; mais cela n'a aucune importance.

infinité d'intervalles satisfaisant à une condition souvent indiquée, être aussi grand que l'on veut et ne peut se réduire à une constante. Notre proposition est donc établie; car, si l'un des coefficients  $G_1$  ou  $G_n$  était nul, on serait de suite ramené au cas où il y a un terme de moins dans l'identité.

Nous allons aborder maintenant le cas général de notre théorème; dans l'identité (1) nous supposons les fonctions  $G$  inférieures à  $e^{\mu(r)}$  et les fonctions  $H_i - H_k$  supérieures à  $[\mu(r)]^2$ ; mais nous ne supposons plus les  $H$  inférieurs à  $e^{\mu(r)}$ ; ils peuvent être aussi grands que l'on veut. Dans ces conditions nous allons encore démontrer que tous les  $G$  sont nuls.

Il est clair tout d'abord que s'il existait une fonction  $\nu(r)$  supérieure à  $\mu$  et telles que les  $H_i - H_k$  soient compris entre  $[\nu(r)]^2$  et  $e^{\nu(r)}$ , la démonstration subsisterait en remplaçant  $\mu$  par  $\nu$ . La démonstration subsisterait encore si les  $H_i - H_k$  étaient compris entre  $[\nu(r)]^2$  et  $e^{\nu(r)}$  pour une infinité de valeurs de  $r$ , remplissant des intervalles d'étendue totale assez grande; tels par exemple que ceux d'entre eux qui sont compris dans un intervalle donné dépassent par leur étendue une fraction déterminée de cet intervalle. Il n'y a donc de difficulté que si, pour toute valeur de  $r$ , on tout au moins pour des valeurs remplissant des intervalles d'étendue considérable, les différences  $H_i - H_k$  sont très différentes, c'est à dire si l'une d'elles, par exemple, est supérieure au carré de chacune des autres (on pourrait même dire à une puissance quelconque; mais ceci nous suffit). D'ailleurs il peut se faire que ce ne soit pas toujours la même des différences  $H_i - H_k$  qui soit supérieure au carré des autres; mais, leur nombre étant limité, si on le désigne par  $m$ , on pourra affirmer qu'au moins une des différences, dans des intervalles qui dépassent la fraction  $\frac{1}{m}$  de l'intervalle total qui les comprend, est supérieure au carré des autres (voir la note au bas de la page 384). Le cas où plusieurs des différences  $H_i - H_n$  ( $n$  fixe) auraient cette propriété ne présente pas de difficulté spéciale; supposons pour fixer les idées qu'il n'y en ait qu'une:  $H_1 - H_n$ . Il est clair que les différences  $H_1 - H_2$ ,  $H_1 - H_3$ , ...,  $H_1 - H_{n-1}$  auront la même propriété par rapport aux autres  $H_i - H_k$ . On voit dès lors aisément que l'on peut recommencer la démonstration, en ayant soin de garder pour la fin le terme  $G_1 e^{\mu}$

ou plutôt ceux qui s'en déduisent par les opérations successives; on démontrera ainsi que  $G_1$  est nul, etc.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante: *l'identité*

$$\Sigma G_i(z)e^{H_i(z)}$$

dans laquelle les  $G_i$  sont inférieurs à  $e^{\mu(r)}$  et les  $H_i - H_k$  supérieurs à  $[\mu(r)]^2$  entraîne nécessairement la nullité de tous les  $G$ . On pourrait d'ailleurs remplacer  $[\mu(r)]^2$  par  $[\mu(r)]^{1+\alpha}$ .

Dans cet énoncé et la démonstration qui précède, nous avons constamment, pour abrégé, omis les mots *module maximum pour  $|z| = r$* .

Un cas particulier de cette proposition est connu depuis longtemps: c'est celui où les  $G$  et les  $H_i - H_k$  sont des polynômes. Voici quelques autres cas particuliers, qui pourraient d'ailleurs être démontrés par une voie élémentaire, sans qu'on ait à faire usage de notre théorie générale des fonctions croissantes:

Les  $G$  sont des polynomes et les  $H_i - H_k$  des fonctions entières de genre fini;

Les  $G$  sont des fonctions entières dont le genre<sup>1</sup> ne dépasse pas  $\mu$  et les  $H_i - H_k$  des polynomes dont le degré dépasse  $\mu$ .

Les  $G$  et les  $H_i - H_k$  sont des fonctions entières de genre fini quelconque.

Voici au contraire un cas particulier important dont la démonstration paraît aussi difficile que celle de la proposition générale:

Les  $G$  sont des fonctions entières de genre fini (ou des polynomes) et les  $H_i - H_k$  des fonctions entières *quelconques*.

Nous avons dit que cette proposition peut être regardée comme la généralisation du théorème de M. PICARD; à proprement parler, c'est plutôt le corollaire que nous allons en déduire immédiatement qui constitue cette généralisation. Désignons par  $G(z)$  une fonction entière et considérons toutes les équations de la forme

$$(1) \quad \varphi(z)G(z) = \psi(z)$$

dans lesquelles les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont telles que le logarithme des

---

<sup>1</sup> Au lieu du genre  $\mu$  nous pourrions introduire l'ordre  $\rho$ ; la proposition serait plus précise lorsque  $\rho$  n'est pas entier.

plus grandes valeurs de leur module croit moins vite qu'une puissance déterminée, d'exposant inférieur à  $un$ , du logarithme des plus grandes valeurs du module de  $G$ . Cela étant, je dis que toutes ces équations, *sauf une au plus*, ont autant de racines qu'il résulte de la réciproque du théorème de M. HADAMARD, telle que nous l'avons précisée.<sup>1</sup> En d'autres termes, en posant

$$(2) \quad \varphi(z)G(z) - \psi(z) = \Pi(z)e^{H_1(z)}$$

$\Pi(z)$  étant un produit canonique de facteurs primaires, la fonction  $\Pi(z)$  ne peut être telle que le logarithme des plus grandes valeurs de son module croisse moins vite qu'une puissance, d'exposant inférieur à  $un$ , du logarithme des plus grandes valeurs de  $G$ . Il ne peut y avoir à ce fait qu'une exception. En effet si, en même temps que l'identité (2), nous avons l'identité

$$(3) \quad \varphi_1(z)G(z) - \psi_1(z) = \Pi_1(z)e^{H_1(z)},$$

$\Pi$  et  $\Pi_1$  satisfaisant ainsi que  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi$ ,  $\psi_1$ , à la condition indiquée, on obtiendrait en éliminant  $G(z)$  entre (2) et (3), une relation de la forme

$$K_1(z)e^{H(z)} + K_2(z)e^{H_1(z)} + K_3(z) = 0.$$

D'ailleurs les  $K$  et les  $H$  satisferaient aux inégalités exigées par l'énoncé de notre théorème général<sup>2</sup> (et même par l'énoncé du cas particulier que nous avons examiné en premier lieu) de sorte qu'on aurait

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0,$$

ce qui est absurde si les relations (2) et (3) ne sont pas identiques.

<sup>1</sup> M. PICARD, en supposant que  $\varphi$  soit une constante et  $\psi$  un polynôme avait montré que toutes les équations (1), *sauf une au plus*, ont une infinité de racines. (Annales de l'École Normale 1880). M. PICARD avait d'ailleurs étendu ce théorème au cas d'un point singulier essentiel isolé, que nous avons laissé complètement de côté ici. Voir une note intéressante de M. HADAMARD, Comptes Rendus, mai 1896.

<sup>2</sup> Il ne pourrait y avoir de difficulté que pour la différence  $H - H_1$ ; il suffit d'écrire  $K_1 e^{H-H_1} + K_2 = K_3 e^{-H_1}$ , pour reconnaître que si  $H - H_1$  ne dépassait pas l'ordre de grandeur requis, l'ordre de grandeur du premier membre serait inférieur à celui du second.



C'est là, semble-t-il, la généralisation proprement dite la plus étendue que l'on puisse exiger pour le théorème de M. PICARD; on déduirait aisément de notre proposition fondamentale une foule d'autres généralisations, dans l'énoncé desquelles figureraient plusieurs fonctions entières différentes, ou bien des équations non linéaires, etc. En ce sens, c'est cette proposition fondamentale qui est la généralisation la plus complète de ce théorème.

J'ai dû abrégé bien des démonstrations et même laisser de côté des détails importants, sous peine d'allonger démesurément ce mémoire; j'ai tenu surtout à indiquer aussi nettement que possible la suite des idées et c'est ce qui m'a amené à conserver à peu près complètement pour l'exposition l'ordre même que j'ai suivi dans mes recherches. J'ai cependant rejeté à la fin et je vais exposer maintenant le cas particulier que j'ai traité le premier d'une manière rigoureuse, parce que ce me sera une occasion de montrer comment l'ordre analytique que suit l'intuition peut être transformé en une exposition synthétique.

Je me proposais de démontrer l'impossibilité d'une relation de la forme

$$(1) \quad e^{G(z)} + e^{G_1(z)} = 1$$

et voici le raisonnement que j'ai fait tout d'abord: la relation (1) montre que  $G$  et  $G_1$  sont du même ordre de grandeur; soit  $\mu(r)$  cet ordre; on a  $e^{G_1} - 1 = -e^{-G}$  et par suite  $e^{G_1} - 1$  peut devenir infiniment petit de l'ordre de  $e^{-\mu(r)}$ . Cela revient à dire que  $G_1 - 2ni\pi$  est très petit de l'ordre de  $e^{-\mu(r)}$ ; or l'identité (1) montre que l'on a

$$(2) \quad G_1 - 2ni\pi = e^{F_n(z)}$$

si le second membre devient très petit de l'ordre de  $e^{-\mu(r)}$ , on en conclut qu'il peut devenir très grand de l'ordre de  $e^{\mu(r)}$ ; d'ailleurs  $G_1 - 2ni\pi$  étant très petit,  $n$  est au plus de l'ordre de grandeur de  $\mu(r)$ ; donc, dans l'identité (2), le premier membre serait de l'ordre de grandeur de  $\mu(r)$ , ce qui est absurde puis que le second membre atteint  $e^{\mu(r)}$ .

Avec les notions précises que nous avons acquises sur les ordres de grandeur, ce raisonnement est parfaitement rigoureux; mais, n'ayant pas alors ces notions précises, j'ai dû, pour le rendre rigoureux, lui donner une forme synthétique que je vais maintenant exposer.

Récrivons les identités

$$(1) \quad e^{G(z)} + e^{G_1(z)} = 1,$$

$$(2) \quad G_1(z) - 2ni\pi = e^{I_n(z)}.$$

Dans cette dernière,  $n$  est un entier positif, nul ou négatif.

Désignons par  $M(r)$  le maximum le module de  $G(z)$  pour  $|z| = r$ , par  $A(r)$  le maximum des valeurs positives de la partie réelle de  $G$  et par  $+B(r)$  le maximum des valeurs positives de la partie réelle de  $-G$ , dans les mêmes conditions. Désignons par  $M_1, A_1, B_1, \mu_n, \alpha_n, \beta_n$  les mêmes fonctions, définies à l'aide de  $G_1$  et de  $I_n$ . Nous avons d'abord les inégalités évidentes

$$(3) \quad A(r) < M(r), \quad B(r) < M(r)$$

et les inégalités analogues. D'autre part, l'identité (1) montre que, pour les valeurs de  $r$  telles que  $A(r)$  dépasse 2, l'on a

$$(4) \quad \frac{1}{2}A(r) < A_1(r) < 2A(r).$$

Enfin nous avons vu que, pour les valeurs de  $r$  dépassant un nombre fixe, l'on a, si  $\rho$  est un nombre quelconque inférieur à  $r$

$$(5) \quad M(\rho) < \frac{8\rho A(r)}{r - \rho}$$

et une inégalité analogue en remplaçant  $A$  par  $B$  ou en mettant des indices. On aurait entre  $\alpha_n$  et  $\mu_n$  une inégalité analogue; mais le nombre fixe auquel  $r$  devrait être supérieur serait variable avec  $n$  et par suite pourrait dépasser toute limite si on laisse  $n$  indéterminé. Il est nécessaire de reprendre en partie la démonstration qui a conduit à la formule (5); si nous désignons par  $c_n + ic'_n$  le terme constant de  $I_n$ ,  $c_n$  et  $c'_n$  étant réels, nous aurons (p. 365—366)

$$(6) \quad \mu_n(\rho) < |c_n| + |c'_n| + \frac{\rho}{r - \rho} [4\alpha_n(\rho) + 2|c_n|].$$

Or on peut supposer  $c'_n$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ ; d'autre part, en désignant par  $h + ki$  le terme constant de  $G_1(z)$ , on a

$$e^{2c_n} = h^2 + (k - 2n\pi)^2$$

et, par suite en désignant par  $H$  et  $K$  deux nombres indépendants de  $n$

$$|c_n| < H + K \log |n|;$$

dans cette formule et les suivantes, si  $n$  est nul  $\log |n|$  doit être remplacé par zéro. De là et de la formule (6) on conclut que l'on a, pourvu que  $r$  dépasse une valeur fixe indépendante de  $n$

$$(7) \quad \mu_n(\rho) < \frac{8\rho[\alpha_n(r) + \log |n|]}{r - \rho}$$

pourvu que  $\rho$  soit plus petit que  $r$ . On pourrait d'ailleurs remplacer  $\alpha_n$  par  $\beta_n$ .

Ceci posé, considérons un nombre quelconque  $r$  dépassant les limites fixées; ce nombre  $r$ , une fois choisi, restera fixe jusqu'à la fin du raisonnement. Nous pouvons, par hypothèse, donner à  $z$  une valeur  $z_0$ , de module  $r$  et telle que la partie réelle de  $G(z)$  soit égale à  $-B(r)$ ; on a alors

$$(8) \quad |e^{G_1(z_0)} - 1| = e^{-B(r)}.$$

Par suite,  $n$  étant un entier déterminé, on a

$$(9) \quad |G_1(z_0) - 2n\pi| < 2e^{-B(r)}.$$

Le module de  $G_1(z_0)$  étant au plus égal à  $M_1(r)$ , on conclut de là:

$$(10) \quad |n| < M_1(r).$$

Si nous faisons  $z = z_0$  dans l'égalité (2), l'inégalité (9) deviendra

$$|e^{F_n(z_0)}| < 2e^{-B(r)}.$$

Or  $F_n(z_0)$  a un module inférieur à  $\mu_n(r)$ ; on a donc certainement:

$$(11) \quad \mu_n(r) > \frac{1}{2}B(r).$$

D'autre part,  $R$  désignant un nombre supérieur à  $r$ , l'égalité (2) montre que l'on a

$$e^{\alpha_n(R)} < M_1(R) + |2n\pi|$$

et en tenant compte de (10):

$$(12) \quad e^{\alpha_n(R)} < 8M_1(R).$$

Remplaçons dans l'inégalité (7),  $r$  et  $\rho$  par  $R$  et  $r$  et tenons compte des inégalités (10) et (12); nous aurons:

$$\mu_n(r) < \frac{8r}{R-r} [\log M_1(R) + \log 8 + \log M_1(R)]$$

et, par suite, si  $R$  est assez grand pour que  $M_1(R)$  dépasse  $8^2$

$$(13) \quad \mu_n(r) < \frac{20r}{R-r} \log M_1(R).$$

Les inégalités (11) et (13) donnent maintenant

$$(14) \quad B(r) < \frac{40r}{R-r} \log M_1(R).$$

Il nous suffit de joindre à cette dernière inégalité les inégalités (3), (4) et (5) pour aboutir à une impossibilité. Récrivons celles de ces inégalités qui nous seront utiles, en désignant par  $\rho'$  un nombre inférieur à  $\rho$ .

$$(15) \quad M(\rho) < \frac{8\rho}{r-\rho} B(r),$$

$$(16) \quad A(\rho) < M(\rho),$$

$$(17) \quad A_1(\rho) < 2A(\rho),$$

$$(18) \quad M_1(\rho') < \frac{8\rho'}{\rho-\rho'} A_1(\rho).$$

Il suffit de se servir successivement des inégalités (14—18) pour obtenir

$$M_1(\rho') < 40 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 \frac{r\rho\rho'}{(R-r)(r-\rho)(\rho-\rho')} \log M_1(R).$$

Nous pouvons supposer  $R-r = r-\rho = \rho-\rho'$ ; nous voyons dès lors que, pourvu que  $R$  soit assez grand pour que l'on ait  $\log M_1(R) < \frac{\sqrt{M_1(R)}}{100000}$ , on aura

$$M_1(\rho') < \frac{R^3}{(R-\rho')^3} \sqrt{M_1(R)}.$$

Nous avons obtenu cette inégalité en prenant pour  $r$  un nombre fixe; il résulte de ce qui précède qu'elle sera vérifiée pourvu que  $R$  et  $\rho'$  dépassent des nombres fixes. On peut l'écrire aussi

$$M_1(R) > \frac{(R - \rho')^6}{R^6} [M_1(\rho')]^2.$$

Sous cette forme il suffit d'y faire successivement  $\rho' = \lambda$ ,  $R = \lambda + h$ ;  $\rho' = \lambda + h$ ,  $R = \lambda + h + \frac{h}{2}$ ;  $\rho' = \lambda + h + \frac{h}{2}$ ,  $R = \lambda + h + \frac{h}{2} + \frac{h}{4}$ , etc., pour constater que si  $M_1(\lambda)$  est assez grand et  $h$  convenablement choisi,  $M_1(\lambda + 2h)$  dépasse toute quantité assignable, ce qui est absurde. Je crois inutile de détailler cette dernière partie du raisonnement, car un raisonnement identique a été fait plus haut (p. 366—368).

---

#### Conclusion.

J'ai, dans ce mémoire, indiqué quelques propositions générales importantes au sujet du nombre des zéros des fonctions entières. Mais je ne me dissimule pas que cette question exige encore des études approfondies et qu'il y aurait, notamment, grand intérêt à préciser davantage les résultats.

Pour nous borner aux fonctions de genre fini, l'étude des fonctions dont l'ordre est un nombre entier est encore à faire à peu près complètement. C'est là un genre de questions dont on ne peut, semble-t-il, espérer une solution totale; mais ce n'est pas une raison pour qu'on n'obtienne pas un grand nombre de résultats intéressants et utiles, comme on l'a fait pour les règles de convergence des séries.

Voici un ordre d'idées dans lequel on aboutirait peut être à des résultats intéressants et qui m'a été fort utile dans mes recherches. Étant donnée une fonction entière, donnons à  $z$  une valeur de module  $r$  et considérons le terme dont le module est le plus grand. Ce module est une fonction croissante de  $r$ , laquelle est à peu près du même ordre de grandeur que le maximum du module de la fonction; de sorte que l'on

peut dire que, si une fonction entière devient très grande lorsque le module de  $z$  augmente, c'est surtout parce que, pour chaque valeur du module, *un* terme devient très grand et non parce que *beaucoup* de termes deviennent très grands.

Pour chaque valeur  $r$  du module de  $z$ , le degré du terme le plus grand donne à peu près le nombre des racines de module inférieur à  $r$  (sauf le cas d'exception du théorème de M. PICARD). On peut rattacher cela à ce fait que les équations

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ F + \Phi &= 0 \end{aligned}$$

ont le même nombre de racines<sup>1</sup> à l'intérieur d'un contour sur lequel

$$\left| \frac{\Phi}{F} \right| < 1.$$

Il y aurait lieu de rechercher quel est le degré de précision de ce résultat, en particulier dans le cas des fonctions d'ordre fini, mais non entier, pour lesquelles le facteur exponentiel par lequel on peut toujours multiplier la fonction, sans changer le nombre de ses racines, est nécessairement d'un ordre de grandeur inférieur à celui de la fonction elle-même et peut, par suite, être négligé dans une première approximation. Pour ces fonctions, si l'on désigne par  $\varphi(r)$  le maximum de leur module pour  $|z| = r$ , il y a lieu de comparer le nombre de leurs racines de module inférieur à  $r$  avec

$$\frac{1}{\pi} \log \varphi(r).$$

Il est à peu près certain que l'on obtient ainsi le nombre exact des racines, à des quantités près d'ordre inférieur, dans le cas particulier où leurs arguments tendent vers une limite déterminée lorsque le module augmente indéfiniment.

Le facteur  $\frac{1}{\pi}$  est déterminé par la condition que la formule soit exacte pour  $e^x, \dots$

---

<sup>1</sup> HERMITE, cours d'analyse, 4<sup>e</sup> édition p. 182.

En appliquant cette formule à la fonction  $\xi(t)$  de RIEMANN (laquelle a pour ordre 0,5 si l'on prend  $t^2$  pour variable), on obtient pour le nombre des racines comprises entre  $O$  et  $T$  la formule

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

qui a été donnée par RIEMANN et dont M. VON MANGOLDT, complétant les résultats importants dus à M. HADAMARD, a démontré récemment l'exactitude, à des quantités près de l'ordre de  $[\log T]^2$ .

En terminant, je vais résumer rapidement les résultats acquis et indiquer en même temps les recherches qui se présentent naturellement.

On peut, à chaque fonction entière, faire correspondre une fonction croissante  $\rho(r)$ , qui peut se réduire à une constante positive (lorsque le genre est fini) et que l'on appelle son *ordre apparent*. *Cet ordre apparent ne dépend que la manière dont croît la fonction*; il se conserve ou se modifie d'une manière simple lorsqu'on combine entre elles par voie d'addition ou de multiplication plusieurs fonctions et leurs dérivées d'ordre quelconque.<sup>1</sup>

Cet ordre apparent joue un rôle analogue au degré dans la théorie des polynomes; en particulier, dans une identité, les termes d'ordre apparent maximum<sup>2</sup> doivent se détruire, ou tout au moins donner par leur combinaison un terme d'ordre moindre. On peut ainsi démontrer l'impossibilité de nombreuses identités; je me réserve d'appliquer cette remarque à la théorie des équations différentielles.

Enfin, appelons *ordre réel* d'une fonction entière une fonction croissante, pouvant aussi se réduire à une constante et *dépendant uniquement de la fréquence des zéros*. Nous aurons ce théorème fondamental: *sauf un cas exceptionnel* (que nous pouvons appeler cas de M. PICARD), *l'ordre apparent est égal à l'ordre réel*.

Que reste-t-il donc à faire? A préciser davantage encore la définition des *ordres* et par suite la définition de leur égalité. Si nous

<sup>1</sup> On peut aussi déduire l'ordre de la fonction  $f[\varphi(z)]$  de la connaissance des ordres des fonctions entières  $f$  et  $\varphi$ .

<sup>2</sup> Les ordres apparents peuvent ne pas être comparables, alors chacun d'eux peut être regardé comme maximum, au point de vue des conséquences indiquées dans le texte.

nous bornons, pour plus de netteté, aux fonctions de genre fini, l'ordre est un nombre positif déterminé et il semble que la proposition: *l'ordre apparent est égal à l'ordre réel* soit suffisamment précise. On peut cependant espérer trouver mieux; l'ordre réel, par exemple, a été défini comme un nombre  $\rho$  tel que,  $a_n$  étant le module de la  $n^{\text{ième}}$  racine, la série  $\Sigma a_n^{-\rho-\varepsilon}$  soit convergente et la série  $\Sigma a_n^{-\rho+\varepsilon}$  divergente, quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ . Il est clair que la connaissance d'un nombre  $\rho$  ne suffit pas pour fixer la manière dont croît  $a_n$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment. Par exemple, il peut exister un nombre positif ou négatif  $\rho'$  tel que la série  $\Sigma a_n^{-\rho}(\log a_n)^{\rho'+\varepsilon}$  soit divergente et la série  $\Sigma a_n^{-\rho}(\log a_n)^{\rho'-\varepsilon}$  convergente, quelque petit que soit  $\varepsilon$ ; la connaissance des deux nombres  $\rho$  et  $\rho'$  est évidemment quelque chose de plus que la connaissance du seul nombre  $\rho$ , sans cependant suffire encore. On sait qu'on ne peut épuiser de telles difficultés (voir les travaux de MM. DU BOIS REYMOND, PINCHERLE, HADAMARD sur les fonctions croissantes); mais on peut sans doute arriver à préciser plus que je ne l'ai fait la notion de l'ordre et c'est ce qui pourrait être utile dans certaines recherches. Il se pose alors la question de savoir si le théorème de l'égalité subsisterait entre les ordres ainsi précisés, ou s'il ne faudrait pas faire intervenir des notions nouvelles, par exemple les arguments des racines.

Saint Affrique (Aveyron), le 5 octobre 1896.

---