SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES INTÉGRALES ET DES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE ET HOMOGÈNE

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

À STOCKHOLM.

Introduction.

Soit l'équation différentielle linéaire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

dans laquelle nous supposons que $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ désignent des fonctions analytiques uniformes de la variable x, telles, que dans chaque portion finie du plan des x il n'existe qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de ces fonctions, ce qui revient à dire que

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty$$

si le nombre des points singuliers est infini.

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales, soit x_0 un point quelconque, qui n'est point singulier pour aucune des fonctions $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ et soit enfin L une ligne fermée, continue, passant par le point x_0. Soit de plus $\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)$ un système d'éléments des intégrales $y_1, \ldots, y_n$. Si, en partant de ces éléments on fait décrire à x le contour fermée L, les éléments $\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)$ éprouvent une substitution linéaire, c'est à dire on obtient, en revenant au point x_0, un nouveau système d'éléments $\overline{\mathfrak{P}}_1(x-x_0), \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_n(x-x_0)$, qui sont unis aux éléments primitifs par des relations de la forme

$$(1) \qquad \overline{\mathfrak{P}}_m(x-x_0) = \alpha_{m1}\mathfrak{P}_1(x-x_0) + \ldots + \alpha_{mn}\mathfrak{P}_n(x-x_0), \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

dans lesquelles $\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}$ désignent des constantes par rapport à x. Les constantes $\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}$ restent les mêmes, si l'on transforme d'une manière continue, mais sans jamais passer par un point singulier, la ligne L dans une autre ligne fermée, passant aussi par le point x_0. On sait de plus, que si l'on forme la fonction entière et rationnelle du $n^{\text{ème}}$ degré d'une nouvelle quantité ω

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\
\alpha_{22} & \alpha_{22} - \omega & \ldots & \alpha_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \omega
\end{vmatrix}
\tag{2}
$$

les coefficients de chaque puissance de ω dans cette fonction sont des *invariants,* c'est à dire non seulement qu'ils restent les mêmes pour chaque substitution donnée ou qu'ils ne varient pas si l'on transforme d'une manière continue le contour L dans un autre contour fermé, sans passer par un point singulier, mais de même qu'ils sont indépendants du changement de substitution qui a lieu en prenant pour point de départ un autre point x_0 et un autre système fondamental d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$.[1]

On peut montrer que le problème de représenter analytiquement les invariants des substitutions qui correspondent à une ligne fermée L quelconque peut toujours être reduit à celui de représenter les invariants des substitutions correspondant à une autre ligne fermée, ne se coupant pas elle-même et située entièrement entre deux cercles dont le centre est à l'origine des coordonnées, dont chacun passe par un point singulier et qui enferment un anneau circulaire C, lequel ne contient pas de point singulier à son intérieur.

MM. Hamburger[2] et Poincaré[3] ont été les premiers à traiter ce

---

[1] Fuchs. *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.* § 3. Journal für Mathematik. Bd. 66.

[2] Hamburger. *Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte.* Journal für Mathematik. Bd. 83.

[3] Poincaré. *Sur les groupes des équations différentielles linéaires,* page 211. Ce journal, Tome 4.

dernier problème de représenter analytiquement les invariants qui correspondent à une ligne L enfermée dans un anneau circulaire, C.

La méthode de M. HAMBURGER ne peut être appliquée que si les rayons des deux cercles limites de l'anneau circulaire considéré satisfont à une certaine inégalité: de plus dans les séries au moyen desquelles M. HAMBURGER exprime les invariants, entre la quantité x_0, quoique les invariants eux-mêmes en soient indépendants.[1]

M. POINCARÉ s'est affranchi de la supposition comportant une restriction à la généralité des résultats obtenus par M. HAMBURGER. Mais en examinant de plus près les expressions obtenues par M. POINCARÉ on voit qu'elles dependent, non seulement comme les séries de M. HAMBURGER, de la quantité arbitraire x_0, mais encore d'une autre quantité, qui est de même arbitraire dans certaines limites et dont les invariants sont indépendants aussi bien que de x_0. On obtient les expressions de M. POINCARÉ en donnant à ces deux quantités arbitraires certaines valeurs particulières.

M. FUCHS s'est occupé de ce problème[2] bien avant MM. HAMBURGER et POINCARÉ; mais son but paraît avoir été plutôt de montrer que pour chaque équation différentielle linéaire et homogène dont les coefficients sont des nombres donnés, il existe toujours certaines opérations, au moyen desquelles on peut calculer la valeur numérique des invariants, que de trouver des expressions qui établissent la dépendance des invariants d'une

---

[1] Je veux profiter de cette occasion pour faire ressortir la circonstance suivante, qui paraît ne pas avoir été remarquée jusqu'à présent: M. HAMBURGER dans le mémoire cité qui a paru en 1877, a trouvé dans les expressions qu'il donne pour les invariants toute une classe de séries, qui jouissent de la propriété de représenter des constantes différentes dans différentes portions du plan. L'importance de séries pareilles au point de vue de la théorie des fonctions ressort des mémoires suivants, qui ont paru postérieurement à celui de M. HAMBURGER:

WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880.

HERMITE. *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. T. 12. Helsingfors 1881. Journal für Mathematik. Bd. 91. Berlin 1881.

[2] FUCHS. *Über die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen.* Journal für Mathematik. Bd. 75. Berlin 1873.

équation différentielle linéaire de ses constantes au point de vue de la théorie des fonctions. De plus la méthode de M. Fuchs n'est applicable que sous une restriction importante.

Dans son mémoire célèbre dans le tome 66 du journal de Borchardt,[1] M. Fuchs a montré, qu'on peut toujours choisir un système fondamental d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$ de telle manière que toutes les valeurs de y_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ à l'intérieur de l'anneau circulaire C peuvent être exprimées par une expression analytique de la forme suivante:

$$(3) \qquad x^{\mu_m}\{f_{m0}(x) + f_{m1}(x)\log x + f_{m2}(x)(\log x)^2 + \ldots + f_{m\nu_m}(x)(\log x)^{\nu_m}\}.$$

Dans cette expression les μ_m désignent des constantes par rapport à x et $f_{m0}(x), f_{m1}(x), \ldots, f_{m\nu_m}(x)$ sont des séries procédant d'après les puissances entières positives et négatives de x. C'est seulement dans un cas très spécial que M. Fuchs a pu calculer les coefficients des différents termes de ces séries: dans celui où les séries ne contiennent les puissances négatives de x qu'en nombre fini. Mais dans le calcul des invariants il suppose connus les coefficients des séries $f_{m0}(x), \ldots, f_{m\nu_m}(x)$ toutes les fois qu'on prend comme l'origine des coordonnées un point singulier de l'équation différentielle et que le cercle limite intérieur de C se réduit à ce point. La méthode ne peut donc être appliquée même au calcul numérique des invariants que dans le cas où toutes les intégrales de l'équation différentielle ont la forme *régulière* dans l'entourage de *chaque* point singulier situé dans une portion finie du plan.

En démontrant qu'il existe toujours un système fondamental d'intégrales y_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ tel que toutes les valeurs de y_m correspondant à un point à l'intérieur de l'anneau circulaire C peuvent être représentées par des expressions de la forme (3), M. Fuchs n'a point, comme nous l'avons déjà fait remarquer, résolu le problème de former réellement ces expressions. Pour le cas où le cercle intérieur limitant C se réduit à un seul point, la solution de ce problème a été donnée par M. Picard.[2] Pour le cas géneral, où le cercle limite intérieur de l'anneau circulaire C a un rayon quelconque, on en trouvera la solution complète dans le § 1 du présent mémoire.

---

[1] *Zur Theorie* etc.

[2] Comptes rendus, mars 1879.

Dans le § 2 je donne une expression des invariants, qui découle des séries de M. POINCARÉ, mais qui est libérée de la quantité arbitraire superflue x_0. Pourtant chaque terme de ces invariants contient encore une certaine quantité positive, arbitraire entre deux limites données, dont les invariants eux-mêmes sont absolument indépendants.

Dans le § 3 je développe toute une classe d'expressions nouvelles, qui sont toutes affranchies de la quantité arbitraire x_0. En faisant la même restriction que M. HAMBURGER on retrouve parmi ces expressions celle donnée par lui, seulement présentée sous une forme qui ne contient plus la quantité arbitraire x_0.

Supposons que les coefficients de l'équation différentielle proposée soient des fonctions rationnelles de x, de manière que l'on puisse l'écrire sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)}y = 0 \tag{B}$$

où

$$P_0(x) = (x - a_1)^{q_1}, \ldots, (x - a_p)^{q_p},$$
$$P_\nu(x) = A_{\nu 1} + A_{\nu 2}x + \ldots + A_{\nu p_\nu}x^{p_\nu}, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p, A_{\nu q}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n, q = 0, 1, \ldots, p_\nu)$ désignant des constantes données et $q_1, q_2, \ldots, q_p$ étant des nombres entiers positifs.

Les invariants qui correspondent à une ligne L quelconque, peuvent, du moins dans le cas où l'équation différentielle est du 2^{me} ordre, être exprimés algébriquement au moyen des invariants correspondant à un certain nombre de substitutions, que l'on obtient lorsque l'on suppose que le contour fermé L ne circonscrit qu'un seul ou tout au plus deux points singuliers.[1] Dans le § 4 on ramène l'étude de ces derniers invariants à

---

[1] Voir POINCARÉ, *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique*, Journal des math. pures et appliquées, 4ème série, tome 3. Quand le mémoire présent était déjà terminé l'auteur a eu connaissance d'une thèse de M. VOGT (*Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre.* Paris 1889) dans laquelle ce théorème de M. POINCARÉ se trouve exposé en détail. On y trouve aussi des expressions analytiques pour les invariants d'une équation différentielle de 2^{me} ordre dont je me propose à un autre endroit de faire ressortir les rapports avec les expressions déjà connues.

celle des invariants déjà traités dans les §§ 2 et 3 et il se trouve que ces derniers invariants peuvent être représentés par des expressions analytiques absolument de même forme que celles trouvées dans les paragraphes cités.

§ 1. *Sur la représentation analytique des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène dans l'intérieur d'un anneau circulaire qui n'embrasse aucun point singulier.*

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{A}$$

en faisant par rapport aux coefficients $p_1(x)\ldots p_n(x)$ les mêmes suppositions que dans l'introduction, c'est à dire qu'ils sont des fonctions analytiques uniformes de la variable indépendante x n'ayant dans chaque domaine fini de cette variable qu'un nombre fini de points singuliers. Désignons par C l'intérieur d'un anneau circulaire, dont les deux cercles limites ont l'origine pour centre et passent par des points singuliers de l'équation différentielle (A), mais de manière qu'aucun point singulier ne soit contenu dans C même.

Soit y une intégrale de l'équation différentielle A et posons

$$x = \rho e^{\vartheta i}, \qquad |x| = \rho. \tag{1}$$

Pour une valeur donnée de x à l'intérieur de C la valeur correspondante de y n'est point en général définie d'une manière univoque, car cette valeur n'est pas en général fonction périodique de ϑ. Mais si nous fixons d'une manière arbitraire qu'un élément fonctionnel donné de l'intégrale y doit correspondre à une paire de valeurs données ρ_0, ϑ_0, il n'y aura plus rien d'indéterminé, et à chaque paire de valeurs données ρ, ϑ à l'intérieur de C ne correspondra qu'une seule valeur de y.

Soit x_0 un point quelconque à l'intérieur de C. Menons de l'origine à x_0 une ligne droite et prenons sur cette ligne deux points x_1 et x_2, tous les deux appartenant à C et tels que l'on ait

$$\begin{cases} |x_1| < |x_2|, \\ x_0 = \sqrt{x_1 x_2}. \end{cases} \tag{2}$$

On a

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= x_0 e^{h}, \\ x_1 &= x_0 e^{-h}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

h étant une quantité positive

$$h = \frac{1}{2}\log\frac{x_2}{x_1}. \tag{4}$$

Désignons par X l'anneau circulaire, limité par deux cercles dont le centre commun est à l'origine et dont les rayons sont égaux respectivement à $|x_1|$ et à $|x_2|$.

Si l'on pose alors

$$x = x_0 e^{z} \tag{5}$$

l'anneau circulaire X dans le plan de x sera représenté dans le plan de z par une bande K, située entre deux lignes droites parallèles, formant un angle droit avec l'axe réel et coupant cet axe respectivement aux distances h et $-h$ de l'origine. A chaque point z à l'intérieur ou à la limite de K correspond une, et seulement une, paire de valeurs ρ, ϑ, déterminant un point x à l'intérieur ou à la limite de X. Et réciproquement à chaque paire de valeurs ρ, ϑ, définissant un point à l'intérieur ou à la limite de x, correspond un seul point z à l'intérieur ou à la limite de K.

Introduisons maintenant une nouvelle variable t, définie par l'équation

$$t = \frac{e^{i\alpha z} - 1}{e^{i\alpha z} + 1} \tag{6}$$

où la constante α est définie par l'équation

$$\alpha h = \frac{\pi}{2}. \tag{6'}$$

A la bande K dans le plan de x correspond dans le plan de t un cercle H qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Au point infiniment éloigné où les deux lignes parallèles, qui limitent la bande K, se coupent au-dessus de l'axe des x, correspond le point $t = -1$, et au point d'intersection de ces deux lignes au-dessous de l'axe des x correspond le point $t = + 1$. Au point $z = 0$ correspond le point $t = 0$.[1]

En éliminant z des équations (5) et (6) on trouve

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}, \tag{7}$$

$$x = x_0 \left(\frac{1 + t}{1 - t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}. \tag{7'}$$

A l'aide de cette relation, l'anneau circulaire X dans le plan de x est représenté conformément sur le cercle H dans le plan de t, de manière qu'à chaque paire de valeurs ρ, ϑ, définissant un point x à l'intérieur ou à la limite de X, ne correspond qu'un seul point z à l'intérieur ou à la limite de H, et réciproquement, à chaque point t à l'intérieur ou à la limite de H, à l'exception seulement des deux points $t = - 1$, $t = + 1$, ne correspond qu'une seule paire de valeurs ρ, ϑ, définissant un point à l'intérieur ou à la limite de X. A la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0 définissant le point x_0, correspond le point $t = 0$.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction analytique, qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur de X. Si l'on pose

$$f(x) = f\left(x_0 \left(\frac{1 + t}{1 - t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}\right) = F(t)$$

en fixant l'élément de $f(x)$ qui doit correspondre à ρ_0, ϑ_0 $(x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$ $F(t)$ représentera une fonction régulière et uniforme à l'intérieur de H, et pourra par conséquent être développée en une série procédant suivant les puissances entières et positives de t, et convergente à l'intérieur de H.

---

[1] Cette substitution a été employé par M. POINCARÉ dans le problème des trois corps de la mécanique (Comptes rendus, 27 février 1882) ainsi que dans le calcul des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène (*Sur les groupes des équations linéaires*. Ce journal, T. 4, page 211). Cf. § 2 de ce mémoire.

On a par conséquent

$$f(x) = P\left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}\right]$$

où

$$P\left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}\right]$$

est une série entière qui pour chaque paire de valeurs ρ, ϑ définissant un point x à l'intérieur de X donne la valeur correspondante de $f(x)$. Les coefficients des différentes puissances de

$$\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}$$

dans cette expression peuvent être obtenus sans difficulté si l'on connaît les coefficients de l'élément fonctionnel de $f(x)$ qui correspond à ρ_0, ϑ_0 $(x = x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$. Désignons en effet par $\mathfrak{P}(x - x_0)$ cet élément. On a alors dans le voisinage immédiat du point x_0 défini par ces valeurs ρ_0, ϑ_0

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - x_0),$$

d'où il suit, pour le voisinage immédiat du point $t = 0$,

$$f(x) = \mathfrak{P}\left(x_0\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right]\right).$$

Cette série étant uniformément convergente dans le voisinage immédiat de $t = 0$, on peut, d'après un théorème de M. WEIERSTRASS,[1] la trans-

[1] voir page 73 dans *Zur Functionenlehre.* Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin 1886.

former en une série procédant d'après les puissances entières positives de t et convergente dans le voisinage immédiat de $t = 0$. Cette série doit évidemment être identique à la série $P(t)$ dont nous venons de démontrer l'existence et qui est convergente pour toutes les valeurs de t telles que $|t| < 1$. Les coefficients de $P(t)$ peuvent donc être exprimés d'une manière simple à l'aide des coefficients de la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$.

Dans le cas que nous considérons $f(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle (A) et les coefficients de $\mathfrak{P}(x - x_0)$ sont donc donnés immédiatement en fonctions des constantes de cette équation différentielle. Ecrivons cette équation de la manière suivante:

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x)y = 0. \tag{8}$$

On a alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^{n+\nu}y}{dx^{n+\nu}} &= \frac{G_{n-1}^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{G_{n-2}^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ &\ldots + \frac{G_1^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}\frac{dy}{dx} + \frac{G_0^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}y. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Les symboles G représentent des fonctions entières de dimension $(\nu + 1)$ des fonctions $P_0, P_1, \ldots, P_n$ et des dérivées de ces fonctions jusqu'à l'ordre ν. Il est à remarquer que les coefficients de G sont des nombres entiers.

Choisissons maintenant un système fondamental d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$ de telle manière, qu'à la paire de valeurs ρ_0, $\vartheta_0 (x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$ correspondent

$$\frac{d^\nu y_m}{dx^\nu} = 0, \quad \nu \gtrless n - m, \nu \leqq n - 1; \quad \frac{d^{n-m}y_m}{dx^{n-m}} = 1. \tag{10}$$

On a alors dans le voisinage immédiat du point x_0 défini par la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0

$$y_m = \frac{(x - x_0)^{n-m}}{\underline{|n - m}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_m^{n+\nu}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n+\nu}}{\underline{|n + \nu}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

les coefficients $\varphi_m^{n+\nu}(x_0)$ dans cette équation étant définis par l'équation (9), lorsque l'on pose dans cette dernière $x = x_0$ et qu'on prend en considération l'équation (10).

Si l'on pose dans l'équation (11)

$$x - x_0 = x_0\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right]$$

et que l'on développe le côté droit de cette équation en séries $P_m(t)$ procédant d'après les puissances croissantes de t, et convergentes pour toutes les valeurs de t telles que $|t| < 1$, ces séries représenteront des intégrales de l'équation différentielle (A), si l'on introduit dans cette dernière la variable indépendante t au lieu de x.

Soit $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée, défini par les conditions suivantes

$$(12) \qquad \frac{d^\nu v_m}{dt^\nu} = 0, \quad \nu \gtrless n - m\,, \nu \leqq n - 1\,; \qquad \frac{d^{n-m} v_m}{dt^{n-m}} = 1 \text{ pour } t = 0.$$

On aura alors

$$(13) \qquad v_m(t) = \frac{t^{n-m}}{\underline{|n - m}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \phi_m^{n+\nu} \cdot \frac{t^{n+\nu}}{\underline{|n+\nu}}; \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

ainsi que

$$(14) \qquad P_m(t) = c_{1m} v_1(t) + c_{2m} v_2(t) + \ldots + c_{nm} v_n(t). \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

Pour obtenir les constantes

$$\phi_m^{n+\nu} \text{ et } c_{rm} \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ r=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

nous introduisons les notations suivantes. On a

$$(15) \qquad \left\{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right\}^q = \left(\frac{4h}{\pi i}\cdot t\right)^q \{(hq)_0 + (hq)_1 t + \ldots\}$$

où $(hq)_0 = 1$ et $(hq)_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ désigne une fonction entière rationnelle de $\frac{2h}{\pi i}$ et de q de degré ν par rapport à chacune de ces deux quantités et dont les coefficients sont des nombres rationnels. On a de plus $[0q]_\nu = 0$ aussi bien que $[h0]_\nu = 0$. Nous fixons de même que

$$(16) \qquad [hq]_\nu = 0 \text{ pour } \nu = -1, -2, -3, \ldots.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de t du côté droit et du côté gauche de l'équation (14) on obtient pour les constantes c_{rm} l'expression suivante

$$c_{rm} = \frac{\underline{|n-r}}{\underline{|n-m}} \cdot [h\,,\, n-m]_{m-r} \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n-m} \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{r=1,2,\ldots,n} \tag{17}$$

d'où il suit

$$\left\{\begin{aligned} & c_{mm} = \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n-m}, \qquad c_{rm} = 0 \text{ si } r > m, \\ & \qquad c_{nn} = 1, \qquad c_{rn} = 0, \text{ si } r < n. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Les coefficients ψ peuvent à leur tour être exprimés en fonctions des coefficients φ à l'aide des formules de récursion:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-m}} [h\,,\, n-m]_{m-1} \frac{\psi_1^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n-m}} [h\,,\, n-m]_{m-2} \frac{\psi_2^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \ldots \\ & \qquad \ldots + \frac{\underline{|n-m}}{\underline{|n-m}} [h\,,\, n-m]_0 \frac{\psi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} \\ & = \frac{[h\,,\, n-m]_{m+\nu}}{\underline{|n-m}} + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^m [h, n]_\nu \frac{\varphi_m^n(x_0)}{\underline{|n}} + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{m+1} [h, n+1]_{\nu-1} \frac{\varphi_m^{n+1}(x_0)}{\underline{|n+1}} + \ldots \\ & \qquad \ldots + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{m+\nu-1} [h, n+\nu-1]_1 \frac{\varphi_m^{n+\nu-1}(x_0)}{\underline{|n+\nu-1}} \\ & \qquad + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{m+\nu} [h\,,\, n+\nu]_0 \frac{\varphi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}}, \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

lesquelles deviennent pour $m = n$:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\psi_n^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} = \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^n [h, n]_\nu \frac{\varphi_n^n(x_0)}{\underline{|n}} + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n+1} [h\,,\, n+1]_{\nu-1} \frac{\varphi_n^{n+1}(x_0)}{\underline{|n+1}} + \ldots \\ & \qquad \ldots + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n+\nu} [h\,,\, n+\nu]_0 \frac{\varphi_n^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}}. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Nous avons donc complètement résolu le problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce paragraphe. Nous avons démontré en effet:

que les expressions du côté droit des équations

$$(21)\quad y_m(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda m} \left\{ \frac{1}{\lfloor n-\lambda} \left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} \right]^{n-\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\lambda^{n+\nu}(x_0)}{\lfloor n+\nu} \left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} \right]^{n+\nu} \right\} \quad (m=1,2,\ldots,n)$$

représentent à l'intérieur de l'anneau circulaire X un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (A). *Ces expressions représentent les valeurs des intégrales pour chaque paire de valeurs ρ, ϑ ($x = \rho e^{i\vartheta}$), qui correspondent à un point à l'intérieur de l'anneau circulaire considéré. Pour $x = x_0$ et $\vartheta = \vartheta_0$ les relations* (10) *ont lieu. Les constantes $c_{\lambda m}$ sont définies par les formules* (17) *et les coefficients $\psi_\lambda^{n+\nu}(x_0)$ par les formules de recursion* (19), *dans lesquelles les expressions $\varphi(x_0)$ sont données en fonctions des constantes de l'équation différentielle considérée.*

Vu que $y_1, \ldots, y_n$ forment un système fondamental d'intégrales et que chaque intégrale de (A) doit pouvoir être exprimée en fonction homogène linéaire à coefficients constants de $y_1, \ldots, y_n$, on obtient donc par là une expression semblable qui donne la valeur de chaque intégrale pour une paire quelconque de valeurs ρ, ϑ correspondant à un point à l'intérieur de X. Toutes les quantités indépendantes de x dans cette expression sont des fonctions analytiques des coefficients de l'équation différentielle proposée, du point x_0 choisi arbitrairement à l'intérieur de X et de la quantité positive $2h$, le logarithme naturel du rapport des rayons des deux cercles qui limitent l'anneau circulaire X. Cet anneau se confond avec C si l'on donne à h sa plus grande valeur h_0, en prenant x_2 sur le cercle limite extérieur, et x_1 sur le cercle limite intérieur de C.

Les coefficients des différentes puissances de

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}$$

dans l'équation (21) sont des fonctions rationnelles et entières de $\frac{h}{\pi i}$.

Si l'équation différentielle (A) a la forme (B) de l'introduction, tous ces coefficients sont de plus, par suite de l'équation (9), des fonctions rationnelles et entières des coefficients A_{rq} ($r = 1, 2, \ldots, n$; $q = 0, 1, \ldots, p_r$) et des fonctions rationnelles de x_0 et des zéros de $P_0(x)$. Les coefficients de ces fonctions sont des nombres entiers. On peut ainsi transformer (21) en une série qui procède selon les puissances entières et positives des quantités A_{rq} et de t et qui est convergente pour tous les systèmes de valeurs finies A_{rq} et pour $|t| < 1$.[1]

Les intégrales $y_1, \ldots, y_n$, considérées comme fonctions de la variable auxilière t, ont des propriétés qu'il est bien de remarquer.

On a

$$(22) \qquad y_m(x) = P_m(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda m}\left\{\frac{1}{\underline{|n-\lambda}} t^{n-\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\lambda^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} t^{n+\nu}\right\} \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

La série du côté droit de cette équation qui procède suivant les puissances entières et positives de t est convergente comme nous savons pour toutes les valeurs de t pour lesquelles on a $|t| < 1$.

Lorsque x se trouve dans le voisinage immédiat du point x_0 defini par les valeurs ρ_0, ϑ_0, on a

$$y_m(x) = \mathfrak{P}_m(x - x_0) = P_m(t); \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

et lorsque x se trouve dans le voisinage du point x_0, définie par les valeurs $\rho_0, \vartheta_0 + 2\pi$, on a également

$$y_m(x) = \overline{\mathfrak{P}}_m(x - x_0) = \overline{P}_m(t).$$

Quand x passe du point x_0 défini par ρ_0, ϑ_0 au point x_0 défini par $\rho_0, \vartheta_0 + 2\pi$, t se transforme en t' et l'on a par suite de l'équation (7)

$$(23) \qquad \frac{t'+1}{t'-1} = K\frac{t+1}{t-1}; \qquad K = e^{-\frac{\pi^2}{h}}.$$

Vu que la série $P_m(t)$ est convergente pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $|t| < 1$, on doit avoir

$$P_m(t') = \overline{P}_m(t).$$

---

[1] Voir page 21.

Mais il suit des formules (14) et (17) que les fonctions $P_m(t)$ $(m=1,2,\ldots,n)$ représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée en t par la substitution (7'). Le système d'intégrales $\overline{P}_m(t)$ de cette équation différentielle en t peut donc être exprimé en fonctions linéaires à coefficients constants des $P_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$. On a donc le résultat suivant:

Si $|t| < 1$ *et que l'on applique la substitution* (23) *on a*

$$P_m(t') = C_{1m}P_1(t) + \ldots + C_{nm}P_n(t). \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

Les quantités $C_{1m}, \ldots, C_{nm}$ *sont des constantes indépendantes de* t.

On peut énoncer de même que si le second terme de l'équation différentielle (A) est égal à zéro les constantes $C_{11}, \ldots, C_{nn}$ sont assujetties à la condition suivante

$$\sum \pm C_{11}C_{22}\ldots C_{nn} = 1.$$ [1]

La propriété que nous avons obtenu pour les fonctions $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ est tout à fait analogue à celle qui caractérise les fonctions nommées par M. Poincaré *fonctions zétafuchsiennes*.

§ 2. *Une première méthode de représenter les invariants d'une substitution qui correspond à une ligne fermée qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C.*

Soit comme dans le paragraphe précédent $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (A) transformée en t, définies par les conditions que, pour $t = 0$, on ait

$$(1) \qquad \frac{d^\nu v_m}{dt^\nu} = 0, \qquad \begin{matrix} \nu \gtrless n - m \\ \nu \leqq n - 1 \end{matrix}; \qquad \frac{d^{n-m} v_m}{dt^{n-m}} = 1,$$

et qui, par conséquent, peuvent être représentées par les séries suivantes

$$(2) \qquad v_m(t) = \frac{t^{n-m}}{\underline{|n - m}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \phi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{t^{n+\nu}}{\underline{|n + \nu}} \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

[1] Voir Poincaré, *Sur les groupes* etc., pag. 202.

procédant selon les puissances entières et positives de t et convergentes pour toutes les valeurs de t, pour lesquelles $|t| < 1$. Les coefficients $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ dans ces séries sont définis par les formules de recursion (19) du paragraphe précédent.

Le côté droit de l'équation

$$z_m(x) = v_m\left(\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}\right) \qquad (m=1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

où

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} = 1$$

pour

$$\rho = \rho_0, \qquad \vartheta = \vartheta_0 \qquad (x = \rho e^{i\vartheta}, \ x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$$

nous fournit donc une expression qui permet de calculer les intégrales d'un système fondamental[1] qui correspondent à un point quelconque x, situé à l'intérieur de l'anneau circulaire X limité par deux cercles dont le centre commun est situé en $x = 0$ et dont les rayons sont égaux respectivement à $|x_1|$ et à $|x_2|$.

Posons maintenant

$$v_{m\lambda}(t) = \frac{d^{n-\lambda} v_m(t)}{dt^{n-\lambda}}, \tag{4}$$

$$t_0 = \frac{\left(\frac{x_0 e^{2\pi i}}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x_0 e^{2\pi i}}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1}. \tag{5}$$

En posant de plus comme au paragraphe précédent

$$\frac{t' + 1}{t' - 1} = e^{-\frac{\pi^2}{h}} \frac{t + 1}{t - 1}, \tag{6}$$

[1] Il résulte immédiatement de la formule (14) du paragraphe précédent que $z_1(x)$, $\ldots$, $z_n(x)$ forment un système fondamental d'intégrales.

on a, comme on s'assure facilement,

$$v_m(t') = v_{m1}(t_0)v_1(t) + v_{m2}(t_0)v_2(t) + \ldots + v_{mn}(t_0)v_n(t). \quad (m=1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

Soit maintenant $\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)$ les éléments des fonctions $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ qui correspondent au point x_0 et à la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0. Lorsque la variable x décrit un contour fermé L, qui ne se coupe pas lui-même et qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C, ces éléments subissent une substitution linéaire

$$S = \begin{vmatrix} v_{11}(t_0) & v_{12}(t_0) & \ldots & v_{1n}(t_0) \\ v_{21}(t_0) & v_{22}(t_0) & \ldots & v_{2n}(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}(t_0) & v_{n2}(t_0) & \ldots & v_{nn}(t_0) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Nous obtenons donc pour les coefficients de cette substitution les expressions suivantes

$$\alpha_{m\lambda} = v_{m\lambda}(t_0) = k_{m\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{1}{\underline{|\lambda+\nu}} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1} \right\}^{\lambda+\nu} \tag{9}$$

où l'on a

$$\left\{ \begin{aligned} & k_{m\lambda} = 0 \text{ pour } \lambda < m \text{ mais} \\ & k_{m\lambda} = \frac{1}{\underline{|\lambda-m}} \left(\frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1} \right)^{\lambda-m} \qquad \text{pour } \lambda \geqq m. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

La quantité h qui entre dans l'équation (9) est une quantité positive, laquelle, le point x_0 étant fixé, peut être choisie arbitrairement, pourvu pourtant que sa valeur ne dépasse pas celle que le membre droit de l'équation (4) au § 1 obtient, lorsque l'un des deux points x_1 ou x_2 est situé sur un cercle limite de C, tandis que l'autre de ces deux points est situé sur l'autre cercle limite ou à l'intérieur de C.

Si en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons des deux cercles limites de C ($\rho_1 < \rho_2$) l'on pose $x_1 = \rho_1$, $x_2 = \rho_2$, et par conséquent $x_0 = \sqrt{\rho_1\rho_2}$, on obtient les expressions des coefficients de substitution données par M. Poincaré.[1]

[1] Voir Poincaré, *Sur les groupes* etc., pag. 211.

Soit x_0 un point quelconque, appartenant à un anneau circulaire X_0, concentrique à l'anneau C et situé à l'intérieur de ce dernier.

Les séries

$$v_{m\lambda}(t), \qquad \binom{m=1,\ldots,n}{\lambda=1,\ldots,n}$$

de même que les séries

$$V_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\mu^\nu(x_0)t^\nu; \qquad (\mu=1,2,\ldots,n) \tag{11}$$

qui représentent les coefficients des différentes puissances de ω dans

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(-1)^n.\begin{vmatrix} v_{11}(t)-\omega & v_{12}(t) & \ldots & v_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t)-\omega & \ldots & v_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}(t) & v_{n2}(t) & \ldots & v_{nn}(t)-\omega \end{vmatrix} = \\ &\omega^n + V_1(t).\omega^{n-1} + \ldots + V_{n-1}(t).\omega + V_n(t) \end{aligned} \right.$$

sont convergentes pour toutes les valeurs de t, pour lesquelles $|t| < 1$.

Les fonctions

$$\psi_m^{n+\nu}(x_0) \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

$$\Psi_\mu^\nu(x_0) \qquad \binom{\mu=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

sont formées par l'addition et par la multiplication des coefficients de l'équation différentielle (A) $p_1(x_0), \ldots, p_n(x_0)$, des dérivées de ces coefficients, de x_0, de $\frac{h}{\pi i}$ et de certains nombres rationnels (voir formule (19) du paragraphe précédent). Si par conséquent $p_1(x_0), \ldots, p_n(x_0)$ sont représentés à l'intérieur de C par des séries procédant selon les puissances entières positives et négatives de x_0, on obtiendra aussi $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ et $\Psi_\mu^\nu(x_0)$ exprimées sous la même forme.

Soit maintenant h_0 la limite supérieure de h lorsque x_0 varie à l'intérieur et sur la limite de X_0; prenons

$$0 < h_1 < h < h_0$$

et posons

$$R_1 = \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2}{h_1}}}{1 + e^{-\frac{\pi^2}{h_1}}},$$

$$R = \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2}{h}}}{1 + e^{-\frac{\pi^2}{h}}}.$$

On a alors

$$1 > R_1 > R > 0.$$

Si l'on fait alors parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur et sur la limite de X_0 et si l'on donne à t toutes les valeurs pour lesquelles $|t| \leqq R_1$, il existe une limite supérieure que les modules des coefficients de l'équation différentielle (A), transformée en t, ne peuvent jamais dépasser. De cette circonstance, ainsi que de la procédure employée par WEIERSTRASS [1] ainsi que par BRIOT et BOUQUET [2] pour démontrer la convergence des séries

$$v_m(t), \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

il résulte immédiatement que les séries

$$v_{m\lambda}(t) \qquad \binom{\lambda=1,2,\ldots,n}{m=1,2,\ldots,n}$$

ainsi que les séries

$$V_\mu(t) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

considérées comme fonctions de x_0 aussi bien que de t, sont uniformément convergentes dans le domaine X_0 et $|t| \leqq R$.

De cette dernière circonstance résulte que les séries

$$(9) \qquad \alpha_{m\lambda} = v_{m\lambda}(t_0) = k_{m\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \phi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{t_0^{\lambda+\nu}}{\underline{|\lambda + \nu}} \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\lambda=1,2,\ldots,n}$$

---

[1] WEIERSTRASS, *Über die Theorie der analytischen Facultäten.* Journal für Mathematik, Bd. 51, pag. 43, et SOPHIE KOWALEVSKI, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Einleitung.* Journal für Mathematik, Bd. 80.

[2] BRIOT et BOUQUET. *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.* Deuxième mémoire. Journal de l'école polytechnique. Cahier 36 (Tome 21), page 133 sqq.

et

$$V_\mu(t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\mu^\nu(x_0) t_0^\nu, \qquad (13) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

les quantités h et t_0 étant des constantes données, sont uniformément convergentes pour toutes les valeurs de x_0 appartenant au domaine X_0.

Les séries (9) et (13) peuvent donc, en vertu d'un théorème de M. WEIERSTRASS,[1] être transformées en séries procédant selon les puissances positives et négatives de x_0 et convergentes dans le domaine X_0.

Les séries

$$V_\mu(t_0) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les invariants cherchés pour l'anneau circulaire C. Ils sont indépendants de x_0 et si l'on pose par conséquent

$$\Psi_\mu^\nu(x_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \Psi_{\mu\lambda}^\nu \,.\, x_0^\lambda, \qquad (14) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

chacune des quantités

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_{\mu\lambda}^\nu \,.\, t_0^\nu \qquad (15) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = -1, -2, -3, \ldots \\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots \\ \mu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

doit être égale à zéro et l'on doit avoir

$$V_\mu(t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_{\mu 0}^\nu \,.\, t_0^\nu. \qquad (16) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

Cette formule nous donne l'une des expressions, que nous nous sommes proposé de déduire pour les invariants. Elle ne contient plus x_0, comme le fait l'expression donnée par M. POINCARÉ, mais elle contient encore la quantité positive arbitraire h, dont la valeur de l'invariant est indépendante. Les coefficients $\Psi_{\mu 0}^\nu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ sont des fonctions rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$, et pour t_0 on a l'expression

$$t_0 = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1}.$$

[1] WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin 1886. Pag. 73.

La quantité h est positive et comprise entre les limites

$$0 < h \leqq \frac{1}{2} \log \frac{\rho_2}{\rho_1},\text{[1]} \tag{17}$$

ρ_1 designant le rayon du cercle limite intérieur et ρ_2 le rayon du cercle limite extérieur de C.

Supposons que les coefficients de l'équation différentielle (A) soient des fonctions rationnelles de x, de manière que cette équation puisse s'écrire sous la forme (voir l'introduction)

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)} y = 0, \tag{B}$$

où

$$P_0(x) = (x - a_1)^{q_1}(x - a_2)^{q_2} \ldots (x - a_p)^{q_p}$$

et

$$P_r(x) = A_{r0} + A_{r1}x + A_{r2}x^2 + \ldots + A_{rp_r}x^{p_r}. \qquad (r=1, 2, \ldots, n)$$

Supposons de plus que les coefficients $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ $(m = 1, 2, \ldots, n,$ $\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les expressions (9, § 1) des coefficients de substitution soient exprimées explicitement en fonctions de $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ et de leurs dérivées. Les fonctions $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ sont alors des fonctions rationnelles de $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de A_{rq} $(r = 1, 2, \ldots, n,$ $q = 0, 1, 2, \ldots, p_r)$ et du quotient $\frac{h}{\pi i}$. Tous les coefficients de ces fonctions sont des nombres entiers.

Si on calcule les coefficients $\Psi_\mu^\nu(x_0)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les expressions (13) qui représentent les invariants substitutionnels, ces coefficients seront aussi des fonctions rationnelles de $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de A_{rq} et de $\frac{h}{\pi i}$, dans lesquelles les coefficients seront des nombres entiers.

Il n'est point difficile de montrer, que les séries (9) et (16) sont uniformément convergentes dans chaque domaine fini des quantités A_{rq} $(r = 1, 2, \ldots, n, q = 0, 1, \ldots, p_r)$; ces séries peuvent donc être ordonnées selon les puissances entières et positives de la variable t_0 et de ces quan-

[1] voir la formule (5) du § 1.

tités A_{rq} et elles restent convergentes pour tous les systèmes de valeurs finies des A_{rq}.[1] Les coefficients des différentes puissances de t_0 et des A_{rq} dans les coefficients substitutionnels sont des fonctions rationnelles de $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$, et dans les invariants ce sont des fonctions rationnelles de $a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières de $\frac{h}{\pi i}$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Soit X un anneau circulaire dans le plan de x, ayant l'origine pour centre et ne contenant dans son intérieur aucun point singulier de l'équation différentielle (B).

Les invariants substitutionnels pour chaque substitution que l'on obtient en faisant parcourir à la variable indépendante x un parcours fermé, ne se coupant pas soi-même et embrassant les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire X, peuvent être représentés toujours sous la forme de séries procédant selon les puissances entières et positives des coefficients

$$A_{rq} \qquad \binom{r=1,2,\ldots,n}{q=0,1,\ldots,p_r}$$

et de la quantité

$$t_0 = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1},$$

h signifiant une quantité positive arbitraire, contenue entre les limites (17).

Ces séries sont convergentes pour tous les systèmes de valeurs finies des quantités A_{rq}. Les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles des quantités $a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$ dont les coefficients sont des nombres entiers. Les invariants, dont les valeurs sont représentées par les sommes de ces séries, sont indépendants du choix de la quantité arbitraire h, pourvu que cette dernière soit prise entre les limites fixées.

---

[1] voir Poincaré. *Sur les groupes* etc., § 3.

§ 3. *Une seconde manière de représenter les invariants d'une substitution qui correspond à un parcours fermé embrassant les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C.*

Soit x_0 un point quelconque à l'intérieur de C et introduisons dans l'équation différentielle (A) au lieu de la variable indépendante x une autre variable τ, définie par l'équation

$$x = x_0 e^{\tau}. \tag{1}$$

Désignons de plus par $u_1(\tau, x_0), \ldots, u_n(\tau, x_0)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée, défini par les conditions que pour $\tau = 0$ on ait

$$\frac{d^\nu u_m}{d\tau^\nu} = 0, \qquad \nu \gtrless n - m\,,\ \nu \leqq n - 1; \qquad \frac{d^{n-m} u_m}{d\tau^{n-m}} = 1. \tag{2}$$

Dans le voisinage de $\tau = 0$ ces intégrales sont représentées par des séries de la forme

$$u_m(\tau, x_0) = \frac{\tau^{n-m}}{\underline{|n-m}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{\tau^{n+\nu}}{\underline{|n+\nu}}. \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)} \tag{3}$$

Les coefficients $\chi_m^{n+\nu}(x_0)$ $(m = 1, 2, \ldots, n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ peuvent être obtenus de la même manière que les coefficients $\phi_m^{n+\nu}(x_0)$ dans le § 1. On obtient aussi des formules de récursion absolument analogues à celles que nous avons obtenu (19) § 1:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-m}} \cdot [n-m]_{m-1} \frac{\chi_1^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n-m}} \cdot [n-m]_{m-2} \frac{\chi_2^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \\
&\qquad\qquad \ldots + \frac{\underline{|n-m}}{\underline{|n-m}} \cdot [n-m]_0 \frac{\chi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} \\
&= \frac{[n-m]_{m+\nu}}{\underline{|n-m}} + x_0^m \cdot [n]_\nu \frac{\varphi_m^n(x_0)}{\underline{|n}} + x_0^{m+1} \cdot [n+1]_{\nu-1} \frac{\varphi_m^{n+1}(x_0)}{\underline{|n+1}} + \\
&\ldots + x_0^{m+\nu-1} \cdot [n+\nu-1]_1 \frac{\varphi_m^{n+\nu-1}(x_0)}{\underline{|n+\nu-1}} + x_0^{m+\nu} \cdot [n+\nu]_0 \frac{\varphi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{smallmatrix}\right)$$

Dans ces formules $[q]_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ désigne une constante définie par l'équation

$$(5) \qquad (e^u - 1)^q = u^q\{[q]_0 + [q]_1 u + [q]_2 u^2 + \ldots\}.$$

On a par conséquent:

$$(6) \qquad [q]_0 = 1 \quad \text{et} \quad [0]_\nu = 0, \qquad {\scriptstyle (\nu = 0, 1, 2, \ldots)}$$

Nous poserons de plus

$$(7) \qquad [q]_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = -1, -2, \ldots.$$

Le symbole $\varphi_m^{n+\nu}(x_0)$ $(m = 1, 2, \ldots, n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ désigne l'expression de $\frac{d^{n+\nu}y}{dx^{n+\nu}}$ que l'on obtient en différentiant (A), en posant ensuite $x = x_0$ et en ayant égard aux équations (10) du § 1. Le rayon de convergence des séries (3) peut être obtenu de la manière suivante. On prend sur la ligne droite qui unit le point $x = 0$ avec le point $x = x_0$ deux points x' et x'', $|x'| < |x''|$, de manière que l'une de ces deux points au moins soit situé sur la limite, et l'autre à l'intérieur ou à la limite de C, et que l'on ait en plus

$$(8) \qquad x_0 = \sqrt{x'x''}.$$

Le rayon de convergence des séries (3) est

$$(9) \qquad h' = \frac{1}{2}\log\frac{x''}{x'}.$$

Il est à remarquer aussi que le rayon de convergence de ces séries reste égal à h', si l'on introduit partout $x_0 e^{\vartheta i}$ à la place de x_0, ϑ désignant une quantité réelle quelconque.

On remarque facilement que, de même que $u_1(\tau, x_0), \ldots, u_n(\tau, x_0)$ représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée (A), de même les quantités

$$(10) \qquad \zeta_m(x) = u_m\left(\log\frac{x}{x_0}, x_0\right), \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

dans lesquelles $\log\frac{x}{x_0} = 1$ pour $\rho = \rho_0$ et $\vartheta = \vartheta_0$ $(x = \rho e^{i\vartheta}, x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$

représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle primitive en x.

Il résulte aussi de la manière même, dont nous avons trouvé les séries (3), que les quantités

$$u_m(\tau - i\theta\,,\, x_0 e^{i\theta}) \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (A) transformée en τ à l'aide de l'équation (1); et que les quantités

$$u_m\left(\log\frac{x}{x_0 e^{i\theta}}\,,\, x_0 e^{i\theta}\right). \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

dans lesquelles $\frac{x}{x_0 e^{i\theta}} = 1$ pour $\rho = \rho_0$ et $\vartheta = \vartheta_0 + \theta$, représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle primitive en x.

Posons maintenant

$$(11) \qquad u_{m\lambda}(\tau\,,\, x_0) = \frac{d^{n-\lambda} u_m(\tau\,,\, x_0)}{d\tau^{n-\lambda}} \qquad {\scriptstyle \binom{m=1,2,\ldots,n}{\lambda=1,2,\ldots,n}}$$

et soit l un nombre entier positif, suffisamment grand pour que l'on ait

$$(12) \qquad \frac{2\pi}{l} < h'.$$

Le point $\tau = i\theta + \frac{2\pi i}{l}$ appartient dans ce cas au domaine de convergence des séries qui représentent les valeurs des fonctions

$$u_m(\tau - i\theta\,,\, x_0 e^{i\theta}) \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

dans le voisinage de $\tau = i\theta$.

On voit maintenant sans difficulté que dans le voisinage immédiat de $\tau = \frac{2\pi i}{l}$, et par conséquent pour toutes les valeurs de τ, on a les relations

$$(13) \qquad \begin{cases} u_m(\tau, x_0) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_1\left(\tau - \frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) + \ldots \\ \qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_n\left(\tau - \frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) \end{cases} \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

desquelles découle

$$(14)\quad \begin{cases} u_m\left(\tau - \frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) u_1\left(\tau - 2\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) + \ldots \\ \qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) u_n\left(\tau - 2\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right), \\ u_m\left(\tau - 2\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) u_1\left(\tau - 3\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{3\frac{2\pi i}{l}}\right) + \ldots \\ \qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) u_n\left(\tau - 3\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{3\frac{2\pi i}{l}}\right), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_m\left(\tau - (l-1)\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) u_1(\tau - 2\pi i, x_0 e^{2\pi i}) + \ldots \\ \qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) u_n(\tau - 2\pi i, x_0 e^{2\pi i}). \end{cases} \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

Si l'on pose maintenant

$$(15)\qquad \tau = 2\pi i + \tau',$$

en remarquant que

$$(16)\qquad u_m(\tau', x_0 e^{2\pi i}) = u_m(\tau', x_0), \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

on voit que

$$(17)\quad \begin{cases} u_m(2\pi i + \tau', x_0) = \alpha_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_1(\tau', x_0) + \ldots \\ \qquad\qquad + \alpha_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_n(\tau', x_0). \end{cases} \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

Les quantités $\alpha_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)$ $(m = 1, 2, \ldots, n, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$ sont les coefficients de la substitution que l'on obtient en appliquant l'une après l'autre les substitutions dont les coefficients sont

$$u_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right),\ u_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right),\ \ldots,\ u_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right).$$

Nous exprimons ceci par l'équation suivante:

$$\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \ldots, \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \ldots, \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \end{vmatrix} = \\
&\begin{vmatrix} u_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \ldots, u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \ldots, u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), \ldots, u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), \ldots, u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) \end{vmatrix} \\
&\ldots \begin{vmatrix} u_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right), \ldots, u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right), \ldots, u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Des équations (10) et (17) il résulte que lorsque la variable indépendante x en partant du point x_0 décrit le contour fermé L, qui ne se coupe pas et qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C, les éléments des intégrales $\zeta_1(x), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x)$, qui correspondent au point x_0 et à la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0, se transforment en d'autres éléments à l'aide de la substitution:

$$S = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \ldots, \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \ldots, \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \end{vmatrix}.$$

Les expressions que nous avons obtenu pour les coefficients d'une pareille substitution peuvent être présentées sous la forme de séries:

$$\alpha_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi^{\nu}_{l,m,\lambda}(x_0)\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^{\nu} \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\lambda=1,2,\ldots,n} \tag{19}$$

dans lesquelles les fonctions

$$\chi^{\nu}_{l,m,\lambda}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ \lambda=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

peuvent être exprimées immédiatement par les fonctions

$$\chi_m^{n+\nu}\left(x_0 e^{k\frac{2\pi i}{l}}\right). \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ k=0,1,2,\ldots,l-1 \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

Les invariants sont les coefficients

$$U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

des différentes puissances de ω dans

$$(20) \quad \begin{cases} (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) - \omega, \ldots, & \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\ \ldots \quad \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \quad , \ldots, & \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) - \omega \end{vmatrix} \\ = \omega^n + U_1\left(\frac{2\pi i}{l}\right)\omega^{n-1} + \ldots + U_{n-1}\left(\frac{2\pi i}{l}\right)\omega + U_n\left(\frac{2\pi i}{l}\right) \end{cases}$$

et peuvent être représentés sous la forme

$$(21) \qquad U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X^{\nu}_{l,\mu}(x_0)\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^{\nu}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

les expressions des coefficients:

$$X^{\nu}_{l,\mu}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} \mu=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

à l'aide des coefficients des séries (19) s'obtenant immédiatement.

Les expressions des coefficients substitutionnels que nous venons de trouver coïncident pour $l = 1$ avec celles données par M. Hamburger.[1]

Pour la convergence il est alors nécessaire que la quantité positive h' soit assez grand pour qu'on puisse mettre en (12) $l = 1$. C'est cette condition qui fait la restriction à la méthode de M. Hamburger et dont M. Poincaré[2] était parvenu déjà à se libérer, mais d'une toute autre manière que celle que nous venons d'employer.

[1] *Über ein Princip* etc.

[2] voir page 3.

Tout à fait de la même manière, que nous l'avons fait pour les fonctions $v_{m\lambda}(t_0)$, $V_\mu(t_0)$ au § 2, on peut démontrer maintenant, que les séries

$$\alpha_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\lambda=1,2,\ldots,n}$$

et

$$U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right), \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

pour des valeurs suffisamment grandes de l, peuvent être transformées en séries procédant d'après les puissances positives et négatives de x_0.

Vu que les invariants

$$U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

sont indépendants de x_0, les séries doivent se réduire pour eux à un seul terme indépendant de x_0. On n'a besoin de calculer, par conséquent, que le terme $X^\nu_{l,\mu,0}$ dans le développement de

$$(22) \qquad X^\nu_{l,\mu}(x_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} X^\nu_{l,\mu,\lambda} x_0^\lambda \qquad \binom{\mu=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

et l'on obtient alors:

$$(23) \qquad U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X^\nu_{l,\mu,0}\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^\nu. \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

Dans cette expression des invariants l désigne un nombre entier positif quelconque, assujetti seulement à remplir la condition

$$(24) \qquad \frac{2\pi}{l} < \frac{1}{2}\log\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

où ρ_2 est le rayon du cercle limite extérieur et ρ_1 le rayon du cercle limite intérieur de C.

On obtient des formules particulièrement intéressantes en faisant croître l à l'infini et en calculant les limites auxquelles tendent alors les termes différents dans l'équation (23). Nous allons étudier ce cas dans un autre mémoire.

Si l'équation différentielle proposée a la forme (B) — voir l'introduction — les coefficients:

$$\chi^{\nu}_{l,m,\lambda}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ \lambda=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

dans l'expression (19) des coefficients substitutionnels sont des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi i}{l}}$, de x_0, de $a_1, \ldots, a_p$ et de A_{rq} dont les coefficients sont des nombres entiers. Les coefficients

$$X^{\nu}_{l,\mu,0} \qquad \begin{pmatrix} \mu=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\cdots \end{pmatrix}$$

dans les expressions (23) des invariants $U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right)$ sont des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi i}{l}}$ et de $a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles des A_{rq} dont les coefficients sont des nombres entiers.

Les séries (19) et (23) peuvent être écrites sous la forme de séries procédant selon les puissances entières et positives de $\frac{2\pi i}{l}$ et des quantités A_{rq}. Par rapport à ces dernières elles sont toujours convergentes (voir page 21). Les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles en $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et en $e^{\frac{2\pi i}{l}}$ qui dans la formule (23) ne contient plus x_0 et dont les coefficients sont des nombres entiers.

Nous pouvons donc entre autres énoncer le théorème suivant:

Soit X un anneau circulaire, qui a l'origine pour centre et qui embrasse un certain nombre de points singuliers de l'équation différentielle (B). *Les invariants de chaque substitution, que l'on obtient en faisant parcourir à la variable indépendante x un contour fermé qui ne se coupe pas soi-même et qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire X, peuvent toujours être représentés sous la forme de séries ordonnées selon les puissances entières positives des coefficients*

$$A_{rq} \qquad \begin{pmatrix} r=1,2,\ldots,n \\ q=0,1,2,\ldots,p_r \end{pmatrix}$$

et de la quantité

$$\frac{2\pi i}{l},$$

où l désigne un nombre entier positif qui peut être fixé arbitrairement à partir d'une limite inférieure donnée.

Ces séries sont convergentes pour tous les systèmes de valeurs finies des A_{rq}. *Les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles des* $a_1, \ldots, a_p$ *et de* $e^{\frac{2\pi i}{l}}$ *dont les coefficients sont des nombres entiers.*

§ 4. *Représentation analytique des invariants d'une substitution correspondant à une ligne fermée qui embrasse des points singuliers, tous situés sur une même ligne droite.*

Soient a et b deux points singuliers quelconques. Parmi les ellipses confocales, dont les foyers sont les points a et b, il y en a une infinité, qui jouissent de la propriété de ne point embrasser d'autres points singuliers que ceux qui sont situés sur la ligne droite allant de a à b. Désignons par α et β le grand et le petit axe d'une telle ellipse.

Posons

$$x = \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{b+a}{2}.$$

A l'aide de cette substitution, la partie du plan des x, limitée par la ligne droite allant de a à b et par la périférie de l'ellipse considérée, est projetée dans le plan des z soit sur un anneau circulaire dont le cercle limite intérieur a pour rayon l'unité, tandis que le cercle limite extérieur a un rayon

$$\rho = \frac{\alpha + \beta}{\left|\frac{b-a}{2}\right|},$$

soit sur un autre anneau circulaire, dont le cercle limite extérieure a l'unité pour rayon, tandis que le rayon ρ_1 du cercle limite intérieur est déterminé par l'équation

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha - \beta}{\left|\frac{b-a}{2}\right|}.$$

A la ligne droite double, allant de a à b, correspond par conséquent dans cette substitution le cercle dont le rayon est égal à l'unité, tandis que la périphérie de l'ellipse considérée est projetée tant sur le cercle dont le rayon est ρ que sur le cercle dont le rayon est égal à $\frac{1}{\rho}$.

Si l'on considère dans le plan des x une ligne fermée continue L_x qui n'a pas de points doubles, qui entoure la ligne droite (ab) et qui n'embrasse pas d'autres points singuliers que ceux situés sur cette ligne, les coefficients de la substitution correspondante ne changent point, si au lieu de la ligne primitive L_x nous prenons une ligne fermée quelconque sans points doubles, située toute entière dans la partie du plan des x limitée par la ligne droite (ab) et par la périphérie de l'ellipse considérée.

A l'aide de l'expression de x en z la ligne L_x se trouve projetée sur deux lignes L'_z et L''_z, dont chacune appartient toute entière à l'intérieur de l'un des deux anneaux circulaires correspondant à l'intérieur de l'ellipse.

Si l'on parvient à représenter les invariants des substitutions qui correspondent aux lignes L'_z et L''_z pour l'équation différentielle (A) transformée en z, on trouve par là même l'expression des invariants de la substitution correspondant à la ligne L_x pour l'équation différentielle proposée.

Si l'on observe maintenant que les deux constantes dans l'expression de x en z sont des fonctions entières rationnelles de a et b, a et b étant deux points singuliers de l'équation différentielle proposée, on voit immédiatement, que dans le cas où les coefficients de l'équation différentielle sont des fonctions rationnelles, c'est à dire dans le cas où l'équation différentielle a la forme (B), les deux théorèmes énoncés à la fin des paragraphes 2 et 3 subsistent avec le changement suivant: au lieu de dire que le »parcours» dont il est question dans ces théorèmes peut toujours être inscrit dans l'intérieur d'un anneau circulaire sans passer par aucun point singulier, on doit dire maintenant que ce parcours embrasse toujours les mêmes points singuliers, situées sur une même ligne droite.