SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES ET QUELQUES AUTRES FONCTIONS UNIFORMES

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

La fonction $\Gamma(a)$ peut être représentée par deux séries convergentes pour toutes les valeurs de a.

Posons avec M[r] PRYM

$$
\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{1}\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{a+2} - \ldots\ldots \\
&+ \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \\
&= P(a) + Q(a).
\end{aligned}
$$

$P(a)$ est une fonction uniforme finie et déterminée pour toutes les valeurs de a, excepté pour $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$, qui sont les pôles de $P(a)$.

$Q(a)$ est holomorphe dans tout le plan. Soit $a = \alpha + \beta i$

$$Q(a) = \int_1^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \cos(\beta l x) dx + i \int_1^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \sin(\beta l x) dx.$$

Chacune des deux parties de $Q(a)$ a une valeur finie et déterminée pour toutes les valeurs de a; il est même facile d'en obtenir une limite. Posons

$$lx = \omega \quad \text{d'où} \quad x = e^{\omega},$$

on aura

$$Q(a) = \int_0^\infty e^{-e^{\omega}} e^{a\omega} \cos \beta\omega d\omega + i \int_0^\infty e^{-e^{\omega}} e^{a\omega} \sin \beta\omega d\omega.$$

Ces intégrales se composent de parties

$$a, b, c, \cdots, i, k, l, m, \cdots, p, q, r$$

alternativement positives et négatives et de la même amplitude. Le facteur $e^{-e^{\omega}} e^{\alpha\omega}$, pour $\alpha > 1$ va d'abord en augmentant, atteint un maximum pour $\omega = l\alpha$ qui est $\mu = e^{+\alpha(l\alpha - 1)}$ et puis va en diminuant; pour $\alpha \leqq 1$, ce facteur va constamment en diminuant et son maximum μ correspond à $\omega = 0$ et il est égal e^{-1}.

Donc chacune des intégrales qui forment $Q(a)$ est moindre que la plus grande des quantités $a, b, c, \ldots i, k, l, m, \ldots p, q, r$. Or la plus grande de ces quantités est moindre que

$$\mu \int_0^\pi \sin \beta\omega d\omega = \frac{2\mu}{\beta}.$$

Ainsi le module de $Q(a)$ sera moindre que

$$\frac{2\mu}{\beta}\sqrt{2}.$$

Dans le cas où $\beta = 0$, en supposant $\alpha \leqq 1$

$$Q(a) < \int_1^\infty e^{-x} dx = e^{-1}.$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$Q(a) = e^{-1} + (a - 1) \int_1^\infty e^{-x} x^{a-2} dx,$$

donc

$$Q(a) < e^{-1}[1 + (a-1) + (a-1)(a-2) + \cdots + (a-1)(a-2)\cdots(a-n)]$$

n étant le plus grand nombre d'entiers contenus dans α.

Ainsi

$$P(a) + Q(a)$$

définit une fonction uniforme, pour toutes les valeurs de a, ayant pour pôles 0, -1, -2, ... et qui prend la même valeur que la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

pour $a > 0$; et qui a été généralisée par GAUSS, au moyen d'un produit d'un nombre indéfini de facteurs.

La fonction ainsi définie jouit d'ailleurs de la propriété fondamentale, à savoir

$$P(a + 1) + Q(a + 1) = a[P(a) + Q(a)],$$

qui permet de la ramener au cas où $a > 0$. Ainsi la fonction définie par GAUSS et la fonction $P(a) + Q(a)$ sont identiques.

$Q(a)$ étant holomorphe dans toute l'étendue du plan, peut être développée en série convergente, pour toutes les valeurs de a.

On obtient encore une fonction holomorphe pour tout le plan en multipliant $\Gamma(a)$ par $\frac{\sin a\pi}{\pi}$, car

$$\frac{\sin a\pi}{\pi} P(a)$$

n'a plus de pôles; donc $\frac{\sin a\pi}{\pi}\Gamma(a)$ c'est à dire $\frac{1}{\Gamma(1-a)}$ ou bien $\frac{1}{\Gamma(a)} = G(a)$ est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Mr HEINE a donné à $G(a)$ une forme qui peut être très-utile dans beaucoup de cas. Ce savant géomètre a fait voir que

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int e^z z^{-a} dz$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les x négatifs, sans qu'il soit nécessaire que ce contour soit fermé. Voici la démonstration de Mr HEINE.

Prenons pour contour d'intégration l'axe des x depuis $-\infty$ jusqu'à $-\eta$; un cercle de rayon η autour de l'origine et l'axe des x depuis $-\eta$ jusqu'à $-\infty$.

On a

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\omega - i\sin a\omega),$$

$$dz = \rho(-\sin\omega + i\cos\omega)d\omega$$

$$+ (\cos\omega + i\sin\omega)d\rho.$$

Dans la première partie,

$$\omega = -\pi, \qquad z = -\rho, \qquad dz = -d\rho,$$

$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi + i\sin a\pi).$$

Dans la deuxième partie

$$z = \eta e^{\omega i}, \qquad dz = i\eta e^{\omega i}d\omega,$$

$$z^{-a} = \eta^{-a}e^{-a\omega i}.$$

Dans la troisième

$$\omega = \pi, \qquad z = -\rho, \qquad dz = -d\rho,$$

$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi - i\sin a\pi).$$

Les trois parties de l'intégrale, ajoutées ensemble, donnent

$$\int e^z z^{-a}dz = 2i\sin a\pi\int_\eta^\infty \rho^{-a}e^{-\rho}d\rho + i\eta^{1-a}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-a)\omega i}e^{\eta e^{\omega i}}d\omega,$$

d'où, en supposant la partie réelle de a comprise entre o et 1,

$$\int e^z z^{-a}dz = 2i\sin a\pi\Gamma(1-a),$$

d'où

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int z^{-a}e^z dz. \tag{1}$$

L'intégration par parties donne

$$\int z^{-a}e^z dz = e^z z^{-a} + a\int z^{-(a+1)}e^z dz = a\int z^{-(a+1)}e^z dz.$$

Si donc la formule (1) est vraie pour a, on tirera de la relation précédente

$$\frac{1}{a}G(a) = G(a+1) = \frac{1}{2\pi i}\int z^{-(a+1)}e^z dz,$$

et dès lors la formule (1) sera vraie pour $(a+1)$; de même, si elle est vraie pour $a+1$, elle le sera pour a. Ainsi la formule (1) est vraie pour toutes les valeurs de a.

Reprenons l'intégrale $\int z^{-a}e^z dz$ sur le même contour, en agrandissant la circonférence et lui donnant pour rayon 1 au lieu de η; l'intégrale reprendra la même valeur, puisque les deux contours ne comprennent point entre eux de point critique. Donc

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\left(2i\sin a\pi\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}d\rho + i\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\omega + i\sin\omega)+(1-a)\omega i}d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\sin a\pi\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}d\rho + \int_0^\pi e^{\cos\omega}\left\{e^{-[(1-a)\omega+\sin\omega]i} + e^{[(1-a)\omega+\sin\omega]i}\right\}d\omega\right]$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a}d\rho + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega+\sin\omega]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty e^{-\rho}\left(e^{a(\pi i - l\rho)} - e^{-a(\pi i + l\rho)}\right)d\rho$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos[(1-a)\omega+\sin\omega]d\omega.$$

Étudions le développement de chacune des deux parties suivant les puissances croissantes de a.

Pour la première partie le coefficient de a^n sera

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i\Gamma(n+1)}\int_1^\infty e^{-\rho}[(l\rho-\pi i)^n - (l\rho+\pi i)^n]d\rho,$$

et pour la seconde

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\Gamma(n+1)}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\,{\sin \atop \cos}(\omega+\sin\omega)\omega^n d\omega.$$

Nous calculerons plus loin la valeur exacte de ces coefficients; je me propose, pour le moment, d'en déterminer une valeur approchée.

Pour δ_n, on a une première valeur approchée en faisant

$$e^{\cos\omega}\frac{\sin}{\cos}(\omega + \sin\omega) = e,$$

ce qui donnera

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\Gamma(n+1)}\frac{e\pi^{n+1}}{(n+1)}.$$

On pourrait obtenir une valeur plus approchée en partageant cette intégrale en deux parties; mais cela n'est pas nécessaire, attendu que δ_n disparaît rapidement devant γ_n.

Pour calculer la valeur approchée de γ_n, nous allons dégager son expression des imaginaires, et pour cela nous poserons

$$l\rho = r\cos\omega, \qquad \pi = r\sin\omega,$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\pi}{l\rho}, \qquad d\rho = -\frac{r^2\rho\, d\omega}{\pi};$$

il viendra

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2\Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}\sin n\omega\, d\omega.$$

Étudions d'abord les variations du facteur

$$e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}.$$

La dérivée est

$$\left\{e^{-\rho}(1-\rho)[(l\rho)^2 + \pi^2] + (n+2)l\rho e^{-\rho}\right\}[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n}{2}}$$

$$= e^{-\rho}(1-\rho)[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n}{2}}\left[(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho - 1}l\rho + \pi^2\right].$$

Lorsque ρ varie de 1 à ∞, le deuxième facteur reste négatif; la dérivée sera donc positive ou négative suivant que

$$(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho-1}l\rho + \pi^2$$

sera négatif ou positif. D'ailleurs ce facteur ne peut passer qu'une fois par zéro, car, à mesure que ρ augmente, la partie positive augmente et la partie négative diminue.

La valeur qui annule ce facteur va aussi en augmentant à mesure que n augmente. D'après ces considérations, le facteur $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ commence par augmenter, passe par un maximum, puis va sans cesse en diminuant et tend vers zéro. Le maximum correspond à la racine de l'équation

$$(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho - 1} l\rho + \pi^2 = 0.$$

Pour évaluer

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 \Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}} \sin n\omega\, d\omega,$$

nous partagerons l'intégrale en $\frac{n}{2}$ parties égales, de telle sorte que dans chacune de ces parties l'argument $n\omega$ varie de π, $\sin n\omega$ conservant le même signe dans toute l'étendue de chaque partie, sauf à laisser incomplète la dernière partie si n est impair.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ f,\ i,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ x,\ y,\ z$$

les valeurs absolues des intégrales partielles et k la plus grande. Il est clair, puisque le facteur $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ va en augmentant et puis en diminuant, que ces intégrales sont dans le même cas. Le doute ne peut exister que pour celle qui contient le maximum du facteur, celle qui la précède et celle qui la suit. Supposons d'abord que k contienne ce maximum; on aura

$$A = (k - l) + (m - n) + \ldots = k - (l - m) \ldots,$$

$$B = (k - j) + (i - f) + \ldots = k - (j - i) \ldots.$$

Toutes les parenthèses étant positives, il résulte

$$0 < A < k \quad \text{et} \quad 0 < B < k,$$

d'où

$$-k < A + B - k < k$$

Ainsi l'intégrale totale sera plus petite, en valeur absolue, que la plus grande des intégrales partielles.

Si le maximum du facteur se trouve dans l, comme les derniers éléments de k sont plus petits que les premiers de l, il faudra que les premiers de k soient plus grands que les derniers de l; donc les éléments de l sont respectivement plus grands que ceux de m; par conséquent toutes les intégrales partielles vont en diminuant à partir de k, tant d'un côté que de l'autre, et le raisonnement précédent s'applique à tous les cas.

Soit μ le maximum de $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$; on aura

$$\gamma_n < \frac{\mu}{\pi^2 \Gamma(n+1)n} \int_0^\pi \sin\omega\, d\omega = \frac{2\mu}{n\pi^2 \Gamma(n+1)}.$$

Soient μ, μ' les valeurs correspondant à n et $n+1$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{e^{-\rho}\rho'}{e^{-\rho}\rho}\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}} \left(\frac{l\rho'}{\rho'-1} : \frac{l\rho}{\rho-1}\right)^{\frac{n+2}{2}} \left[\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier et le troisième facteurs sont plus petits que 1, puisque, à mesure que n augmente, la racine ρ de $(l\rho)^2 \frac{n+2}{\rho-1} l\rho + \pi^2 = 0$ va en augmentant; le second est plus petit que $e^{\frac{1}{2}}$; donc

$$\frac{\mu'}{\mu} < \left[e\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 20$, $\left(e\frac{l\rho'}{\rho'-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à 1, et pour les valeurs supérieures il est plus petit que 1. Donc, pour $n = 20$ ou supérieur à 20, on a

$$\frac{\mu'}{\mu} < \sqrt{n+3}.$$

De plus, pour $n = 20$, on a

$$\mu_{20} < 2\sqrt{1 . 2 \ldots 22}.$$

Donc, pour $n > 20$,

$$\mu_n < 2\sqrt{1 . 2 \ldots (n+2)}$$

Donc

$$\gamma_n < \frac{4\sqrt{\Gamma(n+3)}}{\pi^2 n \Gamma(n+1)} = \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2 n \sqrt{\Gamma(n+3)}},$$

ce qui est sensiblement égal à $\dfrac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}$.

Par conséquent

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}.$$

On voit par là que les quantités δ_n disparaissent rapidement devant γ_n.

Cette expression des coefficients prouve encore que le développement de $G(a)$ est convergent pour toutes les valeurs de a, comme nous le savions d'avance.

Ces coefficients sont de l'ordre $\frac{1}{2}$ des coefficients de l'exponentielle.

Comme application, faisons $n = 19$.

La racine de $(l\rho)^2 - \dfrac{n+2}{\rho-1} l\rho + \pi^2 = 0$ est $\rho = 3,25$.

$$\begin{aligned} l\rho &= 1,163, \\ (l\rho)^2 &= 1,353, \\ \pi^2 + (l\rho)^2 &= 11,223. \end{aligned}$$

Calcul de $\mu_{19} = e^{-3,2} \times 3,25\,(11,22)^{10,5}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{colog} e^{3,2} &= \bar{2},588 \\ \log 3,25 &= 0,512 \\ 10,5 \log 11,22 &= \underline{11,025} \\ \log \mu_{19} &= 10,125 \end{aligned}$$

Calcul de $\gamma_{19} = \dfrac{2\mu_{19}}{\pi^2\, 19 . \Gamma(20)}$.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,301 \\ \log \mu_{19} &= 10,125 \\ \operatorname{colog} \pi^2 &= \bar{1},006 \\ \log \frac{1}{\Gamma(20)} &= \overline{18},914 \\ \operatorname{colog} 19 &= \underline{\bar{2},721} \\ \log \gamma_{19} &= \bar{9},067 \end{aligned}$$

$$\gamma_{19} = 0,0000\,0000\,1167$$

Pour avoir δ_{19} avec une plus grande approximation, nous partagerons l'intégrale en deux parties, soit

$$\pi\Gamma(20)\delta_{19} = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{\cos\omega}\sin(\omega+\sin\omega)\omega^{19}d\omega + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{\cos\omega}\sin(\omega+\sin\omega)\omega^{19}d\omega.$$

La première partie est évidemment plus petite que $\frac{e}{20}(\frac{3}{4}\pi)^{20}$, et la seconde plus petite que $\frac{e^{-0,707}\times 0,078}{20}[\pi^{20}-(\frac{3}{4}\pi)^{20}]$.

Donc

$$\delta_{19} < \left\{\frac{e}{20}(\tfrac{3}{4}\pi)^{20} + \frac{e^{-0,707}\times 0,078}{20}\pi^{20}\right\}\frac{1}{\pi\Gamma(20)}$$

$$= [e(\tfrac{3}{4})^{20} + e^{-0,707}.0,078]\frac{\pi^{19}}{20\Gamma(20)}.$$

Calcul de $u = e(\frac{3}{4})^{20}$.

$$\log e = 0,434$$
$$20\,l\tfrac{3}{4} = \bar{3},500$$
$$\log u = \bar{3},934$$
$$u = 0,009$$

Calcul de $v = 0,078\,.\,e^{-0,707}$.

$$\log e^{-0,707} = \bar{1},714$$
$$\log 0,078 = \bar{2},892$$
$$\log v = \bar{2},606$$
$$v = 0,041$$

$$u + v = 0,050.$$

Calcul de $\delta_{19} = 0,050\dfrac{\pi^{19}}{20\Gamma(20)}$.

$$\log(u+v) = \bar{2},699$$
$$19\log\pi = 9,550$$
$$\text{colog}\,20 = \bar{2},699$$
$$\log\frac{1}{\Gamma(20)} = \overline{18},914$$
$$\log\delta_{19} = \overline{11},862$$

$$\delta_{19} = 0,0000\,0000\,0073$$
$$\gamma_{19} = 0,0000\,0000\,1167$$
$$\gamma_{19} + \delta_{19} = 0,0000\,0000\,1240$$

Ainsi nous obtenons, pour limite du coefficient de a^n, 0,0000 0000 1240. Nous trouverons plus loin, pour la vraie valeur, 0,0000 0000 0104, c'est-à-dire une valeur douze fois plus petite.

Nous avons calculé γ_{19} en nous servant de μ_{19}; si l'on calculait au moyen de la formule $\gamma_{19} = \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(20)}}$, on trouverait exactement la même valeur.

On voit par ce calcul que, pour $n = 19$, δ_{19} est négligeable devant γ_{19}, au degré d'approximation que nous pouvons attendre.

Les limites que nous venons de calculer pourront servir à obtenir une limite du reste de la série.

Occupons-nous à present de la détermination exacte des coefficients du développement de $\frac{1}{\Gamma(a)} = G(a)$:

$$G(a) = n^{-a}a(1 + a)\left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{a}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a}{n}\right).$$

Le facteur

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{a}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a}{n}\right) = 1 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots + A_{n-1}a^{n-1}.$$

Le coefficient A_i s'obtient en faisant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$. Il est facile de déduire ces coefficients les uns des autres.

En effet,

$$i\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-2} + \Sigma a_1^3 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-3} \ldots \pm \Sigma a_i^i,$$

d'où

$$iA_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + S_3 A_{i-3} - \cdots \pm S_i.$$

Ces coefficients ne dépendent donc que de $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$.

Nous avons ensuite

$$n^{-a} = 1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \frac{a^3(ln)^3}{1.2.3} + \cdots;$$

Donc

$$\frac{G(a)}{a(1 + a)} = \left\{1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \frac{a^3(ln)^3}{1.2.3} + \cdots\right\}$$
$$\times [1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \cdots + A_n a^n]$$
$$= 1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + A'_3 a^3 + \ldots,$$

où

$$A'_i = A_i - A_{i-1}\frac{ln}{1} + A_{i-2}\frac{(ln)^2}{1.2} - \dots \pm \frac{(ln)^i}{1.2\dots i}.$$

Posons $C = -S_1 + ln$, ou $C = 1 - C'$, C' étant la constante d'Euler, et remplaçons, dans l'expression de $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$, S_1 par $-C + ln$; il est clair, puisque ces coefficients ont une valeur finie, qu'ils seront indépendants de ln et que l'on peut donner à ln telle valeur que l'on voudra, et par exemple faire $ln = 0$. Mais alors A'_i est égal à ce que devient A_i lorsqu'on y remplace S_1 par $-C$.

Dès lors les coefficients se forment de la manière suivante:

On multiplie les coefficients déjà obtenus A_{i-1}, A_{i-2}, $A_{i-3}, \dots, A_1$, 1 respectivement par $-C$, $-S_2$, $+S_3$, $-S_4, \dots, \pm S_i$; on ajoute tous les produits; on divise la somme par i, et l'on a A_i,

$$A_1 = -C.$$

Il est à remarquer que l'erreur de A_1, A_2, $A_3, \dots$ sera du même ordre que celle de C, S_1, S_2, $S_3, \dots$. Supposons, en effet, que A_1, A_2, $A_3, \dots, A_{i-1}$ aient été calculés avec la même approximation que C, S_1, S_2, $S_3, \dots$; les produits $A_1 S_{i-1}$, $A_2 S_{i-2}, \dots, A_{i-1} S_1$ pourront se calculer avec la même approximation, et la somme aura une erreur au plus de i unités de cet ordre, et, en divisant par i, l'erreur du résultat sera au plus d'une unité de cet ordre.

Le nombre de multiplications, dans le calcul de chaque coefficient, pourra être diminué de 1, en remarquant que CA_{i-1} et $A_1 S_{i-1}$ ont un facteur commun.

Dans ce calcul j'ai mis en dehors le facteur $(1 + a)$, pour que les facteurs S_2, $S_3, \dots$ ne contiennent pas 1, ce qui fait que le calcul des coefficients est un peu plus court. Mais il serait facile de faire entrer $(1 + a)$ dans le développement si on le jugeait convenable. Dans ce cas, on obtiendrait les coefficients du nouveau développement par l'addition de deux coefficients consécutifs.

Ces calculs seraient impossibles si l'on ne prenait la précaution de faire les neuf premiers multiples de C, S_2, S_3, $S_4, \dots$. Il est bon aussi de faire également les multiples de A_1, A_2, $A_3, \dots$, à mesure qu'on les trouve, de manière à pouvoir faire la preuve de chaque multiplication par le renversement des facteurs. Dans une si longue suite d'opérations dépendant les unes des autres, il ne faut rien négliger pour être sûr du résultat.

Les multiplications se font par la méthode abrégée. Chaque produit partiel doit être écrit avec un chiffre de plus que l'approximation demandée et à une demi-unité de cet ordre.

Voici un exemple de ce calcul; soit $A_4 \times S_6$:

$$\begin{array}{rr}
S_6 = & 0{,}0173\ 4306\ 1984\ 4491 \\
A_4 = & \underline{0{,}0245\ 5249\ 0005\ 4000} \\
 & 3\ 4686\ 1239\ 6889\ 8 \\
 & 6937\ 2247\ 9378\ 0 \\
 & 867\ 1530\ 9922\ 2 \\
 & 86\ 7153\ 0992\ 2 \\
 & 3\ 4686\ 1239\ 7 \\
 & 6937\ 2247\ 9 \\
 & 1560\ 8755\ 8 \\
 & 867 \cdot 2 \\
 & \underline{69\ 4} \\
 & 4\ 2581\ 5356\ 0362
\end{array}$$

(*voir* le Tableau des vingt-deux premiers coefficients).

La somme de ces coefficients étant égale à

$$\frac{1}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2} = 0{,}5000\ 0000\ 0000,$$

on obtiendra une vérification en faisant cette somme. Cette vérification donne une erreur du quinzième ordre, qui provient soit des termes négligés, soit de la somme des erreurs des divers coefficients.

On obtiendra une autre vérification en faisant $a = -1$. Le résultat sera égal à $\frac{1}{\Gamma(1)} = 1$. L'erreur est encore du même ordre que précédemment.

En examinant ces coefficients, on voit qu'ils varient d'une manière très irrégulière et par soubresauts. Les signes eux-mêmes ne présentent aucune régularité dans leur succession. Les termes vont toujours en diminuant; un seul fait exception à cette règle: A_{14}, qui, après s'être éloigné brusquement de A_{13}, est suivi d'un coefficient A_{15} quarante fois plus grand. Jusqu'à A_{16}, tous les coefficients de rang multiple de 3 sont positifs et tous les autres négatifs; A_{17} est le premier qui fait exception à cette règle, et, après cela, la régularité est complètement rompue.

Quelle est la loi de succession des signes? Je l'ai vainement cherchée. On s'attendait à voir ces coefficients diminuer avec une plus grande rapidité, vu la rapidité avec laquelle la fonction tend vers zéro. Ce fait est produit par le changement de signe, et nous trouvons un fait analogue dans l'exponentielle e^x, qui a une valeur très grande pour de grandes valeurs positives de x et des valeurs très petites pour des valeurs de x très grandes, mais négatives, et cependant les deux séries ne diffèrent que par les signes des coefficients.

On peut encore obtenir un autre développement de $G(a)$. Au lieu de remplacer S_1 par $-C + ln$, remplaçons au contraire ln par $C + S_1$; les coefficients du développement seront indépendants de S_1, et l'on peut, par conséquent, faire $S_1 = 0$; alors on aura

$$\frac{1}{a(a+1)} G(a) = e^{-Ca}(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

Les coefficients se déduisent les uns des autres de la même manière que précédemment, en faisant $S_1 = A_1 = 0$.

On remarquera qu'ils ont une figure de moins que les premiers et que celui de la première puissance est nul (*voir* le Tableau des vingt et un premiers coefficients).

Cherchons le développement de $\Gamma(a)$:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(1+a)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)}.$$

Or, le facteur

$$\frac{1}{1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots}$$

ne devient infini pour aucune valeur de a de module moindre que 2; donc on peut le développer dans un cercle de rayon égal à 2 et écrire

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(1+a)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)} = \frac{1}{a(1+a)}(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots),$$

d'où

$$1 = (1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

On obtiendra les coefficients B_1, B_2, $B_3, \ldots$ en identifiant les deux membres:

$$B_i + B_{i-1}A_1 + B_{i-2}A_2 + \ldots + A_i = 0.$$

Les multiples déjà formés pour le calcul de A_1, A_2, $A_3, \ldots$ serviront pour le calcul de B_1, B_2, $B_3, \ldots$ (*voir* le Tableau des dix-huit premiers coefficients).

On remarque qu'à partir du cinquième les coefficients des puissances impaires sont négatifs et ceux des puissances paires positifs. On remarquera aussi qu'ils diminuent beaucoup moins rapidement que ceux calculés précédemment et enfin qu'ils se rapprochent de plus en plus de S_2, S_3, $S_4, \ldots,$ ou plutôt de $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$, en sorte que B_{18} ne diffère de $\frac{1}{2^{19}}$ que de quelques unités du dixième ordre. On verra, un peu plus loin, la raison de tous ces faits.

La régularité des coefficients B_1, B_2, $B_3, \ldots$ témoigne de l'exactitude des coefficients A_1, A_2, $A_3, \ldots$.

Passons à l'étude de

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{z-1} dx = Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

La transcendante $Q(z)$ est une fonction de la même nature que $G(z)$, jouissant de la propriété des fonctions entières, de n'avoir qu'un point essentiel à l'infini.

Nous calculerons, un peu plus loin, la valeur des coefficients c_0, c_1, $c_2, \ldots$; nous allons chercher, tout d'abord, une limite approchée.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n c_n = \int_1^\infty e^{-x}(lx)^n \frac{dx}{x} = \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} \left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx.$$

Or, le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n$ est $\left(\frac{2}{e}\right)^n$; donc

$$1 \cdot 2 \ldots n c_n < \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx < \left(\frac{2}{e}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Donc

$$c_n < \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

et, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par sa valeur approchée, ce qui augmente encore la valeur,

$$c_n < \frac{\sqrt{2e}}{n} \frac{1}{\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Appliquons ceci à c_{17}, qui est le dernier coefficient calculé.

$\log 2 =$	$0,30103$	$\log e =$	$0,43428$
$\log e =$	$0,43427$	$\operatorname{col} 2 =$	$\bar{1},69897$
	$0,73530$	$\log 18 =$	$1,25527$
$\log\sqrt{2e} =$	$0,36765$		$1,38852$
$\operatorname{colog} 17 =$	$\bar{2},76955$		$8,5$
			694260
$\operatorname{colog}\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}} =$	$\overline{12},19758$		1110816
$\log c_n =$	$\overline{13},33478$		$11,802420$

$$c_n = 0,0000\,0000\,0000\,2163.$$

Le calcul direct donnera, un peu plus loin,

$$c_{17} = 0,0000\,0000\,0000\,1814.$$

La valeur approchée et la valeur exacte diffèrent donc d'environ trois unités et demie du quatorzième ordre.

Occupons-nous à présent du calcul des coefficients de

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

dont nous avons trouvé la valeur sous forme d'intégrale définie et dont nous avons donné une valeur approchée.

Nous avons trouvé

$$x(x+1)\Gamma(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots;$$

or

$$\begin{aligned} x(x+1)\Gamma(x) &= \Gamma(x+2) = P(x+2) + Q(x+2) \\ &= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + x(x+1)Q(x) \\ &= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + c_0 x + \left.\begin{matrix} c_1 \\ + c_0 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} c_2 \\ + c_1 \end{matrix}\right| x^3 + \dots \\ &= 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots . \end{aligned}$$

Le développement de $P(x+2)$ est facile; ce développement étant fait, on trouvera les coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots$ en identifiant les deux membres de l'égalité précédente.

De là

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4} - \dots + \frac{2}{e} = 1,$$

$$-\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^2} + \dots\right) + \frac{2}{e} + c_0 = B_1,$$

$$\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^3} + \dots\right) + (c_0 + c_1) = B_2,$$

$$-\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^4} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^4} + \dots\right) + (c_1 + c_2) = B_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\pm\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^{n+2}} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^{n+2}} + \dots\right) + c_{n-1} + c_n = B_{n+1}.$$

Les parenthèses se calculent très facilement; après avoir formé les quantités $\frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \dots$, on divise successivement ces nombres par $2, 3, 4, \dots$; puis les nombres ainsi formés sont divisés par $2, 3, 4, \dots$, les nombres ainsi formés sont divisés par $2, 3, 4, \dots$, et ainsi de suite (*voir* le Tableau des dix-huit premiers coefficients $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{17}$. Tous ces coefficients sont positifs, comme on le savait d'avance. On remarque qu'ils sont plus petits que ceux des autres développements).

On voit à présent pourquoi les coefficients $B_1, B_2, B_3, \dots$ se rapprochent de plus en plus de $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$ et sont alternativement positifs et négatifs. Les coefficients c_0, c_1, $c_2, \ldots$ diminuant très rapidement, B_1, B_2, $B_3, \ldots$ se rapprochent aussi très rapidement des crochets

$$\pm\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^{n+2}}-\cdots\right)=B_{n+1},$$

et le crochet lui-même se rapproche de plus en plus du premier terme $\frac{1}{2^{n+2}}$.

On trouve là une vérification de l'exactitude des coefficients B_1, B_2, $B_3, \ldots$, A_1, A_2, $A_3, \ldots$. Si ces nombres avaient été fautifs, ils auraient troublé la régularité de c_0, c_1, $c_2, \ldots$; il en serait résulté, par exemple, que quelques-uns auraient été négatifs.

On peut aussi avoir une vérification des nombres c_0, c_1, c_2, $c_3, \ldots$ de la manière suivante:

$$Q(1)=\frac{1}{e},$$

$$\begin{aligned} Q(1) &= c_0+c_1+c_2+\cdots \\ &= 0{,}3678\;7944\;1171\;4142, \\ \frac{1}{e} &= 0{,}3678\;7944\;1171\;4423, \end{aligned}$$

$$\text{Différence} = 0{,}0000\;0000\;0000\;0281.$$

La petite différence trouvée provient soit de l'erreur des coefficients c_0, c_1, $c_2, \ldots$, soit des termes qui n'ont pas été calculés.

La concordance parfaite de tous les résultats me donne la conviction que tous ces calculs ne contiennent pas une faute, malgré leur très long développement.

M. Hermite m'a communiqué une forme de $\Gamma(x)$ très élégante et pouvant servir directement au calcul de cette fonction:

$$\Gamma(x)=\int_0^a \xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi+\int_a^\infty \xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi.$$

La première intégrale, en développant en série l'exponentielle, donne naissance à la fonction uniforme

$$a^x\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{x+1}+\frac{a^2}{1.2}\frac{1}{x+2}-\cdots\right).$$

Représentons la seconde par $Q(x)$ et faisons

$$Q_n=\int_{a+n}^{a+n+1}\xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi;$$

il viendra, sous forme d'une série évidemment convergente,

$$Q(x)=Q_0+Q_1+Q_2+\cdots$$

Posant ensuite $\xi=\zeta+a+n$, nous aurons

$$Q_n=\int_0^1(a+n+\zeta)^{x-1}e^{-a-n-\zeta}d\zeta$$

ou bien

$$Q_n=e^{-a-n}\int_0^1(a+n+\zeta)^{x-1}e^{-\zeta}d\zeta,$$

et, en développant,

$$\begin{aligned}Q_n&=e^{-a-n}\int_0^1\left[(a+n)^{x-1}+\frac{x-1}{1}(a+n)^{x-2}\zeta+\cdots\right]e^{-\zeta}d\zeta\\&=e^{-a-n}\Big[P(1)(a+n)^{x-1}+P(2)\frac{(x-1)}{1}(a+n)^{x-2}\\&\qquad+P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(a+n)^{x-3}+\cdots\Big].\end{aligned}$$

Soit

$$S(x)=\frac{a^x}{e^a}+\frac{(a+1)^x}{e^{a+1}}+\frac{(a+2)^x}{e^{a+2}}+\cdots,$$

nous aurons l'expression analytique suivante de $Q(x)$, savoir:

$$Q(x)=P(1)S(x-1)+P(2)\frac{x-1}{1}S(x-2)+P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}S(x-3)+\cdots,$$

et la convergence de cette série est manifeste, pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on suppose $a>1$.

Effectivement on a, dans ce cas, à partir d'une certaine valeur de n, $x - n < 0$, et dès lors on a sensiblement

$$S(x-n) = \frac{a^{x-n}}{e^a} \quad \text{et} \quad P(n) < \frac{1}{n}.$$

Il résulte qu'à partir de cette valeur de n les termes de la série sont plus petits que ceux du développement de $e^{-a}(a+1)^{x-1}$.

Les coefficients $P(1)$, $P(2)$,... sont faciles à calculer, car ils se déduisent les uns des autres au moyen de la relation

$$P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e}.$$

La seule difficulté consistera dans le calcul des fonctions $S(x)$.

On peut, au moyen de la fonction holomorphe $G(x)$, former une infinité d'autres fonctions holomorphes.

Posons, en effet,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= G(x+1) + G(x+2) + \cdots, \\ F_2(x) &= F_1(x) + F_1(x+1) + \cdots, \\ F_3(x) &= F_2(x) + F_2(x+1) + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Toutes ces fonctions seront holomorphes, et pourront se déduire de $F_1(x)$.

Soient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 G(x+1) + A_2 G(x+2) + \cdots, \\ \psi(x) &= \varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) + \cdots, \end{aligned}$$

on tire de là

$$\psi(x) = A_1 G(x+1) + (A_1 + A_2) G(x+2) + \cdots + (A_1 + A_2 + \cdot + A_n) G(x+n) + \cdots;$$

donc

$$\begin{aligned} F_2(x) &= G(x+1) + 2G(x+2) + 3G(x+3) + \cdots, \\ F_3(x) &= G(x+1) + 3G(x+2) + 6G(x+3) + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{1.2} G(x+n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$F_k(x) = \frac{1.2\ldots(k-1)}{1.2\ldots(k-1)}G(x+1)$$

$$+\frac{2.3\ldots k}{1.2\ldots(k-1)}G(x+2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2\ldots(k-1)}G(x+n)+\cdots$$

$$=\frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\{1.2\ldots(k-1)G(x+1)+2.3\ldots kG(x+2)\ldots$$

$$+n(n+1)\ldots(n+k-2)G(x+n)+\cdots\}.$$

Faisons

$$f(z) = G(x+1)+zG(x+2)+z^2G(x+3)+z^3G(x+4)+\cdots,$$

et on aura

$$F_k(x) = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}(z^{k-1}f(z))$$

pour $z=1$.

Toutes ces fonctions étant holomorphes et par conséquent développables en séries convergentes, il y a intérêt à connaître les coefficients. Avant de procéder à cette recherche, je vais déterminer une limite supérieure.

Si dans la relation trouvée précédemment, à savoir:

$$G(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\int_\eta^\infty \rho^{-x}e^{-\rho}d\rho + \frac{\eta^{1-x}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-x)\omega i+\eta(\cos\omega+i\sin\omega)}d\omega,$$

on fait $\eta = e$, elle deviendra

$$G(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\int_e^\infty \rho^{-x}e^{-\rho}d\rho + \frac{e}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{e(\cos\omega+i\sin\omega)+\omega i}\, e^{-x(1+\omega i)}d\omega.$$

Remplaçons successivement x par $x+1$, $x+2$, $x+3, \ldots x+\infty$, et ajoutons; nous obtiendrons

$$F_1(x) = -\frac{\sin \pi x}{\pi}\int_e^\infty \frac{\rho^{-x}e^{-\rho}}{(1+\rho)}d\rho + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{e(\cos\omega+i\sin\omega)}\, e^{-x(1+\omega i)}}{1-e^{-(1+\omega i)}}d\omega.$$

On obtiendra de même

$$F_k(x) = \pm \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_e^\infty \frac{\rho^{-x+k-1} e^{-\rho}}{(1+\rho)^k} d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{e(\cos\omega + i \sin\omega)} e^{-x(1+\omega i)}}{\left(1 - e^{-(1+\omega i)}\right)^k} d\omega.$$

Représentons par γ_n et δ_n les coefficients de x^n dans ces deux développements, on aura:

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 \Gamma(n+1)} \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\rho} \rho . \rho^{k-1} [(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}}{(1+\rho)^k} \sin n\omega \, d\omega; \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang} \theta = \pi, \\ &\operatorname{tang} \omega = \frac{\pi}{l\rho}. \end{aligned} \right.$$

$$\delta_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{e(\cos\omega + i\sin\omega)} (1+\omega i)^n}{\left(1 - e^{-e(1+\omega i)}\right)^k} d\omega.$$

Cherchons une limite de γ_n, et pour cela étudions les variations de

$$\frac{e^{-\rho} \rho . \rho^{k-1} [(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}}{(1+\rho)^k} = P.$$

La dérivée de P est, à un facteur près essentiellement positif,

$$P' = (k - \rho - \rho^2) \left\{ (l\rho)^2 - \frac{(n+1)(\rho+1)}{\rho^2 + \rho - k} l\rho + \pi^2 \right\};$$

pour toute valeur de ρ qui rend $\rho^2 + \rho - k < 0$, les deux facteurs de P' sont positifs et P est croissant; lorsque ρ est tel que $\rho^2 + \rho - k > 0$, les deux facteurs P' sont négatifs, jusqu'à ce que le second passe par o, et P est encore croissant; il passe par son maximum en même temps que le second facteur passe par o. Ce second facteur ne passe d'ailleurs qu'une fois par o, pour les valeurs de $\rho > e$. Pour ces valeurs, en effet, $(l\rho)^2 + \pi^2$ va en augmentant et $\frac{(\rho+1) l\rho}{\rho^2 + \rho - k}$ en diminuant, donc

$$(l\rho)^2 - \frac{(n+1)(\rho+1)}{\rho^2 + \rho - k} l\rho + \pi^2$$

ne peut passer qu'une fois par o.

J'ai dit que $\frac{\rho+\mathrm{I}}{\rho^2+\rho-k}l\rho$ diminuait à mesure que ρ augmente; pour le prouver prenons la dérivée de

$$\frac{l\rho}{\rho-\frac{k}{\rho+\mathrm{I}}};$$

on aura

$$\frac{\mathrm{I}}{\rho-\frac{k}{\rho+\mathrm{I}}}\left[\frac{\mathrm{I}}{\rho}-\frac{l\rho}{\rho-\frac{k}{\rho+\mathrm{I}}}\right]-\frac{\frac{kl\rho}{(\rho+\mathrm{I})^2}}{\left(\rho-\frac{k}{\rho+\mathrm{I}}\right)^2}$$

quantité évidemment négative, pour $\rho > e$ et rendant $\rho-\frac{k}{\rho+\mathrm{I}}>0$.

En appliquant le raisonnement fait relativement au développement de

$$\frac{\sin\pi x}{\pi}\int_{\mathrm{I}}^{\infty}\rho^{-x}e^{-\rho}d\rho$$

on trouve

$$\gamma_n < \frac{2\mu}{n\pi^2\Gamma(n+\mathrm{I})},$$

μ étant le maximum de P. Or ce maximum est moindre que le maximum de $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2+\pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$, multiplié par le maximum de $\frac{\rho^{k-1}}{(\mathrm{I}+\rho)^k}$ qui est $\frac{\mathrm{I}}{k}\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{I}}{k}\right)^{k-1}$, et lorsque $k=\mathrm{I}$, $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+e}$.

Donc

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+\mathrm{I})}}\cdot\frac{\mathrm{I}}{k}\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{I}}{k}\right)^{k-1},$$

et lorsque $k=\mathrm{I}$

$$\gamma_n < \frac{4}{(\mathrm{I}+e)\pi^2\sqrt{\Gamma(n+\mathrm{I})}}.$$

Cherchons à présent une limite de δ_n.

Pour faire disparaître les imaginaires nous poserons

$$\omega = r\sin\varphi,\quad \mathrm{I} = r\cos\varphi,\quad r^2 = \mathrm{I}+\omega^2,$$

$$\frac{\mathrm{I}}{e}\sin\omega = r'\sin\psi,\quad \mathrm{I}-\frac{\mathrm{I}}{e}\cos\omega = r'\cos\psi,\quad r'^2 = \mathrm{I}+\frac{\mathrm{I}}{e^2}-\frac{2}{e}\cos\omega;$$

δ_n deviendra

$$\delta_n = \frac{(-1)^n}{2\pi\Gamma(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^n}{r'^k}e^{e\cos\omega}\{\cos(\sin\omega+n\varphi-k\psi)+i\sin(\sin\omega+n\varphi-k\psi\}d\omega$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{r^n}{r'^k}e^{e\cos\omega}\cos(\sin\omega+n\varphi-k\psi)d\omega.$$

Pour n un peu grand le maximum du facteur $\frac{r^n}{r'^k}e^{e\cos\omega}$ correspond à $\omega=\pi$, donc

$$\delta_n < \frac{e^{-e}(1+\pi^2)^{\frac{n}{2}}}{\left(1+\frac{1}{e}\right)^k\Gamma(n+1)}.$$

Comme application faisons $k=1$ et $n=19$.

$$\log\frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}} = \bar{9},067$$

$$\text{colog}(1+e) = \bar{1},431$$

$$\log\gamma_{19} = \overline{10},498$$

$$\gamma_{19} = 0,0000\,0000\,0314\ldots$$

$$\log\frac{1}{\Gamma(20)} = \overline{18},914$$

$$\log(1+\pi^2)^{9,8} = 9,844$$

$$\log e^{1-e} = \bar{1},262$$

$$\text{colog}(1+e) = \bar{1},431$$

$$\log\delta_{19} = \bar{9},451$$

$$\delta_{19} = 0,0000\,0000\,28\ldots$$

Donc le coefficient de x^{19} dans $F_1(x)$ est inférieur à

$$0,0000\,0000\,3\ldots$$

Le calcul direct donne pour la valeur de ce coefficient

$$0,0000\,0000\,0004\ldots$$

Pour des valeurs considérables de n, la limite de δ_n disparait devant celle de γ_n, et on peut prendre alors pour limite du coefficient de x^n la limite de γ_n, c'est à dire

$$\frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}}\cdot\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}$$

et pour $k = 1$

$$\frac{4}{\pi^2(1+e)\sqrt{\Gamma(n+1)}}.$$

Pour calculer les coefficients de F_1, F_2, $F_3, \ldots$, il faut commencer par développer

$$G(x+1),\quad G(x+2),\ldots,$$

multiplier les coefficients par les nombres qui accompagnent chacune de ces fonctions et ajouter les coefficients d'une même puissance. Quant aux coefficients de

$$G(x+1),\quad G(x+2),\ldots,$$

ils se déduisent très-facilement les uns des autres. Supposons qu'on ait obtenu le développement de $G(x+n)$, voici comment on obtiendra $G(x+n+1)$; on a

$$(x+n)G(x+n+1) = G(x+n);$$

si A et B représentent les coefficients de x^{m-1} et x^m, dans $G(x+n+1)$ et B' celui de x^m, dans $G(x+n)$, l'identification donnera

$$A + nB = B'$$

donc

$$B = \frac{B'-A}{n}.$$

C'est ainsi que j'ai obtenu le développement des 22 premiers termes

$$G(x+1),\quad G(x+2),\ldots,\quad G(x+22),$$

après avoir obtenu $G(x+1)$.

Puis j'ai obtenu les 22 premiers coefficients de $F_1(x)$, avec seize décimales. La somme de ces coefficients donne $F_1(1) = e - 1$. Cette somme accuse une erreur trois unités du quatorzième ordre provenant, soit de l'erreur de chaque terme, soit des termes négligés.

On peut encore vérifier ces calculs en faisant

$$x = -1, \quad F(-1) = e.$$

L'erreur est encore du même ordre.

On a

$$F_1(x+1) + G(x+1) = F_1(x)$$
$$F_2(x+1) + F_1(x) = F_2(x)$$
$$F_3(x+1) + F_2(x) = F_3(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{k+1}(x+1) + F_k(x) = F_{k+1}(x).$$

Cette propriété analogue à la propriété fondamentale de $\Gamma(x)$, permettrait de ramener le calcul de $F_k(x)$, au cas où la partie réelle de x est plus petite que 1.

Pour $F_1(x)$, on a encore

$$F_1(x+1) + G(x+1) = F_1(x)$$
$$xF_1(x+2) + G(x+1) = xF_1(x+1).$$

Donc

$$xF_1(x+2) - F_1(x+1) = xF_1(x+1) - F_1(x).$$

Enfin, pour compléter l'analogie, posons avec M. Hermite

$$\frac{1}{f_k(x)} = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\Big\{-1.2\ldots(k-1)\Gamma(-x)$$
$$+ 2.3\ldots k\Gamma(-x-1) - 3.4\ldots(k+1)\Gamma(-x-2) + \cdots\Big\}$$

il viendra

$$F_k(x).f_k(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Tableau des coefficients du développement

$$G(x+1) + G(x+2) + \ldots.$$

$B_0 = e$

$B_1 = -0{,}5963\ 4736\ 2323\ 1937$

$B_2 = -0{,}6101\ 8642\ 4288\ 0669$

$B_3 = +0{,}1408\ 3144\ 6255\ 5907$

$B_4 = +0{,}1135\ 3209\ 0799\ 3344$

$B_5 = -0{,}0502\ 6804\ 2916\ 5430$

$B_6 = -0{,}0020\ 9527\ 8940\ 5085$

$B_7 = +0{,}0058\ 8951\ 4875\ 3865$

$B_8 = -0{,}0013\ 5660\ 7820\ 5651$

$B_9 = -0{,}0000\ 8533\ 6852\ 4170$

$B_{10} = +0{,}0001\ 0653\ 6695\ 8557$

$B_{11} = -0{,}0000\ 2115\ 0329\ 4320$

$B_{12} = -0{,}0000\ 0012\ 2186\ 8494$

$B_{13} = +0{,}0000\ 0092\ 1350\ 0580$

$B_{14} = -0{,}0000\ 0019\ 8178\ 0777$

$B_{15} = +0{,}0000\ 0001\ 1008\ 6976$

$B_{16} = +0{,}0000\ 0000\ 3810\ 5123$

$B_{17} = -0{,}0000\ 0000\ 1072\ 7134$

$B_{18} = +0{,}0000\ 0000\ 0111\ 5704$

$B_{19} = +0{,}0000\ 0000\ 0004\ 1052$

$B_{20} = -0{,}0000\ 0000\ 0003\ 1803$

$B_{21} = +0{,}0000\ 0000\ 0000\ 4960$

$B_{22} = -0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0274$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x(x+1)(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots).$$

$$A_1 = -0{,}4227\ 8433\ 5098\ 4671$$
$$A_2 = -0{,}2330\ 9373\ 6421\ 7867$$
$$A_3 = +0{,}1910\ 9110\ 1387\ 6915$$
$$A_4 = -0{,}0245\ 5249\ 0005\ 4000$$
$$A_5 = -0{,}0176\ 4524\ 4550\ 1443$$
$$A_6 = +0{,}0080\ 2327\ 3022\ 2673$$
$$A_7 = -0{,}0008\ 0432\ 9775\ 6044$$
$$A_8 = -0{,}0003\ 6083\ 7816\ 2548$$
$$A_9 = +0{,}0001\ 4559\ 6142\ 1399$$
$$A_{10} = -0{,}0000\ 1754\ 5859\ 7517$$
$$A_{11} = -0{,}0000\ 0258\ 8995\ 0224$$
$$A_{12} = +0{,}0000\ 0133\ 8501\ 5466$$
$$A_{13} = -0{,}0000\ 0020\ 5474\ 3152$$
$$A_{14} = -0{,}0000\ 0000\ 0159\ 5268$$
$$A_{15} = +0{,}0000\ 0000\ 6275\ 6218$$
$$A_{16} = -0{,}0000\ 0000\ 1273\ 6143$$
$$A_{17} = +0{,}0000\ 0000\ 0092\ 3397$$
$$A_{18} = +0{,}0000\ 0000\ 0012\ 0028$$
$$A_{19} = -0{,}0000\ 0000\ 0004\ 2202$$
$$A_{20} = +0{,}0000\ 0000\ 0000\ 5240$$
$$A_{21} = -0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0140$$
$$A_{22} = -0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0067$$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots.$$

$a_1 = +\ 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$a_2 = +\ 0{,}5772\ 1566\ 4901\ 5329$

$a_3 = -\ 0{,}6558\ 7807\ 1520\ 2538$

$a_4 = -\ 0{,}0420\ 0263\ 5034\ 0952$

$a_5 = +\ 0{,}1665\ 3861\ 1382\ 2915$

$a_6 = -\ 0{,}0421\ 9773\ 4555\ 5443$

$a_7 = -\ 0{,}0096\ 2197\ 1527\ 8770$

$a_8 = +\ 0{,}0072\ 1894\ 3246\ 6630$

$a_9 = -\ 0{,}0011\ 6516\ 7591\ 8591$

$a_{10} = -\ 0{,}0002\ 1524\ 1674\ 1149$

$a_{11} = +\ 0{,}0001\ 2805\ 0282\ 3882$

$a_{12} = -\ 0{,}0000\ 2013\ 4854\ 7741$

$a_{13} = -\ 0{,}0000\ 0125\ 0493\ 4758$

$a_{14} = +\ 0{,}0000\ 0113\ 3027\ 2314$

$a_{15} = -\ 0{,}0000\ 0020\ 5633\ 8420$

$a_{16} = +\ 0{,}0000\ 0000\ 6116\ 0950$

$a_{17} = +\ 0{,}0000\ 0000\ 5002\ 0075$

$a_{18} = -\ 0{,}0000\ 0000\ 1181\ 2746$

$a_{19} = +\ 0{,}0000\ 0000\ 0104\ 3425$

$a_{20} = +\ 0{,}0000\ 0000\ 0007\ 7826$

$a_{21} = -\ 0{,}0000\ 0000\ 0003\ 6962$

$a_{22} = +\ 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 5100$

$a_{23} = -\ 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0207$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{-Cx} x(x+1)(1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots).$$

C	$=$	$0{,}4227\ 8433\ 5098\ 4671$
A_2	$=$	$-\ 0{,}3224\ 6703\ 3424\ 1132$
A_3	$=$	$+\ 0{,}0673\ 5230\ 1053\ 1981$
A_4	$=$	$+\ 0{,}0314\ 1168\ 5394\ 9022$
A_5	$=$	$-\ 0{,}0143\ 3334\ 5686\ 2387$
A_6	$=$	$+\ 0{,}0004\ 2566\ 6389\ 5753$
A_7	$=$	$+\ 0{,}0009\ 2680\ 6472\ 5897$
A_8	$=$	$-\ 0{,}0002\ 1927\ 6360\ 3432$
A_9	$=$	$-\ 0{,}0000\ 0265\ 0983\ 9844$
A_{10}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 1021\ 5199\ 3474$
A_{11}	$=$	$-\ 0{,}0000\ 0185\ 4328\ 3265$
A_{12}	$=$	$-\ 0{,}0000\ 0000\ 6534\ 1544$
A_{13}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 0005\ 8247\ 6956$
A_{14}	$=$	$-\ 0{,}0000\ 0001\ 0048\ 4862$
A_{15}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 0000\ 0251\ 4687$
A_{16}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 0000\ 0188\ 6871$
A_{17}	$=$	$-\ 0{,}0000\ 0000\ 0035\ 7806$
A_{18}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 0000\ 0002\ 0025$
A_{19}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 3314$
A_{20}	$=$	$-\ 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0878$
A_{21}	$=$	$+\ 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0069$

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)}(1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots).$$

$B_1 = +\ 0{,}4227\ 8433\ 5098\ 4671$

$B_2 = +\ 0{,}4118\ 4033\ 0426\ 4396$

$B_3 = +\ 0{,}0815\ 7691\ 9247\ 0863$

$B_4 = +\ 0{,}0742\ 4901\ 0753\ 5137$

$B_5 = -\ 0{,}0002\ 6698\ 2068\ 7450$

$B_6 = +\ 0{,}0111\ 5404\ 5718\ 1309$

$B_7 = -\ 0{,}0028\ 5264\ 5821\ 1553$

$B_8 = +\ 0{,}0021\ 0393\ 3340\ 6975$

$B_9 = -\ 0{,}0009\ 1957\ 3838\ 8259$

$B_{10} = +\ 0{,}0004\ 9038\ 8450\ 8226$

$B_{11} = -\ 0{,}0002\ 4094\ 1435\ 8311$

$B_{12} = +\ 0{,}0001{,}2167\ 3806\ 5265$

$B_{13} = -\ 0{,}0000\ 6079\ 2891\ 3175$

$B_{14} = +\ 0{,}0000\ 3045\ 3557\ 0349$

$B_{15} = -\ 0{,}0000\ 1523\ 4935\ 8969$

$B_{16} = +\ 0{,}0000\ 0762\ 1779\ 6964$

$B_{17} = -\ 0{,}0000\ 0381\ 2110\ 4003$

$B_{18} = +\ 0{,}0000\ 0190\ 6491\ 6577$

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(x) = P(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

$c_0 = 0{,}2193\ 8393\ 4395\ 5203$

$c_1 = 0{,}0978\ 4319\ 7216\ 6725$

$c_2 = 0{,}0356\ 0349\ 1928\ 4726$

$c_3 = 0{,}0110\ 7089\ 5446\ 0110$

$c_4 = 0{,}0030\ 2761\ 1195\ 8767$

$c_5 = 0{,}0007\ 4265\ 8300\ 4889$

$c_6 = 0{,}0001\ 6575\ 6256\ 0585$

$c_7 = 0{,}0000\ 3403\ 1394\ 8701$

$c_8 = 0{,}0000\ 0648\ 2609\ 8154$

$c_9 = 0{,}0000\ 0115\ 3713\ 5309$

$c_{10} = 0{,}0000\ 0019\ 2937\ 4300$

$c_{11} = 0{,}0000\ 0003\ 0464\ 9169$

$c_{12} = 0{,}0000\ 0000\ 4560\ 7157$

$c_{13} = 0{,}0000\ 0000\ 0649\ 6268$

$c_{14} = 0{,}0000\ 0000\ 0088\ 3033$

$c_{15} = 0{,}0000\ 0000\ 0011\ 4985$

$c_{16} = 0{,}0000\ 0000\ 0001\ 4247$

$c_{17} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 1814$

La connaissance des coefficients que nous avons calculés pourra être utile dans beaucoup de cas. On pourra s'en servir pour calculer commodément les dérivées, et même les intégrales successives des fonctions $G(x)$, $\Gamma(x)$, $Q(x)$ et les intégrales définies qui en dépendent.

Comme application, je vais calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}, \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}:$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1 + \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2 + \tfrac{1}{4}A_3 + \ldots,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1 - \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2 - \tfrac{1}{4}A_3 + \ldots,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} + \int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}.$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000 \\
\tfrac{1}{4}A_3 &= 0{,}0477\ 7277\ 5346\ 9229 \\
\tfrac{1}{7}A_6 &= 0{,}0011\ 4618\ 1860\ 3239 \\
\tfrac{1}{10}A_9 &= 0{,}0000\ 1455\ 9614\ 2140 \\
\tfrac{1}{13}A_{12} &= 0{,}0000\ 0010\ 2961\ 6574 \\
\tfrac{1}{16}A_{15} &= 0{,}0000\ 0000\ 0392\ 2264 \\
\tfrac{1}{18}A_{17} &= 0{,}0000\ 0000\ 0005\ 1300 \\
\tfrac{1}{19}A_{18} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 6317 \\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= \underline{0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0250} \\
&\ 1{,}0489\ 3362\ 0181\ 1313
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}A_1 &= 0{,}2113\ 9216\ 7549\ 2335\\
\tfrac{1}{3}A_2 &= 0{,}0776\ 9791\ 2140\ 5956\\
\tfrac{1}{5}A_4 &= 0{,}0049\ 1049\ 8001\ 0800\\
\tfrac{1}{6}A_5 &= 0{,}0029\ 4087\ 4091\ 6907\\
\tfrac{1}{8}A_7 &= 0{,}0001\ 0054\ 1221\ 9505\\
\tfrac{1}{9}A_8 &= 0{,}0000\ 4009\ 3090\ 6950\\
\tfrac{1}{11}A_{10} &= 0{,}0000\ 0159\ 5078\ 1593\\
\tfrac{1}{12}A_{11} &= 0{,}0000\ 0021\ 5749\ 5852\\
\tfrac{1}{14}A_{13} &= 0{,}0000\ 0001\ 4676\ 7368\\
\tfrac{1}{15}A_{14} &= 0{,}0000\ 0000\ 0010\ 6351\\
\tfrac{1}{17}A_{16} &= 0{,}0000\ 0000\ 0074\ 9185\\
\tfrac{1}{20}A_{19} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 2110\\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0010\\
\hline
& \ 0{,}2970\ 8391\ 1685\ 4922
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ 1{,}0489\ 3362\ 0181\ 1313\\
& \ 0{,}2970\ 8391\ 1685\ 4922\\
\hline
\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} &= 0{,}7518\ 4970\ 8495\ 6391
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000\\
\tfrac{1}{2}A_1 &= 0{,}2113\ 9216\ 7549\ 2335\\
\tfrac{1}{6}A_5 &= 0{,}0029\ 4087\ 4091\ 6907\\
\tfrac{1}{7}A_6 &= 0{,}0011\ 4618\ 1860\ 3239\\
\tfrac{1}{8}A_7 &= 0{,}0001\ 0054\ 1221\ 9505\\
\tfrac{1}{12}A_{11} &= 0{,}0000\ 0021\ 5749\ 5852\\
\tfrac{1}{13}A_{12} &= 0{,}0000\ 0010\ 2961\ 6574\\
\tfrac{1}{14}A_{13} &= 0{,}0000\ 0001\ 4676\ 7368\\
\tfrac{1}{19}A_{18} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 6317\\
\tfrac{1}{20}A_{19} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 2110\\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0250\\
\tfrac{1}{22}A_{21} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0007\\
\hline
& \ 1{,}2155\ 8009\ 8112\ 0464
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{3}A_2 = 0{,}0776\ 9791\ 2140\ 5956$$
$$\tfrac{1}{4}A_3 = 0{,}0477\ 7277\ 5346\ 9229$$
$$\tfrac{1}{5}A_4 = 0{,}0049\ 1049\ 8001\ 0800$$
$$\tfrac{1}{9}A_8 = 0{,}0000\ 4009\ 3090\ 6950$$
$$\tfrac{1}{10}A_9 = 0{,}0000\ 1455\ 9614\ 2140$$
$$\tfrac{1}{11}A_{10} = 0{,}0000\ 0159\ 5078\ 1593$$
$$\tfrac{1}{15}A_{14} = 0{,}0000\ 0000\ 0010\ 6351$$
$$\tfrac{1}{16}A_{15} = 0{,}0000\ 0000\ 0392\ 2264$$
$$\tfrac{1}{17}A_{16} = 0{,}0000\ 0000\ 0074\ 9185$$
$$\tfrac{1}{18}A_{17} = 0{,}0000\ 0000\ 0005\ 1300$$
$$\tfrac{1}{23}A_{22} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0003$$

$$0{,}1304\ 3743\ 3754\ 5771$$
$$1{,}2155\ 8009\ 8112\ 0464$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1{,}0851\ 4266\ 4357\ 4693$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 0{,}7518\ 4970\ 8495\ 6391$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1{,}8369\ 9237\ 2853\ 1084$$

On trouverait, de la même manière,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x)} = 0{,}5412\ 3573\ 9587\ 6182,$$

$$\int_0^{-1} \frac{dx}{\Gamma(x)} = 0{,}1837\ 2070\ 6646\ 1288.$$