Acta Math., 179 (1997), 41–77
© 1997 by Institut Mittag-Leffler. All rights reserved

Troncature pour les espaces symétriques réductifs

par

PATRICK DELORME

Institut de Mathématiques de Luminy
Marseille, France

0. Introduction

Soient G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant à σ, H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ, K le sous-groupe des points fixes de θ et $\mathbf{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H. Soit $\mathfrak{a}_\varnothing$ un sous-espace abélien maximal du sous-espace des éléments de $\mathfrak{g}$ anti-invariants par la différentielle de σ et celle de θ. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, contenant $A_\varnothing = \exp \mathfrak{a}_\varnothing$, on note $P = M_P^1 A_P N_P$ sa σ-décomposition de Langlands où $M_P = M_P^1 A_P$ est le sous-groupe de Levi θ-stable de P et $A_P \subset A_\varnothing$. Soient M, M' des sous-groupes de Levi θ-stables de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G. Soit τ une représentation unitaire de dimension finie de K. On dispose de la version τ-sphérique des fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(\Lambda)$ relativement à M (voir [6]) et on considère l'espace engendré par leurs combinaisons linéaires quand Λ varie. On le note $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(G, M, \tau)$. On introduit même un espace plus gros $\widetilde{\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}}(G, M, \tau)$ afin d'y inclure la multiplication des intégrales d'Einsenstein par un polynôme convenable (cf. [6, proposition 2]). Si $F \in \widetilde{\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}}(G, M, \tau)$, elle définit en particulier une famille de fonctions τ-sphériques sur G/H, tempérées, $\mathbf{D}(G/H)$-finies, paramétrée par $i\mathfrak{a}_M^*$, $\lambda \mapsto F(\lambda)$. On suppose, pour simplifier l'exposé introductif, que $\mathfrak{a}_\varnothing$ ne rencontre le centre de $\mathfrak{g}$ qu'en 0. Soit $T \in \mathfrak{a}_\varnothing$, régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$. On définit $S_T \subset G/H$ par : $k(\exp X)H \in S_T$ si et seulement si X appartient à l'enveloppe convexe de T sous le groupe de Weyl de $\mathfrak{a}_\varnothing$, pour $k \in K$, $X \in \mathfrak{a}_\varnothing$. On note 1_{S_T} l'indicatrice de S_T. On prouve, par une démonstration calquée sur celle d'Arthur [1, théorème 8.1], que, pour $F' \in \widetilde{\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}}(G, M', \tau)$, l'expression :

$$\Omega^T(F, F', \lambda, \lambda') := \int_{G/H} 1_{S_T}(x)\,(F(\lambda)(x), F'(\lambda')(x))\,dx$$

est asymptotique à une fonction analytique en (λ, λ'), $\omega^T(F, F', \lambda, \lambda')$, quand $\|T\|$ tend vers $+\infty$ et T reste dans un cône fermé privé de $\{0\}$ et contenu dans une chambre de Weyl ouverte. La fonction $\omega^T(F, F', \lambda, \lambda')$ a une expression explicite en fonction du terme constant de $F(\lambda)$ et $F'(\lambda')$ le long de certains sous-groupes paraboliques. Nous remplaçons l'utilisation par Arthur de la formule de Plancherel par un lemme simple sur les paquets d'ondes (lemme 9). Lorsque $M=M'$ et $\dim \mathfrak{a}_M=1$, l'analyticité de $\omega^T(F, F', \lambda, \lambda')$ se traduit par les relations de Maass–Selberg (du moins celles qui ne résultent pas d'un transport de structure). Retournant au cas général et utilisant des propriétés d'holomorphie de $F(\lambda), F'(\lambda')$ et de leurs termes constants, nous donnons une expression de $\omega^T(F, F', \lambda, \lambda')$ à l'aide de transformées de Fourier d'indicatrices de cônes. Ceci nous permet finalement de donner une expression de l'intégrale sur G/H du produit d'un paquet d'ondes, formé à partir de F, avec $F'(\lambda')$. Tous ces résultats ont une traduction pour les intégrales d'Eisenstein qui sera développée dans [9]. Dans le cas des groupes, notre travail donne un point de vue nouveau sur certains résultats d'Harish-Chandra [13].

1. Notations. Choix des mesures

On utilise les conventions de [10, §1.1] (par exemple si S est un groupe de Lie, S^0 désigne sa composante neutre, e ou e_S son élément neutre, etc.).

Soient G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ, K le sous-groupe des points fixes de θ. Soit $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace propre de la différentielle de θ (resp. σ), notée encore de même, pour la valeur propre -1. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, on note M_P ou M son sous-groupe de Levi stable par σ et θ, i.e. $M_P=P\cap\theta(P)$, dite composante de Levi, N_P son radical unipotent et $P=M^1A_PN_P$ sa σ-décomposition de Langlands. En particulier on note $G=G^1A_G$ la σ-décomposition de Langlands de G. Ici A_G est le sous-groupe de la composante déployée de G formé des éléments a de celle-ci tels que $\sigma(a)=a^{-1}$. On l'appelle composante σ-déployée de G. Clairement, si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, $(M_P, \sigma_{|M_P}, \theta_{|M_P}, H\cap M_P)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H), et de même en remplaçant M_P par M_P^1. On dispose d'une application H_G de G/H dans $\mathfrak{a}_G$ qui, à gH, associe $\log a\in\mathfrak{a}_G$ où $g=g^1a$ avec $g^1\in G^1$, $a\in A_G$. Notez que H est contenu dans G^1. De plus, on a :

$$(G^1/H)\times\mathfrak{a}_G \text{ est difféomorphe à } G/H \text{ par l'application } (x, X)\mapsto(\exp X)x \qquad (1.1)$$

On se fixe dans toute la suite de l'article un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}_\varnothing$. On note $M_\varnothing$ le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_\varnothing$. C'est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal. Il admet pour σ-décomposition de Langlands

$M_\varnothing = M_\varnothing^1 A_\varnothing$ où $A_\varnothing = \exp \mathfrak{a}_\varnothing$. On a $G = KM_\varnothing H$. Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $M_\varnothing$. Alors $M_\varnothing$ est contenu dans M $(=M_P)$ et A_P est contenu dans $A_\varnothing$. On note Σ_P l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$. On peut aisément définir l'ensemble des racines réduites, Σ_P^r, ainsi que l'ensemble Δ_P des racines simples de Σ_P. On note $\mathfrak{a}_P^+ = \{X \in \mathfrak{a}_P \mid \alpha(X) > 0, \alpha \in \Delta_P\}$. Si Q est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G contenant P, on note Δ_P^Q les éléments de Δ_P qui sont des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_P^Q$ du radical unipotent du sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable $P \cap M_Q$ de M_Q. On appelle σ-sous-groupe de Levi de G, toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $M_\varnothing$. Si M est un σ-sous-groupe de Levi de G, on note $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des σ-sous-groupes de Levi de G contenant M, $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi est égale à M, $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi contient M. Si $M = M_\varnothing$, on notera $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{L}(M_\varnothing)$, etc.

On se fixe dans toute la suite de l'article un ensemble de racines positives, $\Sigma_{\sigma\theta}$, du système de racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$, formée des points fixes de $\sigma\theta$. On note $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ (st pour standard) le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des $P \in \mathcal{P}$ tels que l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{p}$ contienne $\Sigma_{\sigma\theta}$. Pour $M \in \mathcal{L}$, on note $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(M)$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(M)$) l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}(M)$ (resp. $\mathcal{F}(M)$) contenant un élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. On ajoutera L en indice supérieur dans tout ce qui précède, si on remplace G par un élément L de $\mathcal{L}(M_\varnothing)$. Tous les ensembles ci-dessus sont finis, mais contrairement au cas des groupes, $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ n'est pas nécessairement réduit à un élément.

On se fixe une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$, $(\mathrm{Ad}\, G)$-invariante telle que la forme quadratique sur $\mathfrak{g}$, $X \mapsto \|X\|^2 := -B(X, \theta X)$ soit définie positive. On suppose en outre que B est invariante par σ et θ, coïncide avec la forme de Killing sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et que le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est orthogonal à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Si $M \in \mathcal{L}$, on notera $\mathfrak{a}_M^G$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_M$ pour B. Si $P \in \mathcal{P}(M)$, on note δ_P la fonction sur $M/M \cap H$ définie par :

$$\delta_P(m) = e^{2\varrho_P(H_M(m))}, \quad m \in M/M \cap H,$$

où $\varrho_P \in \mathfrak{a}_P^*$ est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$, comptées avec leurs multiplicités.

La forme B détermine un produit scalaire sur $\mathfrak{a}_M$, $M \in \mathcal{L}$, ce qui détermine une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_M$. On munira $i\mathfrak{a}_M^*$ de la mesure duale. Précisons cette notion.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et dX une mesure de Haar sur E. Pour f élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(E)$, on définit sa transformée de Fourier relativement à dX, $\hat{f} \in \mathcal{S}(iE^*)$, où E^* est le dual de E, par :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_E f(X) e^{-\langle \lambda, X \rangle}\, dX, \quad \lambda \in iE^*.$$

On identifie $i(iE^*)^*$ à E en posant $\langle\langle X,\lambda\rangle\rangle = -\langle\lambda, X\rangle$, pour $X\in E$, $\lambda\in iE^*$ (car $i^2=-1$). La mesure duale de dX est la mesure de Haar sur iE^*, $d\lambda$, telle que notant encore $\widehat{\ }$ la transformée de Fourier relativement à $d\lambda$, de $\mathcal{S}(iE^*)$ dans $\mathcal{S}(E)$, on ait $\hat{\hat{f}}=f$ pour $f\in\mathcal{S}(E)$. La transformée de Fourier s'étend naturellement aux distributions.

L'espace symétrique $M_\varnothing^1/M_\varnothing^1\cap H$ est compact et on le munit d'une mesure $M_\varnothing^1$-invariante de masse totale 1. Utilisant l'isomorphisme (1.1), en y remplaçant G par $M_\varnothing$ et notre choix de mesure sur $\mathfrak{a}_\varnothing$, on en déduit un choix de mesure invariante par $M_\varnothing$ sur $M_\varnothing/M_\varnothing\cap H$.

On note $H_\varnothing$ au lieu de $H_{M_\varnothing}$. Si $P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on note :

$$(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0} = \{m\in M_\varnothing \mid \alpha(H_\varnothing(m))\geqslant 0,\, \alpha\in\Delta_{P_0}\}.$$

Si $\alpha\in\Sigma_{P_0}$, on note p_α sa multiplicité dans $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$ et q_α sa multiplicité dans $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$. On définit une fonction D_{P_0} sur $M_\varnothing/M_\varnothing\cap H$ par :

$$D_{P_0}(m) = \prod_{\alpha\in\Sigma_{P_0}} |e^{\alpha(H_\varnothing(m))} - e^{-\alpha(H_\varnothing(m))}|^{p_\alpha}\, |e^{\alpha(H_\varnothing(m))} + e^{-\alpha(H_\varnothing(m))}|^{q_\alpha}$$
$$\text{si } m\in (M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0} \text{ et } D_{P_0}(m)=0 \text{ sinon.}$$

On choisit une mesure G-invariante sur G/H, dx, telle que :

$$\int_{G/H} f(x)\,dx = \sum_{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} \int_K \int_{M_\varnothing/M_\varnothing\cap H} D_{P_0}(m) f(kmH)\,dk\,dm, \quad f\in C_c(G/H). \tag{1.2}$$

Ici la mesure sur K a été normalisée à 1. Un tel choix est possible d'après [11, théorème 2.6]. On remarque que ce choix, joint à notre choix d'une mesure sur $\mathfrak{a}_G$, conduit à un choix de mesure sur $G^1/G^1\cap H$, grâce à l'isomorphisme (1.1).

Le lemme suivant est obtenu de façon analogue au lemme 1.1 et au corollaire 1.2 de [1].

LEMME 1. — *Soit $P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $P\in\mathcal{F}$ contenant P_0. Soit $\delta>0$. Alors :*

(i) *Il existe des constantes strictement positives, C et ε, telles que :*

$$|D_{P_0}(m)^{1/2} - \delta_P(m)^{1/2} D_{P_0\cap M_P}(m)^{1/2}| \leqslant C\delta_{P_0}(m)^{1/2} e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|},$$

pour tout élément m de $(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0}$ tel que $\alpha(H_\varnothing(m))\geqslant\delta\|H_\varnothing(m)\|$ pour α élément de $\Delta_{P_0}-\Delta^P_{P_0}$.

(ii) *Il existe une constante positive, C', telle que :*

$$D_{P_0}(m)^{1/2} \leqslant C'\delta_{P_0}(m)^{1/2}, \quad m\in (M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0}.$$

2. Préliminaires à la troncature

Nous allons rappeler certains résultats de [1, §3], nécessaires dans la suite. La différence est que nous utilisons des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, mais cela ne change rien, car les résultats de [1, §3], pourraient être énoncés seulement à l'aide d'un système de racines et de parties paraboliques. Ici le système de racines est celui de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$.

Soit $M\in\mathcal{L}$. Un ensemble de points de $\mathfrak{a}_M$ indexé par $P\in\mathcal{P}(M)$:

$$\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_M=\{Y_P\in\mathfrak{a}_M\mid P\in\mathcal{P}(M)\}$$

est dit (G,M)-orthogonal (on devrait dire (σ,G,M)-orthogonal) si et seulement si, pour tous $P,P'\in\mathcal{P}(M)$, σ-adjacents (cf. [8, §5.2] pour la définition) dont la fermeture des chambres de Weyl dans $\mathfrak{a}_M$ ont en commun le mur déterminé par α élément de $\Delta_P\cap-\Delta_{P'}$, on a $Y_P-Y_{P'}=r_{P,P'}\check{\alpha}$ pour un réel $r_{P,P'}$. Rappellons que $\check{\alpha}$ est la coracine de $\alpha\in\Delta_P$. Plus précisément si $M=M_\varnothing$, $\check{\alpha}=2(\alpha,\alpha)^{-1}\alpha$, où $\mathfrak{a}_\varnothing^*$ est identifié à $\mathfrak{a}_\varnothing$ grâce au produit scalaire sur $\mathfrak{a}_\varnothing$. Maintenant si M est quelconque, $P\in\mathcal{P}(M)$ et $\alpha\in\Delta_P$ (donc simple), on choisit $P_0\in\mathcal{P}$, contenu dans P. Il existe un unique élément de Δ_{P_0}, β, tel que $\beta_{|\mathfrak{a}_P}=\alpha$. On note $\check{\alpha}$ la projection orthogonale de $\check{\beta}\in\mathfrak{a}_\varnothing$ sur $\mathfrak{a}_P$, qui ne dépend pas du choix de P_0. Pour $\mathcal{Y}$ un ensemble (G,M)-orthogonal, on définit :

$$d(\mathcal{Y}):=\{\inf\alpha(Y_P)\mid P\in\mathcal{P}(M),\,\alpha\in\Delta_P\}. \tag{2.1}$$

Si $Q\in\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{Y}_M^Q:=\{Y_{P\cap M_Q}\,(:=Y_P)\mid P\in\mathcal{P}(M),\,P\subset Q\}$ est un ensemble (M_Q,M)-orthogonal. Si L est un élément de $\mathcal{L}(M)$ et Q un élément de $\mathcal{P}(L)$, on note Y_Q la projection sur $\mathfrak{a}_L$ de Y_P, où P est un élément quelconque de $\mathcal{P}(M)$ tel que $P\subset Q$. Alors Y_Q est indépendant de P et $\mathcal{Y}_L=\{Y_Q\mid Q\in\mathcal{P}(L)\}$ est un ensemble (G,L)-orthogonal. On notera $S_M(\mathcal{Y})$ l'enveloppe convexe de la projection de $\mathcal{Y}$ sur $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$.

Soit T un élément de $\mathfrak{a}_\varnothing$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$. Si $P_0\in\mathcal{P}$, soit T_{P_0} l'unique conjugué de T, sous le groupe de Weyl, $W_\varnothing^G$, du système de racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$, qui est un élément de $\mathfrak{a}_{P_0}^+$. Alors $\{T_{P_0}\mid P_0\in\mathcal{P}\}$ est un ensemble $(G,M_\varnothing)$-orthogonal, qu'on notera simplement T. On a :

$$d(T)\leqslant\alpha(T_P),\quad P\in\mathcal{P},\,\alpha\in\Delta_P.$$

On notera $u(\,\cdot\,,T)$ l'indicatrice de l'ensemble des $x\in G/H$ de la forme kmH avec $k\in K$, $m\in M_\varnothing/M_\varnothing\cap H$ tels que la projection de $H_\varnothing(m)$ dans $\mathfrak{a}_\varnothing/\mathfrak{a}_G$ soit dans $S_{M_\varnothing}(T)$.

On note $\hat{\Delta}_P=\{\omega_\alpha\mid\alpha\in\Delta_P\}$ la base de $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ duale de $\{\check{\alpha}\mid\alpha\in\Delta_P\}$. Soit M un élément de $\mathcal{L}$ et Q un élément de $\mathcal{F}(M)$. On note τ_Q (resp. $\bar{\tau}_Q$) l'indicatrice dans $\mathfrak{a}_\varnothing$ de $\{X\in\mathfrak{a}_\varnothing\mid\alpha(X)>0 \text{ (resp. } \geqslant 0),\,\alpha\in\Delta_Q\}$, et si $P\in\mathcal{P}(M)$, on notera φ_P l'indicatrice dans $\mathfrak{a}_\varnothing$ de $\{X \in \mathfrak{a}_\varnothing \,|\, \omega(X) \leqslant 0, \omega \in \hat{\Delta}_P\}$. Ici on a prolongé $\alpha \in \Delta_Q$ (resp. $\omega \in \hat{\Delta}_P$) par 0 sur l'orthogonal de $\mathfrak{a}_Q$ (resp. $\mathfrak{a}_M^G$) dans $\mathfrak{a}_\varnothing$. Soit $\mathcal{Y}$ un ensemble (G, M)-orthogonal tel que $d(\mathcal{Y})$ est strictement positif, ce qui veut dire que chaque Y_P appartient à $\mathfrak{a}_P^+$. Alors d'après [1, lemme 3.1], on a :

Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$,

$$S_M(\mathcal{Y}) \cap \mathfrak{a}_P^+ = \{X \in \mathfrak{a}_P^+ \,|\, \omega(X - Y_P) \leqslant 0, \omega \in \hat{\Delta}_P\}. \tag{2.2}$$

On pose, pour tout élément Y de $\mathfrak{a}_P^+$,

$$\begin{gathered} \tau_P(X, Y) = \tau_P(X)\varphi_P(X - Y_P), \quad X \in \mathfrak{a}_\varnothing, \\ \text{et de même en remplaçant } \tau_P \text{ par } \bar{\tau}_P. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Soit $P \in \mathcal{P}(M)$, $S_P, T_P \in \mathfrak{a}_P^+$. Soit $Q \in \mathcal{F}(M)$ avec $P \subset Q$. On note S_Q (resp. T_Q) la projection orthogonale de S_P (resp. T_P) sur $\mathfrak{a}_Q$. On note :

$$\varphi_P^Q := \varphi_{M_Q \cap P}, \quad \tau_P^Q := \tau_{M_Q \cap P}, \quad \bar{\tau}_P^Q := \bar{\tau}_{M_Q \cap P}, \tag{2.4}$$

où les seconds membres sont définis en remplaçant G par M_Q.

Alors, d'après [1, lemme 3.2 et (3.14)], nous avons les propriétés suivantes, pour $S_P, T_P \in \mathfrak{a}_P^+$:

$$\bar{\tau}_P(X, S_P + T_P) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}(M) \\ P \subset Q}} \bar{\tau}_P^Q(X, S_P)\bar{\tau}_Q(X - S_Q, T_Q), \quad X \in \mathfrak{a}_\varnothing, \tag{2.5}$$

$$\varphi_P(X - S_P) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}(M) \\ P \subset Q}} \varphi_P^Q(X)\tau_Q(X, S_Q), \quad X \in \mathfrak{a}_\varnothing. \tag{2.6}$$

3. Fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$

On utilise les notations habituelles :

$$\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}), \quad \mathfrak{s}^d = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}), \quad \mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}^d + \mathfrak{s}^d.$$

On note σ^d (resp. θ^d) la restriction à $\mathfrak{g}^d$ du prolongement $\mathbf{C}$-linéaire de θ (resp. σ) à $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On choisit un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^d$, pour lequel le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^d$, K^d, est un sous-groupe compact maximal et θ^d est une involution de Cartan. Un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{s}^d$, stable par σ^d et tel que

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}^d := \mathfrak{a}^d \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$ est contenu dans $\mathfrak{a}_{\varnothing}$, sera dit sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$. On notera $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}^d := \mathfrak{a}^d \cap i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$. On notera parfois $\mathfrak{a}$ au lieu de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}^d$. Si $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$, on note $W_{\mathfrak{a}^d}$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ et $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra entre l'algèbre $\mathbf{D}(G/H)$, des opérateurs différentiels G-invariant sur G/H et l'algèbre $S(\mathfrak{a}^d)^{W_{\mathfrak{a}^d}}$, des fonctions polynomiales sur $(\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbf{C}}$ invariantes sous $W_{\mathfrak{a}^d}$. Si f est une fonction C^∞ sur G/H et $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbf{C}}$, on dit que f est un vecteur propre (resp. vecteur propre généralisé) sous $\mathbf{D}(G/H)$ pour la valeur propre λ si et seulement si :

$$(D - \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\lambda))^n = 0, \quad \text{pour } n = 1 \text{ (resp. pour un } n \in \mathbf{N}^*) \text{ et tout } D \in \mathbf{D}(G/H).$$

Un élément M de $\mathcal{L}$ sera dit sous-groupe de Levi (σ-)cuspidal si $M^1/M^1 \cap H$ admet une série discrète. On note $\mathcal{L}_{\text{cusp}}$ l'ensemble des sous-groupes de Levi cuspidaux. Un élément P de $\mathcal{F}$ sera dit cuspidal si $M_P \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$. Il résulte de la description des séries discrètes (cf. [15]) que $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ si, et seulement si, il existe un sous-espace de Cartan standard qu'on notera $\mathfrak{a}_M^d$ tel que $(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{a}_M$.

On se fixe désormais une représentation unitaire de dimension finie de K, (τ, V). Si $M \in \mathcal{L}$ (resp. $P \in \mathcal{F}$), on notera τ_M (resp. $\tau_{|P}$) la restriction de τ à $K \cap M$ (resp. $K \cap M_P$). Soit $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ et $\mathfrak{a}_M^d$ comme ci-dessus. Si $\Lambda \in ((\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}})^*$ (donc réel sur $(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}$) est régulier par rapport aux racines de $(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}$ dans $(\mathfrak{m}^1)_{\mathbf{C}}$, on définit les fonctions τ-sphériques $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(\Lambda)$ sur G/H comme dans [6, définition 2]. Pour $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$, on définit l'espace $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(G, M, \tau)$, ou $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(M, \tau)$ en abrégé, comme le sous-espace des fonctions C^∞ sur G/H, τ-sphériques, engendré par les fonctions $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(\Lambda)$, lorsque Λ décrit l'ensemble des éléments de $(\mathfrak{a}_M^d)^*_{\mathfrak{k}}$ réguliers par rapport aux racines de $(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}$ dans $(\mathfrak{m}^1)_{\mathbf{C}}$. Alors $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(M, \tau)$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{a}_M^d$. Si $M \notin \mathcal{L}_{\text{cusp}}$, on pose $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(M, \tau) = \{0\}$.

Des propriétés des fonctions $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(\Lambda)$ (cf. [6, §4]), on déduit immédiatement des propriétés similaires des éléments de $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(M, \tau)$ que nous allons décrire.

Si $F \in \mathrm{II}'_{\text{hol}}(M, \tau)$, F détermine pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ une fonction τ-sphérique, $\mathbf{D}(G/H)$-finie et tempérée, notée $F(\lambda)$. Pour $Q \in \mathcal{F}$, on dispose du terme constant, $F_Q(\lambda)$, de $F(\lambda)$ le long de Q (cf. [7]). Un prolongement holomorphe de F_Q au voisinage de $i\mathfrak{a}_M^*$ existe et sera noté encore F_Q. On note, pour M et $L \in \mathcal{L}$, $W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{a}_L$ dans $\mathfrak{a}_M$ induites par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On note $W(\mathfrak{a}_M) = W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M)$.

On se fixe $\mathfrak{a}_{\min}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s}$ contenant $\mathfrak{a}_{\varnothing}$ (il est automatiquement σ-stable) et $\mathfrak{a}^d$ (resp. $\mathfrak{a}'^d$) un sous-espace de Cartan standard contenant $\mathfrak{a}_L$ (resp. $\mathfrak{a}_M$). Pour tout $s \in W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$, on peut choisir un élément k_s de K^d, resp. k'_s de K, qui induit s sur $\mathfrak{a}_L$ et tel que $\operatorname{Ad} k_s(\mathfrak{a}'^d) = \mathfrak{a}^d$, resp. $\operatorname{Ad} k'_s(\mathfrak{a}_{\min}) = \mathfrak{a}_{\min}$ ([12, §5, corollaire 2]). Si $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ on définit alors $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$, comme l'ensemble des éléments s de $W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ tels qu'il existe un sous-espace de Cartan standard $\mathfrak{a}_s^d$ de $\mathfrak{s}^d$ contenant $\mathfrak{a}_L$ et

k_s élément de K^d vérifiant :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ad} k_s \text{ induit } s \text{ sur } \mathfrak{a}_L,\\
&\operatorname{Ad} k_s(\mathfrak{a}_s^d) = \mathfrak{a}_M^d, \qquad\qquad (3.1)\\
&\operatorname{Ad} k_s(\mathfrak{a}_s) = \mathfrak{a}_M, \quad \text{où } \mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}^d \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} \text{ et } \operatorname{Ad} k_s(\mathfrak{a}_s^d)_{\mathfrak{k}} = (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}.
\end{aligned}$$

On notera M_s le centralisateur de $\mathfrak{a}_s$ dans G. Si $M \notin \mathcal{L}_{\text{cusp}}$, on pose $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M) = \varnothing$. Si $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$, $L \in \mathcal{L}$, $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*_{\mathbf{C}}$ (resp. $\lambda \in (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbf{C}}$), $s \in W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ et k_s satisfait (3.1), on notera $\Lambda^s = \Lambda \circ \operatorname{Ad} k_{s|\mathfrak{a}^d_{M'}}$ (resp. $\lambda^s = \lambda \circ s$).

Alors d'après [6, lemme 4], on a pour $Q \in \mathcal{F}$ et F élément de $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(G, M, \tau)$,

$$F_Q(\lambda) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)} F^s_{Q,s}(\lambda^s), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^*_M, \tag{3.2}$$

où $F^s_{Q,s} \in \mathrm{II}'_{\text{hol}}(M_Q, M_s, \tau_{|Q})$ si $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ et nulle sinon. Plus précisément $F^s_{Q,s}$ est $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(\Lambda^s)$ si F est $\mathrm{II}'_{\text{hol}}(\Lambda)$. On notera aussi :

$$F_{Q,s}(\lambda) = F^s_{Q,s}(\lambda^s), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^*_M.$$

Remarque 1. — La décomposition (3.2) est unique grâce à l'indépendance linéaire des $a \mapsto a^{\lambda^s}$, pour λ générique, et aux propriétés d'holomorphie des $F^s_{Q,s}$. Il en résulte que $F \mapsto F_{Q,s}$ est linéaire.

Nous allons préciser certaines propriétés de $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$.

LEMME 2. — (i) *Si P et Q sont des éléments de $\mathcal{F}$ conjugués sous G, il le sont par un élément k de K qui normalise $\mathfrak{a}_\varnothing$ et $\mathfrak{a}_{\min}$ tel que* $\operatorname{Ad} k(\mathfrak{a}_P) = \mathfrak{a}_Q$.

(ii) *Si $L, M \in \mathcal{L}$ sont σ-associés, c'est à dire que $\mathfrak{a}_L$ et $\mathfrak{a}_M$ sont conjugués par un élément de K, ils le sont par un élément de K qui normalise $\mathfrak{a}_\varnothing$ et $\mathfrak{a}_{\min}$.*

(iii) *Pour L, M éléments de $\mathcal{L}$, $W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ est égal à $\{w_{|\mathfrak{a}_L} \mid w \in W_\varnothing, w(\mathfrak{a}_L) \subset \mathfrak{a}_M\}$. En particulier $W(\mathfrak{a}_\varnothing) = W_\varnothing$.*

(iv) *Soit $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ et $L \in \mathcal{L}$. Alors $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ est non vide si et seulement si L contient $M' \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ σ-associé à M. Alors $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ est égal à $\{w_{|\mathfrak{a}_L} \mid w \in W^0(\mathfrak{a}_{M'}, \mathfrak{a}_L)\}$. En particulier, si les dimensions de $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_L$ sont les mêmes, $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ est non vide si et seulement si on a $L \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ et L, M sont σ-associés et dans ce cas $W^0(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$ est égal à $W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_M)$.*

Démonstration. — (i) Si P et Q éléments de $\mathcal{F}$ sont conjugués par un élément de G, ils le sont par un élément de K car $G = KP$. Soit $P_{\min}$ un sous-groupe parabolique minimal de G contenant $\exp(\mathfrak{a}_{\min})$ et contenu dans P. D'après [4, lemme 2.5], il existe $k \in K$ normalisant $\mathfrak{a}_\varnothing$ et $\mathfrak{a}_{\min}$ tel que Q^k $(:= kQk^{-1})$ contienne $P_{\min}$. Alors P et Q^k, qui sont conjugués et contiennent $P_{\min}$ sont égaux. Comme $\mathrm{Ad}\,k$ envoie la composante déployée de Q sur celle de P et préserve $\mathfrak{a}_\varnothing$, on a aussi $\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_P)=\mathfrak{a}_Q$. D'où (i).

(ii) Soient M et L des éléments de $\mathcal{L}$ qui sont σ-associés, $k\in K$ tel que $\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_L)=\mathfrak{a}_M$, $Q\in\mathcal{P}(L)$. Montrons que $P:=Q^k$ est élément de $\mathcal{P}(M)$. La seule chose à voir est que P est $\sigma\theta$-stable. Pour cela il suffit de revenir à la définition de l'algèbre de Lie de Q (puis de P par transport de structure) en terme de sous-espaces poids sous $\mathfrak{a}_L$ (resp. $\mathfrak{a}_M$). Alors (ii) résulte de (i) appliqué à P et Q.

(iii) D'abord $W_\varnothing$ est égal au quotient du normalisateur $N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$ de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans K par son centralisateur dans K, $Z_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$. Donc $W(\mathfrak{a}_L,\mathfrak{a}_M)$ contient les restrictions à $\mathfrak{a}_L$ des éléments de $W_\varnothing$ qui envoient $\mathfrak{a}_L$ dans $\mathfrak{a}_M$. Montrons l'inclusion inverse. Soient $s\in W(\mathfrak{a}_L,\mathfrak{a}_M)$ et $k\in K$ tels que $\mathrm{Ad}\,k$ induise s sur $\mathfrak{a}_L$. On note L' le centralisateur dans G de $\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_L)$. Montrons que $L'\in\mathcal{L}$ et $\mathfrak{a}_{L'}=\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_L)$. Pour le voir on choisit $Q\in\mathcal{P}(L)$ et on montre comme dans (ii) que $Q'=Q^k$ est dans $\mathcal{F}$, vérifie $M_{Q'}=L'$ et $\mathfrak{a}_{Q'}$ $(=\mathfrak{a}_{L'})$ est conjugué sous K à $\mathfrak{a}_Q$ $(=\mathfrak{a}_L)$. Mais $\mathfrak{a}_{L'}$ contient $\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_L)$. Pour des raisons de dimension on a donc $\mathfrak{a}_{L'}=\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_L)$. Alors L et L' sont σ-associés et la preuve de (ii) montre que $Q'=Q^{k'}$ pour un élément k' de $N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$ tel que $\mathrm{Ad}\,k'(\mathfrak{a}_L)=\mathfrak{a}_{L'}$. Alors $k^{-1}k'$ normalise Q et $\mathfrak{a}_L$. Donc $k^{-1}k'$ est dans $K\cap Q$, donc dans L, et il induit l'identité sur $\mathfrak{a}_L$. Alors $\mathrm{Ad}\,k'$ induit s sur $\mathfrak{a}_L$ comme désiré et (iii) est prouvé.

(iv) Soient $M\in\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$, $L\in\mathcal{L}$, $s\in W^0(\mathfrak{a}_L,\mathfrak{a}_M)$. On choisit $\mathfrak{a}_s^d$ un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$ et $k_s\in K^d$ comme dans (3.1). On note M_s le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_s$. On voit facilement que $M_s\in\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ et est contenu dans L puisque $\mathfrak{a}_s$ contient $\mathfrak{a}_L$. De plus la restriction de $\mathrm{Ad}\,k_s$ à $\mathfrak{a}_{M_s}$ $(=\mathfrak{a}_s)$ est un élément de $W(\mathfrak{a}_{M_s},\mathfrak{a}_M)$. Elle est induite par un élément de K. Donc M_s vérifie les conditions voulues. Réciproquement si $M'\in\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ est contenu dans L et σ-associé à M, il existe, d'après (ii), $k\in N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$ tel que $\mathrm{Ad}\,k(\mathfrak{a}_{M'})=\mathfrak{a}_M$, donc induit sur $\mathfrak{a}_{M'}$ un élément s de $W(\mathfrak{a}_{M'},\mathfrak{a}_M)$. Comme $M,M'\in\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$, il existe k_s élément de K^d, tel que $\mathrm{Ad}\,k_s(\mathfrak{a}_{M'}^d)=\mathfrak{a}_M^d$ et $\mathrm{Ad}\,k_s$ induit s sur $\mathfrak{a}_{M'}$. Mais par ailleurs $\mathrm{Ad}\,k_s(\mathfrak{a}_{M'})=\mathfrak{a}_M$ et par orthogonalité $\mathrm{Ad}\,k_s(\mathfrak{a}_{M'}^d)_{\mathfrak{k}}=(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}$. Donc $s\in W^0(\mathfrak{a}_{M'},\mathfrak{a}_M)$, de même que la restriction s' de s à $\mathfrak{a}_L$ définit un élément de $W^0(\mathfrak{a}_L,\mathfrak{a}_M)$. On a donc bien caractérisé le fait que $W^0(\mathfrak{a}_L,\mathfrak{a}_M)$ soit non vide. Les autres assertions de (iv) résultent de la démonstration ci-dessus. □

Si $g\in G$, on rappelle que $\Theta_G(gH)$ est égal à $\Xi_G(g\sigma(g^{-1}))^{1/2}$, où Ξ_G est la fonction de Harish-Chandra. On écrira parfois Θ au lieu de Θ_G. On note $N_p(gH):=(1+\|X\|)^p$ si $g=k(\exp X)h$ avec $X\in\mathfrak{a}_\varnothing$, $k\in K$, $h\in H$ et $N_p(\lambda)=(1+\|\lambda\|)^p$ si $\lambda\in(\mathfrak{a}_\varnothing)^*_{\mathbf{C}}$, $p\in\mathbf{N}$. On notera aussi $|(\lambda,x)|=N_1(\lambda)N_1(x)$ où $x\in G/H$, $\lambda\in(\mathfrak{a}_\varnothing)^*_{\mathbf{C}}$.

LEMME 3. — *Soient $M\in\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ et F un élément de $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(M,\tau)$. Soient $Q\in\mathcal{F}$ et $P_0\in\mathcal{P}$ tels que $P_0\subset Q$. Alors :*

(i) *Il existe un réel positif C et un entier positif k tels que :*

$$\|F_Q(\lambda,m)\| \leqslant C|(\lambda,m)|^k \Theta_{M_Q}(m), \quad \lambda\in i\mathfrak{a}_M^*,\ m\in M_Q/M_Q\cap H.$$

(ii) *Soit δ un réel strictement positif. Il existe des nombres réels strictement positifs C et ε et un entier positif k tels que :*

$$\|\delta_Q(m)^{1/2}F(\lambda,m)-F_Q(\lambda,m)\| \leqslant CN_k(\lambda)\Theta_{M_Q}(m)e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|}$$

pour tout $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ et $m\in(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)_{P_0}^+$ tels que :

$$\alpha(H_\varnothing(m))\geqslant\delta\|H_\varnothing(m)\|, \quad \textit{pour } \alpha\in\Delta_{P_0}-\Delta_{P_0}^Q.$$

Ici on regarde $M_\varnothing/M_\varnothing\cap H$ comme un sous-ensemble de $M_Q/M_Q\cap H$.

Démonstration. — (i) résulte de la décomposition (3.2) du terme constant et de la définition des fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(M_Q,M_s,\tau_{|Q})$.

(ii) On va appliquer le théorème 4 de [7]. On écrit $\mathfrak{a}_\varnothing=\mathfrak{a}_\varnothing^G\oplus\mathfrak{a}_G$, $\mathfrak{a}_Q=\mathfrak{a}_Q^G\oplus\mathfrak{a}_G$. On définit une application linéaire de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{a}_Q$ qui à X élément de $\mathfrak{a}_\varnothing$ associe l'élément Y de $\mathfrak{a}_Q$ tel que la composante de Y dans $\mathfrak{a}_G$ est égale à celle de X et vérifiant $\alpha(Y)=\alpha(X)$, pour tout $\alpha\in\Delta_{P_0}-\Delta_{P_0}^Q$. La continuité des applications linéaires implique qu'il existe des constantes C_1, C_1' positives telles que :

$$\|Y\|\leqslant C_1\|X\|, \quad \|X-Y\|\leqslant C_1'\|X\|, \quad X\in\mathfrak{a}_\varnothing. \tag{3.3}$$

De plus si X est élément de $\bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^+$ (chambre positive fermée) on a $Y\in\bar{\mathfrak{a}}_Q^+$. En outre $X-Y$ est élément de $\bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^+$. En effet, si $\alpha\in\Delta_{P_0}-\Delta_{P_0}^Q$ on a $\alpha(X-Y)=0$ par définition de Y, et si $\alpha\in\Delta_{P_0}^Q$, $\alpha(X-Y)$ est égal à $\alpha(X)$ car $Y\in\mathfrak{a}_Q$ et l'on a bien $\alpha(X-Y)\geqslant0$ pour $\alpha\in\Delta_{P_0}$. Soient δ et m satisfaisant les conditions de l'énoncé. On note $X=H_\varnothing(m)$. On peut écrire $m=m_1\exp X(M_\varnothing\cap H)$ avec $m_1\in M_\varnothing\cap K$ car $M_\varnothing=(M_\varnothing\cap K)(\exp\mathfrak{a}_\varnothing)(M_\varnothing\cap H)$. On applique le théorème 4.b de [7] où l'on prend a égal à $\exp(X-Y)$ et l'on remplace X par $Y\in\bar{\mathfrak{a}}_Q^+$, après avoir prolongé l'inégalité aux éléments de $\bar{\mathfrak{a}}_Q^+$ par continuité. Alors tenant compte du fait que F (resp. F_Q) est τ-sphérique (resp. $\tau_{|Q}$-sphérique), on prouve l'existence de $k\in\mathbf{N}$ et $C_2>0$, $\gamma>0$ tels que :

$$\|\delta_Q(m)^{1/2}F(\lambda,m)-F_Q(\lambda,m)\|\leqslant C_2e^{-\gamma\beta_Q(Y)}N_{3k+3}(Y)N_k(X-Y)N_k(\lambda)\delta_{P_0\cap M_Q}(a)^{-1/2} \tag{3.4}$$

pour $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$, où l'on a noté $\beta_Q(Y)=\inf_{\alpha\in\Delta_Q}\alpha(Y)$. Mais d'après les propriétés de X,Y et celles de m on a :

$$\beta_Q(Y)\geqslant\delta\|X\|,$$

et par suite :

$$e^{-\gamma\beta_Q(Y)} \leqslant e^{-\delta\gamma\|X\|}. \tag{3.5}$$

D'autre part grâce à (3.3), on voit qu'il existe $\varepsilon>0$ et $C_3>0$ tels que :

$$C_2 N_{3k+3}(Y) N_k(X-Y) e^{-\delta\gamma\|X\|} \leqslant C_3 e^{-\varepsilon\|X\|}. \tag{3.6}$$

En tenant compte de l'égalité $\delta_{P_0\cap M_Q}(a)=\delta_{P_0\cap M_Q}(m)$ (puisque $Y\in\mathfrak{a}_Q$), on en déduit de (3.4), (3.5), (3.6) :

$$\|\delta_Q(m)^{1/2}F(\lambda,m)-F_Q(\lambda,m)\| \leqslant C_3\delta_{P_0\cap M_Q}(m)^{-1/2}N_k(\lambda)e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|}.$$

Par ailleurs on sait (cf. [5, proposition 17.2]) que

$$\delta_{P_0\cap M_Q}(m)^{-1/2} \leqslant \Theta_{M_Q}(m)$$

car $m\in(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0}$ est contenu dans $(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0\cap M_Q}$. D'où l'inégalité voulue. □

COROLLAIRE DU LEMME 3. — *Soient F, P_0, Q comme dans le lemme. Pour δ strictement positif, on peut choisir des constantes strictement positives C, ε et $k\in\mathbf{N}$ tels que :*

$$\|D_{P_0}(m)^{1/2}F(\lambda,m)-D_{P_0\cap M_Q}(m)^{1/2}F_Q(\lambda,m)\|$$

soit majoré par

$$CN_k(\lambda)e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|}$$

pour $\lambda\in i\mathfrak{a}_Q^*$ et m comme dans le lemme 3 (ii).

Démonstration. — Grâce au lemme 1 (i) et au lemme 3 (i), on voit que

$$\|D_{P_0}(m)^{1/2}F(\lambda,m)-\delta_Q(m)^{1/2}D_{P_0\cap M_Q}(m)^{1/2}F(\lambda,m)\| \tag{3.7}$$

est majoré par :

$$C_1N_{k_1}(\lambda)\delta_{P_0}(m)^{1/2}e^{-\varepsilon_1\|H_\varnothing(m)\|}\Theta_G(m)$$

où $C_1, \varepsilon_1>0$, $k_1\in\mathbf{N}$ ne dépendent pas de m et λ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Par ailleurs (cf. [5, proposition 17.2]), il existe $C_2>0$ et $d_1\in\mathbf{N}$ tels que :

$$\delta_{P_0}(m)^{1/2}\Theta_G(m) \leqslant C_2(1+\|H_\varnothing(m)\|)^{d_2} \tag{3.8}$$

pour m comme dans l'énoncé. Donc (3.7) est majoré par

$$C_3N_{k_1}(\lambda)e^{-\varepsilon_2\|H_\varnothing(m)\|} \tag{3.9}$$

où $C_3, \varepsilon_2 > 0$. D'après l'inégalité du lemme 3 (ii), on a :

$$\|\delta_Q(m)^{1/2} D_{P_0 \cap M_Q}(m)^{1/2} F(\lambda, m) - D_{P_0 \cap M_Q}(m)^{1/2} F_Q(\lambda, m)\| \tag{3.10}$$

qui est majoré par

$$C_4 N_{k_2}(\lambda) D_{P_0 \cap M_Q}(m)^{1/2} \Theta_{M_Q}(m) e^{-\varepsilon_3 \|H_\varnothing(m)\|} \tag{3.11}$$

où $C_4, \varepsilon_3 > 0$ et $k_2 \in \mathbf{N}$. Appliquant (3.8) et le lemme 1 (ii) à M_Q, on voit que

$$D_{P_0 \cap M_Q}(m)^{1/2} \Theta_{M_Q}(m) \leqslant C_5 \delta_{P_0 \cap M_Q}(m)^{1/2} \Theta_{M_Q}(m) \leqslant C_6 (1 + \|H_Q(m)\|)^{d_2} \tag{3.12}$$

où $C_5, C_6 > 0$ et $d_2 \in \mathbf{N}^*$ sont des constantes. Alors (3.11), et à fortiori (3.10) est majoré par une fonction du type (3.9). Grâce à l'inégalité triangulaire et à la majoration de (3.7) par une fonction du type (3.9), on obtient le résultat voulu. □

Nous aurons besoin de l'estimation suivante de F_Q, pour F comme dans le lemme 3 :

$$\text{Il existe } C > 0 \text{ et } k \in \mathbf{N} \text{ tels que } \|D_{P_0 \cap M_Q}(m)^{1/2} F_Q(\lambda, m)\| \leqslant C |(\lambda, m)|^k, \\ \text{pour } m \in M_Q / M_Q \cap H,\ \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*. \tag{3.13}$$

Cela résulte du lemme 3 (i) et de (3.12).

4. Opérateurs différentiels invariants

Sur $C_c^\infty(G/H)$ on définit une forme bilinéaire symétrique, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ (resp. sesquilinéaire hermitienne, $(\cdot , \cdot)$), à l'aide de la mesure G-invariante de G/H. Si $D \in \mathbf{D}(G/H)$, on note D^t le transposé de D par rapport à $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et D^* l'adjoint (formel) de D par rapport à $(\cdot , \cdot)$. Ce sont des éléments de $\mathbf{D}(G/H)$. On fait de même pour $C_c^\infty(G)$ et les éléments de $U(\mathfrak{g})$. La transposition se réduit à l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$. Soit $D \mapsto \overline{D}$ l'automorphisme antilinéaire de $U(\mathfrak{g})$ égal à l'identité sur $\mathfrak{g}$. Alors $D^* = (\overline{D})^t$. De plus si $D \in U(\mathfrak{g})^H$, notant $\underline{D}$ l'élément de $\mathbf{D}(G/H)$ correspondant, on a $(\underline{D})^t = \underline{(D^t)}$ et $(\underline{D})^* = \underline{(D^*)}$. On confondra souvent $D \in \mathbf{D}(G/H)$ avec un représentant de D dans $U(\mathfrak{g})^H$.

LEMME 4. — *On se fixe un sous-espace de Cartan standard $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{s}^d$. Alors*

$$\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D^*)(\lambda) = \overline{\gamma_{\mathfrak{a}^d}(\overline{D})(\lambda)}, \quad D \in \mathbf{D}(G/H),\ \lambda \in (\mathfrak{a}_\mathfrak{k}^d)^* \oplus i(\mathfrak{a}_\mathfrak{s}^d)^*.$$

Démonstration. — Soit τ une involution $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ qui commute à σ et θ et préserve $\mathfrak{a}^d$. Alors revenant à la définition de $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$, voir par exemple [10, §2.1], on établit facilement que :

$$\gamma_{\mathfrak{a}^d} \circ \tau = \tau \circ \gamma_{\mathfrak{a}^d}. \tag{4.1}$$

De même (4.1) est vrai si τ est une involution antilinéaire de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ commutant à σ et θ et préservant $\mathfrak{a}^d$, ce que l'on utilise pour la conjugaison complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ par rapport à $\mathfrak{g}$. On sait par ailleurs que si $D \in U(\mathfrak{g})^H$,

$$\underline{D}^t = \underline{\sigma(D)} \tag{4.2}$$

car σ est l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}^d$, dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{k}^d$ (cf. [14, chapitre II, corollaire 5.3]). En utilisant (4.1), on en déduit que

$$\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D^t) = \sigma(\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D))$$

et comme σ vaut -1 sur $\mathfrak{a}^d$ on a, pour λ comme dans l'énoncé,

$$\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D^t)(\lambda) = \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(-\lambda). \tag{4.3}$$

Mais D^* est égal à $\overline{{}^tD}$, où la conjugaison est par rapport à la forme réelle $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On utilise encore (4.1) pour voir que

$$\gamma_{\mathfrak{a}^d}(\overline{D^t})(\lambda) = \overline{\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D^t)(\bar{\lambda})}$$

où $\bar{\lambda}$ est le conjugué de λ par rapport à la forme réelle $(\mathfrak{a}^d)_{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{g}$ de $(\mathfrak{a}^d)_{\mathbf{C}}$. Mais si λ est comme dans l'énoncé, $\bar{\lambda} = -\lambda$ car :

$$\mathfrak{a}^d_{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{g} = i\mathfrak{a}^d_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}^d_{\mathfrak{s}}.$$

Tenant compte de (4.3), on obtient le résultat voulu. □

5. Une décomposition de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H,\tau)$

Dans ce paragraphe on note $(\cdot)$ pour $(G/H,\tau)$ (resp. (G/H)) et $(\cdot)^1$ pour $(G^1/H,\tau)$ (resp. (G^1/H)).

On définit l'espace $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$ des fonctions ψ, τ-sphériques (resp. K-finies à valeurs dans $\mathbf{C}$) sur G/H qui sont $\mathbf{D}(G/H)$-finies et telles que pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$, il existe $C>0$ et $m \in \mathbf{N}$ vérifiant :

$$\|L_D\psi(x)\| \leqslant CN_m(x)\Theta_G(x), \quad x \in G/H. \tag{5.1}$$

Si ψ est une fonction C^∞ sur G/H, τ-sphérique (resp. K-finie) et $\mathbf{D}(G/H)$-finie, ψ est un élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$ si et seulement si ψ est tempérée au sens de [10, définition 2], ceci d'après [2, théorème 6.1] et [5, proposition 17.2].

Nous allons voir que :

$$\mathbf{D}(G/H) \text{ opère sur } \mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot). \tag{5.2}$$

En effet d'après [3, lemme 4], si ψ est élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$, $L_D\psi$ est élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$ pour $D \in U(\mathfrak{g})$. Mais l'estimation (5.1) pour $D'\psi$, $D' \in \mathbf{D}(G/H)$, résulte de ce fait et du lemme 1.7 de [3] qui majore $\|(D'\psi)(x)\|$ en fonction de $\|L_{D_i}\psi(x)\|$ pour une famille finie d'éléments D_i de $U(\mathfrak{g})$.

On note $\mathcal{C}(\cdot)$ l'espace des fonctions φ, C^∞ sur G/H, τ-sphériques (resp. K-finies à valeurs dans $\mathbf{C}$) telles que pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$, $n \in \mathbf{N}$, on ait :

$$p_{n,D}(\psi) := \sup_{x \in G/H} \Theta(x)^{-1} N_n(x) \|(L_D\psi)(x)\| < +\infty. \tag{5.3}$$

D'après [5, théorème 17.1] et [2, lemme 7.2],

$$\mathbf{D}(G/H) \text{ opère continument sur } \mathcal{C}(\cdot), \tag{5.4}$$

lorsque celui ci est muni des semi-normes $p_{n,D}$. D'autre part d'après [5, corollaire 17.6], il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que :

$$N_m^{-1}\Theta^2 \in L^1(G/H), \tag{5.5}$$

ce qui implique :

$$x \mapsto (\varphi(x), \psi(x)) \text{ est élément de } L^1(G/H), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\cdot), \psi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot), \tag{5.6}$$

et on note (φ, ψ) l'intégrale de cette fonction. Si $\psi \in C^\infty(\cdot)$ et $X \in \mathfrak{a}_G$, on définit $\psi^X \in C^\infty(\cdot)^1$ par :

$$\psi^X(x) = \psi((\exp X)x), \quad x \in G^1/H. \tag{5.7}$$

Soit $\psi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$. Si x_1 est un élément de G^1/H, l'application ψ_{x_1} de $\mathfrak{a}_G$ dans V_τ (resp. $\mathbf{C}$) qui à X associe $\psi((\exp X)x_1)$ est annulée par un idéal de codimension finie de $S(\mathfrak{a}_G)$, indépendant de x_1 car ψ est $\mathbf{D}(G/H)$-finie donc $S(\mathfrak{a}_G)$-finie. Donc ψ_{x_1} est contenu dans un espace vectoriel de dimension finie, F, de fonctions sur $\mathfrak{a}_G$ à valeurs dans V_τ (resp. $\mathbf{C}$), stable par $S(\mathfrak{a}_G)$, formé d'exponentielles polynômes, indépendant de x_1. L'ensemble des applications linéaires de F dans V_τ (resp. $\mathbf{C}$), ev_X, $X \in \mathfrak{a}_G$, où ev_X est l'évaluation en X, engendre un espace vectoriel de dimension finie, car F est de dimension finie. De plus $X \mapsto \mathrm{ev}_X$ est une exponentielle polynôme à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F, V_\tau)$ (resp. F^*) car F est engendré par des exponentielles polynômes. Considérons l'application C^∞ de G^1/H

dans F, ψ_1, qui à x_1 associe ψ_{x_1}. Alors $\mathrm{ev}_X\,\psi_1=\psi^X$ pour $X\in\mathfrak{a}_G$. De ce qui précède on déduit :

$$\text{Les éléments de } \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)^1,\ \psi^X,\ X\in\mathfrak{a}_G, \text{ engendrent un espace vectoriel de dimension finie, et } X\mapsto\psi^X \text{ est une exponentielle polynôme sur } \mathfrak{a}_G \text{ à valeurs dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de } \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)^1. \tag{5.8}$$

On définit le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_2(\cdot)$ de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$ formé des éléments ψ de ce dernier tels que :

$$x\mapsto(\psi^X(x),\psi^X(x)) \text{ est intégrable sur } G^1/H,\quad X\in\mathfrak{a}_G. \tag{5.9}$$

Nous allons voir que :

$$\mathbf{D}(G/H) \text{ opère sur } \mathcal{A}_2(\cdot). \tag{5.10}$$

On se ramène, grâce à (5.8) et à l'isomorphisme entre $\mathbf{D}(G/H)$ et $\mathbf{D}(G^1/H)\otimes S(\mathfrak{a}_G)$, au cas où $\mathfrak{a}_G=\{0\}$. Le point important dans (5.8) est le fait que les ψ^X engendrent un espace de dimension finie. On suppose donc $\mathfrak{a}_G=\{0\}$ et il faut montrer que si $\psi\in\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$ vérifie (5.9) avec $X=0$, il en va de même pour $D\psi$, $D\in\mathbf{D}(G/H)$. Or :

$$\text{Si } \mathfrak{a}_G=\{0\},\ \mathcal{A}_2(\cdot) \text{ est inclus dans } \mathcal{C}(\cdot) \tag{5.11}$$

d'après [2, théorème 7.3]. Donc, avec nos hypothèses, $D\psi$ est dans $\mathcal{C}(\cdot)$ d'après (5.4) et vérifie (5.9) d'après (5.3) et (5.5), ce qui prouve (5.10).

On ne suppose plus $\mathfrak{a}_G=\{0\}$. Remarquons que pour $\psi\in\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$, $\varphi\in\mathcal{A}_2(\cdot)$ et $X\in\mathfrak{a}_G$, (φ,ψ^X) est bien défini d'après (5.6) et (5.11).

On note $\mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}(\cdot)$ le sous-espace de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$ formé des éléments ψ de ce dernier vérifiant :

$$(\psi^X,\varphi)=0,\quad X\in\mathfrak{a}_G,\ \varphi\in\mathcal{A}_2(\cdot)^1. \tag{5.12}$$

LEMME 5. — *Soit $\mathfrak{a}^d$ un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$.*

(i) *L'espace $\mathcal{A}_2(\cdot)$ est la somme des sous-espaces propres généralisés de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$ pour les valeurs propres qui sont réelles sur $\mathfrak{a}^d\cap\mathfrak{g}^1_{\mathbf{C}}$ et régulières par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (réelles et régulières en abrégé). De plus si $\mathfrak{a}_G=\{0\}$, on peut remplacer sous-espace propre généralisé par sous-espace propre.*

(ii) *Si $\psi\in\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$ la forme linéaire sur $\mathcal{C}(\cdot)$ définie par $\varphi\mapsto(\varphi,\psi)$ est continue. De plus on a :*

$$(D\varphi,\psi)=(\varphi,D^*\psi),\quad \varphi\in\mathcal{C}(\cdot),\ \psi\in\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot),\ D\in\mathbf{D}(G/H),$$

où D^* est l'adjoint formel de D.

(iii) *$\mathcal{A}_{\text{temp,c}}(\cdot)$ est la somme des sous-espaces propres généralisés de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$ qui ne sont pas contenus dans $\mathcal{A}_2(\cdot)$. En particulier $\mathbf{D}(G/H)$ opère sur $\mathcal{A}_{\text{temp,c}}(\cdot)$ et $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\cdot)$ est la somme directe de $\mathcal{A}_{\text{temp,c}}(\cdot)$ et $\mathcal{A}_2(\cdot)$.*

Démonstration. — On supprime $(\cdot)$ des notations. On note $\mathcal{A}_0$ la somme des sous-espaces propres généralisés de $\mathcal{A}_{\text{temp}}$ pour des valeurs propres réelles et régulières. Montrons que $\mathcal{A}_0=\mathcal{A}_2$. D'abord, $\mathcal{A}_2$ étant invariant par $\mathbf{D}(G/H)$, tout élément de $\mathcal{A}_2$ est la somme de vecteurs propres généralisés sous $\mathbf{D}(G/H)$ et éléments de $\mathcal{A}_2$.

Traitons le cas $\mathfrak{a}_G=\{0\}$. D'après [10, lemme 15 (i)], les vecteurs propres généralisés sous $\mathbf{D}(G/H)$ dans $\mathcal{A}_2$ sont des vecteurs propres pour des valeurs propres réelles et régulières d'après la description des séries discrètes de G/H (voir [15] et aussi [10, proposition 8] pour le passage du cas connexe au cas général). Donc $\mathcal{A}_2$ est inclus dans $\mathcal{A}_0$. L'inclusion inverse résulte du lemme 15 (ii) de [10].

Supposons $\mathfrak{a}_G$ non réduit à zéro. On remarque que si $\psi\in\mathcal{A}_{\text{temp}}$ est vecteur propre généralisé sous $\mathbf{D}(G/H)$ pour une valeur propre réelle et régulière, il en va de même pour ψ^X, $X\in\mathfrak{a}_G$ relativement à $\mathbf{D}(G^1/H)$. Donc ψ est élément de $\mathcal{A}_2$ d'après la première partie de la démonstration. Donc $\mathcal{A}_0$ est inclus dans $\mathcal{A}_2$. On obtient de façon similaire l'inclusion inverse en utilisant le fait que tout élément de $\mathcal{A}_2$ est somme de vecteurs propres généralisés dans $\mathcal{A}_2$, sous $\mathbf{D}(G/H)$. Ceci prouve (i).

(ii) Soient $\varphi\in\mathcal{C}$ et $\psi\in\mathcal{A}_2$. Alors (φ,ψ) est défini d'après (5.6). De même il résulte de (5.1), (5.3) et (5.5) que pour ψ fixé, $\varphi\mapsto(\varphi,\psi)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$. Etudions maintenant $(D\varphi,\psi)$ et $(\varphi,D^*\psi)$. Clairement ces deux expressions dépendent continument de φ dans $\mathcal{C}$, d'après ce qui précède et (5.2), (5.4). Pour démontrer que ces deux expressions sont égales, d'après la densité de C_c^∞ dans $\mathcal{C}$ (cf. [5, théorème 17.1] et [2, lemme 7.1]), on peut supposer que φ est à support compact. Soit χ une fonction C^∞ à suppport compact, valant 1 au voisinage du support de φ. Alors on a :

$$(D\varphi,\psi)=(D\varphi,\chi\psi) \quad \text{et} \quad (\varphi,D^*\psi)=(\varphi,D^*\chi\psi).$$

L'égalité voulue résulte de la définition de D^*.

(iii) On note $\mathcal{A}_c$ la somme des sous-espaces propres généralisé sous $\mathbf{D}(G/H)$ de $\mathcal{A}_{\text{temp}}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathcal{A}_2$. Clairement $\mathcal{A}_{\text{temp}}$ est la somme directe de $\mathcal{A}_c$ et $\mathcal{A}_2$, d'après (i) et (5.2). Par ailleurs l'intersection de $\mathcal{A}_{\text{temp,c}}$ et $\mathcal{A}_2$ est réduite à 0 (on le voit en revenant aux définitions). Donc pour prouver (iii) il suffit de prouver que $\mathcal{A}_{\text{temp,c}}$ contient $\mathcal{A}_c$. Il suffit pour cela de voir que que pour tout $\psi\in\mathcal{A}_c$ et $\varphi\in\mathcal{A}_2(\cdot)^1$ on a $(\varphi,\psi^X)=0$ pour tout X élément de $\mathfrak{a}_G$. Pour cela, grâce à la stabilité sous $\mathbf{D}(G/H)$ de $\mathcal{A}_c$ (resp. grâce à (i)), on peut supposer, par linéarité, que ψ (resp. φ) est vecteur propre généralisé (resp. vecteur propre) sous $\mathbf{D}(G/H)$ (resp. $\mathbf{D}(G^1/H)$) pour une valeur propre λ (resp. μ). Notons λ_1 la restriction de λ à $\mathfrak{a}^d \cap (\mathfrak{g}_1)_{\mathbf{C}}$. On peut supposer ψ et φ non nuls. Alors, d'après (i), les caractères de $\mathbf{D}(G^1/H)$ correspondant à λ_1 et μ, χ_{λ_1} et χ_μ, sont distincts. Il en résulte que pour $X \in \mathfrak{a}_G$, il existe $D \in \mathbf{D}(G^1/H)$ vérifiant :

$$D\psi^X = 0 \quad \text{et} \quad \chi_\mu(D) \neq 0.$$

Alors $(\varphi, D\psi^X)$ est nul. D'après (ii) et (5.11) on a :

$$(\varphi, D\psi^X) = (D^*\varphi, \psi^X),$$

d'où :

$$\chi_\mu(D^*)(\varphi, \psi^X) = 0. \tag{5.13}$$

On a aussi, d'après (ii) et (5.11) :

$$(D\varphi, \varphi) = (\varphi, D^*\varphi).$$

D'où l'on déduit l'égalité de $\chi_\mu(D)$ et $\overline{\chi_\mu(D^*)}$. Comme $\chi_\mu(D)$ est non nul, on déduit de (5.13) que (φ, ψ^X) est nul comme désiré. □

On étend la forme sesquilinéaire sur $\mathcal{A}_2(\cdot)^1 \times \mathcal{A}_2(\cdot)^1$ donnée par (φ, ψ) en une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)^1 \times \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)^1$ notée de même, qui est nulle dès que φ ou ψ est élément de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp,c}}(\cdot)^1$. Si $\psi \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)^1$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}_G^*$ on note ψ_λ l'élément de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(\cdot)$ défini par

$$\psi_\lambda((\exp X)x_1) = e^{\lambda(X)}\psi(x_1), \quad X \in \mathfrak{a}_G,\ x_1 \in G^1/H. \tag{5.14}$$

Remarque 1. — Soit $*$ égal à temp, 2, ou temp, c. On définit le sous-espace $\mathcal{A}_*^{ss}$ de $\mathcal{A}_*(\cdot)$ engendré par les éléments de la forme ψ_λ où λ décrit $i\mathfrak{a}_G^*$ et ψ décrit $\mathcal{A}_*(\cdot)^1$. Le lemme 5 (i) et (iii) reste valable si on remplace $\mathcal{A}_*$ par $\mathcal{A}_*^{ss}$. Cela résulte du lemme pour G^1/H.

LEMME 6. — *Soient $M \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ et F un élément de $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(G, M, \tau)$. Soit $Q \in \mathcal{F}$.*

(i) *Si $\mathfrak{a}_Q$ n'est pas conjugué (resp. est conjugué) à $\mathfrak{a}_M$ par un élément de K, $F_Q(\lambda)$, $F_{Q,s}(\lambda)$ sont éléments de $\mathcal{A}^{ss}_{\mathrm{temp,c}}(M_Q, \tau_{|Q})$ (resp. $\mathcal{A}_2(M_Q, \tau_{|Q})$) pour tout λ élément de $i\mathfrak{a}_M^*$ et $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$.*

(ii) *De plus si $\mathfrak{a}_Q$ est conjugué à $\mathfrak{a}_M$ par un élément de K, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application $\lambda \mapsto (F_{Q,s}(\lambda))^0$ soit une application holomorphe de $(\mathfrak{a}_M^*)_\varepsilon = \{\lambda \in (\mathfrak{a}_M^*)_{\mathbf{C}} \mid \|\mathrm{Re}\,\lambda\| < \varepsilon\}$ dans l'espace $\mathcal{A}_2(M_Q^1, \tau_{M_Q^1})$.*

Démonstration. — (i) On remarque que si $M \neq G$, $F(\lambda)$ est un élément de $\mathcal{A}^{ss}_{\mathrm{temp,c}}(G, \tau)$ pour λ dans l'ouvert dense de $i\mathfrak{a}_M^*$ formé des éléments non nuls sur $\mathfrak{a}_M^G$, ceci d'après les définitions des fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$ et le lemme 5 (iii). C'est vrai encore pour $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$

par passage à la limite, ceci d'après la définition des fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$ et (5.5), (5.11). Si $M=G$, on voit que $F(\lambda)$ est élément de $\mathcal{A}_2^{ss}(G,\tau)$ pour $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$, grâce au lemme 5 (i). Ceci démontre le lemme pour $Q=G$. Passons à Q élément quelconque de $\mathcal{F}$. Si $W^0(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)$ est vide, les assertions du lemme sont triviales. On le suppose non vide. Il suffit de démontrer les assertions sur les $F_{Q,s}$, $s\in W^0(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)$. Si M_s est égal à M_Q (resp. différent de M_Q), on a $F_{Q,s}(\lambda)$ élément de $\mathcal{A}_2^{ss}(M_Q,\tau_{|Q})$ (resp. $\mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}^{ss}(M_Q,\tau_{|Q})$) d'après la première partie de la démonstration. Mais M_s est égal à M_Q si et seulement si $\mathfrak{a}_Q$ et $\mathfrak{a}_M$ sont conjugués par un élément de K. D'où (i).

(ii) On connait l'holomorphie de $\lambda\mapsto(F_{Q,s}(\lambda))^0$ comme application de $(\mathfrak{a}_M^*)_\varepsilon$ dans $C^\infty(M_Q^1/M_Q^1\cap H,\tau_{M_Q^1})$ d'après la définition des fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$. Mais $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ est un sous-espace fermé de $C^\infty(G/H,\tau)$ car de dimension finie (cf. appendice). Comme $(F_{Q,s}(\lambda))^0$, $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$, est élément de cet espace d'après la première partie de la démonstration, on a le résultat voulu.

6. Produits scalaires

Soient $M\in\mathcal{L}$ et $P\in\mathcal{P}(M)$. On se fixe $\Lambda\in\mathfrak{a}_M^*$ tel que $\operatorname{Re}\Lambda(\check{\alpha})$ soit strictement positif pour tout α élément de Δ_P. Soit Z élément de $\mathfrak{a}_G$. On note $(G/H)^Z$ l'ensemble des éléments x de G/H tels que $H_G(x)=Z$. On note :

$$\mathfrak{a}_M^Z:=\{X+Z\mid X\in\mathfrak{a}_M^G\},$$

qui est un sous-espace affine de $\mathfrak{a}_M$, que l'on munit de la mesure de Lebesgue associée à la structure euclidienne de $\mathfrak{a}_M$. Alors $(M/M\cap H)\cap(G/H)^Z$ s'identifie, grâce à (1.1) pour M au lieu de G, à $(M^1/M^1\cap H)\times\mathfrak{a}_M^Z$. Par transport de structure et nos choix de mesures, on en déduit une mesure sur $(M/M\cap H)\cap(G/H)^Z$.

Si $\lambda\in(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$ et $\psi\in C^\infty(M/M\cap H)$, on note ψ_λ la fonction C^∞ sur $M/M\cap H$ définie par :

$$\psi_\lambda(m)=e^{\lambda(H_M(m))}\psi(m),\quad m\in M/M\cap H.$$

Cela est cohérent avec nos notations antérieures (cf. (5.14)), si l'on convient d'étendre les fonctions sur $M^1/M^1\cap H$ en des fonctions A_M-invariantes sur $M/M\cap H$. Soit T un élément de $\mathfrak{a}_\varnothing^G$, régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$. On confond T avec la $(G,M_\varnothing)$-famille orthogonale qu'il définit. Soient $\psi,\psi'\in\mathcal{A}_2(M,\tau_M)$ et $X\in\mathfrak{a}_M$. On note

$$(\psi,\psi')^X=(\psi^X,\psi'^X).$$

Si X est nul, on notera (ψ,ψ') au lieu de $(\psi,\psi')^0$. Cette notation présente le défaut de confondre ψ et ψ' avec leurs restrictions à $M^1/M^1\cap H$, mais est plus légère. On définit alors

$$r_P^T(\psi_\Lambda,\psi')^Z := \int_{\mathfrak{a}_M^Z} (\psi,\psi')^X \varphi_P(X-T_P) e^{\Lambda(X)}\, dX, \quad \psi,\psi' \in \mathcal{A}_2(M,\tau_M), \tag{6.1}$$

où φ_P désigne (la restriction à $\mathfrak{a}_M$ de) l'indicatrice de $\{X\in\mathfrak{a}_\varnothing \,|\, \omega(X)\leqslant 0,\ \omega\in\hat{\Delta}_P\}$. Montrons que l'intégrale est convergente. Utilisant la condition de tempérance sur ψ, on voit que les exponentielles polynômes de (5.8) sont à croissance polynomiale car c'est vrai déjà pour les éléments de F. Il en résulte que $(\psi,\psi')^X$ est à croissance polynomiale. Ce que l'on cherche en résulte, grâce à notre choix de Λ. On remarque qu'avec nos choix de mesures, on a aussi :

$$r_P^T(\psi_\Lambda,\psi')^Z := \int_{(M/M\cap H)\cap(G/H)^Z} (\psi_\Lambda(m),\psi'(m))\varphi_P(H_M(m)-T_P)e^{\Lambda(H_M(m))}\, dm. \tag{6.2}$$

De plus si ψ,ψ' sont des éléments de $\mathcal{A}_2(M^1/M^1\cap H,\tau_{M^1})$ et λ,λ' des éléments de $i\mathfrak{a}_M^*$, on a :

$$r_P^T((\psi_\lambda)_\Lambda,\psi'_{\lambda'})^Z = (\psi,\psi')e^{(\lambda+\Lambda-\lambda')(Z)} \int_{\mathfrak{a}_M^G} e^{(\lambda+\Lambda-\lambda')(X)}\varphi_P(X-T_P)\, dX, \tag{6.3}$$

où ψ_λ et $\psi'_{\lambda'}$ ont été définis en (5.14).

Un calcul immédiat donne :

$$\int_{\mathfrak{a}_M^G} e^{\Lambda(X)}\varphi_P(X)\, dX = \theta_P(\Lambda)^{-1}, \tag{6.4}$$

où θ_P est la fonction sur $(\mathfrak{a}_M^*)_{\mathbf{C}}$ définie par

$$\theta_P(\lambda) = c_P^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \lambda(\check{\alpha}), \quad \lambda\in(\mathfrak{a}_M^*)_{\mathbf{C}}. \tag{6.5}$$

Ici c_P est la valeur absolue du déterminant de la matrice exprimant la base $\{\check{\alpha}\,|\,\alpha\in\Delta_P\}$ de $\mathfrak{a}_M^G$ dans une base orthonormée de cet espace. C'est aussi le volume du quotient de $\mathfrak{a}_M^G$ par le réseau engendré par les $\check{\alpha}$, $\alpha\in\Delta_P$. Alors (6.3) devient :

$$r_P^T((\psi_\lambda)_\Lambda,\psi'_{\lambda'})^Z = (\psi,\psi')e^{(\lambda+\Lambda-\lambda')(Z+T_P)}\theta_P(\Lambda+\lambda-\lambda')^{-1}. \tag{6.6}$$

Le second membre est méromorphe en Λ. Par sesquilinéarité, on en déduit que $r_P^T(\psi_\Lambda,\psi')^Z$ est méromorphe en Λ pour ψ,ψ' éléments de $\mathcal{A}_2^{ss}(M/M\cap H,\tau_M)$. Lorsque celle-ci est définie pour $\Lambda=0$, on note $r_P^T(\psi,\psi')^Z$ sa valeur en 0. Dans (6.6), cette condition est vérifiée dès que $\lambda-\lambda'$ est Δ_P-régulier et dans ce cas, avec les notations de (6.6), on a :

$$r_P^T(\psi_\lambda,\psi'_{\lambda'})^Z = (\psi,\psi')e^{(\lambda-\lambda')(Z+T_P)}\theta_P(\lambda-\lambda')^{-1}. \tag{6.7}$$

On note $r_P^T(\psi,\psi')$ au lieu de $r_P^T(\psi,\psi')^0$. Tenant compte de l'extension de $(\cdot,\cdot)$ de $\mathcal{A}_2(M^1/M^1\cap H,\tau_{M^1})$ à $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(M^1/M^1\cap H,\tau_{M^1})$, on peut étendre par sesquilinéarité la définition de $r_P^T(\psi_\Lambda,\psi')^Z$ à ψ,ψ' éléments de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}^{ss}(M/M\cap H,\tau_M)$ de telle sorte que (6.1) reste encore vrai. Cette expression est nulle dès que ψ ou ψ' est dans $\mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}^{ss}$ et elle est méromorphe en Λ. On étend alors la définition de $r_P^T(\psi,\psi')^Z$. La formule (6.7) est encore vraie pour ψ,ψ' éléments de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(M^1/M^1\cap H)$.

7. Produit scalaire tronqué de fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$

Soient M (resp. M') un élément de $\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$, $\mathfrak{a}_M^d$ (resp. $\mathfrak{a}_{M'}^d$) un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$ tel que $\mathfrak{a}_M=\mathfrak{a}_M^d\cap\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{a}_{M'}=\mathfrak{a}_{M'}^d\cap\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q}$). Soit F (resp. F') un élément de $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$ (resp. $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(G,M',\tau)$). Si $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$ sont conjugués par un élément de K, on note $\mathcal{H}$ le complémentaire dans $i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*$ de l'ensemble $\mathcal{H}^c$ des (λ,λ') tels que $\lambda-\lambda'^s$ soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{g}$, ceci pour tout s élément de $W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M'})$. On pose $\mathcal{H}=\varnothing$ sinon. Alors $\mathcal{H}$ est, dans tous les cas, la réunion d'une famille finie d'hyperplans.

LEMME 7. — *Soient $Z\in\mathfrak{a}_G$, $P\in\mathcal{F}$ et T comme au paragraphe précédent.*

(i) *Si $\mathfrak{a}_P$ n'est pas conjugué sous K à $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$, $r_P^T(F_P(\lambda),F'_P(\lambda'))^Z$ est bien défini pour $(\lambda,\lambda')\in i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*$ et identiquement nul.*

(ii) *Si $\mathfrak{a}_P$ est conjugué sous K à $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$ (qui sont alors conjugués sous K), pour tout $(\lambda,\lambda')\in\mathcal{H}^c$, $r_P^T(F_P(\lambda),F'_P(\lambda'))^Z$ est bien défini et égal à la somme sur $s\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_M)$, $s'\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_{M'})$ de :*

$$(F_{P,s}(\lambda),F'_{P,s'}(\lambda'))e^{(\lambda^s-\lambda'^{s'})(Z+T_P)}\theta_P(\lambda^s-\lambda'^{s'})^{-1}.$$

Ici $(F_{P,s}(\lambda),F'_{P,s'}(\lambda'))$ vaut pour $(F_{P,s}(\lambda),F'_{P,s'}(\lambda'))^0$.

Démonstration. — (i) est clair grâce à la définition de r_P^T (cf. §6) et au lemme 6.

Pour (ii), si $\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M'},\mathfrak{a}_P$ sont conjugués sous K, ils sont de même dimension. On remarque que si $(\lambda,\lambda')\in\mathcal{H}^c$, $\lambda^s-\lambda'^{s'}$ est Δ_P-régulier pour $s\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_M)$, $s'\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_{M'})$ car $\lambda^s-\lambda'^{s'}=(\lambda-\lambda'^{s'\circ s^{-1}})^s$, où $s'\circ s^{-1}$ est un élément de $W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M'})$. Par ailleurs pour s,s',λ,λ' comme ci-dessus, $F_{P,s}(\lambda)$ (resp. $F'_{P,s'}(\lambda')$) est un élément de $\mathcal{A}_2^{ss}(M,\tau_M)$ (resp. $\mathcal{A}_2^{ss}(M',\tau_{M'})$) d'après le lemme 6. On déduit le résultat voulu de (6.6) et de la décomposition (3.2) du terme constant. □

On rappelle que $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$) est l'ensemble des éléments standards de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{P}$). Pour $L\in\mathcal{L}$, on notera $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^L=\{P\cap L\,|\,P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\}$. On définit grâce au lemme précédent une fonction sur $\mathcal{H}^c$ par :

$$\omega_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}^T(F,F',\lambda,\lambda')^Z=\sum_{P\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}}r_P^T(F_P(\lambda),F'_P(\lambda'))^Z,\quad(\lambda,\lambda')\in\mathcal{H}^c.\tag{7.1}$$

On supprime Z de la notation si Z est nul. On déduit du lemme 7 que pour $(\lambda,\lambda')\in\mathcal{H}^c$, cette fonction est égale la somme sur $P\in\mathcal{F}_{\rm st}$, $s\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_M)$, $s'\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_{M'})$ de

$$(F_{P,s}(\lambda),F'_{P,s'}(\lambda'))e^{(\lambda^s-\lambda'^{s'})(Z+T_P)}\theta_P(\lambda^s-\lambda'^{s'})^{-1}. \tag{7.2}$$

De plus :

Si $\mathfrak{a}_P$ n'est pas conjugué sous K à $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$, les termes correspondant à P dans (7.2) sont nuls. (7.3)

On rappelle que la fonction $u(\cdot,T)$ est la fonction indicatrice d'une partie de G/H. Avec les notations du §6, on note

$$\Omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')^Z=\int_{(G/H)^Z}(F(\lambda)(x),F'(\lambda')(x))u(x,T)\,dx. \tag{7.4}$$

Il est clair que $\Omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\cdot,\cdot)^Z$ s'étend en une fonction holomorphe de $(\lambda,-\bar\lambda')$ au voisinage de $i\mathfrak{a}^*_M\times i\mathfrak{a}^*_{M'}$, grâce à la définition des fonctions $\mathrm{II}'_{\rm hol}$ (cf. [6, définition 2]).

THÉORÈME 1. — *Avec les notations ci-dessus :*

(i) *La fonction sur $\mathcal{H}^c$, $\omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')$, s'étend en une fonction analytique sur $i\mathfrak{a}^*_M\times i\mathfrak{a}^*_{M'}$, qu'on note de la même façon.*

(ii) *Soit $\delta>0$. Il existe des constantes $C,\varepsilon>0$ et $k\in\mathbf{N}$ telles que la différence :*

$$\Delta^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')^Z:=\Omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')^Z-\omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')^Z.$$

soit majorée en module par :

$$CN_k(\lambda,\lambda')e^{-\varepsilon\|T\|}$$

pour tout $(\lambda,\lambda')\in i\mathfrak{a}^*_M\times i\mathfrak{a}^*_{M'}$, $Z\in\mathfrak{a}_G$ et tout T vérifiant $d(T)\geqslant\delta\|T\|$.

Début de la démonstration. — La démonstration est calquée sur le modèle de celle de Arthur dans le cas des groupes ([1, théorème 8.1]).

On procède par récurrence sur la dimension de G/H. On suppose le théorème vrai pour tous les espaces symétriques réductifs de dimension strictement inférieure à celle de G/H.

LEMME 8. — *Pour $\delta>0, r>0$, on peut choisir $C,\varepsilon>0$, $k\in\mathbf{N}$ tels que :*

$$\|\Delta^{T+S}_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')-\Delta^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')\|\leqslant CN_k(\lambda)N_k(\lambda')e^{-\varepsilon\|T\|}$$

pour (λ,λ') élément de $\mathcal{H}^c$, $Z\in\mathfrak{a}_G$, T comme dans le théorème 1 et $S\in\mathfrak{a}^G_\varnothing$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$ tel que S et T soient dans la même chambre et vérifient $\|S\|\leqslant r\|T\|$.

Démonstration. — La démonstration est essentiellement la même que celle du lemme 9.1 de [1]. Elle n'en diffère que par les références et de petits changements. Ceux-ci sont suffisamment nombreux pour rendre nécessaire une réécriture complète.

Soient T et S comme dans l'énoncé. Si $x=km\in G/H$ avec $k\in K$ et $m\in(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)^+_{P_0}$ pour $P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on a, grâce à (2.2) :

$$u(x,T+S)=\bar{\tau}_{P_0}(H_\varnothing(m),T_{P_0}+S_{P_0}).$$

D'après la formule d'intégration (1.2), $\Omega^{T+S}_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F,F',\lambda,\lambda')$ est égal à :

$$\sum_{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}\int_{(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(G/H)^Z} D_{P_0}(m)\,\bar{\tau}_{P_0}(H_\varnothing(m),T_{P_0}+S_{P_0})\,(F(\lambda)(m),F'(\lambda')(m))\,dm. \tag{7.5}$$

Dans cette expression on substitue le développement (2.5) de $\bar{\tau}_{P_0}(\,\cdot\,,S_{P_0}+T_{P_0})$. On obtient la somme, sur $P_0\in\mathcal{P}_0$ et sur $Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ contenant P_0, de l'intégrale sur $m\in(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(G/H)^Z$ du produit de

$$D_{P_0}(m)\,(F(\lambda)(m),F'(\lambda')(m)) \tag{7.6}$$

avec

$$\bar{\tau}^Q_{P_0}(H_\varnothing(m),T_{P_0})\,\bar{\tau}_Q(H_Q(m)-T_Q,S_Q). \tag{7.7}$$

On a remplacé $H_\varnothing(m)$ par sa projection $H_Q(m)$ sur $\mathfrak{a}_Q$, grâce aux propriétés de $\bar{\tau}_Q$.

On fixe P_0 et Q comme ci-dessus et $m\in(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(G/H)^Z$ tel que (7.7) soit non nul. On note $\{\breve{\omega}_\alpha\,|\,\alpha\in\Delta_Q\}$ la base de $\mathfrak{a}^G_Q$ duale de la base Δ_Q de $(\mathfrak{a}^G_Q)^*$. Il est aisé, en utilisant la définition des fonctions $\bar{\tau}^Q_{P_0}$ et $\bar{\tau}_Q$, de voir que

$$H_\varnothing(m)=T_{P_0}-\sum_{\beta\in\Delta^Q_{P_0}}c_\beta\check{\beta}+\sum_{\alpha\in\Delta_Q}d_\alpha\breve{\omega}_\alpha+Z$$

où c_β, d_α sont des nombres réels positifs ou nuls. Ici $\check{\beta}$ est la coracine de β. Soit α un élément de $\Delta_{P_0}-\Delta^Q_{P_0}$ et $\tilde{\alpha}\in\Delta_Q$ sa restriction à $\mathfrak{a}_Q$. Comme $\alpha(\check{\beta})\leqslant 0$ pour tout β dans $\Delta^Q_{P_0}$ nous avons :

$$\alpha(H_\varnothing(m))\geqslant\alpha(T_{P_0})+d_{\tilde{\alpha}}\geqslant\alpha(T_{P_0})\geqslant\delta\|T\|, \tag{7.8}$$

grâce aux hypothèses sur T. De plus $\bar{\tau}_{P_0}(H_\varnothing(m),T_{P_0}+S_{P_0})$ est égal à 1, d'après la non nullité de (7.7) et l'égalité (2.5). Ceci implique, grâce à (2.2) :

$$\|H_\varnothing(m)\|\leqslant\|S+T\|\leqslant(1+r)\|T\|.$$

D'où l'on déduit :

$$\alpha(H_\varnothing(m))\geqslant\delta_1\|H_\varnothing(m)\|,\quad \text{où } \delta_1=\delta(1+r)^{-1}. \tag{7.9}$$

On peut donc appliquer le corollaire du lemme 3 qui nous dit que, pour m tel que (7.7) soit non nul :

$$\|D_{P_0}(m)^{1/2}F(\lambda)(m) - D_{P_0\cap M_Q}(m)^{1/2}F_Q(\lambda)(m)\|$$

est bornée par une fonction de la forme $CN_k(\lambda)e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|}$. On a une majoration similaire pour F'. Alors pour m tel que (7.7) soit non nul, la différence entre (7.6) et

$$D_{P_0\cap M_Q}(m)\,(F_Q(\lambda)(m), F_Q(\lambda')(m)) \tag{7.10}$$

est majorée en valeur absolue par une fonction de la forme :

$$CN_k(\lambda)\,N_k(\lambda')\,(1+\|H_\varnothing(m)\|)^d e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|}.$$

En effet on applique l'inégalité (3.13) (pour Q et G) pour tenir compte des termes croisés. On note pour P_0, Q comme ci-dessus $W_{P_0}^{T,Q}(m)$ le produit de (7.10) par $\bar{\tau}_{P_0}^{Q}(H_\varnothing(m), T_{P_0})$. Si $Q{=}G$, les expressions (7.6) et (7.10) sont égales et l'intégrale de $W_{P_0}^{T,Q}(m)$ est précisément la contribution de P_0 et Q à l'expression (7.5). Supposons $Q{\neq}G$. On peut choisir $\alpha\in\Delta_{P_0}-\Delta_{P_0}^Q$ et d'après (7.8), si (7.7) ne s'annule pas, on a $\alpha(H_\varnothing(m))\geqslant\delta\|T\|$. On en déduit aisément que l'intégrale sur $(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(G/H)^Z$ du produit de (7.7) par une fonction de la forme $(1+\|H_\varnothing(m)\|)^d e^{-\varepsilon\|H_\varnothing(m)\|}$ est bornée par $C_1 e^{-\varepsilon_1\|T\|}$ pour $C_1, \varepsilon_1>0$. On a donc montré que la différence de (7.5) avec

$$\sum_{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}\ \sum_{\substack{Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}\\ P_0\subset Q}} \int_{(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(G/H)^Z} \tau_Q(H_Q(m)-T_Q, S_Q)\,W_{P_0}^{T,Q}(m)\,dm. \tag{7.11}$$

est bornée en valeur absolue par une expression de la forme voulue :

$$CN_k(\lambda)\,N_{k'}(\lambda')\,e^{-\varepsilon\|T\|}. \tag{7.12}$$

On note $\mathfrak{a}_Q^Z$ le sous-espace affine de $\mathfrak{a}_Q$ formé des éléments de $\mathfrak{a}_Q$ dont la projection orthogonale sur $\mathfrak{a}_G$ est égale à Z. On intervertit la somme sur P_0 et Q dans (7.11). On fixe Q et on écrit la somme

$$\sum_{\substack{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ P_0\subset Q}} \int_{(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(G/H)^Z} \tau_Q(H_Q(m)-T_Q, S_Q)\,W_{P_0}^{T,Q}(m)\,dm$$

sous la forme :

$$\int_{\mathfrak{a}_Q^Z}\ \sum_{\substack{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ P_0\subset Q}} \left(\int_{(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(M_Q/M_Q\cap H)^X} W_{P_0}^{T,Q}(m)\,dm\right)\tau_Q(X-T_Q, S_Q)\,dX.$$

Substituant l'expression (3.2) de F_Q, F'_Q dans (7.10) et utilisant (1.2) pour changer de variables, on voit que :

$$\sum_{\substack{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ P_0\subset Q}} \int_{(M_\varnothing/M_\varnothing\cap H)\cap(M_Q/M_Q\cap H)^X} W^{T,Q}_{P_0}(m)\,dm$$

est égal à

$$\sum_{s,s'} \Omega^T_{\mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}}(F^s_{Q,s}, F'^{s'}_{Q,s'}, \lambda^s, \lambda'^{s'})^X \tag{7.13}$$

où s décrit $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$, s' décrit $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{M'})$ et $\mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}=\{P_0\cap M_Q\,|\,P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\}$. Supposons $Q\neq G$. Alors, par notre hypothèse de récurrence, la différence entre (7.13) et

$$\sum_{s,s'} \omega^T_{\mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}}(F^s_{Q,s}, F'^{s'}_{Q,s'}, \lambda^s, \lambda'^{s'})^X \tag{7.14}$$

est majorée par une fonction du type (7.12). Par ailleurs l'intégrale sur $\mathfrak{a}^Z_Q$ de $\tau_Q(X-T_Q, S_Q)$ est à croissance polynomiale en $\|S_Q\|$ et donc en $\|T\|$. Si $Q=G$ la différence entre (7.13) et (7.14) est juste égale à $\Delta^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z$. Mettant tout cela ensemble, on conclut que la différence entre

$$\Omega^{T+S}_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z - \Delta^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda') \tag{7.15}$$

et la fonction obtenue par la somme sur $Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ de l'intégrale sur $X\in\mathfrak{a}^Z_G$ du produit de $\tau_Q(X-T_Q, S_Q)$ avec (7.14) est bornée en module par une fonction du type (7.12). Par sesquilinéarité, l'expression (7.14) peut être simplifiée. Elle est égale à :

$$\sum_{R_1\in\mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}} r^T_{R_1}((F_Q(\lambda))_{R_1}, (F'_Q(\lambda'))_{R_1})^X.$$

Notons P_1 l'unique élément de $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ tel que $P_1\subset Q$ et $P_1\cap M_Q=R_1$. En appliquant la transitivité du terme constant, cette expression s'écrit aussi :

$$\sum_{R_1\in\mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}} r^T_{R_1}(F_{P_1}(\lambda), F'_{P_1}(\lambda'))^X.$$

Finalement (7.14) s'écrit :

$$\sum_{\substack{P_1\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}\\ P_1\subset Q}} r^T_{P_1\cap M_Q}(F_{P_1}(\lambda), F'_{P_1}(\lambda'))^X. \tag{7.16}$$

Pour revenir à la fonction qui est asymptotique à (7.15) on doit multiplier (7.16) par $\tau_Q(X-T_Q, S_Q)$, intégrer sur $X\in\mathfrak{a}_Q^Z$ et prendre la somme sur $Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$. On intervertit la somme sur Q et P_1. Cela devient la somme sur $P_1\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ de

$$\sum_{\substack{Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}\\ P_1\subset Q}} \int_{\mathfrak{a}_Q^Z} \tau_Q(X-T_Q, S_Q)\, r^T_{M_Q\cap P_1}(\Psi, \Psi')^X\, dX, \tag{7.17}$$

où $\Psi = F_{P_1}(\lambda), \Psi' = F'_{P_1}(\lambda')$. En remplaçant, dans (7.17), Ψ par Ψ_Λ, avec $\Lambda\in\mathfrak{a}^*_{P_1}$ tel que $\Lambda(\check{\alpha})>0$ pour $\alpha\in\Delta_{P_1}$, appliquant la définition de $r^T_{M_Q\cap P_1}$ et utilisant (2.5), on trouve que cette nouvelle expression est égale à

$$r^{T+S}_{P_1}(\Psi_\Lambda, \Psi')^Z.$$

On en déduit que (7.17) est égal à

$$r^{T+S}_{P_1}(F_{P_1}(\lambda), F'_{P_1}(\lambda'))^Z.$$

La somme de (7.17) sur $P_1\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ est donc égale à $\omega^{T+S}_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z$. C'est notre aproximation de (7.15). On en déduit que $\Delta^{T+S}_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z - \Delta^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z$ est majorée par une fonction du type (7.12). □

Suite de la démonstration du théorème 1. — On écrit $\lim_{T\underset{\delta}{\to}\infty}$ pour décrire la limite quand $\|T\|$ tend vers l'infini en vérifiant $d(T)\geqslant\delta\|T\|$. Alors on déduit du lemme précédent, comme dans [1, preuve du lemme 9.2], que la limite

$$\Delta^\infty_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z = \lim_{T\underset{\delta}{\to}\infty} \Delta^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z$$

existe unifomément pour (λ, λ') dans un compact de $\mathcal{H}^c$. De plus il existe $C, \varepsilon>0$, $k\in\mathbf{N}$ tels que

$$\|\Delta^\infty_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z - \Delta^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z\| \leqslant C N_k(\lambda) N_k(\lambda') e^{-\varepsilon\|T\|}$$

pour tout $(\lambda, \lambda')\in\mathcal{H}^c$ et Z, T comme dans le théorème 1.

On note $\mathcal{F}_*$ l'ensemble des couples (λ, λ') éléments de $i\mathfrak{a}^*_M\times i\mathfrak{a}^*_{M'}$ qui appartiennent à $\mathcal{H}^c$ et tels que λ' soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_{M'}$ dans $\mathfrak{g}$.

Rappelons que si a est un élément de $C_c^\infty(i\mathfrak{a}^*_M)$ ou même $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*_M)$, on dispose du paquet d'ondes F_a (noté $W_{a,F}$ dans [6]) et défini par :

$$F_a(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*_M} a(\lambda) F(\lambda)(x)\, d\lambda, \quad x\in G/H. \tag{7.18}$$

En outre $F_a(x)$ est un élément de $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ et l'application qui à a associe F_a est continue de $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}_M^*)$ dans $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ d'après [6, théorème 1]. Alors pour tout $\lambda'\in i\mathfrak{a}_M^*$,

$$(F_a, F'(\lambda')) = \int_{G/H} (F_a(x), F'(\lambda')(x))\, dx \tag{7.19}$$

est bien défini et continu en $a\in\mathcal{S}(i\mathfrak{a}_M^*)$ car $F'(\lambda')\in\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$. On note $T_{\lambda'}$ cette distribution sur $i\mathfrak{a}_M^*$. On définit de même $(F_a, F'_{a'})$ pour $a'\in\mathcal{S}(i\mathfrak{a}_{M'}^*)$ et le théorème de Fubini peut s'appliquer, d'après les majorations de F', qui est $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$, pour donner :

$$(F_a, F_{a'}) = \int_{i\mathfrak{a}_{M'}^*} (F_a, a'(\lambda') F'(\lambda'))\, d\lambda' \tag{7.20}$$

Comme nous l'avons dit, la démonstration du théorème 1 va se réduire au point (ii) du lemme suivant, dont le point (i) évite le recours à la formule de Plancherel sur G/H. C'est heureux, car c'est celle-ci qu'on cherche!

LEMME 9. — *Avec les notations précédentes :*

(i) *Soit λ' un élément de $i\mathfrak{a}_{M'}^*$, régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_{M'}$ dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$ ne sont pas conjugués par un élément de K, $T_{\lambda'}$ est nulle. Sinon le support de $T_{\lambda'}$ est contenu dans $\{\lambda'^s \mid s\in W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_{M'})\}$.*

(ii) *Si a (resp. a') est une fonction C^∞ à support compact sur $i\mathfrak{a}_M^*$ (resp. $i\mathfrak{a}_{M'}^*$) pour lesquelles le support de $a\otimes a'$ est contenu dans $\mathcal{F}_*$, $(F_a, F_{a'})$ est nul.*

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, on peut, par sesquilinéarité, supposer que F (resp. F') est $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(\Lambda)$ (resp. $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}(\Lambda')$) où $\Lambda\in(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}^*$ est régulier par rapport aux racines de $(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathfrak{k}}^*$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ et Λ' vérifie des conditions similaires. Montrons (i). Soit λ' comme dans l'énoncé. Soit $D\in\mathbf{D}(G/H)$. On a, d'après le lemme 5 (ii) :

$$(DF_a, F'(\lambda')) = (F_a, D^* F'(\lambda')). \tag{7.21}$$

Par ailleurs, D peut s'écrire, sur un ouvert dense, O, de G/H sous la forme :

$$\sum_{i\in I} f_i(x) L_{u_i}, \quad u_i \in U(\mathfrak{g}),$$

où I est fini et les f_i sont C^∞ (cf. [3, preuve du lemme 1.7]). On applique alors le lemme 5 (i) de [6] pour conclure, que pour x élément de O, on a :

$$(D(F_a))(x) = (DF)_a(x),$$

puis, par continuité, on en déduit :

$$D(F_a) = (DF)_a. \tag{7.22}$$

Par ailleurs :

$$D(F(\lambda))=\gamma_{\mathfrak{a}_M^d}(D)(\Lambda+\lambda)F(\lambda) \tag{7.23}$$

et :

$$D^*(F'(\lambda'))=\gamma_{\mathfrak{a}_{M'}^d}(D^*)(\Lambda'+\lambda')F'(\lambda').$$

Du lemme 4, on déduit que, pour $\lambda'\in i\mathfrak{a}_{M'}^*$:

$$D^*(F'(\lambda'))=\overline{\gamma_{\mathfrak{a}_{M'}^d}(D)(\Lambda'+\lambda')}\,F'(\lambda').$$

Mais il résulte de (7.21), (7.22) et (7.23) que la multiplication de $T_{\lambda'}$, par toute fonction sur $i\mathfrak{a}_M^*$ de la forme $\gamma_{\mathfrak{a}_M^d}(D)(\Lambda+\lambda)-\gamma_{\mathfrak{a}_{M'}^d}(D)(\Lambda'+\lambda')$, $D\in\mathbf{D}(G/H)$, est une distribution nulle. Le support de $T_{\lambda'}$ est donc contenu dans l'ensemble S des zéros communs de toutes ces fonctions. D'après nos hypothèses $\Lambda'+\lambda'$ est régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_{M'}^d$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Par suite, appliquant le lemme 2 de [7], si λ est élément de S, $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$ sont conjugués par K et il existe un élément s de $W^0(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M'})$ tel que $\lambda'^s=\lambda$. Donc (λ,λ') est un élément de $\mathcal{H}$. On rappelle que $\mathcal{H}$ est vide si $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$ ne sont pas conjugués sous K. Ceci démontre (i).

Prouvons (ii). Soient a,a' comme dans l'énoncé. Il suffit, d'après (7.20), de voir que $\overline{a(\lambda')}(F_a,F(\lambda'))$ est identiquement nul. Raisonnons par l'absurde et soit λ' tel que cette expression est non nulle. Alors λ' est élément du support de a' et l'intersection du support de $T_{\lambda'}$ avec le support de a contient au moins un élément λ. Alors ceci implique d'après (i) que $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$ sont conjugués sous K et qu'il existe un élément s de $W^0(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M'})$ tel que $\lambda'^s=\lambda$. Donc (λ,λ') est élément de $\mathcal{H}$, donc non élément de $\mathcal{F}_*$, et est élément du support de $a\otimes a'$. Or celui ci est contenu dans $\mathcal{F}_*$ par hypothèse. Cette contradiction achève de prouver le lemme. □

Fin de la démonstration du théorème 1. — On se ramène facilement au cas où $\mathfrak{a}_G=\{0\}$. Alors $Z=0$ et on le supprime de la notation. Comme dans la preuve de [1, théorème 8.1, p. 65], on voit qu'il suffit, pour prouver le théorème, de voir que $\Delta^{\infty}_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F,F',\lambda,\lambda')$ est nul sur un ouvert dense de $i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*$. On va voir que l'ensemble $\mathcal{F}_*$ des éléments (λ,λ') de $\mathcal{H}^c$ tels que λ' soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_{M'}$ dans $\mathfrak{g}$ convient. En effet, soient $a\in C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$ et $a'\in C_c^\infty(i\mathfrak{a}_{M'}^*)$ avec $a\otimes a'$ à support dans $\mathcal{F}_*$. Alors :

$$\int_{i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*}\Delta^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F,F',\lambda,\lambda')\,a(\lambda)\,a(\lambda')\,d\lambda\,d\lambda'$$

est égal à la différence de :

$$\int_{G/H}(F_a(x),F_{a'}(x))\,u(x,T)\,dx \tag{7.24}$$

avec la somme sur $P\in\mathcal{P}_{\rm st}$, $s\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_M)$, $s'\in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_{M'})$, du produit de :

$$a(\lambda)\,a(\lambda')\,(F_{P,s}(\lambda),F_{P,s'}(\lambda'))\,\theta_P(\lambda^s-\lambda'^{s'})^{-1} \tag{7.25}$$

par :

$$e^{(\lambda^s-\lambda'^{s'})(T_P)}. \tag{7.26}$$

Dans (7.24) on a utilisé le théorème de Fubini. Le théorème de convergence dominée et les propriétés des paquets d'ondes montrent que (7.24) converge vers $\int_{G/H}(F_a(x),F_{a'}(x))\,dx$ quand $T\underset{\delta}{\to}\infty$. Cette intégrale est nulle d'après le lemme précédent. Par ailleurs, avec nos hypothèses sur le support de $a\otimes a'$, (7.25) est C^∞ à support compact sur $i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*$. Sa transformée de Fourier étant une fonction dans l'espace de Schwartz, on conclut que l'intégrale sur $i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*$ du produit de (7.25) avec (7.26) converge vers 0 quand $T\underset{\delta}{\to}\infty$. On conclut que :

$$\int_{i\mathfrak{a}_M^*\times i\mathfrak{a}_{M'}^*} a(\lambda)\,a'(\lambda')\,\Delta^\infty_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')\,d\lambda\,d\lambda'=0,$$

puis que $\Delta^\infty_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')$ est nulle pour $(\lambda,\lambda')\in\mathcal{F}_*$ comme désiré. □

On veut étendre les résultat du théorème 1 à une classe plus large de fonctions. Si $M\in\mathcal{L}$, on définit l'espace $\widetilde{\mathrm{II}'_{\rm hol}}(G,M,\tau)$ des familles de fonctions τ-sphériques sur G/H paramétrées par $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$, de la forme $F(\lambda)=\sum_{w\in W(\mathfrak{a}_\varnothing)}F_w(\lambda^{w^{-1}})$, $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$, où F_w est un élément de $\mathrm{II}'_{\rm hol}(G,M^w,\tau)$. Nous ne nous intéressons pas à l'éventuelle unicité de cette écriture. En utilisant la décompositon (3.2) du terme constant des fonctions $\mathrm{II}'_{\rm hol}$, on voit que pour $F\in\widetilde{\mathrm{II}'_{\rm hol}}(G,M,\tau)$ et $M\in\mathcal{L}$, on peut écrire

$$F_Q(\lambda)=\sum_{s\in W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)}F_{Q,s}(\lambda) \tag{7.27}$$

où

$$F_{Q,s}(\lambda)\in\mathcal{A}_{\rm temp}(M_Q/M_Q\cap H,\tau) \tag{7.28}$$

et

$$(F_{Q,s}(\lambda)^0)_{\lambda^s}=F_{Q,s}(\lambda), \tag{7.29}$$

et de plus pour tout $m\in M_Q/M_Q\cap H$,

$$\lambda\mapsto F_{Q,s}(\lambda)(m) \text{ est continue sur } i\mathfrak{a}_M^*. \tag{7.30}$$

Une telle décompositon est unique. En effet, l'indépendance linéaire des caractères de A_Q, $a\mapsto a^{\lambda^s}$, $s\in W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)$, pour λ générique et (7.29) impliquent l'unicité de la décomposition (7.27), pour λ générique fixé. La condition (7.30) permet de conclure. Cette unicité permet de conclure à la linéarité de $F\mapsto F_{Q,s}$. Les lemmes 6 et 7 sont encore valables pour les fonctions $\widetilde{\mathrm{II}'_{\rm hol}}(G,M,\tau)$. De même, on a immédiatement par sesquilinéarité et transport de structure :

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1. — *Le théorème* 1 *est encore vrai pour*

$$F\in\widetilde{\mathrm{II}}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau) \quad et \quad F'\in\widetilde{\mathrm{II}}'_{\mathrm{hol}}(G,M',\tau).$$

8. Relations de Maass–Selberg en rang 1 pour les fonctions $\widetilde{\mathrm{II}}'_{\mathrm{hol}}$

Soient $M\in\mathcal{L}$ et $P\in\mathcal{P}(M)$. Si $x\in G$, on notera P^x au lieu de xPx^{-1}. Soit $W_\varnothing^M$ le sous-groupe du groupe de Weyl $W_\varnothing^G$ (noté aussi $W_\varnothing$) du système de racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$, formé des éléments de $W_\varnothing$ qui fixent les éléments de $\mathfrak{a}_M$. C'est aussi le quotient du normalisateur de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $K\cap M$, $N_{K\cap M}(\mathfrak{a}_\varnothing)$, par $M_\varnothing\cap K$. Si x est un élément de $N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$, P^x ne dépend que de l'élément w de $W_\varnothing$ qu'il représente. On le note P^w. Il ne dépend que de la classe à gauche modulo $W_\varnothing^M$ de w.

LEMME 10. — (i) *Soient $M\in\mathcal{L}$ et $P\in\mathcal{P}(M)$. L'application de $W_\varnothing/W_\varnothing^M$ dans $\mathcal{F}$ qui associe P^w à $wW_\varnothing^M$ est une bijection entre $W_\varnothing/W_\varnothing^M$ et les éléments de $\mathcal{F}$ conjugués sous G à P.*

(ii) *On note $W_\varnothing^H$ l'ensemble des éléments de $W_\varnothing$ ayant un représentant dans $K\cap H$. Si P et Q sont des éléments de $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ conjugués par $W_\varnothing^H$, ils sont égaux.*

(iii) *Soient $M\in\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ et $P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(M)$. Dans chaque $(W_\varnothing^H,W_\varnothing^M)$-double classe w dans $W_\varnothing$, il existe un unique élément w_P de $W_\varnothing/W_\varnothing^M$ tel que P^{w_P} soit standard. On note $\mathcal{W}_P$ le sous-ensemble de $W_\varnothing/W_\varnothing^M$ formé par les w_P lorsque w décrit $W_\varnothing^H\backslash W_\varnothing/W_\varnothing^M$. L'application qui à x élément de $\mathcal{W}_P$ associe P^x est une bijection entre $\mathcal{W}_P$ et l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ conjugués à P.*

Démonstration. — (i) Soient $w,w'\in N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$ tels que P^w et $P^{w'}$ soient égaux. Alors $P^{ww'^{-1}}$ est égal à P. Donc ww'^{-1} est élément de $K\cap P$ donc de $K\cap M$. Ceci prouve que l'application étudiée est injective. Elle est surjective d'après le lemme 2 (i).

(ii) Soient $P,Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ et $y\in W_\varnothing^H$ tels que Q soit égal à P^y. Montrons que $P=Q$. Soit $P^{\sigma\theta}$ (resp. $Q^{\sigma\theta}$) l'intersection de P (resp. Q) et $G^{\sigma\theta}$, où $G^{\sigma\theta}$ est le groupe des points fixes de $\sigma\theta$. Soit P_0 le sous-groupe parabolique minimal de $G^{\sigma\theta}$ contenant $A_\varnothing$ et déterminé par $\Sigma_{\sigma\theta}$. Alors $P^{\sigma\theta}$ et $Q^{\sigma\theta}$ sont des sous-groupes paraboliques de $G^{\sigma\theta}$ contenant P_0 (car P et Q sont standards). En outre, comme ils sont conjugués par un élément y' de $K\cap H$, représentant de y, ils sont égaux et $y'\in K\cap P^{\sigma\theta}\subset K\cap M$. Donc y centralise $\mathfrak{a}_M$ et $P^y=P$. D'où l'assertion voulue.

(iii) Soient $M\in\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ et $P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(M)$. Soient $x\in W_\varnothing$ et w la $(W_\varnothing^H,W_\varnothing^M)$-double classe de x dans $W_\varnothing$. On note $Q=P^x$. L'intersection $P^{\sigma\theta}$ (resp. $Q^{\sigma\theta}$) de P (resp. Q) avec $G^{\sigma\theta}$ est un sous-groupe parabolique de $G^{\sigma\theta}$. Alors $P^{\sigma\theta}$ contient P_0 (voir (ii)) et $Q^{\sigma\theta}$ contient un sous-groupe parabolique minimal de $G^{\sigma\theta}$, qui est conjugué à P_0 par un élément $y\in W_\varnothing^H$.

Alors P^{yx} est standard. D'où l'existence de w_P. L'unicité résulte de (ii). Donc w_P est bien défini. Le reste de (iii) résulte de (i). □

Hypothèse jusqu'à la fin du paragraphe. — On suppose que $M \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ est tel que $\dim \mathfrak{a}_M^G = 1$.

Alors $\mathcal{P}(M)$ est réduit à deux éléments et on note P l'unique élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(M)$. On a $W(\mathfrak{a}_M)$ $(=W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M))$ qui est égal à $W^0(\mathfrak{a}_M)$ d'après le lemme 2 (iv). Ce groupe a au plus deux éléments. On note $\mathcal{W}_P$ l'ensemble des représentants de $W_\varnothing^H \backslash W_\varnothing / W_\varnothing^M$ décrit au lemme précédent. Si $w \in \mathcal{W}_P$, w^{-1} détermine un élément de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ où $Q = P^w$ est un élément de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME 2. — *Pour toute fonction* $F \in \widetilde{\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}}(G, M, \tau)$ *et avec les notations ci-dessus on a :*

(i) *Si* $W(\mathfrak{a}_M)$ *possède deux éléments,* 1 *et* s, *les égalités suivantes sont vérifiées pour* $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$:

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_P} \|F_{P^w, w^{-1}}(\lambda)\|^2 = \sum_{w \in \mathcal{W}_P} \|F_{P^w, sw^{-1}}(\lambda)\|^2$$

et

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_P} (F_{P^w, w^{-1}}(\lambda), F_{P^w, sw^{-1}}(s\lambda)) = \sum_{w \in \mathcal{W}_P} (F_{P^w, sw^{-1}}(\lambda), F_{P^w, w^{-1}}(s\lambda)).$$

(ii) *Si* $W(\mathfrak{a}_M)$ *a un seul élément, on note* $\overline{P}$ *le sous-groupe parabolique opposé à* P *et l'on a, pour* $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$:

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_P} \|F_{P^w, w^{-1}}(\lambda)\|^2 = \sum_{w \in \mathcal{W}_P} \|F_{\overline{P}^w, sw^{-1}}(\lambda)\|^2$$

Dans (i) *et* (ii) *on a noté* $\|F_{P^w, w^{-1}}(\lambda)\|^2$ *pour* $(F_{P^w, w^{-1}}(\lambda), F_{P^w, w^{-1}}(\lambda))^0$, *etc. En d'autres termes on restreint les fonctions à* $(M^w)^1/(M^w)^1 \cap H$ *et on intègre.*

Démonstration. — Si $Q \in \mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ est tel que $\mathfrak{a}_Q$ et $\mathfrak{a}_M$ sont conjugués sous K (c'est à dire que Q et P sont σ-associés), Q est conjugué à P ou $\overline{P}$.

(i) Si $W(\mathfrak{a}_M)$ possède deux éléments 1 et s, P et $\overline{P}$ sont conjugués, donc Q comme ci-dessus est conjugué à P. Il est de la forme $Q = P^w$ avec $w \in \mathcal{W}_P$ d'après le lemme précédent. Alors w^{-1} définit un élément de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$, l'autre élément de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ étant égal à sw^{-1}. Alors, d'après (7.2) et (7.3), $\omega_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}^T(F, F, \lambda, \lambda')$ est égal à la somme sur $w \in \mathcal{W}_P$ de la différence de :

$$(F_{P^w, w^{-1}}(\lambda), F_{P^w, w^{-1}}(\lambda')) e^{(\lambda - \lambda')(T_P)}$$

avec :

$$(F_{P^w, sw^{-1}}(\lambda), F_{P^w, sw^{-1}}(\lambda)) e^{(\lambda' - \lambda)(T_P)}$$

multipliée par :

$$\theta_P(\lambda-\lambda')^{-1}$$

additionnée à la somme sur $w\in\mathcal{W}_P$ du produit de la différence de :

$$(F_{P^w,w^{-1}}(\lambda), F_{P^w,sw^{-1}}(\lambda'))e^{(\lambda+\lambda')(T_P)}$$

avec :

$$(F_{P^w,sw^{-1}}(\lambda), F_{P^w,w^{-1}}(\lambda'))e^{-(\lambda+\lambda')(T_P)}$$

multipliée par :

$$\theta_P(\lambda+\lambda')^{-1}.$$

Pour obtenir cela on a utilisé les relations suivantes : $s=-1$, $\theta_{P^w}(\lambda^{w^{-1}})=\theta_P(\lambda)$, $\theta_P(\lambda)=-\theta_P(-\lambda)$ (car Δ_P n'a qu'un élément), $\lambda^{w^{-1}}(T_{P^w})=\lambda(T_P)$ pour $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$. Les relations du théorème résultent de l'analyticité de $\omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F',\lambda,\lambda')$ (cf. corollaire du théorème 1) respectivement au voisinage de (λ,λ) et $(\lambda,-\lambda)$.

(ii) Si $W(\mathfrak{a}_M)$ est réduit à un élément, P et $\overline{P}$ ne sont pas conjugués. Si $Q\in\mathcal{F}_{\rm st}$ est tel que $W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)$ est non vide avec P et Q σ-associés, Q est conjugué soit à P soit à $\overline{P}$. Soit w_0 un élément de $K\cap H$ qui normalise $\mathfrak{a}_\varnothing$ et qui transforme $\Sigma_{\sigma\theta}$ en $-\Sigma_{\sigma\theta}$. Si Q est conjugué à P, il est de la forme P^w, $w\in\mathcal{W}_P$. Si Q est conjugué à $\overline{P}$, le parabolique opposé à Q, $\overline{Q}$ est tel que $\overline{Q}^{w_0^{-1}}$ est standard et conjugué à P, puisque c'est le cas pour $\overline{Q}$. Donc $\overline{Q}^{w_0^{-1}}$ est de la forme P^w avec $w\in\mathcal{W}_P$ et Q est égal à $\overline{P}^{w_0w}$. En utilisant la relation $\theta_{\overline{P}}=-\theta_P$ (car Δ_P est réduit à un élément) et les faits déjà utilisés dans (i), on déduit de (7.2) et (7.3) que $\omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F,\lambda,\lambda')$ est égal au produit de la somme sur $w\in\mathcal{W}_P$ de :

$$(F_{P^w,w^{-1}}(\lambda), F_{P^w,w^{-1}}(\lambda'))-(F_{\overline{P}^{w_0w},(w_0w)^{-1}}(\lambda), F_{\overline{P}^{w_0w},(w_0w)^{-1}}(\lambda')) \tag{8.1}$$

par :

$$e^{(\lambda-\lambda')(T_P)}\theta_P(\lambda-\lambda')^{-1}.$$

L'analyticité au point (λ,λ) de $\omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,F,\lambda,\lambda')$ implique :

$$\text{La somme sur } w\in\mathcal{W}_P \text{ de (8.1) est nulle pour } \lambda'=\lambda. \tag{8.2}$$

Mais w_0 est élément de $K\cap H$. Donc

$$F(\lambda, w_0gw_0^{-1}H)=\tau(w_0)F(\lambda,gH),\quad g\in G.$$

On déduit alors de la définition du terme constant, que, pour $Q\in\mathcal{F}$, on a :

$$F_{Q^{w_0}}(\lambda, w_0mw_0^{-1}(M_{Q^{w_0}}\cap H))=\tau(w_0)F_Q(\lambda, m(M_Q\cap H)),\quad m\in M_Q,$$

puis que :

$$F_{Q^{w_0},(w_0w)^{-1}}(\lambda, w_0mw_0^{-1}(M_{Q^{w_0}}\cap H))=\tau(w_0)F_{Q,w^{-1}}(\lambda, m(M_Q\cap H)),\quad m\in M_Q.$$

Joint à (8.2), cela termine la démonstration du théorème, puisque $\tau(w_0)$ est unitaire. □

9. Une description de $\omega^T_{\mathcal{P}_{st}}(F, F', \lambda, \lambda')^Z$ comme distribution sur $i\mathfrak{a}^*_M$

Commençons par quelques faits élémentaires. On munit $\mathbf{R}$ de la mesure de Lebesgue dx. Le dual de $\mathbf{R}$, noté $\mathbf{R}^*$, s'identifie naturellement à $\mathbf{R}$ et $i\mathbf{R}$ est muni de la mesure duale $d\lambda$ de dx. C'est la mesure de Lebesgue sur $i\mathbf{R}$ divisée par 2π. La transformée de Fourier a été définie au §1. Ces choix fixent des identifications des fonctions localement intégrables à des distributions. On considère pour $\Lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ la distribution sur $i\mathbf{R} = i\mathbf{R}^*$, T_Λ, définie par la fonction C^∞, $(\lambda + \Lambda)^{-1}$. Alors

$$\lim_{\Lambda \to 0^\pm} T_\Lambda = T_0^\pm \tag{9.1}$$

où la limite est une limite forte dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et

$$T_0^+ \text{ (resp. } T_0^-\text{) est la transformée de Fourier de } Y_+ \text{ (resp. } Y_-\text{)} \tag{9.2}$$

où : $Y_+(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et 0 sinon, $Y_-(x) = 1$ si $x \leqslant 0$ et 0 sinon.

Il suffit de prouver que la limite est une limite faible car l'espace décrit par Λ est métrisable, et toute suite de distributions qui converge faiblement converge fortement. Soit $\varphi \in C_c^\infty(i\mathbf{R})$. Calculons, pour $\Lambda > 0$, $T_0^+(\varphi) - T_\Lambda(\varphi)$. Un calcul immédiat donne :

$$(T_0^+ - T_\Lambda)(\varphi) = \int_0^\infty \left(\int_{i\mathbf{R}} (e^{-\lambda X} - e^{-(\lambda+\Lambda)X}) \varphi(\lambda)\, d\lambda \right) dX.$$

On note $\psi_\Lambda(X) = \int_{i\mathbf{R}} (e^{-\lambda X} - e^{-(\lambda+\Lambda)X}) \varphi(\lambda)\, d\lambda$. Alors $|\psi_\Lambda(X)|$ est majoré par $2|\widehat{\varphi}(-X)|$ qui est clairement intégrable. Par ailleurs on voit que ψ_Λ converge simplement vers 0 quand Λ tend vers 0^+ par une simple application du théorème de convergence dominée. Une autre application du théorème de convergence dominée montre que $(T_\Lambda - T_0^+)(\varphi)$ tend vers 0, si Λ tend vers 0^+. On étudie de même $T_\Lambda - T_0^-$ pour $\Lambda < 0$.

Soient $M \in \mathcal{L}$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_M$, régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{g}$. Pour P élément de $\mathcal{P}(M)$ on notera ψ_P^Λ l'indicatrice de :

$$C_P^\Lambda = \{X \in \mathfrak{a}_M^G \mid \omega_\alpha(X) \Lambda(\check{\alpha}) > 0, \alpha \in \Delta_P\},$$

que l'on regarde comme une mesure sur $\mathfrak{a}_P$ portée par $\mathfrak{a}_M^G$, grâce à notre choix de mesure sur $\mathfrak{a}_M^G$. Soit β_P^Λ le nombre d'éléments α de Δ_P tels que $\Lambda(\check{\alpha}) < 0$.

LEMME 11. — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on note pour $t > 0$, T_t la distribution sur $i\mathfrak{a}^*_M$ associée à la fonction C^∞, $\theta_P(\lambda + t\Lambda)^{-1}$. Avec ces identifications T_t converge fortement vers $(-1)^{\beta_P^\Lambda} \widehat{\psi_P^\Lambda}$, où $\widehat{\psi_P^\Lambda}$ est la transformée de Fourier de ψ_P^Λ. On notera $(\theta_P^\Lambda)^{-1}$ cette limite.*

Démonstration. — On décrit facilement T_t en écrivant $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G + \mathfrak{a}_G$ et en utilisant la base $\check{\alpha}$, $\alpha \in \Delta_P$, de $\mathfrak{a}_M^G$. Les calculs s'effectuent grâce à (9.1). La constante c_P qui intervient dans la définition de θ_P disparait en raison du changement de variable. □

Nous aurons à utiliser quelques propriétés simples des fonctions holomorphes et des distributions. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une mesure de Haar, Ω un ouvert de E, V une boule ouverte de E centrée en 0. Soient f une fonction holomorphe sur $\Omega+iV$ et Λ un élément de V. On note pour $t\in[0,1]$, T_t la distribution sur Ω associée à la fonction C^∞ sur Ω qui à $x\in\Omega$ associe $f(x+t\Lambda)$. Alors :

T_t converge vers T_0, quand t tend vers 0^+, pour la convergence des fonctions C^∞ et la convergence forte des distributions. (9.3)

Par ailleurs si (T_n) (resp. (f_n)) est une suite de distributions (resp. fonctions C^∞) sur Ω qui converge fortement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers T (resp. convergeant dans $C^\infty(\Omega)$ vers f) on a :

La suite (f_nT_n) converge fortement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers fT. (9.4)

En effet (f_n) est bornée dans $C^\infty(\Omega)$, de même que T_n dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ecrivant :

$$f_nT_n-fT=(f_n-f)T+f_n(T_n-T), \quad n\in\mathbf{N},$$

l'assertion (9.4) résulte alors de l'hypocontinuité de la multiplication des distributions par les fonctions C^∞ (cf. [16, chapitre V, §2, théorème IV et chapitre III, théorème XI]).

THÉORÈME 3. — *On reprend les notations et hypothèses du corollaire du théorème* 1. *On fixe $\lambda'\in i\mathfrak{a}^*_{M'}$ et $\Lambda\in\mathfrak{a}^*_M$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{g}$.*

L'application analytique sur $i\mathfrak{a}^*_M$, qui à λ associe $\omega^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F,F',\lambda,\lambda')^Z$ est égale, au sens des distributions, à la somme sur :

(a) *les éléments Q de $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(M)$ tels que M_Q est σ-associé à M et M',*

(b) *les éléments s (resp. s') de $W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)$ (resp. $W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_{M'})$), des distributions sur $i\mathfrak{a}^*_M$ (en λ) :*

$$(F_{Q,s}(\lambda),F'_{Q,s'}(\lambda'))(-1)^{\beta^\Lambda_{Q^s}}(\psi^\Lambda_{Q^s,T_{Q^s}+Z})^\wedge(\lambda-\lambda'^{s's^{-1}})$$

où $\psi^\Lambda_{Q^s,T_{Q^s}+Z}$ est l'indicatrice, dans $\mathfrak{a}_M$, de $C^\Lambda_{Q^s}-T_{Q^s}-Z$ (translaté de $C^\Lambda_{Q^s}$ par $-(T_{Q^s}+Z)$).

Démonstration. — La fonction de $\lambda\in i\mathfrak{a}^*_M$, $\omega^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F,F',\lambda,\lambda')^Z$ étant analytique au voisinage de $i\mathfrak{a}^*_M$, on peut appliquer (localement) (9.3) à son prolongement holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*_M$. L'expression du prolongement de cette fonction est donnée par la même formule (cf. (7.2)) car F (resp. F') est un élément de $\widetilde{\mathrm{II}'}_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{II}'}_{\mathrm{hol}}(G,M',\tau)$). En utilisant les propriétés de F, F' et (9.4), on est ramené à étudier les distributions $\theta_Q((\lambda+t\Lambda)^s-\lambda'^{s'})^{-1}$, quand t tend vers 0^+ et à tenir compte du facteur $e^{(\lambda^s-\lambda'^{s'})(T_Q+Z)}$. Ceci est facile grâce au lemme précédent et aux propriétés élémentaires de la transformation de Fourier. □

10. Produit scalaire entre une fonction $\mathbf{II}'_{\mathrm{hol}}$ et un paquet d'ondes

THÉORÈME 4. — *On retient les notations et hypothèses du théorème précédent. On suppose M élément de $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ et on choisit $P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(M)$ et $\Lambda\in\mathfrak{a}_M^*$, strictement Δ_P-dominant. Si a est un élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}_M^*)$ et $\lambda'\in i\mathfrak{a}_{M'}^*$, l'expression :*

$$(F_a, F'(\lambda')) := \int_{G/H} (F_a(x), F'(\lambda')(x))\, dx \tag{10.1}$$

est nulle si M et M' ne sont pas σ-associés et si $M=M'$, elle est égale à :

$$\sum_{\substack{w\in\mathcal{W}_P\\ x\in W(\mathfrak{a}_M)}} a(\lambda'^x)(F_{P^w,w^{-1}}(\lambda'^x), F'_{P^w,xw^{-1}}(\lambda')). \tag{10.2}$$

Démonstration. — D'abord par continuité de (10.1) et (10.2) relativement à a, on peut supposer que a est C^∞ à support compact. En outre par une intégration partielle sur A_G dans (10.1) et une intégration partielle sur $i\mathfrak{a}_G^*$ dans la définition de F_a, on se ramène aisément au cas où $\mathfrak{a}_G=\{0\}$, ce que l'on suppose désormais. On fixe T comme dans l'énoncé du théorème 1. Alors $(F_a, F'(\lambda'))$ est égal à la limite de :

$$\int_{G/H} (F_a(x), F'(\lambda')(x))\, u(x, nT)\, dx,$$

quand n tend vers l'infini. Mais on peut appliquer le théorème de Fubini à cette intégrale qu'on regarde comme une intégrale double en introduisant la définition de F_a. En effet, a et $u(\cdot, nT)$ sont à support compact. Donc $(F_a, F'(\lambda'))$ est égal à la limite, quand n tend vers l'infini dans $\mathbf{N}$, de l'intégrale sur $i\mathfrak{a}_M^*$ de $a(\lambda)\,\Omega^{nT}_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')$. Mais d'après le corollaire du théorème 1, cette limite n'est pas affectée si on change Ω en ω. On se propose d'utiliser le théorème 3 pour déterminer cette limite. D'abord si M et M' ne sont pas σ-associés, $\omega^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')$ est identiquement nul d'après le lemme 7 (i).

On suppose désormais $M=M'$. Commençons par une remarque sur les indicatrices de cônes. Soit C un cône ouvert de $\mathfrak{a}_M$ et S un élément de $\mathfrak{a}_M$. Si S est élément de C, l'indicatrice de $C-nS$ converge vers la constante 1 dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{a}_M)$ quand n tend vers $+\infty$. Si S n'est pas dans l'adhérence de C, l'indicatrice de $C-nS$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{a}_M)$ quand n tend vers $+\infty$. Cela résulte du théorème de convergence dominée et de l'égalité $C-nS=n(C-S)$. Dans le premier cas $C-S$ est un ouvert contenant 0. Dans le deuxième cas 0 n'est pas dans l'adhérence de $C-S$ et il existe une boule ouverte de centre 0, $B(0,r)$, $r>0$, telle que $B(0,r)$ ne rencontre pas $C-S$. Alors $C-nS$ est contenu dans le complémentaire de $B(0,nr)$. L'application de ceci montre que les seuls termes de l'expression de $\omega^T_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}(F, F', \lambda, \lambda')$ donnée au théorème 3 et qui contribuent à la limite cherchée sont ceux pour lesquels Q et s sont tels que T_{Q^s} appartient à $C_{Q^s}^{\Lambda}$, c'est à dire $Q^s=P$ puisque Λ est strictement Δ_P-dominant. Mais alors Q est standard et conjugué à P, donc de la forme P^w, $w\in\mathcal{W}_P$, et s est égal à la restriction à $\mathfrak{a}_Q$ de w^{-1}. Alors :

$$W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_M)=\{xw^{-1}\,|\,x\in W(\mathfrak{a}_M)\}.$$

Compte tenu de nos remarques sur les indicatrices de cônes, la contribution de $Q=P^w$ à la limite étudiée est égale à la somme sur $x\in W(\mathfrak{a}_M)$ de $a(\lambda'^x)(F_{P^w,w^{-1}}(\lambda'^x),F_{P^w,xw^{-1}}(\lambda'))$. D'où le théorème. □

11. Appendice

On utilise les notations du corps de l'article.

PROPOSITION 1. — *On suppose que* $\mathfrak{a}_G=\{0\}$. *Alors* $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ *est de dimension finie.*

Démonstration. — Soit G_{der}^0 la composante neutre du sous-groupe dérivé de G et τ^0 la restriction de τ à $K\cap G_{\mathrm{der}}^0$. Alors la restriction des fonctions de G à G_{der}^0 détermine une injection de $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ dans $\mathcal{A}_2(G_{\mathrm{der}}^0/(G_{\mathrm{der}}^0\cap H)^0,\tau^0)$. En effet d'une part $(G_{\mathrm{der}}^0\cap H)^0$ est d'indice fini dans $(G_{\mathrm{der}}^0\cap H)$ et, d'autre part, $G=KG_{\mathrm{der}}^0A_H$, où A_H est l'intersection de la composante déployée de G avec H, car $\mathfrak{a}_G=\{0\}$. On est ainsi réduit à démontrer la proposition pour G semi-simple connexe, de centre fini et H connexe. Enfin on peut supposer τ irréductible. On fait toutes ces hypothèses dans la suite. Par ailleurs, on sait que $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ est la somme directe, sur les caractères χ de $\mathbf{D}(G/H)$, de $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)_\chi$, qui désigne le sous-espace propre de $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ correspondant au caractère propre χ (cf. lemme 5 (i)). Par ailleurs $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)_\chi$ est de dimension finie d'après [3, lemme 3.9]. Il s'agit donc de prouver que l'ensemble X_τ formé des χ tels que $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)_\chi\neq\{0\}$ est fini. Si un tel χ existe, l'application d'une forme linéaire, convenable, sur V_τ, à un élément non nul de $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ montre l'existence d'une série discrète pour G/H, ce que nous supposerons dans la suite. Rappelons certains résultats de T. Oshima et T. Matsuki. Avec les hypothèses ci-dessus, on peut choisir un sous-espace abélien maximal, $\mathfrak{t}$, de $\mathfrak{q}$ contenu dans $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$. On notera $\mathfrak{a}^d=i\mathfrak{t}$ qui est un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$. On complète $\mathfrak{t}$ en une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}$, que l'on complète en une sous-algèbre de Cartan σ et θ-stable de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{j}$. Alors on dispose d'identifications canoniques de $(\mathfrak{t}^*)_{\mathbf{C}}$ et $(\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbf{C}}$ à des sous-espaces de $\mathfrak{j}^*_{\mathbf{C}}$. On fixe des ensembles de racines positives compatibles pour $\mathfrak{a}^d$, $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ (dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$), $\Sigma(\mathfrak{a}^d)$, $\Sigma(\mathfrak{j}_{\mathbf{C}})$ et $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}$ (dans $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$), $\Sigma(\mathfrak{t}_\mathfrak{k})$. Pour $\Lambda\in(\mathfrak{a}^d)^*$, $\Sigma(\mathfrak{a}^d)$-dominant, soit V_Λ l'espace formé des éléments φ de $\mathcal{C}(G/H)$ qui sont K-finis et $\mathbf{D}(G/H)$-propres pour la valeur propre Λ. Alors d'après [15, théorème 1], V_Λ est non nul si et seulement si Λ est élément d'un ensemble discret de $(\mathfrak{a}^d)^*$, L. L'important ici est que L est discret. De plus V_Λ est un $(\mathfrak{g},K)$-module semi-simple. On introduit aussi :

$$L^+ = \{\Lambda \in L \mid \Lambda + \varrho_{\mathfrak{m}} \text{ est } \Sigma(\mathfrak{j}_{\mathbf{C}})\text{-dominant}\},$$

où $\varrho_{\mathfrak{m}}$ est la demi-somme des éléments de $\Sigma(\mathfrak{j}_{\mathbf{C}})$ nuls sur $\mathfrak{t}$. Alors il résulte de l'étude des K-types minimaux (dans le sens de [17]) des sous-modules irréductibles de V_Λ, $\Lambda \in L^+$ (cf. [15, preuve du théorème 3 (ii), p. 380]), qu'il existe $C \geqslant 0$, tel pour tout $\Lambda \in L^+$ et tout K-type γ intervenant dans V_Λ, de plus haut poids noté encore γ, on ait :

$$\|\gamma\| \geqslant \|\Lambda\| - C. \tag{11.1}$$

La constante C provient des décalages par des « ϱ » intervenant aussi bien dans [15] et [17]. Par ailleurs on peut choisir $\mu \in \mathfrak{j}_{\mathbf{C}}^*$, plus haut poids d'une représentation de dimension finie de G, (π_μ, F_μ), possédant une forme linéaire non nulle, invariante par H et tel que $\mu + \varrho_{\mathfrak{m}}$ soit $\Sigma(\mathfrak{j}_{\mathbf{C}})$-dominant. On peut prendre par exemple pour μ la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^d$ d'un multiple assez grand de 4ϱ où ϱ est la demi-somme des éléments de $\Sigma(\mathfrak{j}_{\mathbf{C}})$. En effet si $\mu_1 \in \mathfrak{j}_{\mathbf{C}}^*$ est le plus haut poids d'une représentation (π_{μ_1}, F_{μ_1}) de G, $2\mu_{1|\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^d}$ est le plus haut poids d'une représentation de G, possédant une forme linéaire non nulle, invariante par H, et qui se réalise comme sous-représentation de $\pi_{\mu_1} \otimes (\pi_{\mu_1}^* \circ \sigma)$. Alors pour $\Lambda \in L$, on sait, d'après Vogan (voir par exemple [10, proposition 7 (i)]) que $V_{\Lambda+\mu} \otimes F_\mu$ contient V_Λ comme sous-représentation. En particulier $\Lambda + \mu \in L$ et, en tenant compte des propriétés de μ, on a même $\Lambda + \mu \in L^+$. Donc

$$\operatorname{Hom}_K(V_\tau, V_\Lambda) \leqslant \dim_K(V_\tau \otimes F_\mu^*, V_{\Lambda+\mu}). \tag{11.2}$$

On note $\tau_1, ..., \tau_n$ les sous-représentations irréductibles de K qui décomposent $V_\tau \otimes F_\mu^*$. On note de même leurs plus hauts poids. Mais si $\chi \in X_\tau$, on a $\chi = \chi_\Lambda$ avec $\Lambda \in L$ et $\operatorname{Hom}_K(V_\tau, V_\Lambda) \neq \{0\}$. Donc, d'après (A.2), il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que :

$$\operatorname{Hom}_K(V_{\tau_i}, V_{\Lambda+\mu}) \neq \{0\}.$$

Mais d'après (A.1) on a alors : $\|\tau_i\| \geqslant \|\Lambda + \mu\| - C$. Comme Λ appartient à l'ensemble discret L, cela ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour Λ. Donc X_τ est bien un ensemble fini comme désiré. □

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 1. — *La multiplicité d'un K-type dans la partie discrète de $L^2(G/H)$ est finie.*

Bibliographie

[1] ARTHUR, J., A local trace formula. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 73 (1991), 5–96.
[2] BAN, E. P. VAN DEN, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 90 (1987), 225–249.
[3] — Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel formula. *Ark. Mat.*, 25 (1987), 175–187.
[4] — The principal series for a reductive symmetric space, I. H-fixed distribution vectors. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 21 (1988), 359–412.
[5] — The principal series for a reductive symmetric space, II. Eisenstein integrals. *J. Funct. Anal.*, 109 (1992), 331–441.
[6] BAN, E. P. VAN DEN, CARMONA, J. & DELORME, P., Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif. *J. Funct. Anal.*, 139 (1996), 225–243.
[7] CARMONA, J., Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif. À paraître dans *J. Reine Angew. Math.*
[8] CARMONA, J. & DELORME, P., Base méromorphe de vecteurs distribution H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs. Equation fonctionnelle. *J. Funct. Anal.*, 122 (1994), 152–221.
[9] — Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif. Preprint.
[10] DELORME, P., Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs : tempérance, majorations. Petite matrice *B*. *J. Funct. Anal.*, 136 (1996), 422–509.
[11] FLENSTED-JENSEN, M., Discrete series for semisimple symmetric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 111 (1980), 253–311.
[12] HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on real reductive groups, I. The theory of the constant term. *J. Funct. Anal.*, 19 (1975), 103–204.
[13] — Harmonic analysis on real reductive groups, II. Wave packets in the Schwartz space. *Invent. Math.*, 36 (1976), 1–55.
[14] HELGASON, S., *Groups and Geometric Analysis.* Academic Press, Orlando, FL, 1984.
[15] OSHIMA, T. & MATSUKI, T., A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, in *Group Representations and Systems of Differential Equations (Tokyo*, 1982), pp. 331–390. Adv. Stud. Pure Math., 4. North-Holland, Amsterdam–New York, 1984.
[16] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1966.
[17] VOGAN, D., Algebraic structure of irreducible representations of semisimple Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 109 (1979), 1–60.

PATRICK DELORME
Institut de Mathématiques de Luminy
UPR 9016 du CNRS
Faculté des sciences de Luminy
163, Avenue de Luminy
Case 901
F-13288 Marseille Cedex 09
France
delorme@iml.univ-mrs.fr

Reçu le 16 avril 1996