PRINCIPE DE MOINDRE ACTION, PROPAGATION DE LA CHALEUR ET ESTIMEES SOUS ELLIPTIQUES SUR CERTAINS GROUPES NILPOTENTS

PAR

BERNARD GAVEAU

Paris, France

Table des matieres

Introduction

L'objet de ce travail est d'obtenir des estimées sous elliptiques, aussi explicites que possible, des solutions fondamentales et des spectres de certains opérateurs hypoelliptiques qui apparaissent naturellement en analyse, en géométrie et en théorie des représentations. Cette première partie traite des modèles locaux, que l'on peut par exemple réaliser sur les groupes nilpotents libres [30] et particulièrement des groupes nilpotents de rang 2.

La méthode générale employée ici consiste à obtenir des estimées sur la solution fondamentale de l'équation de la chaleur associée à l'opérateur donné, d'où on déduit les estimées de la solution fondamentale de l'opérateur lui-même, les estimées sous elliptiques, l'analyticité des solutions fondamentales, les spectres et les singularités pour l'hypoellipticité par perturbation complexe. Cependant, les méthodes usuelles de construction de paramètrix d'équation de la chaleur (celle de Minarkshisundaram–Pleijel ou de McKean–Singer) sont assez délicates à appliquer à cause de l'abondance des caustiques (voir § 3, § 5). La méthode envisagée ici utilise deux systèmes dynamiques naturellement associés à l'opérateur, d'une part la diffusion qui régit la propagation de la chaleur, construite par l'intégrale stochastique d'Itô, d'autre part, le système hamiltonien des bicaractéristiques qui propagent infinitésimalement les singularités.

Dans la première partie, nous obtenons une expression exacte de la solution fondamentale de la chaleur du laplacien de Kohn du groupe d'Heisenberg; ce résultat contient en particulier ceux de Folland [17] et Folland & Stein [9]. En utilisant la théorie des représentations, A. Hulanicki [15] et J. Cygan [32] ont publié une expression identique après notre publication [10].

Dans la seconde partie, on étudie le problème de Dirichlet pour des ouverts du groupe d'Heisenberg. On montre qu'il est bien posé pour certains ouverts réguliers, mais qui ne sont pas nécessairement très réguliers au sens de Bony [1]. On calcule les mesures harmoniques de la boule de Koranyi et d'un demi espace dont le bord contient le centre.

Enfin des estimées de temps de sortie et de première valeur propre sont obtenues.

Dans la troisième partie, est étudié le système des bicaractéristiques du groupe d'Heisenberg. Le résultat fondamental est que les caustiques d'un point sont adhérentes à ce point contrairement au cas elliptique et le noyau de la chaleur a un comportement asymptotique différent selon la géométrie de l'espace des bicaractéristiques minimales joignant les deux points. Par contre, le log p_s est toujours équivalent au minimum d'action. En elliptique, cette théorie a été développée par Varadhan [33], Ventcell et Freidlin [34] et enfin par Molchanov de façon très précise [28].

Le reste du travail utilise les techniques du groupe d'Heisenberg. La partie 4, étudie les solutions fondamentales des groupes nilpotents libres de rang 2 et en démontre l'analyticité. La partie 5, étudie le système des bicaractéristiques pour l'opérateur hypoellitique naturel des groupes de rang 2. Il apparaît alors que deux points quelconques ne peuvent pas être joints entre eux par une bicaractéristique en général lorsque le nombre de générateurs est $\geqslant 4$. L'ensemble des points joints a 0 par une bicaractéristique est en fait un ensemble algébrique orbite de la représentation adjointe; ce phénomène nouveau est dû à l'apparition de conditions de quantification du type de Maslov [27]. Le lien entre ce système hamiltonien et des problèmes variationnels horizontaux est étudié dans [13]; ces derniers problèmes n'ont pas de solution régulière globale et sont apparentés à des problèmes de contrôle optimal déterministe.

La partie 6 donne une méthode de calcul de la diffusion sous elliptique d'un groupe nilpotent libre quelconque.

La partie 7 démontre sur le cas des groupes nilpotents de rang 2 la conjecture de M. P. Malliavin et P. Malliavin qui permet de calculer les infimums de spectre de représentations par l'holonomie stochastique [21] de la représentation.

Ces résultats ont été annoncés dans quatre Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris ([10]).

Je suis heureux de pouvoir remercier Monsieur Paul Malliavin pour les nombreuses conversations que j'ai pu avoir avec lui sur le sujet abordé ici; ce travail s'inspire de ses travaux sur les théorèmes d'annulation [22], [26], [20], sur les comportements frontières de fonctions holomorphes [25] et l'intégration stochastique des systèmes [23] et [24].

Je remercie également Monsieur A. Debiard pour les discussions que j'ai pu avoir avec lui sur son travail sur les opérateurs dégénérés sur des sous variétés ([3] et [4]).

Enfin, je tiens à remercier Monsieur A. Melin qui m'a fourni une démonstration beaucoup plus rapide que celle initialement donnée pour l'estimée asymptotique de p_s. (Théorème 2 et 3-2.)

§ 1. Cas du groupe d'Heisenberg

1.1. Notations

(a) Soit H_{2n+1} le groupe d'Heisenberg de dimension réelle $2n+1$ de sorte que $H_{2n+1}=\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}$ avec les coordonnées $(z,t)=(z_1,\ldots,z_n,t)$ et $z_j=x_j+iy_j$. C'est un groupe de Lie nilpotent pour la loi

$$(z,t)\cdot(z',t')=\left(z+z',t+t'+2\ \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n}z_j\bar{z}'_j\right).$$

Soit $g_0=(z_0,t_0)\in H_{2n+1}$, $l_{g_0}(g)=g_0g$ la translation à gauche par g_0. Soit X_j, Y_j, T les champs invariants à gauche dont les valeurs en 0 sont respectivement $\partial/\partial x_j$, $\partial/\partial y_j$, $\partial/\partial t$ de sorte que

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial t},\quad Y_j=\frac{\partial}{\partial y_j}-2x_j\frac{\partial}{\partial t},\quad T=\frac{\partial}{\partial t}.$$

On pose $Z_j=\frac{1}{2}(X_j-iY_j)=\partial/\partial z_j+i\bar{z}_j(\partial/\partial t)$, $\bar{Z}_j=\frac{1}{2}(X_j+iY_j)$ et on considère le laplacien de Kohn de H_{2n+1} (voir [8]) défini par $\Delta_K=\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{L}_{X_j}^2+\mathcal{L}_{Y_j}^2)$ dont l'expression en coordonnées est

$$\Delta_K=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+4y_j\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial t}-4x_j\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial t}+4|z_j|^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right].$$

Il n'est pas elliptique; mais comme $[X_j,Y_j]=2T$, il est hypoelliptique par [8]. Considérons la fibration triviale $H_{2n+1}=\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{C}^n$ munie de la connexion suivante : le sous espace horizontal en $g\in H_{2n+1}$ est le sous espace engendré par les $X_j(g)$ et $Y_j(g)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. Il est alors clair que Δ_K est le relevé horizontal du laplacien euclidien usuel de $\mathbf{C}^n$ par cette connexion et en particulier, Δ_K calculé sur une fonction ne dépendant que de z est le laplacien euclidien usuel calculé sur cette fonction.

(b) On considérera également le groupe produit $G_{n,d}=H_{2n+1}\times\mathbf{R}^{2d}$ de coordonnées (z,t,w) où $w_j=u_j+iv_j$, $1\leqslant j\leqslant d$ et de laplacien de Kohn $\Delta_k=\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{L}_{X_j}^2+\mathcal{L}_{Y_j}^2)+\sum_{k=1}^{d}(\mathcal{L}_{U_k}^2+\mathcal{L}_{V_k}^2)$ qui est aussi relevé horizontal du laplacien euclidien usuel de $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^d$ par la fibration $\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{C}^d\to\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^d$, au travers de la connexion dont les champs de sous-espaces horizontaux en chaque point sont engendrés par les vecteurs X_j, Y_j, U_k, V_k, $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant d$.

1.2. Diffusion associée au laplacien de Kohn et équation de la chaleur

LEMME 1. *La diffusion de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta_k$ sur H_{2n+1} s'écrit $(Z_1(s)\ldots Z_n(s), T(s))$ où $(Z_1(s)\ldots Z_n(s))$ sont n browniens complexes indépendants $Z_j=X_j+iY_j$ et où*

$$T(s)=2\sum_{j=1}^{n}\int_0^s(Y_j\,dX_j-X_j\,dY_j).$$

Preuve. La matrice du symbole principal de Δ_K est la matrice symétrique $(2n+1)\times(2n+1)$ positive *dégénérée*

$$g_{ij}=\delta_{ij}+r_{ij}$$

où

$$\delta_{ij}=1 \quad \text{si } i=j$$
$$\delta_{ij}=0 \quad \text{sinon}$$

et $r_{ij}=0$ si i et j sont tous deux différents de $2n+1$, $r_{2n+1,2n+1}=4\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2-1$, $r_{2p-1,2n+1}=2y_p$ et $r_{2p,2n+1}=-2x_p$. D'autre part par les remarques du 1, la projection de la diffusion de $\frac{1}{2}\Delta_K$ sur $\mathbf{C}^n$ est la diffusion de générateur $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{C}^n}$ (laplacien euclidien usuel) donc est la donnée de n browniens complexes standard indépendants $(z_1(s), ..., z_n(s))$. Il suffit de calculer l'accroissement dt de la composante t; or la matrice σ qui donne en chaque point les covariances des accroissements infinitésimaux de la diffusion de $\frac{1}{2}\Delta_K$ satisfait $\sigma^t\sigma=g$ et contient la sous matrice identité $2n\times 2n$ d'après les remarques qui précèdent; elle est donc nécessairement une matrice $(2n+1)\times 2n$ avec

$$\sigma_{ij}=1 \quad \text{si } i=j \quad \text{et } i\leqslant 2n$$
$$\sigma_{2n+1,2p-1}=2y_p, \quad \sigma_{2n+1,2p}=-2x_p, \quad 1\leqslant p\leqslant n$$

et sinon $\sigma_{ij}=0$; par conséquent la diffusion à ses accroissements données par

$$(dx_1, dy_1, ..., dy_n, dt)=(dx_1, dy_1, ..., dy_n)^t\sigma$$

et donc $dt=2\sum_{j=1}^{n}(y_j dx_j-x_j dy_j)$, ([19]).

Théorème 1. *Soit $p_s(0,(z,t))$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\partial/\partial s=\frac{1}{2}\Delta_K$ de pôle 0, calculée en (z,t) à l'instant s. Alors on a*

$$p_s(0,(z,t))=\frac{1}{(2\pi s)^{n+1}}\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{2\tau}{\operatorname{sh}2\tau}\right)^n\exp\left(\frac{i\tau t}{s}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2}{2s}\right)\frac{2\tau}{\operatorname{th}2\tau}\right)d\tau.$$

Preuve. Soit $p_s(0,\cdot)$ la transformée de Fourier euclidienne.

$$\widehat{p_s(0,.)}(\zeta,\tau)=\int_{\mathbf{R}^{2n+1}}\exp\left(i\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j+\eta_j y_j\right)+\tau t\right)\right)p_s(0,(z,t))\prod_{i=1}^{n}dx_i dy_i dt$$
$$=E_0\left(\exp\left(i\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j(s)+\eta_j y_j(s)\right)+\tau t(s)\right)\right)\right)$$
$$=E_0\left(\exp\left(i\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j x_j(s)+\eta_j y_j(s))\right)\right)E_0^{x_j(s),y_j(s)}(\exp i\tau t(s))\right)$$

où $E_0^{z_j(s), y_j(s)}$ est l'espérance conditionnelle avec extrémités $z_j(s)$ fixées. Utilisons alors le lemme suivant.

LEMME 2. *Soit $z(s)=x(s)+iy(s)$ un brownien standard complexe. Posons*

$$\varphi_s(\tau, x, y) = E_0^{x_s=x, y_s=y}\left(\exp 2i\tau \int_0^s (y\,dx - x\,dy)\right).$$

Alors on a

$$\varphi_s(\tau, x, y) = \frac{2s\tau}{\operatorname{sh} 2s\tau} \exp\left(\frac{x^2+y^2}{2s}(1-2s\tau \coth 2s\tau)\right).$$

Preuve de Lemme 2. Elle est donnée par P. Lévy [18] qui calcule cette intégrale en l'interprétant comme quatre fois l'aire balayée par le rayon vecteur joignant l'origine à un point de la courbe brownienne et qui utilise l'analyse harmonique de la variance M. Kac et J. F. Siegert ([17]) donnent une preuve plus générale de ces calculs.

Remarque. Au § 3, on verra un calcul détaillé de telles fonctionnelles de Markov dans la situation des groupes nilpotents libres de rang 2.

Fin de Théorème 1. Par indépendance des z_j, on a

$$\begin{aligned}\widehat{p_s(0,.)}(\zeta,\tau) &= E_0\left(\exp\left(i\sum_{j=1}^n(\xi_j x_j(s)+\eta_j y_j(s))\right)\prod_{j=1}^n \varphi_s(\tau, x_j(s), y_j(s))\right)\\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{ch} 2s\tau}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n|\zeta_j|^2\right)\frac{\operatorname{th} 2s\tau}{2\tau}\right) \quad \text{(Lemme 2)}\end{aligned}$$

d'où le théorème 1.

COROLLAIRE 1. *Dans le cas du groupe produit $G_{n,d}=H_{2n+1}\times \mathbf{R}^{2d}$, la solution fondamentale de $\partial/\partial s=\frac{1}{2}\Delta_K$ est*

$$p_s(0,(z,t,w)) = \exp\left(-\sum_{i=1}^d\left(\frac{u_i^2+v_i^2}{2s}\right)\right)\frac{1}{(2\pi s)^{d+n+1}}\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{2\tau}{\operatorname{sh} 2\tau}\right)^n \exp\left(\frac{i\tau t}{s}-\left(\sum_{j=1}^n\frac{|z_j|^2}{2s}\right)\frac{2\tau}{\operatorname{th} 2\tau}\right)d\tau.$$

Preuve. Dans ce cas, on calcule la diffusion de générateur $\frac{1}{2}\Delta_K$; c'est la donnée de $n+d$ browniens complexes indépendants $z_1(s), ..., z_n(s), w_1(s), ..., w_d(s)$; la composante $t(s)$ est donnée par Lemme 1. La loi de la diffusion est le produit tensoriel des lois de $(z_1, ..., z_n, t)$ et $(w_1, ..., w_d)$ d'où le résultat par Théorème 1.

Remarque. Dans [9], Folland et Stein posent la question d'obtenir des résultats sur le laplacien Δ_K lorsque H_{2n+1} est muni d'une métrique invariante à gauche générale, i.e. pour

$$\Delta_K = \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathcal{L}_{X_j}^2 + \mathcal{L}_{Y_j}^2) \quad (a_j \text{ constantes} > 0).$$

La diffusion est $(\sqrt{a_1}z_1, \ldots, \sqrt{a_n}z_n)$ et

$$t(s) = \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{a_i} \int_0^s (y_i\, dx_i - x_i\, dy_i)$$

et on a aussitôt

$$p_s(0,z,t) = \frac{1}{(2\pi s)^{n+1}} \int_{\mathbf{R}} \frac{(2\tau)^n}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\, \mathrm{sh}\,(2\sqrt{a_i}\,\tau)} \exp\left(\frac{i\tau t}{s} - 2\tau \sum_{j=1}^{n} \frac{|z_j|^2}{2s\sqrt{a_j}\, \mathrm{th}\, 2\sqrt{a_j}\,\tau}\right) d\tau.$$

1.3. Solutions fondamentales de Δ_K

Avec la solution de l'équation de la chaleur, on retrouve tout de suite la solution fondamentale de Δ_K calculée par Folland [7]. Pour simplifier, faisons le calcul dans H_3 $(n=1)$: on a

$$g(0,(x,y,t)) = \int_0^{+\infty} p_s(0,x,y,t)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\tau}{\mathrm{sh}\, 2\tau} d\tau \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \exp\left(\frac{i\tau t}{s} - \frac{|z|^2 2\tau}{2\, \mathrm{th}\, 2\tau}\right)$$

Posons $u = \dfrac{1}{s}$, $\lambda = \dfrac{|z|^2}{2}$:

$$g(0,x,y,t) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda\, \mathrm{ch}\, 2\tau\, d\tau}{4\lambda^2\, \mathrm{ch}^2\, 2\tau + t^2\, \mathrm{sh}^2\, 2\tau} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^2 + t^2}}$$

ce qui coïncide à un $\frac{1}{2}$ près (dû à la normalisation $\frac{1}{2}\Delta_K$) avec [7].

En dimension $2n+1$, on se ramène à calculer la primitive d'une fraction rationnelle à pôles d'ordre n.

La méthode permet aussi de calculer la solution fondamentale pour les groupes $G_{n,d}$, mais il semble que la quadrature ne soit plus faisable.

Exemple 1. Dans le cas de $G_{3,1} = H_3 \times \mathbf{R}^2$, par le corollaire 1 on trouve

$$g(0,(x,y,t,u,v)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\tau\, \mathrm{sh}\, 2\tau\, d\tau}{\left[\left(i\tau t - \dfrac{u^2+v^2}{2}\right) \mathrm{sh}^2\, \tau - \left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right) \tau\, \mathrm{ch}\, 2\tau\right]^2}$$

l'intégrale étant prise en partie principale près de 0. On vérifie qu'on a l'homogénéité pour les dilations :

$$\delta_r : (x, y, t, u, v) \to (rx, ry, r^2 t, ru, rv)$$

soit :

$$g(0, \delta_r(x, y, t, u, v)) = r^{-4} g(0, (x, y, t, u, v)).$$

Exemple 2. Pour un opérateur du type $\sum_{j=1}^{n} a_j(\mathcal{L}_{X_j}^2 + \mathcal{L}_{Y_j}^2)$ on peut aussi écrire les solutions fondamentales explicitement à une quadrature près.

1.4. Le cas où il y a un terme du ler ordre: singularités pour l'hypoellipticité

LEMME 3. *Soit l'opérateur* $\frac{1}{2}\Delta_k + \alpha(\partial/\partial t)$ *(avec α réel) dans le groupe d'Heisenberg* H_3; *alors la solution fondamentale de l'équation de la chaleur* $p_s^{(\alpha)}(0, (x, y, t))$ *satisfait*

$$\widehat{p_s^{(\alpha)}(0, \cdot)}(\xi, \eta, \tau) = \widehat{p_s(0, \cdot)}(\xi, \eta, \tau) e^{i\tau\alpha}$$

et on a pour la solution fondamentale

$$g^{(\alpha)}(0, (x, y, t)) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^2 + t^2}} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2+y^2}{t}\right)\right)}{1 + e^{-(\pi\alpha)/2}}$$

et par suite $g^{(\alpha)}$ *se prolonge analytiquement sauf si* $\alpha = (-2+4k)i$, $k \in Z$, *et* $\frac{1}{2}\Delta_k + \alpha(\partial/\partial t)$ *est donc hypoelliptique et localement résoluble sauf pour ces valeurs de* α.

Preuve.

(1°) Lorsque le terme du ler ordre est réel, la correction qu'il ajoute à la diffusion de $\frac{1}{2}\Delta_k$ est précisément αs, d'où aussitôt le calcul de $p_s^{(\alpha)}(0, \cdot)$ puisqu'il suffit de remplacer T_s par $T_s + \alpha s$.

(2°) On calcule toujours pour α réel

$$\begin{aligned} g^{(\alpha)}(0, (x, y, t)) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\tau}{\operatorname{sh} 2\tau} d\tau \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2} e^{(i\tau t)/s} e^{i\tau\alpha} e^{-((x^2+y^2)/2s)(2\tau)/\operatorname{th} 2\tau} ds \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau\alpha} d\tau}{(\operatorname{ch} 2\tau) 2\lambda - it \operatorname{sh} 2\tau} \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{x^2+y^2}{2}. \end{aligned}$$

Un pôle x trouve en $-i$ Arctg $(2\lambda/t)$ et on intègre sur le contour $-R \leqslant x \leqslant R$, $y=0$; $x=R$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; $-R \leqslant x \leqslant R$, $y=\pi$; $x=-R$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ et on fait tendre R vers ∞, d'où le résultat.

Le prolongement analytique en α est possible sauf pour $\alpha = (-2+4k)i$ ce qui correspond aux valeurs de non hypoellipticité. (Voir [9]).

§ 2. Probleme de Dirichlet pour certains ouverts du groupe d'Heisenberg

Ce paragraphe étudie le problème de Dirichlet pour certains ouverts du groupe d'Heisenberg et donne des calculs explicites de mesures harmoniques et des estimées de première valeur propre.

2.1. Problème de Dirichlet pour un opérateur dégénéré

Nous utiliserons ici des résultats de Bony exposés dans [1]. Si Δ est un opérateur du type $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{X_i}^2$ dans une variété M et si U est un ouvert borné de M, on dira que U est très régulier (pour l'opérateur Δ) si pour tout $x_0 \in \partial U$, on peut trouver un domaine de carte local $V \ni x_0$, un point x_1 de V, une boule de centre x_1 qui ne touche $\bar{U}$ qu'au point x_0 et tel que le vecteur $x_1 - x_0$ soit non caractéristique pour le symbole principal de Δ calculé en x_0.

Rappelons les résultats de [1].

(1°) Tout point de M admet un système fondamental de voisinages très réguliers Δ. (De tels voisinages ne peuvent d'ailleurs pas être à frontière C^1 partout si Δ n'est pas elliptique.)

(2°) Si U est ouvert très régulier borné, si $f \in \mathcal{C}(\bar{U})$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\partial U)$, il existe un unique $u \in \mathcal{C}(\bar{U})$ tel que $\Delta u = -f$ sur U et $u|\partial U = \varphi$ et si f est $C^\infty(U)$, $u \in C^\infty(U)$ et si f et φ sont $\geqslant 0$, $u \geqslant 0$. On a alors une décomposition dans U de toute fonction $f \in \mathcal{C}(\bar{U})$ par $f = G\Delta f + H(f|\partial U)$ où $H(f|\partial U)$ est la fonction harmonique de valeur au bord $f|\partial U$ et où G est le potentiel de Green, i.e. $G\psi$ est tel que $\Delta G\psi = -\psi$ et $G\psi|\partial U = 0$. On déduit que G est un opérateur à noyau $g(x, y)$, g étant la fonction de Green de Δ dans U.

La notion d'ouvert *très régulier* introduite par Bony est utilisée pour la construction de fonction barrière ce qui permet par un argument classique de montrer que le problème de Dirichlet est bien posé. Cependant, pour le cas d'ouvert à bord C^1, on n'obtient pas d'information par cette méthode.

Exemple. Posons dans H_3, la boule B de Koranyi de centre 0, $(|z|^4 + t^2)^{1/4} \leqslant \varrho$. Alors aux points où les caustiques de $(0, 0, 0)$ recoupent ∂B, i.e. le point $p = (0, 0, \pm\varrho^2)$, cette boule n'est pas *très régulière* puisque une boule euclidienne tangente à B en ce point p est centrée sur l'axe de t donc précisément sur la direction caractéristique de l'opérateur Δ en p.

Introduisons alors la notion d'ouvert *régulier* en disant que $x_0 \in \partial U$ est point régulier si, partant de x_0 à $s = 0$ le processus de diffusion de générateurs $\frac{1}{2}\Delta$ sort de $\bar{U}$ à des instants aussi petits qu'on veut, i.e. si on appelle T_U le temps de sortie de $U, P_{x_0}(T_U = 0) = 1$; U est régulier si tout $x_0 \in \partial U$ est regulier.

LEMME 1. *La boule de Koranyi $B(\varrho)$ de centre* $(0, 0, 0)$ *et de rayon ϱ est ouvert régulier.*

Preuve. (1°) En un point (x, y, t) différent des caustiques, il est facile de montrer que la direction normale δ à la boule de Koranyi qui est en ce point $\delta = (4(x^2 + y^2)x, 4(x^2 + y^2)y, 2t)$ n'annule pas le symbole principal de Δ en ce point puisque

$$\sigma(x, y, t, \delta) = 16|z|^2(|z|^4 + t^2) = 16|z|^2\varrho^4 \neq 0.$$

Donc la boule de Koranyi est un ouvert très régulier en ces points, d'après Bony on peut construire une barrière; le problème de Dirichlet est bien posé en ces points et par suite le processus sort instantanément.

(2°) En $(0, 0, \pm\varrho^2)$, nous vérifions la condition $P_{x_0}(T_U=0)=1$. Le processus issu de ce point est translaté à gauche du processus issu de $(0, 0, 0)$ donc est $x(s)$, $y(s)$, $\pm\varrho^2+2\int_0^s(x(s)dy(s)-y(s)dx(s))$. Mais $\int_0^s(xdy-ydx)=a(\tau(s))$ où a est un brownien et $\tau(s)=\int_0^s(x^2+y^2)$ du et par conséquent, a est à des instant aussi petits qu'on veut positif où négatif, donc le processus issu de $(0, 0, \pm\varrho^2)$ a sa cote qui dépasse $\pm\varrho^2$ à des instants aussi petits qu'on veut et donc sort de $B(\varrho)$ instantanément.

THÉORÈME 1. *Soit U un ouvert de M, borné, régulier au sens précédent pour l'opérateur Δ. Alors le problème de Dirichlet sur U est bien posé. De plus si Δ admet une fonction de Green globale sur M, alors U a une fonction de Green qui tend vers 0 au bord de U.*

Preuve. Elle utilise une technique probabiliste bien connue (voir [16] et également [11] pour le problème de Dirichlet fin en elliptique). On pose en effet $\varphi\in C(\partial U)$

$$f(x) = E_x(\varphi(g_\omega(T_U))).$$

On vérifie immédiatement la propriété de martingale pour f, i.e. f annule l'opérateur Δ au sens $\mathcal{D}'$ donc est C^∞ dans U. Le seul point est de voir que $f(x)\to\varphi(x_0)$ si $x\to x_0\in\partial U$. Pour cela on reprend la preuve de [11], § 1, Lemme 2 en la modifiant légèrement.

LEMME 2. *Sur $x_0\in\partial U$ point régulièr, $W(x_0)$ et $V(x_0)$ deux voisinages ouverts très réguliers de x_0 tels que $\overline{V(x_0)}\subset W(x_0)$. Alors*

$$\lim_{\substack{y\to x_0\\ y\in U}} (P_y(\hat{T}_{V(x_0)-U} < T_{W(y_0)})) = 1 \tag{2.1}$$

où $\hat{T}_{V(x_0)-U}$ est le premier temps de rencontre de $V(x_0)-U$ et $T_{W(x_0)}$ est le premier temps de sortie de $W(x_0)$.

Preuve. La fonction $x\in W(x_0)\to P_x(\hat{T}_{V(x_0)-U}<T_{W(y_0)})$ est le potentiel capacitaire de $V(x_0)-U$ relativement à l'ouvert très régulier $W(x_0)$, donc est du type $\int G(x,z)d\mu(z)$ où μ est portée par $\overline{V(x_0)-U}$ et où G est la fonction de Green de $W(x_0)$ qui existe d'après le type de régularité imposée à $W(x_0)$ et d'après le résultat de Bony rappelé ci-dessus. Un tel potentiel est sci et par suite

$$\liminf_{\substack{y\to x_0\\ y\in V}} P_y(\hat{T}_{V(x_0)-U}<T_{W(y_0)}) \geqslant P_{x_0}(\hat{T}_{V(x_0)-U}<T_{W(x_0)}).$$

Mais cette dernière quantité est 1 car x_0 étant régulier pour U, le processus issu de x_0 recontre $\complement U$ à des instants aussi petits qu'on veut et donc aussi $V(x_0) \cap \complement U$ car il est à trajectoire continus, donc $\hat{T}_{V(x_0)-U}=0$ *p.s.* P_{x_0} et donc comme $T_{W(x_0)}>0$ *p.s.* P_{x_0} (par continuité des trajectoires), on a le résultat attendu.

Fin du Théorème 1. On pose $g(x)=E_x(\varphi(g(T_U)))-\varphi(x_0)$. Soit $W(x_0)$ voisinage très régulier de x_0 tel que

$$y \in W(x_0) \Rightarrow |\varphi(y)-\varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned}|g(y)| &< \varepsilon + E_y(|\varphi(g(T_U))-\varphi(x_0)|/g(T_U) \notin W(x_0)) \\ &\leqslant \varepsilon + 2 \max_{\partial U} |\varphi| P_y(g(T_U) \notin W(x_0)).\end{aligned}$$

Par Lemme 2, il existe $U(x_0)$ tel que

$$g \notin W(x_0) \Rightarrow P_y(g(T_U)) \notin W(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2 \max_{\partial U} |\varphi|}$$

d'où le résultat.

La fonction de Green de U est alors obtenue en résolvant le problème de Dirichlet pour la fonction de Green globale de M sur le bord de U par la méthode classique.

On a alors la décomposition classique en potentiel de Green + partie harmonique pour toute fonction $f \in C(\bar{U})$ dès que U est régulier.

2.2. Exemples de répartition de la mesure harmonique

Considérons le groupe d'Heisenberg H_{2n+1} ses coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ et t comme au § 1 et considérons sa fonction $\varrho(z,t)=(|z|^4+t^2)^{1/4}$ et la boule de Koranyi $B(1)=\{(z,t)/\varrho \leqslant 1\}$. On a évidemment le lemme suivant.

LEMME 3. *La fonction de Green de $B(1)$ de pôle $(0,0)$ est $C\varrho(z,t)^{-2n} - C$ où C est une constante universelle ne dépendant que de n.*

Preuve. Par Folland on sait que $C\varrho^{-2n}$ est solution fondamentale dans tout H_{2n+1} et donc $C\varrho^{-2n}-C$ est telle que son laplacien est $-\delta_0$ et elle vaut 0 du bord de la boule de Koranyi.

Maintenant nous démontrons une formule de Green hypoelliptique adaptée au cas H_{2n+1}. Plus précisément on a :

LEMME 4. *Pour f, h fonction C^2 sur $B(1)$, on a la formule de Green hypoelliptique suivante :*

$$\int_{B(1)} h\Delta_{H_{2n+1}} f\,dy = -\int_{B(1)} (\nabla_{H_{2n+1}} f \mid \nabla_{H_{2n+1}} h)\,dy + \int_{S(1)} \frac{h}{\|\nabla \varrho^4\|} (\nabla_{H_{2n+1}} f \mid \nabla_{H_{2n+1}} \varrho^4)\,d\sigma$$

où on définit $\nabla_{H_{2n+1}} f = (\mathfrak{L}_{X_1} f, \mathfrak{L}_Y f, \ldots, \mathfrak{L}_{X_n} f, \mathfrak{L}_{Y_n} f)$ *et*

$$(\nabla_{H_{2n+1}} f \mid \nabla_{H_{2n+1}} h) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{L}_{X_i} f \mathfrak{L}_{X_i} h + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{L}_{Y_i} f \mathfrak{L}_{Y_i} h$$

est le produit scalaire des gradients hypoelliptiques, ϱ^4 *est la fonction de Folland et* $\|\nabla \varrho^4\|$ *est la longueur euclidienne du gradient usuel de* ϱ^4.

Preuve. On applique la formule de Stokes usuelle en tenant compte de l'expression des champs invariants à gauche de § 1.1 et en regroupant les termes de façon intrinsèque.

COROLLAIRE. *On a la formule suivante pour* $h, f \in C^2(\overline{B(1)})$

$$\int_{B(1)} h\Delta_{H_{2n+1}} f\,dg - \int_{B(1)} f\Delta_{H_{2n+1}} h\,dg = \int_{S(1)} \frac{d\sigma}{\|\nabla \varrho^4\|} ((\nabla_{H_{2n+1}} f \mid \nabla_{H_{2n+1}} \varrho^4)\,h - (\nabla_{H_{2n+1}} h \mid \nabla_{H_{2n+1}} \varrho^4)\,f).$$

THÉORÈME 3. *Pour* f *harmonique sur* $B(1)$*, on a la formule*

$$f(0) = \int_{S(1)} f(x,t) \frac{C|z|^2}{\|\nabla \varrho^4\|} d\sigma(z,t).$$

Preuve. Corollaire précédent avec f harmonique et h le noyau de Green.

Remarque. Contrairement au cas elliptique, cette formule montre que la *mesure harmonique a un zéro d'ordre* 2 *en* $|z|=0$ sur la sphère $S(1)$ de Koranyi. Les points $|z|=0$ sont précisément les intersections de la caustique de 0, avec la sphère de Koranyi. Au point de vue probabiliste le processus sort peu du voisinage de la caustique. Malgré ce zéro, il est intéressant de noter que le lemme de Harnack [1] reste vrai dans la boule ce qui signifie essentiellement ici que les mesures harmoniques de différents points ont leurs zéros répartis de la même façon.

Donnons un autre exemple de répartition de la mesure harmonique dans un cas où on ne peut pas trouver facilement de noyau de Green du domaine.

Considérons toujours dans H_3, le domaine $D=\{y>0\}$. Son bord est un ouvert très régulier. On a alors en notant $\varrho_{(x_0,y_0,t_0)}(dx \otimes dt)$ la mesure harmonique de D calculée au point $(x_0, y_0, t_0) \in D$:

THÉORÈME 4. $\varrho_{(x_0,y_0,t_0)}(dx \otimes dt)$ *a une densité par rapport à* $dx \otimes dt$ *et elle vaut :*

$$\varrho_{(x_0,y_0,t_0)}(x,t) = Cy_0 \int_0^{+\infty} ds \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{s^{3/2}} \sqrt{\frac{\xi}{\operatorname{th} 2s\xi}}\, \frac{1}{\operatorname{ch} 2s\xi}$$
$$\times \exp\left[i\xi(t_0-t) + 2i\xi(x-x_0)y_0 - (x-x_0)^2\xi \coth 2s\xi - \frac{|y_0|^2}{2s}\right] d\xi$$

où C est une constante de normalisation.

Preuve. Soit $g(s)$ la diffusion de $\frac{1}{2}\Delta_K$ issue de (x_0, y_0, t_0). Par invariance à gauche elle est

$$(x(s)+x_0,\, y(s)+y_0,\, t(s)+t_0+2(x(s)y_0-x_0y(s)))$$

où $(x(s), y(s), t(s))$ est la diffusion issue de 0 calculée au § 1, Lemme 1. Soit T le premier temps d'atteinte du bord. Alors

$$\int \varphi(x,t)\, \varrho_{(x_0,y_0,t_0)}(dx \otimes dt) = E_{(x_0,y_0,t_0)}(\varphi(g(T))).$$

Prenons $\varphi(x, t) = \exp i(\lambda x + \mu t)$ en sorte que

$$\hat{\varrho}_{(x_0,y_0,t_0)}(\lambda,\mu) = e^{i\mu t_0} E(\exp i[\lambda x(T) + \mu(t(T) + 2x(T)y_0) + \lambda x_0]).$$

Mais T n'est autre que le premier temps d'atteinte de 0 par un brownien standard réel issu de y_0, de sorte que par [19].

$$P(T \in dt) = \exp\left(-|y_0|^2/2t\right) \frac{y_0}{(2\pi t)^{3/2}}\, dt$$

et donc

$$\hat{\varrho}_{(x_0,y_0,t_0)}(\lambda,\mu) = y_0 e^{i\mu t_0} \int_0^{+\infty} \exp\left(-|y_0|^2/2s\right) E(\exp i(\lambda[x(s)+x_0] + \mu(t(s) + 2x(s)y_0)) \frac{ds}{(2\pi s)^{3/2}}.$$

Appelons $\dot{E}$ l'espérance sous le signe d'intégration $\int_0^{+\infty}$ alors $\dot{E} = E(E_0^{x(s),y(s)}(e^{i\mu t(s)}) \times e^{i\lambda x(s)+2i\mu y_0 x(s)})e^{i\lambda x_0}$ ce qui se calcule alors par Lemme 2 du § 1 et fournit le résultat attendu.

Remarque. Le problème du calcul de la mesure harmonique d'un demi espace dont le bord contient le centre du groupe nous a été posé par Y. Guivarch'.

2.3. Estimée de première valeur propre pour la boule de Koranyi

Considérons l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta_K$ agissant sur les fonctions $L^2(B(R))$, ($B(R)$ désignant toujours la boule de Koranyi) nulles au bord. C'est un opérateur $\leqslant 0$ et les estimées hypoelliptiques montrent que son spectre est discret et tend vers $-\infty$ puisque son noyau de

Green est un opérateur compact. Appelons $\lambda_1<0$ sa plus grande valeur propre, φ_1 fonction propre associée. Par les estimées hypoelliptiques, les fonctions propres sont C^∞ et tendent vers 0 au bord et on a

$$-\varphi_1(0)=\lambda_1\int_{B(R)} g(0,\cdot)\,\varphi_1(\cdot)\,d(\cdot)$$

où g désigne la fonction de Green de la boule $B(1)$ puisque $\Delta_K g=-\delta_0$. Soit T_R le premier temps de sortie de la boule $B(R)$ pour le processus issu de 0. Evidemment, par raison de symétrie φ_1 atteint son maximum au centre et par conséquent, on a

$$\frac{1}{E_0(T_R)}\leqslant-\lambda_1$$

en utilisant l'interprétation de la fonction de Green comme temps de séjour.

D'autre part, on a :

THÉORÈME 5. *Pour tout $\lambda>0$, on a*

$$\left(\int_0^\pi \operatorname{ch}\,(\sqrt{2\lambda}\,R\cos\psi)\,d\psi\right)^{-1}\leqslant E_0(e^{-\lambda T_R})\leqslant\exp\left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{\lambda R^2}{2}}\right)\right]$$

où T_R est le premier temps de sorte de $B(0,R)$.

Preuve. (1°) L'inégalité de gauche s'obtient en remarquant que le temps de sortie de la diffusion de Kohn de la boule de Koranyi est plus petit que celui de la diffusion euclidienne de la boule euclidienne de même rayon puisque la projection euclidienne de la diffusion de Kohn (respectivement de la boule de Koranyi de rayon R) est égale à la diffusion euclidienne (resp. de la boule euclidienne de rayon R). Ensuite $E_0(\exp[-\lambda T_R^{\text{eucl}}])$ est valeur en 0 de la fonction propre du laplacien euclidien de dimension 2 correspondant à la valeur propre λ et valant 1 sur la sphère de centre 0 et de rayon R; on a donc pour $x\in B^{\text{eucl}}(0,R)$

$$E_x(\exp[-\lambda T_R^{\text{eucl}}])=\frac{\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{ch}\,(\sqrt{2\lambda}\,|x|\cos\psi)\,d\psi}{\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{ch}\,(\sqrt{2\lambda}\,R\cos\psi)\,d\psi}.$$

(2°) Pour l'inégalité de droite remarquons que ϱ^4 est une fonction sous-harmonique pour le laplacien de Kohn et que plus précisément $\frac{1}{2}\Delta_k\varrho^4=8|Z|^2$ en sorte que

$$\varrho^4(Z_s,T_s)-\int_0^s 8|Z|^2(\xi)\,d\xi$$

est une martingale. Appliquons l'inégalité de la martingale exponentielle de Mac Kean [19], on a que

$$\exp\left[\gamma\varrho^4(Z_s, T_s) - \gamma\int_0^s 8|Z|^2(\xi)\,d\xi - \frac{\gamma^2}{2}\int_0^s \|\nabla_k(\varrho^4)\|^2 d\xi\right]$$

est une martingale d'espérance 1. On a

$$\|\nabla_k \varrho^4\|^2 = \left(\frac{\partial\varrho^4}{\partial x} + 2\frac{\partial\varrho^4}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varrho^4}{\partial y} - 2x\frac{\partial\varrho^3}{\partial t}\right)^2 = 16|Z|^2\varrho^4.$$

Stoppons la martingale à $s = T_R$ temps de sortie de la boule de Koranyi de rayon R. Alors

$$E_0\left(\exp\left[\gamma\varrho^4(Z_{T_R}, T_{T_R}) - \gamma\int_0^{T_R} 8|Z|^2(\xi)\,d\xi - \frac{\gamma^2}{2}\int_0^{T_R}\|\nabla_k(\varrho^4)\|^2 d\xi\right]\right) = 1.$$

$$\text{Si } \xi \leqslant T_R, |Z|^2(\xi) \leqslant R^2, \varrho^4(\xi) \leqslant R^4, \text{ d'où si } \gamma > 0$$

$$E_0(\exp[-8T_R(\gamma R^2 + \gamma^2 R^6)]) \leqslant \exp[-\gamma R^4].$$

Choisissons $\gamma > 0$ tel que $\gamma^2 R^4 + \gamma - (\lambda/8R^2) = 0$, alors

$$E_0(e^{-\lambda T_R}) \leqslant \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda}{2}R^2}\right)\right].$$

COROLLAIRE. *$E_0(T_R) \leqslant 4^{-1}R^2$ et le $-\lambda_1$ est supérieur au $-\lambda_1$ du laplacien elliptique pour la boule euclidienne de dimension 2 de même rayon.*

§ 3. Singularite du noyau de la chaleur de Δ_K pour des temps petits

3.1. Bicaractéristiques et caustiques pour Δ_K

L'hamiltonien de Δ_K est

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (\xi_j^2 + \eta_j^2 + 4y_j\xi_j\tau - 4x_j\eta_j\tau + 4|z_j|^2\tau^2)$$

où ξ_j, η_j, τ sont les variables duales de x_j, y_j, t. Nous nous plaçerons ici dans H_3 pour simplifier, étant donné que dans H_{2n+1} les phénomènes sont analogues. Les bicaractéristiques de Δ_K sont données par le système d'Hamilton–Jacobi de H dans T^*H_3 (voir [2]) :

$$\frac{dx}{ds} = H_\xi, \quad \frac{dy}{ds} = H_\eta, \quad \frac{d\xi}{ds} = -H_x; \quad \frac{d\eta}{ds} = -H_y, \quad \frac{dt}{ds} = H_\tau, \quad \frac{d\tau}{ds} = -H_t.$$

LEMME 1. *Les bicaractéristiques issues de 0 de Δ_K sont ou bien droites restant dans le plan xy, ou bien des courbes dont la projection sur le plan xy est un cercle passant par 0 et la projection sur le centre (axe des t) est égale à quatre fois l'aire balayée par le rayon vecteur issu de 0 dont l'extrémité décrit le cercle considéré. Enfin ce sont des courbes horizontales pour la connexion complexe du groupe H_3 décrite au § 1.1.*

Preuve. Le système d'Hamilton Jacobi s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi + 2y\tau \\ \dot{y} = \eta - 2x\tau \\ \dot{t} = 2y\xi - 2x\eta + 4|z|^2\tau \\ \dot{\xi} = 2\eta\tau - 4x\tau^2 \\ \dot{\eta} = -2\xi\tau - 4y\tau^2 \\ \dot{\tau} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

d'où aussitôt $\tau = \tau_0$ est constante du mouvement.

(i) *Dans le cas trivial où* $\tau_0 = 0$, on a $x = \xi_0 s$, $y = \eta_0 s$, $t = t_0$ et on trouve donc des droites de l'hyperplan $t = t_0$.

(ii) Supposons maintenant $\tau = \tau_0 \neq 0$: on a alors un système différentiel du ler ordre à coefficients constants en x, y, ξ, η qui s'écrit

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\tau_0 & 0 \\ -4\tau_0^2 & 0 & 0 & 2\tau_0 \\ -2\tau_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\tau_0 & -4\tau_0^2 & 0 \end{pmatrix} V \quad \text{où } V = \begin{pmatrix} x \\ \xi \\ y \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Un calcul donne les valeurs propres $\lambda = 0$ à l'ordre 2 et $\lambda = 4i\tau_0$ et $\lambda = -4i\tau_0$ à l'ordre 1 dont les vecteurs propres respectifs sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2\tau_0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2\tau_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\tau_0 \\ i \\ -2\tau_0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\tau_0 \\ -i \\ -2\tau_0 \end{pmatrix}.$$

On posera $V = \sum_{i=1}^4 \alpha_i V_i$, α_i fonction de x, ξ, y, η. Alors

$$V = \alpha_1(0) V_1 + \alpha_2(0) V_2 + \alpha_3(0) e^{4i\tau_0 s} V_3 + \alpha_4(0) e^{-4i\tau_0 s} V_4.$$

Pour achever de déterminer les courbes intégrales nous écrivons que (x, y, ξ, η) sont réels et que $x(0) = y(0) = 0$. Par conséquent les courbes intégrales de (3.1) sont

$$\begin{aligned}
x(s) &= 2\alpha\,(\cos 4\tau_0 s - 1) - 2\beta \sin 4\tau_0 s \\
y(s) &= -2\alpha \sin 4\tau_0 s - 2\beta\,(\cos 4\tau_0 s - 1) \\
t(s) &= 8(\alpha^2+\beta^2)(4\tau_0 s - \sin 4\tau_0 s) \\
\xi(s) &= -4\alpha\tau_0 \sin 4\tau_0 s - 4\tau_0\beta\,(\cos 4\tau_0 s + 1) \\
\eta(s) &= -4\alpha\tau_0(1+\cos 4\tau_0 s) + 4\beta\tau_0 \sin 4\tau_0 s \\
\tau(s) &= \tau_0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ce qui achève le Lemme 1.

Remarque 1. τ_0 est constante du mouvement; τ_0, α, γ sont les conditions initiales de la bicaractéristique.

Remarque 2. Des systèmes hamiltoniens analogues sont étudiés dans [13] dans un cadre non homogène.

Définition 1. Soit une bicaractéristique décrite pendat l'intervalle de temps s_0 qui est une droite ou une courbe décrite par (3.3). Alors l'action classique le long de cette bicaractéristique est

$$S = \int_0^{s_0} (\xi\, dx + \eta\, dy + \tau\, dt) \quad \text{(voir [2]).}$$

Un calcul donne alors

LEMME 2. *L'action classique calculée le long de la bicaractéristique de paramétres initiaux* (α, β, τ) *décrite pendant le temps* s_0 *est* $S = 64\tau^2(\alpha^2+\beta^2)s_0$.

Nous allons maintenant calculer les paramétres initiaux d'une bicaractéristique joignant 0 à $g_0 = (x_0, y_0, t_0)$ pendant l'intervalle de temps s_0.

1er cas : le point $g_0 = (x_0, y_0, 0)$.

Dans ce cas d'après Lemme 1, la seule possibilité est de prendre le segment de droite décrit avec la vitesse uniforme allant de 0 à g_0 pendant le temps s_0. Alors $\tau_0 = 0$, $x = \xi_0 s$, $y = \eta_0 s$ où $\xi_0 = s^{-1}x_0$, $\eta_0 = s^{-1}y_0$ et

$$S = \int_0^{s_0} (\xi_0^2 + \eta_0^2)\, ds = s^{-1}\lambda_0^2 \quad \text{où} \quad \lambda_0^2 = x_0^2 + y_0^2. \tag{3.4}$$

2ème cas : le point $g_0 = (0, 0, t_0)$ $(t_0 > 0$ *par exemple*).

Une bicaractéristique allant de 0 à g_0 sera alors en projection sur le plan x, y un cercle issu de 0 faisant k tours complets pendant le temps s_0 et dont l'aire balayée totale est $t_0/4$; d'après les deux premières équations de (3.3), on doit prendre $\tau_0 = \frac{1}{2}k\pi/s_0$. L'aire totale du cercle est $4(\alpha^2+\beta^2)\pi$, et il suffit donc de choisir $\alpha^2+\beta^2 = k^{-1}(16\pi)^{-1}t_0$. L'action classique est

$$S = k\pi t_0 s_0^{-1}. \tag{3.5}$$

Elle sera minimale pour la bicaractéristique correspondant à $k=1$.

3ème cas : le point g_0 est tel que $\lambda_0^2 \neq 0$ et $t_0 \neq 0$

Dans ce cas les deux premières équations de (3.3) écrites à $s=s_0$ se résolvent en α, γ de façon unique à condition que $2\tau_0 s_0 \neq k\pi$ (k entier). Un calcul montre alors que, posant $\lambda_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ on a $\alpha^2+\beta^2 = \lambda_0^2\ (16\sin^2 2\tau_0 s_0)^{-1}$. Reportant dans la 3ème équation de (3.3), on déduit que τ_0 doit satisfaire

$$\lambda_0^{-2}\, t_0 = \frac{4\tau_0 s_0 - \sin 4\tau_0 s_0}{2\sin^2 2\tau_0 s_0} \equiv \theta\,(2\tau_0 s_0) \tag{3.6}$$

où on a posé $\theta(y) = (2y - \sin 2y)\,(2\sin^2 y)^{-1}$.

LEMME 3. *La fonction $\theta(y)$ est impaire et est une bijection strictement croissante de* $[0, \pi[$ *sur* $[0, +\infty[$.

Preuve.

$$\theta'(y) = (2\sin y - 2y\cos y)\sin^{-3} y > 0 \quad \text{sur }]0, \pi[.$$

Définition 2. On note $\tau :]-\infty, +\infty[\to]-\pi, +\pi[$ la fonction réciproque de θ sur $]-\pi, +\pi[$.

Soit un τ_0 général satisfaisant (3.6); on en déduit alors une bicaractéristique allant de 0 à g_0 pendant s_0 et dont l'action est d'après Lemme 2, le calcul de $\alpha^2+\beta^2$ en fonction de τ_0.

$$S = s_0^{-1}\lambda_0^2(2\tau_0 s_0)^2(\sin 2\tau_0 s_0)^{-2}. \tag{3.7}$$

En particulier choisissant pour τ_0 l'unique valeur satisfaisant (3.6) et $\tau_0 \in]-(2s_0)^{-1}\pi, (2s_0)^{-1}\pi[$ on déduit

$$S = s_0^{-1}\lambda_0^2\,\tau(t_0\lambda_0^{-2})\,(\sin\tau(t_0\lambda_0^{-2}))^{-2}. \tag{3.8}$$

Définition 3. On appelle bicaractéristique minimale joignant 0 à g_0 pendant le temps s_0, une bicaractéristique de moindre action ayant ces propriétées. On note $S_s(0|g)$ la fonction d'action définie par (3.4), (3.5) et (3.8). On a alors immédiatement par les remarques précédentes.

LEMME 4. (1°) *$S_s(0|g)$ est l'action minimale pour aller de 0 à g pendant l'intervalle de temps s lorsque $g=(z,t)$ est tel que $|z|=0$ ou $t=0$.*

(2°) *$S_s(0|g)$ est une fonction continue de $g\in H_3$ et elle est différentiable sauf sur $z=0$.*

(3°) *Pour $g=(x,y,0)$ la bicaractéristique minimale allant de 0 à g pendant le temps s est unique et c'est le segment de droite joignant 0 à g décrit à vitesse uniforme pendant le temps s.*

(4°) *Pour $g=(0,0,t)$ une bicaractéristique minimale allant de 0 à g pendant le temps s a pour projection sur le plan xy un cercle passant par 0 de rayon $4^{-1}\sqrt{\pi^{-1}t}$ décrit une seule fois entièrement à vitesse uniforme et la projection sur le centre est quatre fois l'aire balayée par le rayon vecteur issu de 0. Il y a une infinité de telles bicaractéristiques minimales se déduisant de l'une quelconque d'entre elles par rotation d'axe t.*

Remarque. Nous ne sommes pas encore en mesure de démontrer que la formule (3.8) décrit l'action minimale lorsque $|z|t\neq 0$. Ce sera démontré en 3.4.

Définition 4. On appellera point caustique de $g\in H_3$, tout point qui peut être joint à g par plusieurs bicaractéristiques minimales distinctes pendant un même intervalle de temps (voir [2] et [27]).

Définition 5. Fixons $s_0\neq 0$. On appellera coordonnées bicaractéristiques de $g\in H_3$ (de centre 0, relativement à s_0 et à Δ_K) les trois nombres $(\alpha,\beta,\tau)\in\mathbf{R}^3$ tels que $\tau\in[-(2s_0)^{-1}\pi, (2s_0)^{-1}\pi]$ tels que la bicaractéristique de paramètres initiaux (α,β,τ) joigne 0 à g pendant l'intervalle de temps s_0 (voir [27]).

LEMME 5. *Soit $s_0\neq 0$ fixé. Le changement de carte bicaractéristique $\Phi_{s_0}:(x,y,t)\to(\alpha,\beta,\tau)$ est un difféomorphisme de $H_3-\{(0,0,t)/t\in\mathbf{R}\}$ sur $\mathbf{R}^2\times\,]-(2s_0)^{-1}\pi,(2s_0)^{-1}\pi[$. Tous les points du centre de H_3 sont des points caustiques de 0.*

Preuve. Elle est évidente par les considérations précédentes. Un calcul évident montre que le jacobien de Φ_{s_0} ne s'annule pas hors du centre.

Nous utiliserons enfin quelques propriétés variationnelles des systèmes hamiltoniens de courbes horizontales démontrées dans une situation plus générale dans [13]. Pour cela, on applique [13] au cas de la fibration triviale $H_3\to\mathbf{C}$ muni de la connexion définie en § 1.1. Dans notre situation, les résultats sont résumés dans le Théorème 1 suivant, (dont la première partie est d'ailleurs triviale).

THÉORÈME 1. (1°) *Les bicaractéristiques joignant 0 à g sont des courbes horizontales pour la connexion et l'action le long d'une bicaractéristique est égale à l'énergie de sa projection sur $\mathbf{C}$.*

(2°) *Parmi toutes les courbes horizontales C^1 par morceaux joignant* 0 *à* g *pendant le temps* s *les bicaractéristiques extrêmalisent l'énergie de leur projection sur* $\mathbf{C}$.

Cela signifie en particulier que le problème variationnel horizontal associé est le problème de minimiser l'énergie d'une courbe de la variété de base sous la condition de Lagrange que son relèvement horizontal est fixé dans le fibré. Ce problème semble non étudié et nous verrons au § 5 qu'il peut ne pas avoir de solutions dans la catégorie des courbes C^1; il s'apparente à un problème de contrôle optimal déterministe.

Remarque 1. Le phénomène de caustiques précédent n'apparaît jamais en elliptique ou en hyperbolique : car les points focaux en elliptique restent toujours à une distance $>\delta>0$ du point de départ (à savoir le rayon d'injectivité de la métrique riemannienne associée aux termes du 2nd ordre) et en hyperbolique on suppose toujours dans le problème de Cauchy que la propagation est régulière pendant un petit laps de temps (voir [2]). Ce phénomène de caustique semble général en hypoelliptique (voir [13] et le § 5).

Remarque 2. Les caustiques et les bicaractéristiques issues d'un autre point g_0 et H_3 sont obtenues par action du groupe d'Heisenberg g_0 à gauche sur les caustiques ou bicaractéristiques issues de 0 décrites ci-dessus.

Remarque 3. On peut remarquer l'analogie entre la description des bicaractéristiques et de la diffusion de Δ_k : dans chacun de ces cas la projection en t de la trajectoire est égale à 4 fois l'aire balayée par le rayon vecteur issu de 0, décrivant soit un cercle, soit le brownien standard dans $\mathbf{C}$. Dans tous les cas, il s'agit d'un relèvement horizontal de courbes à travers une connexion (voir [24] pour le relèvement des diffusions par une connexion).

Remarque 4. Notre définition du changement de carte bicaractéristique ne coïncide pas tout à fait avec celle de Maslov [27]; Maslov utilise l'action elle même comme une des coordonnées bicaractéristique. Ici on voit que $(\alpha,\gamma,\tau)\to(\alpha,\gamma,S_s(0\,|\,g))$ est un changement de variables régulier hors du centre. Les coordonnées bicaractéristiques généralisent la carte exponentielle de la situation elliptique; contrairement à ce cas, aucun point ne possède de voisinages où le changement de carte bicaractéristique est un difféomorphisme.

3.2. Estimée de p_s pour $s \to +0$

THÉORÈME 2. *Dans le cas du groupe d'Heisenberg* H_3, *on a*

(1°) *Si* $g=(z,0)$

$$p_s(0,(z,0))\sim 2(2\pi)^{-2}s^{-3/2}\sqrt{3\pi(2\lambda^2)^{-1}}\,\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2s}\right).$$

(2°) *Si* $g=(0,t)$

$$p_s(0,(0,t)) = (2(2s)^2)^{-1} \exp\left(-\frac{\pi t}{2s}\right)\left(1+\exp\left(-\frac{\pi t}{2s}\right)\right)^{-2}.$$

(3°) *Si* $g=(z,t)$, *on a alors si* $|z|\neq 0$.

$$p_s(0,(z,t)) = \exp\left(-\frac{S_s(0|z,t)}{2}\right)\times[s^{-3/2}\Phi(t)+O(s^{-1})]$$

où on a posé

$$\Phi(t)=\lambda^{-1}(2\pi)^{-3/2}[\sin\tau(t\lambda^{-2})(\sin\tau(t\lambda^{-2})-\tau(t\lambda^{-2})\cos\tau(t\lambda^{-2}))^{-1}]^{1/2}\tau(t\lambda^{-2})$$

où $\tau(t)$ *est la fonction introduite dans la définition* 2 *du* 3.1.

(4°) *En particulier dans tous les cas*

$$-\log p_s(0,(z,t)) \simeq \frac{S_s(0,(z,t))}{2}.$$

La démonstration sera donnée en § 3.3. Auparavant faisons quelques remarques.

Remarque 1. Dans le cas elliptique, cette estimée est démontrée par Varadhan (voir [33]); *l'action classique* est élémentaire à calculer : écrivons en effet $\Delta = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(\partial^2/\partial x_i\partial x_j) + \sum b_i(\partial/\partial x_i)$ où $(a_{ij})_{ij}$ est matrice symétrique définie positive. Posons $g^{ij}=a_{ij}$ et $(g_{ij})_{ij}$ la matrice inverse de $(g^{ij})_{ij}$. Soit $ds^2=g_{ij}\,dx^i dx^j$ qui est métrique riemannienne associée à Δ. Alors $\Delta=\frac{1}{2}\Delta_{ds^2}+L_V$ où Δ_{ds^2} est le laplacien riemannien du ds^2 et L_V un champ de vecteurs. Un calcul élémentaire montre que le système de Hamilton Jacobi associé au symbole principal de Δ (ou de $\frac{1}{2}\Delta_{ds^2}$) se traduit par transformation de Legendre dans le fibré tangent en le système d'Euler Lagrange des géodésiques du ds^2. Si $p, q\in M$ (variété sur laquelle opère Δ), l'action classique le long de la bicaractéristique (=géodésique) *minimale* allant de p à q pendant le temps s n'est autre que l'énergie de la géodésique correspondant $d^2(p,q)/(2s)$ où $d(p,q)$ est la distance riemannienne selon le ds^2 de p à q.

Remarque 2. Formellement, le résultat de la partie (4°) du Théorème 2 est naturel. En effet, utilisons un développement asymptotique pour $s\to 0$ du p_s du type

$$p_s = \exp(-\psi)[u_0+su_1+\dots]$$

et remplaçons dans l'équation de la chaleur en annulant séparément chaque puissance de s. Admettant que ψ est homogène de degré -1 en s, on obtient l'équation d'Hamilton Jacobi $\partial\psi/\partial s+H(\nabla\psi,\nabla\psi)=0$ donc ψ est une action. Cependant, nous savons par le Lemme

4 de § 3.1 que l'action minimale n'est différentiable sur aucun voisinage du point de départ donc l'équation d'Hamilton Jacobi n'a pas de sens même localement.

Remarque 3. Nous voyons d'autre part que la puissance de s qui apparaît dans le terme dominant du développement asymptotique de p_s en facteur de $\exp(-\frac{1}{2}S_s)$ *diffère selon le point d'arrivée*; en particulier, si le point d'arrivée est caustique de 0 (point de départ), la puissance est s^{-2}. Mais pour tous les autres points, la puissance est $s^{-3/2}$ (i.e. la puissance qu'on obtiendrait en elliptique sur un espace de dimension 3). Ce phénomène de changement de puissance de s n'apparait jamais en elliptique au voisinage V où la puissance dominante de s est $s^{-n/2}$ n étant la dimension de l'espace. Molchanov [28] a cependant démontré que aux points conjugués et aux points de cut locus de m_0, la puissance n'était plus nécessairement $s^{-n/2}$ mais pouvait varier selon la géométrie de l'espace des géodésiques minimisantes joignant m_0 au point d'arrivée en question. Ici c'est ce qui arrive. L'étude du 3.1 montre que si le point d'arrivée g n'est pas au centre de H_3, l'espace des bicaractéristiques minimales allant de 0 à g est réduit à un point. Au contraire si g est sur la caustique de 0 (i.e. le centre de H_3), l'espace des bicaractéristiques minimales allant de 0 à g est un cercle.

Nous verrons au § 5, que dans les groupes $N_{n,2}$ pour $n \geq 4$, il peut arriver qu'il n'y ait plus existence d'une bicaractéristique *régulière* minimisante joignant un point à un autre.

3.3. Preuve du Théorème 2

On utilise l'expression de p_s donnée au Théorème 1 de § 1.2.

1er cas : $g=(z, 0)$

Dans ce cas l'intégrale à évaluer est

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{u}{\operatorname{sh} u} \exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\frac{u}{\operatorname{th} u}\right] du = 2\int_0^{+\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} u} \exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\frac{u}{\operatorname{th} u}\right] du$$

$$\left(\frac{u}{\operatorname{th} u}\right)' = \frac{1}{2\operatorname{sh}^2 u}(\operatorname{sh} 2u - 2u)$$

$$\left(\frac{u}{\operatorname{th} u}\right)'' = -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 u}(\operatorname{sh} u - u \operatorname{ch} u).$$

Au point $u=0$, la phase $-\frac{1}{2}(x^2+y^2)(u/\operatorname{th} u)$ présente donc un point critique non dégénéré (la valeur de la dérivée secondé de la phase y est $-(x^2+y^2)/3$ qui vaut $-(x^2+y^2)/2$ et ce point critique est un maximum de la phase car $(u/\text{th}\, u)'$ est partout >0 sauf en 0). La méthode du col donne alors ([5]).

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\text{sh}\, u} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2s}\frac{u}{\text{th}\, u}\right) du \sim \left|\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\right| \sqrt{\frac{3\pi s}{2(x^2+y^2)}} \text{ si } s\to 0.$$

2ème cas : $g=(0,t)$.

On a alors

$$p_s(0,(0,t)) = (2(2\pi s)^2)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i\tau t}{2s}\right) \frac{\tau\, d\tau}{\text{sh}\, \tau}.$$

On intègre sur le contour $|\tau| = R$, $\text{Im}\, \tau > 0$; $-R < \text{Re}\, \tau < +R$, $\text{Im}\, \tau = 0$. Les pôles sont $ik\pi$ $(k>0)$ avec résidu $(-1)^k\, ik\pi \exp(-(k\pi t/2s))$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i\tau t}{2s}\right)\frac{\tau\, d\tau}{\text{sh}\, \tau} = \pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} k \exp -(k\pi t/2s)$$

d'où le résultat.

3ème cas : $g=(z,t)$, $|z|\, t \neq 0$, $t>0$.

On étudie alors l'intégrale de Fourier

$$\int_{\mathbf{R}} \exp\left(\frac{i\xi t'}{\sigma} - \frac{\lambda^2}{2\sigma}\frac{2\xi}{\text{th}\, 2\xi}\right)\frac{2\xi\, d\xi}{\text{sh}\, 2\xi} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \exp\left[\frac{i}{s}\left(tx + \frac{ix}{\text{th}\, x}\right)\right]\frac{x\, dx}{\text{sh}\, x} \tag{3.9}$$

où on a posé $t = t'\lambda^{-2}$, $s = 2\sigma\lambda^{-2}$.

On posera

$$I(s,t) = \int_{\mathbf{R}} \exp\left[\frac{i}{s}(tx + ix \coth x)\right] x(\text{sh}\, x)^{-1}\, dx.$$

et on utilisera une méthode de phase stationnaire qui nous a été suggérée par A. Mellin et qui remplace une méthode initiale beaucoup plus longue.

LEMME 6. *Lorsque* $s\to 0^+$, *on a*

$$I(s,t) = \exp(-s^{-1}\tau(t)^2 (\sin \tau(t))^{-2}) \{s^{1/2}\psi(t) + O(s)\} \tag{3.10}$$

où on a

$$\psi(t) = \tau(t)(\pi \sin \tau(t)\, (\sin \tau(t) - \tau(t)\cos \tau(t))^{-1})^{1/2}$$

$\tau(t)$ *étant la fonction de la définition* 2 *de* § 3.1.

Preuve. On a

$$I(s,t)=\int_{\mathbf{R}}\exp\,(is^{-1}\varphi(x))\frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x}$$

où on a posé $\varphi(z)=t'z+iz\coth z$.

On a alors

$$\varphi'(z)=t'+i\,\frac{\operatorname{sh} 2z-2z}{2\operatorname{sh}^2 z}=\frac{\varphi(z)}{z}-iz\operatorname{sh}^{-2} z$$

$$\varphi''(z)=i\,\frac{\operatorname{sh} z-z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh}^3 z}. \tag{3.11}$$

Remarquons que il existe un point critique imaginaire pur de la phase $z=i\tau(t)$ puisque précisément par le calcul ci-dessus $t=(2\tau(t)-\sin 2\tau(t))/(2\sin^2\tau(t))\Rightarrow\varphi'(i\tau(t))=0$ et que de plus ce point est non dégénéré car $\varphi''(i\tau(t))=i\,(\sin\tau(t)-\tau(t)\cos\tau(t))\sin^{-3}\tau(t)\neq 0$ car $\operatorname{tg} u>u$ sur $[0,\pi[$ et que $\tau(t)\in[0,\pi[$.

Au lieu d'intégrer sur $\mathbf{R}$, on intègre sur $\operatorname{Im} z=\tau(t)$. On pose $p(x)=\varphi(x+i\tau(t))-\varphi(i\tau(t))$, et donc

$$I(s,t)=\exp\,(s^{-1}i\varphi(i\tau(t)))\,J(s,t)\quad \text{où on a posé} \tag{3.12}$$

$$J(s,t)=\int\exp\,(s^{-1}\,ip(x))\,(x+i\tau(t))\operatorname{sh}\,(x+i\tau(t))^{-1}\,dx. \tag{3.13}$$

Alors $p(0)=0$, $p'(0)=0$, $p''(0)\neq 0$ d'après ce qui précède. Posons pour simplifier

$$a(x)=(x+i\tau(t))\,(\operatorname{sh}\,(x+i\tau(t))^{-1}$$

Admettons alors pour un moment le

LEMME 7. *Im $p(x)$ est fonction croissante de $|x|$ et de plus, il existe $C>0$ avec*

$$\operatorname{Im} p(x)\geqslant C|x|^2(1+|x|)^{-1}. \tag{3.14}$$

Fin de Lemme 6. Ecrivons

$$J(s,t)=\int_{-(-s\log s)^{1/2}}^{(-s\log s)^{1/2}}\exp\,(is^{-1}p(x))\,a(x)\,dx+\int_{-\infty}^{-(-s\log s)^{1/2}}+\int_{(-s\log s)^{1/2}}^{+\infty}.$$

Utilisons alors (3.14) et le fait que $a(x)$ est évidemment intégrable sur $\mathbf{R}$: alors

$$J(s,t)=\int_{-(-s\log s)^{1/2}}^{(-s\log s)^{1/2}}\exp\,(is^{-1}p(x)\,a(x)\,dx+O(s). \tag{3.15}$$

D'autre part dans la première intégrale de (3.15) posons $x=s^{1/2}x'$: alors $ip(s^{1/2}x')s^{-1}\to i(p''(0)/2)|x'|^2$ et par conséquent si $s\to 0$

$$s^{-1/2}\int_{-(-s\log s)^{1/2}}^{+(-s\log s)^{1/2}} \exp\,(is^{-1}p(x))\,a(x)\,dx \to \tau(t)\,(\sin\tau(t))^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\frac{p''(0)}{2}|x|^2\right)dx \tag{3.16}$$

et donc par (3.15) et (3.16)

$$J(s,t)=s^{1/2}\tau(t)\,(\pi\sin\tau(t)\,(\sin\tau(t)-\tau(t)\cos\tau(t))^{-1})^{1/2}+O(s) \tag{3.17}$$

d'où Lemme 6.

Utilisant alors (3.17), (3.12), (3.9), on a

$$\int_{\mathbf{R}}\exp\,(s^{-1}(i\xi t-2^{-1}\lambda^2 2\xi\coth 2\xi))\frac{2\xi\,d\xi}{\operatorname{sh}2\xi}=\frac{1}{2}\exp\,[-\tfrac{1}{2}S_s(0|x,y,t)]$$
$$\times\{(2s)^{1/2}\lambda^{-1}[\pi\sin\tau(t\lambda^{-2})\,(\sin\tau(t\lambda^{-2})-\tau(t\lambda^{-2})\,(\cos\tau(t\lambda^{-2}))^{-1}]^{1/2}\tau(t\lambda^{-2})+O(s)\}$$

compte tenu de l'expression de p_s, cela achève Théorème 2.

Preuve de Lemme 7. Ecrivons $y=\tau(t)$ pour alléger l'écriture. On a alors $t=(2y-\sin 2y)\times(2\sin^2 y)^{-1}$ par définition de τ et alors en utilisant cette relation

$$\operatorname{Im}p'(x)=\operatorname{Im}\varphi'(x+i\tau(t))=(\operatorname{sh}^2 x+\sin^2 y)^{-1}[\operatorname{sh}^2 x\,(\operatorname{sh}2x-2x)$$
$$+\sin^2 y\,(\operatorname{sh}2x+2x\operatorname{ch}2x)-y\sin 2y\operatorname{sh}2x].$$

Mais $2\sin^2 y-y\sin 2y=\sin 2y(\operatorname{tg}y-y)\geqslant 0$ sur $]0,\pi[$ d'où $\operatorname{Im}p'(x)\geqslant C\,(\operatorname{sh}^2 x+\sin^2 y)^{-1}x^5$ pour $x\geqslant 0$ où C est constante $\geqslant 0$.

La minoration de $\operatorname{Im}p(x)$ résulte de cette estimation de $\operatorname{Im}p'$.

3.4. Application à l'étude des bicaractéristiques

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer :

THÉORÈME 3. (1°) *La fonction $S_s(0|g)$ est l'action minimale pour celles de* 0 *à g pendant le temps s.*

(2°) *Tous les points situés hors du centre sont joints à* 0 *par une unique bicaractéristique minimale pendant le temps s. Donc seuls les points du centre sont caustiques pour* 0.

(3°) *Le changement de carte bicaractéristique Φ_{s_0} (hors du centre) est exactement celui qui associe à tout point g situé hors du centre les paramètres initiaux de l'unique bicaractéristique minimale joignant* 0 *à g pendant le temps s_0.*

Preuve. Lorsque $g=(z,t)$ est tel que $|z|+t\neq 0$, nous ne savons pas faire la démonstration directe du fait que (3.8) et § 3.1 est l'action minimale.

Dans [13], il est montré que si $s\to 0$ on a la limite

$$-\log p_s(0|g) \leqslant \tfrac{1}{2} \inf E_s(\gamma) \tag{3.18}$$

où l'infimum porte sur les courbes C^1 par morceaux horizontales telles que $\gamma(0)=0$, $\gamma(s)=g$ et $E_s(\gamma)$ désigne l'énergie de la projection sur le plan xy d'une telle courbe. Comparant ce résultat (3.18) au calcul du Théorème 2, nous déduisons

$$S_s(0|g) \leqslant \tfrac{1}{2} \inf E_s(\gamma)$$

d'où le résultat en utilisant le Théorème 1 rappelé en § 3.1. Tout le reste est évident par les résultats de § 3.1 (Lemme 4 et 5).

Remarque. La preuve de (3.18) est entièrement probabiliste.

§ 4. Cas des groupes nilpotents d'ordre 2

4.1. Algèbres de Lie nilpotentes libres d'ordre quelconque

Définition, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente stratifiée d'ordre r si on peut écrire $\mathfrak{g}=V_1\oplus V_2\oplus \dots \oplus V_r$ où V_i sont les sous espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ avec $V_2=[V_1, V_1]$, $V_3=[V_1, V_2] \dots V_r=[V_1, V_{r-1}]$ et $[V_1, V_r]=0$ et $[V_i, V_j]\subset V_{i+j}$ et on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente libre d'ordre r si en plus les seules relations de liaison entre les crochets successifs sont celles prévues par les identités d'antisymétrie et de Jacobi (voir [30] et [31]).

En particulier, toute algèbre de Lie d'ordre r est quotient d'une algèbre de Lie nilpotente libre par l'idéal des relations supplémentaires vérifiées par l'algèbre considérée.

Dans ce § 4, nous considérerons essentiellement le cas $r=2$. Alors $\mathfrak{g}=V_1\oplus V_2$, $V_2=[V_1, V_1]$, $[V_1, V_2]=0$, $[V_2, V_2]=0$.

Formellement, si N est groupe nilpotent d'ordre 2 stratifié simplement connexe et si Δ est son laplacien hypoelliptique naturellement associé $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{L}_{Y_i}^2$ où $\mathcal{L}_{Y_i}$ est la dérivée selon le champ Y_i, $Y_1, \dots, Y_n$ étant une base orthonormale de la partie V_1 de $\mathfrak{n}$, il suffit d'étudier Δ sur le groupe nilpotent $\tilde{N}$ libre associé et de passer du quotient l'étude ainsi fait modulo le sous groupe distingué de $\tilde{N}$ engendré par les relations supplémentaires qu'on trouve dans N. Ceci est assez formel et en pratique le passage est malcommode. Nous noterons $\mathfrak{n}_{n,2}$ l'algèbre nilpotente libre d'ordre 2 et à n générateurs, i.e. $\mathfrak{n}_{n,2}=V_1\oplus V_2$ où V_1 est de dimension n engendré par $X_1, \dots, X_n$ et V_2 est l'espace vectoriel engendré par les $[X_i, X_k]_{i<k}$ que nous noterons X_{ik}. Nous noterons $N_{n,2}$ le groupe simplement connexe

d'algèbre $\mathcal{N}_{n,2}$. Nous noterons $\Delta_{n,2}=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{L}_{X_i}^2$ son laplacien associé. Considérons alors la carte exponentielle de $N_{n,2}$ que nous noterons

$$(u_i, u_{ik})_{\substack{i<k\\1\leqslant i\leqslant n}} \to \exp\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i + \sum_{i<k} u_{ik} X_{ik}\right).$$

On pose $\partial_k=\partial/\partial u_k$, $\partial_{ik}=\partial/\partial u_{ik}$ si $i<k$.

LEMME 1. *Dans la carte exponentielle, on a*

$$\mathcal{L}_{X_i}=\partial_i+\tfrac{1}{2}\Big(\sum_{k<i} u_k\partial_{ki}-\sum_{k>i} u_k\partial_{ik}\Big) \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}_{X_{ik}}=\partial_{ik} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{n,2}=&\sum_i \partial_i^2+\sum_i\Big(\sum_{k<i} u_k\partial_{ki}\partial_i-\sum_{k>i} u_k\partial_{ik}\partial_i\Big)\\&+\tfrac{1}{4}\sum_i\Big(\sum_{k,l<i} u_k u_l\partial_{ki}\partial_{li}+\sum_{k,l>i} u_k u_l\partial_{ik}\partial_{il}-2\sum_{\substack{k<i\\l>i}} u_k u_l\partial_{ki}\partial_{il}\Big)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Preuve. Lisant f en coordonnée exponentielle, on a

$$(\mathcal{L}_{X_i}f)(u_i,u_{ik})=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\Big(\exp\Big(\sum u_j X_j+\sum_{j<k} u_{jk}X_{jk}\Big)\exp(tX_i)\Big).$$

L'exponentielle dans f est par Campbell Hausdorff.

$$\exp\Big[(t+u_i)X_i+\sum_{j\neq i} u_j X_j+\sum_{j<k} u_{jk}X_{jk}+\tfrac{1}{2}\sum_{j<i} tu_j X_{ji}-\tfrac{1}{2}\sum_{j>i} tu_j X_{ij}\Big].$$

4.2. Diffusion de $\Delta_{n,2}$ et solution fondamentale de l'équation de la chaleur associée

LEMME 2. *La diffusion de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta_{n,2}$ lue dans la carte exponentielle, issue de 0 est le processus $g(t)=(u_i(t), u_{ik}(t))_{i<k}$ ou $u_1(t),\dots,u_n(t)$ sont n browniens réels standards indépendants et ou*

$$u_{kl}(t)=\frac{1}{2}\int_0^t (u_k\,du_l(s)-u_l\,du_k(s)).$$

Preuve. La projection sur V_1 de la diffusion cherchée est le processus de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\partial_i^2$, donc est le brownien standard de $\mathbf{R}^n$. Ensuite calculons les acroissements stochastiques infinitésimaux de u_i, u_{kl} et calculons leurs produits; on a :

$$du_i du_{il}=-\tfrac{1}{2}u_l ds \quad\text{si}\quad l>i$$
$$du_i du_{ki}=\tfrac{1}{2}u_k ds \quad\text{si}\quad k<i$$
$$du_{kl}du_{rs}=\tfrac{1}{4}(u_k u_r\delta_{ls}-u_l u_r\delta_{ks}-u_s u_k\delta_{rl}+u_l u_s\delta_{kr})ds.$$

Dans les deux premiers cas, on trouve bien la moitié du coefficient de $\partial_i\partial_{il}$ dans $\Delta_{n,2}$. Dans le troisième cas par exemple, si $l=s=i$, $k\neq r<i$, on trouve que $du_{kl}du_{rs}=4^{-1}u_k u_r ds$ ce qui est bien la moitié du coefficient de $\partial_{ki}\partial_{ri}$ si $k\neq r<i$ (car il y a deux tels termes dans $\Delta_{n,2}$). Si $l=s=i$, $k=r<i$, alors $du_k du_{rs}=du_{ki}^2=4^{-1}(u_k^2+u_i^2)ds$ ce qui est exactement le coefficient de ∂_{ki}^2; par conséquent, utilisant la formule de Itô, si f est C^2, on a

$$(df)(g_\omega(t))=\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{L}_{X_i}f)(g_\omega(t))\,du_i(t)+\tfrac{1}{2}(\Delta_{n,2}f)(g_\omega(t))\,dt$$

ce qui montre qu'on a bien le générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta_{n,2}$.

Remarque. Par rapport au (3.1), les normalisations dans le cas de $H_3=N_{2,2}$ ne sont pas les mêmes.

Soit maintenant l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial s}=\tfrac{1}{2}\,\Delta_{n,2}$$

s désignant le temps ($s\geqslant 0$) et soit $p_s(0|g)$, $g\in N_{n,2}$, la solution fondamentale de cette équation de pôle 0. On a par définition que

$$p_s(0|g)\,dg=\mathrm{Prob}_0\,(g_\omega(s)\in dg)$$

où dg est la mesure invariante de $N_{n,2}$ (produit $du_i du_{lk}$) et $p_s(0|g)$ est la solution fondamentale du problème de Cauchy parabolique. Faisons *une transformation de Fourier euclidienne* sur $\mathcal{N}_{n,2}$ et notons α_i, α_{kl} les variables duales de variable u_i, u_{kl}.

Notons $u=(u_1\ldots u_n)$, $|u|^2=\sum_{i=1}^n|u_i|^2$; A désigne la matrice antisymétrique dont la partie située au dessus de la diagonale principale est formée des α_{kl} ($k<l$). Si X est une matrice antisymétrique d'ordre n, u un vecteur de $\mathbf{R}^n$ on posera :

$$\psi_s(X,u)=\exp\left[s^{-1}\left(-|u|^2+u\left(I-\frac{s^2X^2}{4\pi^2}\right)^{-1}u\right)\right]\det\left(I-\frac{sX}{2\pi}\right)^{-1}.$$

On a alors :

THÉORÈME 1. *La transformée de Fourier euclidienne de $p_s(0|g)$ est donnée par la formule :*

$$\widehat{p_s(0,.)}\,(\alpha_i,\alpha_{lk})=(2\pi s)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j-\frac{|u|^2}{2s}\right)\prod_{k=1}^{+\infty}\psi_s\left(\frac{A}{k},u\right)du\quad \text{où}\quad du=\prod_{i=1}^{n}du_i.$$

Preuve. On calcule comme en 1.2

$$\widehat{p_s(0,.)}\,(\alpha_i,\alpha_{kl}) = E_0\left(\exp\left(i\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(s)\right)\times E_0(\exp[i\sum\alpha_{kl}u_{kl}(s)]\,|\,u_i(s)\quad\text{donnés}\quad 1\leqslant i\leqslant n)\right)$$

de sorte qu'il suffit de calculer la loi conditionnelle

$$E_0\,(\exp[i\sum\alpha_{kl}u_{kl}(s)]\,|\,u_i(s)\quad\text{donnés si } 1\leqslant i\leqslant n)$$

en utilisant encore la méthode de Paul Lévy ou de M. Kac ([17], [18]); pour cela représentons les n browniens standard indépendants en série de Fourier convergente à coefficients de variables gaussiennes indépendantes, i.e. nous posons

$$u_i(t) = \frac{t\xi^{(i)}}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{\pi}}\,(\xi_n^{(i)}(\cos nt - 1) + \xi_n'^{(i)}\sin nt)$$

et conditionnons par la valeur $u_i(2\pi) = U_i$ fixé à l'instant $t = 2\pi$. (Le conditionnement par un temps final quelconque s'obtient évidemment par renormalisation.) Ici les $\xi_n^{(i)}$ et les $\xi_n'^{(i)}$ sont des variables gaussiennes centrées normales toutes indépendantes deux à deux. Pour $k<l$, nous avons alors :

$$u_{kl}(2\pi) = \sum_n \frac{1}{n}\,[\xi_n^{(k)}(\xi_n'^{(l)} - \xi^{(l)}\sqrt{2}) - \xi_n^{(l)}(\xi_n'^{(k)} - \xi^{(k)}\sqrt{2})]$$

et donc puisque $u_i(2\pi) = U_i$ donné, $\xi^{(i)} = U_i/\sqrt{2\pi}$ est certaine dans ce conditionnement, donc

$$u_{kl}(2\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left[\xi_n^{(k)}\left(\xi_n'^{(l)} - \frac{U_l}{\sqrt{\pi}}\right) - \xi_n^{(l)}\left(\xi_n'^{(k)} - \frac{U_k}{\sqrt{\pi}}\right)\right]$$

et

$$\begin{aligned}
&E_0(\exp\,(i\sum\alpha_{kl}u_{kl}(2\pi))\,|\,u_i(2\pi) = U_i)\\
&\quad = E_0\left(\exp i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k<l}\alpha_{kl}\left(\xi_n^{(k)}\left(\xi_n'^{(l)} - \frac{U_l}{\sqrt{\pi}}\right) - \xi_n^{(l)}\left(\xi_n'^{(k)} - \frac{U_k}{\sqrt{\pi}}\right)\right)\right]\,\middle|\,u_i(2\pi) = U_i\right)\\
&\quad = \prod_{n=1}^{+\infty}E_0\left(\exp\frac{i}{n}\left[\sum_{k<l}\alpha_{kl}\left(\xi_n^{(k)}\left(\xi_n'^{(l)} - \frac{U_l}{\sqrt{\pi}}\right) - \xi_n^{(l)}\left(\xi_n'^{(k)} - \frac{U_k}{\sqrt{\pi}}\right)\right)\right]\,\middle|\,U_i(2\pi) = U_i\right)
\end{aligned}$$

parce que pour $n \neq m$ les termes sont indépendants (et par suite, le produit infini converge de facto). Nous regardons donc chaque terme du genre

$$I_n = E_0\left(\exp\frac{i}{n}\left[\sum_{k<l}\alpha_{kl}\left(\xi_n^{(k)}\left(\xi_n^{(l)} - \frac{U_l}{\sqrt{\pi}}\right) - \xi_n^{(l)}\left(\xi_n'^{(k)} - \frac{U_k}{\sqrt{\pi}}\right)\right)\right]\right)$$

et nous remarquons qu'il n'y a plus à conditionner (toute l'information conditionnelle étant épuisée par les $\xi^{(l)}$ remplacé par $U_l/\sqrt{\pi}$). Intégrons d'abord en $\xi_n^{(k)}$. Posons $\xi''^{(l)} = \xi'^{(l)} - U^{(l)}\pi^{-1/2}$ (en oubliant les indices n sous les ξ) et posons $\mu_k = \sum_{l>k} \alpha_{kl}\, \xi''^{(l)} - \sum_{l<k} \alpha_{lk}\, \xi''^{(l)}$. Alors on a

$$I_n = E\left(\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\sum_k \mu_k^2\right)\right).$$

Appelant A la matrice antisymétrique dont les parties au dessus de la diagonale principale est formée de α_{kl} si $k<l$, on a

$$\sum \mu_k^2 = (A\xi''\,|\,A\xi'') = -(A^2\xi''\,|\,\xi'').$$

ξ'' désignant le vecteur $(\xi''^{(l)})_l$.

Posons $B = n^{-2}A^2$; on calcule E (exp $\frac{1}{2}(B\xi''\,|\,\xi'')$) i.e.

$$\begin{aligned} I_n &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} \exp \tfrac{1}{2}[(B\xi''\,|\,\xi'') - (\xi'' - U\pi^{-1/2}\,|\,\xi'' - U\pi^{-1/2})]\,d\xi'' \\ &= (2\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|U|^2}{2\pi}\right)\int_{\mathbf{R}^n} \exp \tfrac{1}{2}[(B\xi''\,|\,\xi'') - (\xi''\,|\,\xi'') + (\xi''\,|\,U\pi^{-1/2})]\,d\xi''. \end{aligned}$$

Appelons $\tilde{Z}$ un vecteur gaussien de covariance K et t un vecteur certains; on a évidemment

$$E\,(\exp - (\tilde{Z}\,|\,t)) = \exp\,(-(t\,|\,E(Z)) + \tfrac{1}{2}(t\,|\,Kt).$$

La formule précédente donne le calcul de I_n car nous avons exactement l'espérance de $\exp - (\tilde{Z}\,|\,t)$ où $t = -(U/\sqrt{\pi})$ et $\tilde{Z}$ est le vecteur gaussien de covariance $(I-B)^{-1}$, cette espérance étant multipliée par $(2\pi)^{n/2}\sqrt{\text{dét}\,(I-B)^{-1}}$. (Ici on remarquera que A étant antisymétrique $\pm n$ ne saurait être valeurs propres et par suite $I \pm (A/n)$ sont inversibles donc $(I-(A/n))(I+(A/n)) = I - B$ est inversible) d'où on trouve

$$I_n = \frac{\exp\left(-\dfrac{|U|^2}{2\pi} + \dfrac{U(I-B)^{-1}U}{2\pi}\right)}{\sqrt{\text{dét}\,(I-B)}}.$$

Ici dét $(I-B) = (\text{dét}\,(I-(A/n)))^2$ car A est antisymétrique et par conséquent

$$E_0(\exp i\sum \alpha_{kl}\,u_{kl}(2\pi)\,|\,u_i(2\pi) = u_i) = \prod_{n=1}^{+\infty} \psi_s\left(\frac{A}{n}, u\right)$$

avec les notations données avant l'énoncé du Théorème 1. Le produit infini converge nécessairement de par la démonstration même.

4.3. Réduction du calcul des solutions fondamentales

(a) *préliminaires d'algèbre linéaire.*

Comme au 4.2, soit A la matrice antisymétrique ayant les α_{kl} comme éléments au dessus de la diagonale principale. Il existe une transformation orthogonale Ω de l'espace $\mathbf{R}^n$ telle que on ait ${}^t\Omega A \Omega = P$ où P est la matrice antisymétrique formée des blocs diagonaux 2×2

$$\begin{pmatrix} 0 & P_{2k-1} \\ -P_{2k-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair}$$

et $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$ si n est impair, le dernier bloc étant dans ce cas la matrice 1×1 réduite à 0; tous les autres éléments de I sont des 0. Enfin les P_{2k-1} sont des fonctions algébriques simples des α_{kl}.

(b) *calcul du noyau de la chaleur*

THÉORÈME 1. *Le noyau de la chaleur défini en* § 4.2 *vaut*

$$p_s(0; u_l, u_{kl}) = (2\pi)^{-3n/2-\binom{n}{2}} s^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^{\binom{n}{2}}} \exp\,(-i \sum_{k<l} \alpha_{kl} u_{kl}) \prod_{k=1}^{[n/2]} \varphi_k(s, A, u) \prod_{k<l} d\alpha_{kl}$$

où on a posé

$$\varphi_k(s, A, u) = \frac{s}{2} P_{2k-1}\left(\operatorname{sh} \frac{s}{2} P_{2k-1}\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{[({}^t\Omega u)^2_{2k-1} + ({}^t\Omega u)^2_{2k}]}{2s} \frac{s}{2} P_{2k-1} \coth \frac{s}{2} P_{2k-1}\right\}$$

P_{2k-1} *et* Ω *étant reliés à la matrice antisymétrique* A *par la règle définie ci-dessus.*

Preuve. Dans la formule du Théorème 1, le seul problème est d'effectuer le produit infini. On a en introduisant Ω de force dans chaque facteur, avec les notations du (a)

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \psi_s\left(\frac{A}{k}, u\right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \exp\left[s^{-1}\left(-|u|^2 + u\Omega\left(1 - \frac{s^2 P^2}{4\pi^2 k^2}\right)^{-1} {}^t\Omega u\right)\right] \times \text{dét}\left(1 - \frac{sP}{2\pi k}\right)^{-1}.$$

Mais

$$\text{dét}\left(I - \frac{sP}{2\pi k}\right) = \prod_{l=1}^{[n/2]} \left(1 + \frac{s^2 P^2_{2l-1}}{4\pi^2 k^2}\right)$$

et $(I - (s^2P^2/(4\pi^2k^2)))^{-1}$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $4\pi^2k^2 \times (4\pi^2 k^2 + s^2 P^2_{2l-1})^{-1}$ d'où aussitôt le calcul

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \psi_s\left(\frac{A}{k}, u\right) = \prod_{l=1}^{[n/2]} \left(\frac{s}{2} P_{2k-1}\right) \left(\operatorname{sh} \frac{s}{2} P_{2k-1}\right)^{-1}$$
$$\times \exp \left[\left(\frac{({}^t\Omega u)^2_{2k-1} + ({}^t\Omega u)^2_{2k}}{2s} \right) \left(1 - \frac{s}{2} P_{2k-1} \coth \frac{s}{2} P_{2k-1}\right) \right].$$

ce qui achève Théorème 2 par inversion de Fourier en tenant compte de l'orthogonalité de Ω.

Cas particulier simple : pour $n=3$, posant $|\alpha|^2 = \sum_{k<l} \alpha^2_{kl}$, on a alors

$$p_s(0; u_l, u_{kl}) = (2\pi)^{-6} (2\pi s)^{-3/2} \int_{\mathbf{R}^3} \exp\left(-i \sum_{k<l} \alpha_{kl} u_{kl}\right) \frac{s}{2} |\alpha| \left(\operatorname{sh} \frac{s}{2} |\alpha|\right)^{-1}$$
$$\times \exp \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{|u|^2}{s} - \frac{uA^2 u}{s|\alpha|^2} \left(1 - \frac{s}{2} |\alpha| \coth \frac{s}{2} |\alpha|\right) \right\} \prod_{k<l} d\alpha_{kl}.$$

4.4. Solution fondamentale des opérateurs $\Delta_{n,2}$

Soit $g(0; u_k, u_{kl})$ la fonction de Green globale pour l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta_{n,2}$, i.e. la solution

$$\tfrac{1}{2}\Delta_{n,2}\, g(0, \cdot) = \delta_0.$$

On a alors :

COROLLAIRE 1. *Pour tout n, $g(0, \cdot)$ existe et est donnée par*

$$g(0, \cdot) = \int_0^{+\infty} p_s(0, \cdot)\, ds$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Preuve. Pour $n=2$, cela a été vu en § 1.3 et on retrouve alors la solution de Folland par une quadrature explicite. Pour $n \geq 3$, la diffusion de $\frac{1}{2}\Delta_{n,2}$ n'est certainement pas récurrente parce que la projection sur V_1 qui est un brownien n-dimensionnel standard ne l'est déjà pas. Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} p_s(0, \cdot) ds$ converge absolument et l'interprétation des fonctions de Green comme temps de séjour achève la preuve du Corollaire.

On déduit alors par un calcul élémentaire

COROLLAIRE 2. *La solution fondamentale de $\Delta_{n,2}$ de pôle 0 est*

$$g(0; u_l, u_{kl}) = (2\pi)^{-\frac{3n}{2} - \binom{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \binom{n}{2} - 1\right) \int_{\mathbf{R}^{(n/2)}} \prod_{k=1}^{[n/2]} \left(\tfrac{1}{2} P_{2k-1} (\operatorname{sh} \tfrac{1}{2} P_{2k-1})^{-1}\right)$$
$$\times \left[-i \left(\sum_{k<l} \alpha_{kl} u_{kl} + \sum_{k=1}^{[n/2]} B_k \right)^{-\frac{n}{2} - \binom{n}{2} + 1} \right] \prod_{k<l} d\alpha_{kl}$$

où on a posé

$$A_k = \tfrac{1}{2}(({}^t\Omega u)^2_{2k-1} + ({}^t\Omega u)^2_{2k}) \frac{P_{2k-1}}{2} \coth\left(\frac{P_{2k-1}}{2}\right).$$

4.5. Analyticité des solutions fondamentales

COROLLAIRE 3. *Pour $s>0$ fixé, la solution fondamentale de l'équation de la chaleur de $\Delta_{n,2}$ est analytique réelle en $g \in N_{n,2}$.*

Preuve. Faisons la pour simplifier l'écriture dans le cas du groupe d'Heisenberg du § 1.2. On avait

$$p_s(0;\lambda,t) = s^{-2}\int_{\mathbf{R}} \tau(\operatorname{sh}\tau)^{-1} \exp\left(s^{-1}\left(\frac{i\tau t}{2} - \lambda\tau\coth\tau\right)\right) d\tau$$

où $\lambda = \frac{1}{2}\sum |z_i|^2$. Un calcul direct donne

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} p_s(0;\lambda,t)\right| \leqslant 2s^{-2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sigma\tau}{2}\right)^n (\tau\coth\tau)^p \exp(-\lambda\tau)\,\tau(\operatorname{sh}\tau)^{-1} d\tau \leqslant (2C(s,\lambda))^{n+q} n!\,p!$$

§ 5. Propagation, problemes variationnels horizontaux associes et quantification

5.1. Algèbres de Lie stratifiées radiales et réduction des courbes

Définition. Soit $g = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ une algèbre de Lie nilpotente stratifiée avec sa stratification $V_1 \dots V_r$, $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ (voir § 4.1). Soit $n = \dim V_1$. *On dit qu'elle est radiale* si on peut trouver une représentation $p : SO(n) \to \operatorname{End}\mathfrak{g}$ à valeurs les homomorphismes d'algèbres de Lie, qui respecte la stratification.

LEMME 1. *Toute algèbre $N_{n,2}$ est radiale.*

Preuve. Évidente, identifiant $N_{n,2} = V_1 \oplus V_2$ avec $V_2 = [V_1, V_1]$ et $V_1 \simeq \mathbf{R}^n$, on définit $p(\Omega)$, $\Omega \in SO(n)$, en prenant pour action sur V_1, la représentation canonique R de $SO(n)$ sur $\mathbf{R}^n$. (i.e. $(R(\Omega)u)_i = \omega_{il}u_l$. Si $\Omega = (\omega_{ij})$ et pour action sur V_2, la représentation $\wedge^2 R$ de sorte que

$$(\wedge^2 R(\Omega)u)_k = \sum_{p<q} (\omega_{kp}\omega_{lq} - \omega_{kq}\omega_{lp})u_{pq}. \tag{5.1}$$

Remarque. Ce lemme est vrai pour toute algèbre de Lie formelle à n générateurs.

Notations. Nous prolongerons enfin la représentation p définie au Lemme 1 à $N_{n,2} \times N^*_{n,2}$ de la façon suivante; soit (ξ_i, ξ_{kl}) la coordonnée d'un point de $N^*_{n,2}$. On fait agir

$p(\Omega)$ sur le facteur $N_{n,2}$ comme ci-dessus au Lemme 1 et $p(\Omega)$ sur le facteur $N^*_{n,2}$ par les formules

$$(p(\Omega)\,\xi)_i = \omega_{il}\,\xi_l$$
$$(p(\Omega)\,\xi)_{kl} = \sum_{p<q} (\omega_{kp}\,\omega_{lq} - \omega_{kq}\,\omega_{lp})\,\xi_{pq}. \tag{5.2}$$

Etant donné un point $(u_i, u_{kl}, \xi_i, \xi_{kl}) \in N_{n,2} \times N^*_{n,2}$ *on appelera réduction de ce point*, un point $(v_i, v_{kl}, \eta_i, \eta_{kl})$ tel que $p(\Omega)(v_i, v_{kl}, \eta_i, \eta_{kl}) = (u_i, u_{kl}, \xi_i, \xi_{k'})$ pour un $\Omega \in SO(n)$ et tel que la matrice antisymétrique formée par les $(\eta_{kl})_{k<l}$ au dessus de la diagonale principale soit formée de blocs diagonaux comme ceux décrits en 4.3 avec P_{n-1} ou $P_{n-2} \neq 0$ (selon la parité de n) et les seuls P_i nuls se trouvant consécutivement avant P_{n-1} ou P_{n-2}.

De même étant donné une courbe de $N_{n,2} \times N^*_{n,2}$ d'équations paramétriques $(u_i(s)$, $u_{kl}(s)$, $\xi_i(s)$, $\xi_{kl}(s))$ avec $\xi_{kl}(s) = cste$ indépendante de s, *on appellera équations réduites de la courbe d'équation* $(v_i(s), v_{kl}(s), \eta_i(s), \eta_{kl})$ *avec*

$$p(\Omega)\,(v_i(s),\, v_{kl}(s), \eta_i(s), \eta_{kl}) = (u_i(s),\, u_{kl}(s),\, \xi_i(s),\, \xi_{kl}).$$

Ω étant indépendant de s et η_{kl} étant comme précédemment.

Enfin la matrice orthogonale Ω, réduisant un point de $N_{n,2} \times N^*_{n,2}$ est définie modulo la multiplication à gauche par un élément T du tore maximal $\mathbf{T}[n/2]$ de $SO(n)$.

5.2. Intégration du système des bicaractéristiques de $\Delta_{n,2}$

L'hamiltonien de $\Delta_{n,2}$ est donné par

$$2H = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_i \Big(\sum_{k<i} u_k\,\xi_{ki}\,\xi_i - \sum_{k>i} u_k\,\xi_{ik}\,\xi_i\Big) + \tfrac{1}{4}\sum_i \Big(\sum_{k,l<i} u_k\,u_l\,\xi_{ki}\,\xi_{li} + \sum_{k,l>i} u_k\,u_l\,\xi_{ik}\,\xi_{il} - 2\sum_{\substack{k<i\\ l>i}} u_k\,u_l\,\xi_{ki}\,\xi_{il}\Big) \tag{5.3}$$

(voir (3.3)) où les ξ_i, ξ_{ik} sont les coordonnées duales, i.e. les coordonnées de la fibre de $T^*N_{n,2}$. Les équations d'Hamilton Jacobi s'écrivent comme d'habitude.

$$\dot{u}_i = H_{\xi_i},\, \dot{u}_{kl} = H_{\xi_{kl}},\, \dot{\xi}_k = -H_{u_k},\, \dot{\xi}_{kl} = -H_{u_{kl}}. \tag{5.4}$$

En particulier, comme H est indépendant de u_{kl}, on a que ξ_{kl} est une constante du mouvement. D'autre part on déduit de (5.4), (5.5)

$$\dot{u}_i = \xi_i + \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{k<i} u_k\,\xi_{ki} - \sum_{k>i} u_k\,\xi_{ik}\Big)\ \dot{u}_{kl} = \tfrac{1}{2}(u_k\,\xi_l - u_l\,\xi_k) + \tfrac{1}{4}\Big(\sum_{p>h} u_l\,u_p\,\xi_{kp} - \sum_{p<k} u_l\,u_p\,\xi_{pk} + \sum_{p<l} u_p\,u_k\,\xi_{pl} - \sum_{p>l} u_p\,u_k\,\xi_{pl}\Big) \tag{5.5}$$

c'est-à-dire trivialement en comparant avec (5.3), (5.4) s'écrit

$$\dot{u}_{kl} = \tfrac{1}{2}(u_k \dot{u}_l - u_l \dot{u}_k) \tag{5.6}$$

d'où aussitôt, on a, ce qui est général en hypoelliptique ([13]).

LEMME 2. *Les bicaractéristiques de $\Delta_{n,2}$ sont des courbes horizontales pour la connexion définie sur la fibration triviale $N_{n,2} \to \mathbf{R}^n$ par les champs $\mathcal{L}_{X_1} \dots \mathcal{L}_{X_n}$ comme champs horizontaux.*

Preuve. Il suffit de voir que (5.5) définit une courbe horizontale. Or si $(u_1(t) \dots u_n(t))$ est chemin de $\mathbf{R}^n$ et $u_{kl}(t)$ un relèvement à $N_{n,2}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i} + \dot{u}_{kl}(t) \frac{\partial}{\partial u_{kl}} &= \sum A_i \mathcal{L}_{X_i} + \sum B_{jk} \frac{\partial}{\partial u_{jk}} \\ &= A_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{1}{2} \sum_i A_i \left(\sum_{k<i} u_k \frac{\partial}{\partial u_{ki}} - \sum_{k>i} u_k \frac{\partial}{\partial u_{ik}} \right) + B_{jk} \frac{\partial}{\partial u_{jk}} \end{aligned}$$

d'après l'expression des $\mathcal{L}_{X_i}$, d'où $A_i = \dot{u}_i$ et le coefficient de $\partial/\partial u_k$ est $\dot{u}_{kl} = B_{kl} + \frac{1}{2}(A_l u_k - A_k u_l) = B_{kl} + \frac{1}{2}(\dot{u}_l u_k - \dot{u}_k u_l)$. La condition d'horizontalité étant $B_{kl} = 0$, on conclut.

Par suite l'intégration du système d'Hamilton Jacobi consiste seulement à effectuer $\dot{u}_i = H_{\xi_i}, \dot{\xi}_k = -H_{u_k}$. Notant toujours A la matrice antisymétrique dont les éléments au dessus de la diagonale principale sont $\frac{1}{2}\xi_{kl}$, on peut écrire le système précédent sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \\ \hline \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} -A & Id_{n,n} \\ \hline A^2 & -A \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \hline \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Notons toujours Ω la matrice orthogonale ayant les propriétés de 4.3, P_{2k-1} les fonctions algébriques introduites alors et intervenant dans *la réduite P de $2A$*. On a :

$$\left(\begin{array}{c|c} {}^t\Omega & 0 \\ \hline 0 & {}^t\Omega \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} -A & Id_{n,n} \\ \hline A^2 & -A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \Omega & 0 \\ \hline 0 & \Omega \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -P & Id \\ \hline P^2 & -P \end{array} \right).$$

Posons

$$\begin{pmatrix} v_i \\ \hline \eta_i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} {}^t\Omega & 0 \\ \hline 0 & {}^t\Omega \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_i \\ \hline \xi_i \end{pmatrix} : \quad \text{alors}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_i \\ \hline \dot{\eta}_i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} -P & Id \\ \hline P^2 & -P \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_i \\ \hline \eta_i \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, les équations $(v_i(s), v_{kl}(s), \eta_i(s), \eta_{kl})$ sont les équations réduites de la bicaractéristique de départ au sens de 1, i.e.

$$p(\Omega)(v_i, v_{kl}, \eta_i, \eta_{kl}) = (u_i, u_{kl}, \xi_i, \xi_{kl})$$

et il suffit donc d'étudier ces équations réduites.

1er cas $n=2\nu$ est pair

Dans ce cas il est manifeste que le 4ν équations du système réduit se séparent en ν groupes de 4 équations, chaque groupe ayant la forme

$$\dot v_{2k-1} = -P_{2k-1}v_{2k} + \eta_{2k-1}, \quad \dot\eta_{2k-1} = -P_{2k-1}^2 v_{2k-1} - P_{2k-1}\eta_{2k}$$
$$\dot v_{2k} = P_{2k-1}v_{2k-1} + \eta_{2k}, \quad \dot\eta_{2k} = -P_{2k-1}^2 v_{2k} + P_{2k-1}\eta_{2k-1}$$

et ce système est alors celui du groupe d'Heisenberg intégré au 3.1 (où on posera $2\tau_0 = -P_{2k-1}$)

(a) Si $P_{2k-1}=0$, on obtient

$$\eta_{2k-1} = \alpha_k, \quad \eta_{2k} = \beta_k \tag{5.7}$$
$$v_{2k-1}(s) = \alpha_k s, \quad v_{2k}(s) = \gamma_k s, \quad v_{2k-1,2k}(s) = 0$$

(b) Si $P_{2k-1} \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} v_{2k-1}(s) &= 2\alpha_k(\cos(2P_{2k-1}s) - 1) + 2\gamma_k \sin(2P_{2k-1}s) \\ v_{2k}(s) &= 2\alpha_k \sin(2P_{2k-1}s) - 2\beta_k(\cos(2P_{2k-1}s) - 1) \\ \eta_{2k-1}(s) &= -2\alpha_k P_{2k-1}\sin(2P_{2k-1}s) + 2\beta_k P_{2k-1}(\cos(2P_{2k-1}s)+1) \\ \eta_{2k}(s) &= 2\alpha_k P_{2k-1}(1+\cos(2P_{2k-1}s)) + 2\beta_k P_{2k-1}\sin(2P_{2k-1}s) \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\text{et} \quad \beta_k = \frac{\eta_{2k-1}(0)}{4P_{2k-1}} \quad \alpha_k = \frac{\eta_{2k}(0)}{4P_{2k-1}}$$

$$\dot v_{2k-1,2k}(s) = 4(\alpha_k^2+\beta_k^2)P_{2k-1}(1-\cos(2P_{2k-1}s)) \tag{5.8}$$

On peut écrire de même $v_{2k-1,2l}$, $v_{2k,2l}$ (ce que nous ne ferons pas pour le moment) pour P_{2k-1} et $P_{2l-1} \neq 0$.

2nd cas : $n=2\nu+1$ est impair

Alors les $4\nu+2$ équations du système réduit se séparent en ν groupes de 4 équations du type précédent et 2 équations triviales supplémentaires pour v_n et η_n à savoir $\dot\eta_n=0$, $\dot v_n = \eta_{..}$ soit $\eta_n(s) = \eta_n(0)$, $v_n(s) = \eta_n(0)\cdot s$.

5.3. Caustiques de 0 dans $N_{n,2}$ et non existence de la solution du problème variationnel

(a) *Réductions préliminaires*

Soit $s_0 \neq 0$ fixé, $(u_k^0, u_{kl}^0) \in N_{n,2} \neq (0, 0)$ et cherchons les bicaractéristiques joignant $(0, 0)$ à (u_k^0, u_{kl}^0) pendant l'intervalle de temps s_0. Soit $(u_k, u_{kl}, \xi_k, \xi_{kl})$ une telle bicaractéristique; il existe alors une matrice orthogonale $\Omega \in SO(n)$ tel que ${}^t\Omega\Xi\Omega$ ait la forme habituelle, de sorte que tout revient à étudier l'équation réduite de la bicaractéristique $(v_k, v_{kl}, \eta_k, \eta_{kl})$ qui joint alors $(0, 0)$ à (v_k^0, v_{kl}^0) pendant le temps s_0 d'où $p(\Omega)(v_k^0, v_{kl}^0) = (u_k^0, u_{kl}^0)$. Les paramètres dont dépend une bicaractéristique, i.e. les coordonnées bicaractéristiques sont les $(\xi_{kl})_{k<l}$, α_k et β_k. Nous supposerons ici $u_k^0 = 0$ pour tout k et nous étudierons donc la bicaractéristique réduite allant de $(0, 0)$ à $(0, v_{kl}^0)$. Notant V^0 la matrice (v_{kl}^0) au dessus de la diagonale principale, on a

$$\Omega V^0 \, {}^t\Omega = U^0. \tag{5.9}$$

Ici $\Omega = \Omega(\xi)$ et cette relation précédente impose des conditions sur ξ, lorsque V^0 est connue.

(b) *Conditions de quantification (cas $n = 2v$ pair)*

Les conditions de quantification sont ici donnés par le fait que $v_l(s_0) = 0$. Cela impose les conditions suivantes

(i) ou bien $\alpha_k = \beta_k = 0$ et alors il n'y a pas de mouvement v_{2k-1}, v_{2k}. Cela est nécessaire si $P_{2k-1} = 0$. D'après (7). Si $P_{2k-1} \neq 0$, on peut imposer cette condition.

(ii) ou bien on impose $P_{2k-1} = \pi/s_0$, auquel cas α_k et γ_k sont libres d'après (5.8).

Dans ces conditions, les v_{kl} prennent une forme remarquable. Un calcul trivial montre que on a en effet en posant $P = \pi/s_0$,

$$\begin{aligned} \dot v_{2k-1,2l} &= 4(\alpha_k\alpha_l + \beta_k\beta_l)P\,(1 - \cos(2Ps)) \\ \dot v_{2k-1,2l-1} = \dot v_{2k,2l} &= 4(\alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k)P\,(1 - \cos(2Ps)) \end{aligned} \tag{5.10}$$

En effet cela est évident si l'un des indices k ou l est tel que $\alpha_k = \beta_k = 0$. Si maintenant les deux indices k ou l sont tels que (α_k, β_k), (α_l, β_l) sont à priori quelconques, alors $P_{2k-1} = P_{2l-1} = \pi/s_0$ et le calcul de $\dot v_{kl}$ se réduit à (5.10)

En particulier intégrant (5.10) et prenant la valeur en s_0 en tenant compte de $P = \pi/s_0$, on a

$$\begin{aligned} v^0_{2k-1,2l} &= 4(\alpha_k\alpha_l + \beta_k\beta_l)\pi \\ v^0_{2k-1,2l-1} = v^0_{2k,2l} &= 4(\alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k)\pi. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Etudions maintenat le rang de la matrice antisymétrique V^0 ayant les v^0_{kl} au dessus de la diagonale principale. C'est une matrice $2n \times 2n$ formée de blocs 2×2 du type B_{kl} avec pour $k \leqslant l$

$$B_{kl} = \begin{pmatrix} \alpha_k \beta_l - \beta_k \alpha_l & \alpha_k \alpha_l + \beta_k \beta_l \\ -(\alpha_k \alpha_l + \beta_k \beta_l) & \alpha_k \beta_l - \beta_k \alpha_l \end{pmatrix}$$

et si $l<k$, $\beta_{kl} = -B_{lk}$ et dét $B_{kl} = (\alpha_k^2 + \beta_k^2)(\alpha_l^2 + \beta_l^2)$, de sorte que le déterminant de V^0 est le déterminant de la matrice $\nu \times \nu$, (dét $B_{kl})_{k,l}$.

Dans la k^i ligne de cette matrice, on peut mettre en facteurs $(\alpha_k^2 + \gamma_k^2)$ et on obtient alors la ligne

$$(\alpha_1^2 + \gamma_1^2),\ (\alpha_2^2 + \gamma_2^2),\ \dots,\ (\alpha_\nu^2 + \gamma_\nu^2)$$

donc le déterminant est nul. Par suite V^0 est de rang 2 ou 0 suivant qu'un des couples (α_k, β_k) est différent de 0 ou non. Par conséquent on déduit le lemme suivant, puisque $U^0 = {}^t\Omega V^0 \Omega$.

Lemme 3. *Les points* $(0, u^0_{kl})$ *tels que le rang de la matrice* U^0 *formée avec les* u^0_{kl} *soit* >2, *ne peuvent pas être joints à* $(0, 0)$ *par une bicaractéristique de* $\Delta_{n,2}$.

Supposons maintenant le rang de U^0 *exactement égal à* 2.

Soit $\varrho > 0$ et Ω_1 orthogonale avec

$$ {}^t\Omega_1 U^0 \Omega_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \varrho & 0 \\ -\varrho & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \tag{5.12}$$

Ω_1 est toujours défini à la multiplication à droite près par un élément du tore maximal $\mathbf{T}^\nu$ de $SO(n)$. Posons dans (5.11), $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \varrho$, $\alpha_k = \beta_k = 0$ si $k > 1$, $P_1 = \pi / s_0$ défini par quantification, P_{2k-1} arbitraire si $k > 1$, V^0 la matrice d'éléments $v^0_{k,l}$ définis par (5.11). Alors par le choix de α_i et par (5.12), on a

$$\Omega_1 V^0 \, {}^t\Omega_1 = U^0. \tag{5.13}$$

Posons alors

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \Omega_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{où les } v_i \text{ sont définis par (5.8)} \tag{5.14}$$

avec choix des α_i, P_i, β_i précédents. Alors $(u_i(s), u_{kl}(s))$ sont les équations d'une bicaractéristique d'équation réduite $(v_i(s), v_{kl}(s))$ joignant $(0, 0)$ à $(0, u^0_{kl})$ pendant le temps s_0, les ξ_{kl} de cette bicaractéristique sont données par

$$ {}^t\Omega_1 \Xi \Omega_1 = P \tag{5.15} $$

où $P(\xi)$ est la matrice antisymétrique formée de blocs diagonaux 2×2 du type

$$ \begin{pmatrix} 0 & P_{2k-1} \\ -P_{2k-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} $$

associée à Ξ comme en 4.3.

Comptons le nombre de paramètres dont dépend cette bicaractéristique : il suffit de compter le nombre de paramètres pour la bicaractéristique réduite, elle dépend d'abord d'un paramètre, l'argument de $\alpha_1 + i\beta_1$, et des $\nu - 1$ quantités arbitraires $P_3 \dots P_{2\nu-1}$ et enfin de l'élément de $\mathbf{T}^\nu$ modulo lequel Ω_1 est défini; or si on multiplie Ω_1 par un élément T de $\mathbf{T}^\nu$ à droite, cela ne change par Ξ à cause de (5.15). Maintenant posant $T\in\mathbf{T}^\nu$ d'angles de rotation $\theta_1 \dots \theta_\nu$, on a par (5.14), (5.8) et les valeurs calculées de α_k et γ_k que

$$ (v_1 \dots v_n)\,{}^tT = (v_1', v_2', 0 \dots 0) $$

où v_1' et v_2' sont donnés par (5.8) mais avec $\alpha_1 + i\beta_1$ remplacé par $e^{-i\theta_1}(\alpha_1 + i\beta_1)$. Donc l'action d'un élément $T\in\mathbf{T}^\nu$ n'ajoute pas de paramètres nouveau dont nous n'ayons pas déjà tenu compte. D'autre part $P_3, \dots, P_{2\nu-1}$ n'interviennent plus de façon explicite dans les équations réduites v_l, donc dans les équations u_l de la bicaractéristique. Par suite, la bicaractéristique dépend de 1 seul paramètre continu, l'argument de $\alpha_1 + i\beta_1$, d'où.

THÉORÈME 1. *Si la matrice antisymétrique U^0 formée avec les u_{kl}^0 est de rang >2, il n'y a pas de bicaractéristiques joignant $(0, 0)$ à $(0, u_{kl}^0)$; si elle est de rang 2, l'ensemble des bicaractéristiques joignant $(0, 0)$ à $(0, u_{kl}^0)$ pendant l'intervalle de temps s_0 dépend d'un seul angle $\theta_0 \in \mathbf{T}$. En particulier, les points $(0, u_{kl}^0)$ avec U^0 de rang 2 sont caustiques de 0 pour $\Delta_{n,2}$.*

(c) *Conditions de quantification (cas $n = 2\nu + 1$ impair)*

Dans ce cas le raisonnement précédent se modifie légèrement : la bicaractéristique réduite doit aller de $(0, 0)$ à $(0, v_{kl}^0)$ pendant le temps s_0 et on doit donc avoir $v_l(s_0) = 0$. Cela impose donc les mêmes conditions qu'au b) ci-dessus sur v_k pourvu que $k \leqslant 2\nu$ et la condition $v_n(s_0) = 0$. Or d'après l'intégration des bicaractéristiques faite au 2, on a $v_n(s) = \eta_n s$, d'où on doit avoir $\eta_n = 0$, la matrice V^0 formée par les v_{kl}^0 est alors la matrice V'^0 bordée à droite par une colonne de 0 et en dessous par une ligne de 0 où V'^0 est la matrice antisymétrique $2\nu \times 2\nu$ formé par les $(v_{kl}^0)_{k,l\leqslant 2\nu}$ donnés exactement par (5.11). Donc V^0 est toujours de rang 2 (si l'un des couples $(\alpha_l, \beta_l) \neq (0, 0)$) et Lemme 3 s'énonce exactement de la même façon qu'au b).

(d) *Calcul de l'action*

Considérons une bicaractéristique $(u_k(s), u_{kl}(s), \xi_k(s), \xi_{kl})$. L'action de cette bicaractéristique parcourue de 0 à s_0 est

$$S_{s_0} = \int_0^{s_0} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \, du_k + \sum_{k<l} \xi_{kl} \, du_{kl} \right). \tag{5.16}$$

Faisons agir la représentation p de $SO(n)$ sur $N_{n,2} \times N^*_{n,2}$.

Alors l'action est invariante par action de p. Pour la calculer nous pouvons donc supposer que nous avons affaire aux équations *réduites* de la bicaractéristique, donc que $\eta_{pq} = 2P_{2k-1}$ si $(p, q) = (2k-1, 2k)$ (éventuellement est 0). (Ici le facteur 2 est introduit parce que dans la réduction du 2 ci-dessus, ξ correspond à $2P$. Car nous avons réduit la matrice A formé par les $(\xi_{kl}/2)_{k<l}$.) Par conséquent, on a par (5.8)

$$\int \sum_{p<q} \eta_{p,q} \, dv_{pq} = 8 \int \sum_{k=1}^{\nu} P^2_{2k-1}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\,(1 - \cos\,(2P_{2k-1}(s))\, ds$$

expression valable pour tout $k \leqslant \nu$, même si $P_{2k-1} = 0$.

De même pour les autres calculs, d'où au total dans le cas de dimension paire $n = 2\nu$.

$$S = 16 \sum_{\substack{k=1 \\ k=\nu}}^{\mu-1} P^2_{2k-1}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\, s_0 + \sum_{k=\mu-1}^{\gamma-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)\, s_0. \tag{5.17}$$

Dans le cas de la dimension impaire $n = 2\nu + 1$, on a de même

$$S = 16 \sum_{\substack{k=1 \\ k=\nu}}^{\mu-1} P^2_{2k-1}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\, s_0 + \sum_{k=\mu-1}^{\nu-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)\, s_0 + (\alpha_n^2 + \beta_n^2)\, s_0 \tag{5.18}$$

où α_k, β_k ont été définis en (5.7), (5.8) et μ est tel que $P_{2\mu-1}, P_{2\mu+1}, \ldots, P_{2\nu-3}$ sont tous nuls, tous les autres P_k étant supposés non nuls (voir les conventions d'écriture).

Remarque. Si nous utilisons les résultats de [13], nous savons que le problème des bicaractéristiques est le problème d'extrémaliser la longueur de la projection sur $\mathbf{R}^n$ pour un relèvement horizontal fixé dans $N_{n,2}$ (problème variationnel horizontal). Le problème des bicaractéristiques n'a pas de solutions pour les $(0, u^0_{kl})$ tels que U^0 soit de rang >2. Bien entendu le problème variationnel aura une solution dans la classe H^1, mais cette solution ne sera plus régulière. Ce problème s'apparente alors à un problème de contrôle optimal déterministe.

§ 6. Cas des groupes nilpotents de rang >2

Ici nous n'obtenons pas un calcul des solutions fondamentales mais nous développons une méthode itérative pour le calcul explicite de la diffusion en carte exponentielle. Il apparaît dans les lois de la diffusion des transcendantes nouvelles complexes même pour les groupes libres d'ordre 3, cela étant dû au fait que la diffusion est polynomiale par rapport au brownien avec un degré >2.

6.1. La formule de Campbell Hausdorff Dynkin

Utilisons la définition générale en § 4.1 d'une algèbre de Lie nilpotente libre de rang r et notons $\mathcal{N}_{n,r}$ l'algèbre nilpotente libre d'ordre r telle que $\dim V_1 = n$ et on notera $Y_1, \ldots, Y_n$ une base de V_1. On notera $N_{n,r}$ le groupe simplement convexe d'algèbre $\mathcal{N}_{n,r}$, $\mathcal{L}_{Y_i}$ les champs invariants associées et

$$\Delta_{n,r} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{Y_i}^2.$$

On notera $v = (v_1 \oplus \ldots \oplus v_r) \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ l'élément générique de V et les éléments génériques de V_i. On aura besoin de la formule de Campbell Hausdorff complète dûe à Dynkin (voir [31]) sous la forme

$$\exp X \exp Y = \exp Z$$

avec $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n$, Z_n étant formé des crochets d'ordre $n-1$ où

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} (Z'_{p,q} + Z''_{p,q})$$

avec

$$Z'_{p,q} = \sum \frac{(-1)^m}{m} \frac{(\operatorname{ad} X)^{p_1} (\operatorname{ad} Y)^{q_1} \ldots (\operatorname{ad} X)^{p_m} Y}{p_1! \, q_1! \ldots q_{m-1}! \, p_m!}$$

la sommation portant sur les $(p_1, \ldots, p_m)$, $(q_1, \ldots, q_m)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} &p_1 + \ldots + p_m = p \\ &q_1 + \ldots + q_m = q \\ &p_i + q_i \geqslant 1 \quad \forall i \\ &q_m \geqslant 1 \end{aligned}$$

et

$$Z''_{p,q} = \sum \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{(\operatorname{ad} X)^{p_1} (\operatorname{ad} Y)^{q_1} \ldots (\operatorname{ad} Y)^{q_{m-1}} X}{p_1! \, q_1! \ldots p_{m-1}! \, q_{m-1}!}$$

la sommation portant sur les $(p_1 \dots p_{m-1})$, $(q_1 \dots q_{m-1})$ avec

$$\begin{aligned} &p_1 + \dots + p_{m-1} = p - 1 \\ &q_1 + \dots + q_{m-1} = q \\ &p_i + q_i \geqslant 1 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Enfin nous considérerons la carte exponentielle de $N_{n,r}$: $v \in \mathcal{N}_{n,r} \to \exp v \in N_{n,r}$ et nous lirons tous les objets dans cette carte.

6.2. Intégrale stochastique anticipante de Feynman

Dans l'intégrale stochastique de Itô, on utilise des sommes de Riemann du type suivant :

$$\sum_{i=0}^{n} e(t_i, \omega)(b(t_{i+1}) - b(t_i)) \quad \text{(voir [19])}$$

avec les $e(t_i, \omega) \in \mathcal{B}_{t_i}$ ($\mathcal{B}_s$ étant la tribu engendrée par les browniens $(b_u)_{u \leqslant s}$) de sorte que le facteur de l'accroissement du brownien est non anticipant de l'accroissement.

Il est commonde d'introduire une autre notion d'intégrale stochastique en utilisant dans les sommes de Riemann le point $(t_i + t_{i+1})/2$ au lieu de t_i. Si donc $e(t, \omega)$ est une fonction non anticipante du brownien, étagée en t, alors on posera

$$^*\!\!\int_0^t e(t, \omega)\, db_t = \sum_{i=0}^{n} e\left(\frac{t_j + t_{i-1}}{2}, \omega\right)(b(t_{i+1}) - b(t_i)) \tag{6.1}$$

où $0 = t_0 \leqslant t_1 < \dots < t_n \leqslant t_{n+1} = t$ est une suite de temps tels que e est constante par morceaux dans les intervalles ainsi déterminés. Ensuite on passe au cas des fonctions non anticipantes $e(t, \omega)$ telles que $ps \int_0^t e(s, \omega)^2 ds < \infty$ et on définit de la même façon que d'habitude une intégrale stochastique $^*\!\int_0^t e(s, \omega)\, db_s$ par passage à la limite à partir d'expression sommes de Riemann telles que (6.1).

Soit alors M une variété différentiable, Δ un opérateur de 2nd ordre sur M du type $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{Y_i}^2$ où $\mathcal{L}_{Y_i}$ sont les dérivées de Lie selon les champs de vecteurs Y_i qui s'écriront en coordonnées locales $Y^i = \sigma^{ik}(\partial/\partial x_k)$, de sorte que

$$\Delta = \sum \sigma^{ik} \sigma^{il} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum \sigma^{ik} \partial_k \sigma^{il} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Soit $(X_s)_s$ la diffusion sur M de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta$. On a alors dans le système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$.

LEMME 1. *$X_t^i = X_0^i + {}^*\int_0^t \sigma^{ij}(X_s)\,db_s^j$ où $(b^1 \dots b^n)$ est le brownien standard des coordonnées* $(x^1, \dots, x^n)$.

Avec cette notation l'avantage est que le mouvement de générateur $\frac{1}{2}\Delta$ se comporte formellement comme une équation différentielle à acroissements purs db^j et les règles du calcul différentiel ordinaire s'appliquent en utilisant l'intégrale * par exemple :

LEMME 2. *Si f est fonction C^2, on a*

$$f(X_t) = f(X_0) + {}^*\int_0^t \partial_i f(X_s)\,\sigma^{ij}(X_s)\,db^j(s). \tag{6.2}$$

De la même façon on a une formule d'intégration par parties comme en calcul élémentaire.

LEMME 3. *Si a et b sont deux processus, on a*

$$^*\int a\,db = ab - {}^*\int b\,da. \tag{6.3}$$

La vérification immédiate de ces lemmes est laissée au lecteur.

N.B. Cette intégrale stochastique anticipante est utilisée par Feynman en électrodynamique quantique pour le lagrangien dépendant explicitement des vitesses ([6]) et par Stratonovich en contrôle optimal.

6.3. Calcul itératif de la diffusion en carte exponentielle

Notons $v(t) = (v_1(t), \dots, v_r(t)) \in V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ la diffusion de générateurs infinitésimale $\frac{1}{2}\Delta_{n,r}$ lue en carte exponentielle. On choisira un produit scalaire sur V_1 de sorte que $Y_1, \dots, Y_n$ soit base orthonormée de V_1. On a alors.

LEMME 4. *Pour tout $s \leqslant r$, $(v_1(t), \dots, v_s(t_1)) \in V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ est la diffusion de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta_{n,s}$ lue dans la carte exponentielle de $N_{n,s}$. En particulier, $v_1(t)$ est un brownien standard n-dimensionnel de V_1 pour le produit scalaire choisi et $(v_1(t), v_2(t))$ est la diffusion de $N_{n,2}$ calculée en 4.2.*

Preuve. $V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ est l'algèbre de Lie nilpotente libre à n générateurs et d'ordre s, donc est $\mathfrak{N}_{n,s}$ et la projection de l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta_{n,r}$ est l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta_{n,s}$ de façon évidente. Donc la diffusion $(v_1, \dots, v_r)$ se projette selon la diffusion $(v_1, \dots, v_s)$ ayant $\frac{1}{2}\Delta_{n,s}$ pour générateur.

Lemme 5. *Pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$ l'accroissement infinitésimal de la diffusion $dv(t)$ est donné par la formule suivante.*

$\exp v(t) \exp (dv_1(t)) = \exp (v(t) + dv(t) + O(dt^{3/2-\varepsilon}))$ *où $dv_1(t)$ est l'acroissement infinitésimal du brownien v_1 pendant dt.* (6.4)

Preuve. Puisque $\Delta_{n,r}$ est invariant à gauche par définition, la diffusion issue de $g_0 \in N_{n,r}$ est $g_0 . g_\omega(t)$ où $g_\omega(t)$ est la diffusion issue de 1. L'acroissement infinitésimal de la diffusion issue de 1 à $t=0$ pendant $[t, t+dt]$ est $g_\omega(t)^{-1} g_\omega(t+dt)$ et ceci par la propriété de Markov et invariance à gauche est l'acroissement infinitésimal de la diffusion issue de 1 à $t=0$ pendant l'intervalle de temsp $[0, dt]$.

Or $g_\omega(t) = \exp v(t) g_\omega(t+dt) = \exp (v(t+dt))$ d'où $\exp (v(t))^{-1} \exp (v(t+dt))$ est l'acroissement infinitésimal de la diffusion issue de 1 à $t=0$ pendant l'intervalle de temps dt. Mais en 1, le laplacien $\frac{1}{2}\Delta_{n,r}$ coïncide *exactement* avec le laplacien de V_1 euclidien dans la carte exponentielle. En effet, le groupe étant nilpotent, les coefficients de $\Delta_{n,r}$ sont des polynômes en les v_i; par construction les coefficients de $\partial^2/\partial v^{k2}$ sont 1 et les coefficients des autres termes s'annulent en $v=0$, d'où l'assertion. Par suite dans la carte exponentielle, l'accroissement $dv(t)$ de la diffusion issue de $v=0$ à $t=0$ pendant l'intervalle de temps dt est exactement l'accroissement du brownien standard $dv_1(t)$ puisque en $v=0$, la covariance de $dv(t)$ est donnée exactement par la matrice du laplacien euclidien de V_1. Ceci démontre la formule (6.4).

Notons maintenant par d^* la différentielle stochastique associée à l'intégrale stochastique $*\int$.

On a alors

Théorème 1. *Supposons la diffusion $(v_1(t), \ldots, v_{r-1}(t))$ calculée pour l'algèbre $\mathfrak{N}_{n,r-1}$. Alors l'acroissement infinitésimal $d^* v_r(t)$ de la $r^{\text{ième}}$ composante de la diffusion de $\mathfrak{N}_{n,r}$ issue à $t=0$ de 0, pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$ est donné par la formule*

$$d^* v_r = \sum_{n \leqslant r} \sum_{i_1 + \ldots + i_{n-1} = r-1} c_{i_1 \ldots i_{n-1}} [v_{i_{n-1}}, [v_{i_{n-2}}, \ldots, [v_{i_1}, dv_1].] \ldots]$$

où $c_{i_1}, \ldots, i_{n-1}$ sont des constantes universelles.

Preuve. Nous appliquons la formule (6.4) et la formule de Dynkin de 7.1. Alors on a formellement :

$$\exp(v(t) + dv(t)) = \exp\left(v(t) + dv_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} Z_n(v(t), dv_1(t)\right)$$

où les $Z_n(v(t), dv_1(t))$ sont donnés par la formule de Dynkin. Maintenant Z_n se décompose en $(1/n) \sum_{p+q=n} (Z'_{p,q}+Z''_{p,q})$ et on voit aussitôt par la définition de $Z'_{p,q}$, $Z''_{p,q}$ que dv_1 apparaît q fois dans $Z'_{p,q}(v(t), dv_1(t))$ et $Z''_{p,q}(v(t), dv_1(t))$. D'après le calcul de Itô, il suffit donc de se borner aux termes d'ordre $q \leqslant 2$ et pour tous les n possibles. Maintenant au lieu d'utiliser le calcul différentiel de Itô, utilisons le calcul différentiel stochastique de 7.2; alors il suffit de se borner aux termes d'ordre $q=1$, mais à condition d'utiliser les différentielles d^*. Notant $p_l : \mathcal{N}_{n,r} \to V_l$ la projection, on doit calculer

$$p_l(Z_n) = \tfrac{1}{2}(p_l(Z'_{n-1,1}) + p_l(Z''_{n-1,1})).$$

Le terme $Z'_{n-1,1}$ et le terme $Z''_{n-1,1}$ sont des combinaisons linéaires universelles de $(\operatorname{ad} v)^{n-1} dv_1$. Par suite pour l fixé, le calcul de v_l ne fait intervenir que des termes Z_n avec $n=l$, au plus, d'où la formule du théorème.

Exemple : le cas $r=3$.

Raisonnons dans $\mathcal{N}_{n,3} = \mathcal{N}_{n,2} \oplus V_3$; alors v_1 est le brownien standard à n composantes, v_2 est le processus construit en § 4.3. On a alors par la formule de Dynkin

$$\begin{aligned}
p_3(Z'_{1,1}) &= [v_2, dv_1] \\
p_3(Z'_{2,1}) &= \tfrac{1}{2}[v_1, [v_1, dv_1]] \\
p_3(Z''_{1,1}) &= \tfrac{1}{2}[v_2, dv_1] \\
p_3(Z''_{2,1}) &= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3})[v_1, [v_1, dv_1]]
\end{aligned}$$

d'où on différentielle d^*, il vient

$$d^* v_3 = \tfrac{3}{4}[v_2, dv_1] + \tfrac{2}{9}[v_1, [v_1, dv_1]]$$

On repasse à la différentielle usuelle grâce à la formule formelle de (3.2).

$$\int^* a\,db = \int a\,db + \frac{1}{2}\int da\,db$$

$$dv_3 = \tfrac{3}{4}[v_2, dv_1] + \tfrac{3}{8}[dv_2, dv_1] + \tfrac{2}{9}[v_1, [v_1, dv_1]] + \tfrac{1}{9}[dv_1, [v_1, dv_1]]$$

où on convient alors d'utiliser les règles de Itô et de poser

$$dv_1^k dv_1^l = \delta_{kl} dt.$$

Exemple complet $\mathcal{N}_{2,3}$

Posons $V_1 = \mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}Y$, $V_2 = Z\mathbf{R}$, $Z=[X, Y]$, $V_3 = \mathbf{R}U \oplus \mathbf{R}T$ où $T=[X, Z]$ et $U=[Y, Z]$. Alors posant $v_1 = xX + yY$, $v_2 = zZ$, $v_3 = tT + uU$, on a

$$d^*t = -\tfrac{3}{4}z\,dx + \tfrac{2}{9}x^2\,dy - \tfrac{2}{9}xy\,dx$$
$$d^*u = -\tfrac{3}{4}z\,dy + \tfrac{2}{9}yx\,dy - \tfrac{2}{9}y^2\,dx.$$

d'où les différentielles stochastiques usuelles de t et u

$$dt = -\tfrac{3}{4}z\,dx + \tfrac{2}{9}x^2\,dy - \tfrac{2}{9}xy\,dx - (\tfrac{1}{9} + \tfrac{3}{8})\,y\,ds.$$
$$du = -\tfrac{3}{4}z\,dy - \tfrac{2}{9}y^2\,dx + \tfrac{2}{9}xy\,dy + (\tfrac{1}{9} + \tfrac{3}{8})\,x\,ds.$$

§ 7. Holonomie stochastique et spectre de representations des groupes libres

7.1. Formule de l'holonomie stochastique

Soit $\pi : F \to M$ un fibré en tores $\mathbf{T}^d$ sur une variété riemannienne M. On suppose F muni d'une forme de connexion; on note $x = (x_1 \dots x_n)$ les coordonnées de M, $t = (t_1 \dots t_d)$ celles de $\mathbf{T}^d$. Soit $m \in \mathbf{Z}^d$. On appelle *fonction m-équivariante* une fonction $f : F \to \mathbf{C}$ avec $f(y \cdot t) = e^{-i(m|t)} f(y)$ pour tout $y \in F$ et $t \in \mathbf{T}^d$, $y \cdot t$ désignant l'action de $\mathbf{T}^d$ sur x. On note $L^2_m(F)$ les fonctions m-équivariantes dans $L^2(F)$. M est muni d'un laplacien riemannien $\frac{1}{2}\Delta$; la connexion sur F le relève en un opérateur $\frac{1}{2}\Delta_F$ dégénéré. Si $x(t)$ est la diffusion sur M de générateurs $\frac{1}{2}\Delta$, notons $y(t)$ la diffusion sur F de générateurs $\frac{1}{2}\Delta_F$ obtenue par relèvement de $x(t)$ à travers la connexion de F (voir [24]). Enfin on définit presque partout sur M une section $y(x)$ de F de la façon suivante : ayant choisi un point $y_0 \in F$ de base $x_0 = \pi(y_0)$, on considère l'unique géodésique minimisante de M allant de x_0 à x lorsque x n'est pas dans le cut locus de x_0; on la relève horizontalement pas la connexion de F et on note $y(x)$ son extrêmité.

Introduisons comme dans [21], $2p(m) \geq 0$ *l'infimum du spectre de* $-\Delta_F$ *sur les fonctions* $L^2_m(F)$. On a alors (voir [21] pour le résultat dans le cas général d'un fibré G-principal) :

THÉORÈME 1. *Soit* $y_0 \in F$, *alors*

$$p(m) \geq -\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\left[\tfrac{1}{2}\log p_{2t}(\pi(y_0), \pi(y_0)) + \log h_t(m)\right] \tag{7.1}$$

où p_t *est le semi groupe de la chaleur de* $\frac{1}{2}\Delta$ *et* $h_t(m)$ *est l'holonomie stochastique de la représentation m introduite dans* ([21])

$$h_t(m) = \max_{x \in M} \left| E_{y_0}^{(\pi(y(t)) = x)}(\exp i(m | y(t)\, y_x(x)^{-1})) \right|$$

où $E_{y_0}^{(\pi(y(t)) = x)}$ *indique qu'on conditionne sachant que* $y(0) = y_0$ *et que* $\pi(y(t)) = x$.

Preuve. Pour être complet, rappelons brièvement cette preuve. Si $f \in L^2_m(F)$ réalise l'infimum du spectre on a évidemment :

$$f(y_0) = E_{y_0}[\exp(p(m)t)f(y(t))] = \int_M E_{y_0}^{(\pi(y(t))=x)}(f(y(t)))\exp(p(m)t)\,p_t(x_0, x)\,dx$$

et donc

$$\exp(-p(m)t)f(y_0) \leqslant h_t(m)\int_M |f(y(x))|\,p_t(x_0, x)\,dx.$$

On majore par Cauchy–Schwarz, on prend le logarithme et on fait tendre $t \to +\infty$.

7.2. Calculs explicites des représentations de $N_{n,2}$

(a) *cas du groupe d'Heisenberg* H_{2n+1}.

Rappelons (voir [29]) que pour construire les représentations irréductibles de H_{2n+1} on considère les fonctions satisfaisant

$$f(gw^{-1}) = \chi_\lambda(w)f(g)$$

pour tout $g \in H_{2n+1}$, $w \in H_{2n+1}$ tel que $w \in W$ où

$$W = \{w = (x_i, y_i, t) \in H_{2n+1} \mid x_i = 0 \quad \forall i\}$$

et où $\chi_\lambda(w) = \exp(-i\lambda t/4)$. Alors $|f(g)|$ ne dépend que des coordonnées x_i de g. On supposera de plus que $|f|$ est alors $L^2(\mathbf{R}^n)$ quand on la considère comme fonction de $x_i \in \mathbf{R}^n$. Soit alors la représentation régulière de H_{2n+1} agissant sur ces fonctions. Cela revient à considérer $L^2(\mathbf{R}^n)$ et la représentation U_λ de von Neumann ([29])

$$(U_\lambda(x, y, t)f)(\xi) = \exp i\lambda\left[\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i y_i\right] f(\xi + x). \tag{7.2}$$

Nous allons maintenant vers *le calcul explicite complet de toutes les représentations irréductibles* de $N_{n,2}$. Le théorème des orbites de Kirillov classifie ces représentations; mais ici, comme nous avons besoin des diagonalisations *explicites* des opérateurs hypoelliptiques, il nous faut une réalisation explicite de ces représentations. *L'élément de base sera toujours la structure des représentations du groupe d'Heisenberg donnée par* (7.2) *et évidemment l'analyse de Fourier sur* $\mathbf{R}^n$.

Nous utiliserons de façon constante le théorème suivant (beaucoup plus simple que le théorème de Kirillov complet).

Théorème. *Soit G un groupe nilpotent de centre Z de dimension* 1, *T une représentation irréductible de G dont la restriction à Z n'est pas l'identité. Alors T est induite par une représentation unitaire irréductible d'un sous groupe de codimension* 1.

Ceci signifie qu'il existe un sous groupe G_1 de codimension 1 de G, une représentations unitaire irréductible U de G_1 dans un espace d'Hilbert H_0 tels que T soit ainsi obtenue :
on considère l'espace H des fonctions $f: G \to H_0$ telles que

(i) $U(g_1)f(g) = f(g_1 g)$ pour $g_1 \in G_1$ et pour $(g) \in G$

(ii) notant $l \in \mathfrak{g} \cap \complement \mathfrak{g}_1$, f satisfaisant (i) devient alors fonction $f(t) = f(\exp lt)$.

On suppose que

$$\int \|f(t)\|^2_{H_0} dt < \infty.$$

Alors T est représentation dans H définie par

$$T(g_1 \exp(ls))f)(t) = U(\exp(lt) g_1 \exp(-lt)) f(t+s).$$

De plus le groupe G_1 est ainsi obtenu : il existe une décomposition en somme directe.

$$g = \mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{z} \oplus \hat{\mathfrak{g}}$$

où $\mathfrak{z}$ est l'algèbre de Lie du centre de G engendrée par Z, $[X, Y] = Z$, et alors on a

$$\mathfrak{g}_1 = \mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{z} \oplus \hat{\mathfrak{g}}$$

qui est l'idéal de $\mathfrak{g}$ formé des $l \in \mathfrak{g}$ avec $[l, Y] = 0$. (Voir [29].)

(b) *préliminaires d'algèbre linéaire*

Soient $u, v \in N_{n,2}$ de coordonnées exponentielles $u = (u_l, u_{kl})$, $v = (v_l, v_{kl})$, $(k < l)$. Alors on a trivialement par Campbell Hausdorff.

Lemme. *La loi de groupe de $N_{n,2}$ en coordonnées exponentielles est :*

$$u \cdot v = (u_l + v_l, u_{kl} + v_{kl} + \tfrac{1}{2}(u_k v_l - v_k u_l)).$$

Remarque. La normalisation utilisée ici diffère d'un facteur numérique de celle 1.1.

Posons $G = N_{n,2}$, Z son centre qui a les coordonnées $(0, u_{kl})$. Soit alors T une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert H. On a trivialement que $T|_Z$

est représentation irréductible de Z puisque tout opérateur qui commute aux $(T(z))_{z\in Z}$ commute aux $T(g)$ pour tout $g\in G$. Par suite, on peut trouver $\xi_{kl}\in\mathbf{R}$ $k<l$ tels que

$$T(0, u_{kl}) = \exp i\left(\sum \xi_{kl}u_{kl}\right) Id.$$

Notons alors $\mathfrak{z}_0$ le noyau (de codimension 1 car ξ_{kl} non tous nuls) de la forme linéaire $u_{kl}\in z\to\sum \xi_{kl}u_{kl}$ et faisons la décomposition $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0\oplus\mathfrak{z}_0^\perp$ définie par $u_{kl}=v_{kl}+w_{kl}$ où $(v_{kl})\in\mathfrak{z}_0$, $(w_{kl})\in\mathfrak{z}_0^\perp$. On a alors $w_{kl}=\lambda\xi_{kl}$ avec $\lambda=\sum u_{kl}\xi_{kl}/|\xi|^2$ où $|\xi|^2=\sum_{kl}|\xi_{kl}|^2$; soit $G_0=G/Z_0$, g_0 son algèbre de Lie. Notons alors $\bar X_i$ l'image de X_i dans $\mathfrak{g}_0$, de sorte que en posant $\bar Y=\sum \xi_{kl}\bar X_{kl}/|\xi|^2$, $\{\bar X_i, Y\}$ forment une base de $\mathfrak{g}_0$ avec la loi pour $i<k$.

$$[\bar X_i, \bar X_k] = \bar X_{ik} = \xi_{ik}\,\bar Y. \tag{7.3}$$

Soit T_0 la représentation-quotient de T sur G_0; elle est trivialement irréductible.

Maintenant, il existe une matrice orthogonale Ω tel que si on note A la matrice antisymétrique ayant les ξ_{kl} pour éléments au dessus de la diagonale principale, ξ_{kl} en dessous et 0 sur la diagonale principale, on a

$${}^t\Omega A\Omega = P \tag{7.4}$$

où P est la matrice antisymétrique décrite en 4.3. On s'arrangera toujours pour que $P_{n-1}\neq 0$ ou $P_{n-2}\neq 0$ selon la parité de n dès que $A\neq 0$ évidemment.

Remarque. Les fonctions symétriques des P_{2n-1} sont fonctions uniformes des ξ_{kl}. On supposera aussi comme en 5 que les P_i nuls si il y en a sont exactement

$$P_{2\mu-1} = \ldots = P_{2\nu-3} = 0, \quad \mu\leqslant\nu$$

où $\nu=[n/2]$. Si $\mu=\nu$ il n'y en a aucun de nuls.

1er cas : $n=2\nu$ est pair

Posons $\bar{\bar X}_i={}^t\Omega\bar X_i$; $\bar{\bar X}_i=\omega_{li}\bar X_l$, d'où

$$[\bar{\bar X}_i, \bar{\bar X}_h] = \sum_{l<n}(\omega_{li}\omega_{nk}-\omega_{ni}\omega_{lk})\,\xi_{ln}\bar Y. \tag{7.5}$$

On utilisera dans la suite la base $(\bar{\bar X}_1, \ldots, \bar{\bar X}_n, \bar Y)$ de sorte que par (7.3) et (7.5)

$$[\bar{\bar X}_{2l-1}, \bar{\bar X}_{2l}] = P_{2l-1}\,\bar Y \tag{7.6}$$

et tous les autres crochets sont 0. D'autre part la formule de changement de coordonnées est

$$\bar y\to\bar y, \quad \bar{\bar x}_i = \omega_{li}\bar x_l. \tag{7.7}$$

On a par hypothèse

$$P_{n-1} \neq 0 \qquad (7.8)$$
$$P_{2\mu-1} = \ldots = P_{2\nu-3} = 0, \quad \mu \leqslant \nu.$$

Dans ces conditions, $\bar{\bar{X}}_{2\mu-1}, \bar{\bar{X}}_{2\mu}, \ldots, \bar{\bar{X}}_{2\nu-3}, \bar{\bar{X}}_{2\nu-2}$ engendrent un sous groupe abélien central de G_0 et on a une décomposition en produit direct

$$G_0 = G_1 \times \mathbf{R}^{2(\nu-\mu)}$$

et donc la représentation T_0 se factorise en

$$T_0(g_1, g') = T_1(g_1)\, T'(g')\, g_1 \in G_1,\ g' \in \mathbf{R}^{2(\nu-\mu)}.$$

Maintenant T_0 étant irréductible et g' commutant à tous les $g_0 \in G_0$, on a $T'(g')$ multiple de Id, d'où

$$T'(\bar{\bar{x}}_{2\mu-1}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\nu-2}) = \exp i\left(\sum_{2\mu-1}^{2\nu-2} \xi_k \bar{\bar{x}}_k\right) Id. \qquad (7.9)$$

et par suite, il suffit de déterminer T_1, G_1 étant alors le sous groupe de G_0 engendré par $\{\bar{\bar{X}}_1, \ldots, \bar{\bar{X}}_{2\mu-2}, \bar{\bar{X}}_{2\nu-1}, \bar{\bar{X}}_{2\nu}, \bar{Y}\}$ sous groupe dont le centre est réduit à $\bar{Y}$ et il suffit de calculer $T_1 = T_0|_{G_1}$. Mais T_1 est irréductible car si un opérateur linéaire A commute aux $T_1(g_1)$, alors comme par (7.9) il commute trivialement aux $T'(g')\,g' \in \mathbf{R}^{2(\nu-\mu)}$, il s'ensuit qu'il commute aux $T_0(g_0)\,g_0 \in \mathbf{G}_0$, donc qu'il est multiple de Id car T_0 est irréductible.

Nous suivons alors la méthode des représentations induites de Kirillov pour calculer T_1. Pour cela on cherche un idéal de $\mathfrak{g}_1$ de codimension 1. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}_2$ la sous-algèbre engendrée par $\bar{\bar{X}}_1, \ldots, \bar{\bar{X}}_{2\mu-2} (\mu > 2)$, ($\tilde{\mathfrak{g}}_2 = 0$ si $\mu \leqslant 1$) (dans ce dernier cas d'ailleurs, on a affaire à $G_1 =$ groupe d'Heisenberg dont on connait déjà la représentation de von Neumann voir (a)). Comme $[\bar{\bar{X}}_i, \bar{\bar{X}}_{2\nu}] = 0$ si $i < 2\nu - 1$, le commutateur $\mathfrak{g}_2$ de $\bar{\bar{X}}_n$ dans $\mathfrak{g}_1$ est $\mathfrak{g}_2 = \tilde{\mathfrak{g}}_2 \oplus \mathbf{R}\bar{\bar{X}}_n \oplus \mathbf{R}\,\bar{Y}$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbf{R}\bar{\bar{X}}_{n-1}$ et trivialement $\mathfrak{g}_1$ est idéal de $\mathfrak{g}_0$, car $[\bar{\bar{X}}_i, \bar{\bar{X}}_{2\nu-1}] = 0$, $i < 2\nu - 1$ et $[\bar{\bar{X}}_{n-1}, \bar{\bar{X}}_n] = P_{n-1}\,\bar{Y}$. Enfin nous noterons $\mathfrak{L} = \mathbf{R}\bar{\bar{X}}_{n-1} \oplus \mathbf{R}\bar{\bar{X}}_n \oplus \mathbf{R}\,\bar{Y}$ qui est algèbre d'Heisenberg d'après la relation précédente car $P_{n-1} \neq 0$ par hypothèse et par L le groupe associé. Le théorème de Kirillov pour les groupes à centre de dimension 1, dit que T_1 est induite par une représentation irréductible U_2 de G_2 (voir [29] et ce qui précède au (a)). On va poser

$$x_1 = \frac{\bar{\bar{X}}_1}{P_1},\ x_2 = \frac{\bar{\bar{X}}_3}{P_3},\ \ldots,\ x_{\mu-1} = \frac{\bar{\bar{X}}_{2\mu-3}}{P_{2\mu-3}}$$
$$y_1 = \bar{\bar{X}}_2,\ y_2 = \bar{\bar{X}}_4,\ \ldots,\ y_{\mu-1} = \bar{\bar{X}}_{2\mu-2} \qquad (7.10)$$
$$C = \bar{Y}$$

de sorte que $[x_i, y_i] = \mathsf{C}$ et les autres crochets sont 0; donc $\mathfrak{g}_2$ est alors

$$\mathfrak{g}_2 = \mathcal{H}_{\mu-1} \oplus \mathbf{R}\bar{\bar{X}}_n$$

avec $\mathcal{H}_{\mu-1}$ algèbre d'Heisenberg de dimension $2\mu - 1$ réelle. Maintenant le centre $\mathfrak{z}_2$ de $\mathfrak{g}_2$ est engendré par $\bar{Y}$ et $\bar{\bar{X}}_n$, U_2 est irréductible, donc sa restriction au centre est du type

$$(U_2((0, \ldots, 0, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y})) = \exp\,(i(\xi_n \bar{\bar{x}}_n + \eta\bar{y}))\, Id.$$

Quotientons alors par $\mathfrak{z}_{2,0}$ noyau de la forme linéaire

$$(\bar{\bar{x}}_n, \bar{y}) \to \xi_n \bar{\bar{x}}_n + \eta\bar{y}.$$

Posant alors $\bar{\mathsf{C}} = (\xi_n \bar{\bar{X}}_n + \eta\,\bar{Y})/(\xi_n^2 + \eta^2)^{1/2}$ et $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ les quotients, de $\tilde{x}_i$ et $\tilde{y}_i$, on a

$$[\bar{x}_i, \bar{y}_i] = \bar{Y}\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{z}_{2,0}) = \eta\mathsf{C}.$$

(i) Posons $\bar{\bar{x}}_i = \bar{x}_i$, $\bar{\bar{y}}_i = \bar{y}_i\eta^{-1}$ si $\eta \neq 0$ ce qui est clair car sinon $\xi_{kl} = 0$ pour tout $k < l$, $\bar{\bar{\mathsf{C}}} = \bar{\mathsf{C}}$ et $\bar{U}_2$ la représentation sur $G_2/Z_{2,0} = G_3$: ceci est une *algèbre d'Heisenberg* et $\bar{U}_2$ est irréductible, donc d'après von Neumann, il existe $\lambda \neq 0$ avec pour $f \in H = L^2(\mathbf{R}^{\mu-1})$

$$(\bar{U}_2(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_{\mu-1}, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_{\mu-1}, t)\, f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1})$$
$$= \exp\left[i\lambda\left(\sum_{i=1}^{\mu-1} s_i \bar{\bar{y}}_1 + \bar{\bar{t}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1} \bar{\bar{y}}_i \bar{\bar{x}}_i\right)\right] f(s_1 + \bar{\bar{x}}_1, \ldots, s_{\mu-1} + \bar{\bar{x}}_{\mu-1}).$$

Remontons alors la chaine, avec $\bar{\bar{x}}_i = \bar{x}_i = \tilde{x}_i$, $\bar{\bar{y}}_i = \eta\bar{y}_i = \eta\tilde{y}_i$, $\bar{\bar{t}} = \bar{t} = \xi_n \bar{\bar{x}}_n + \eta t = \xi_n \bar{\bar{x}}_n + \eta\bar{y}$. Par conséquent la représentation U_2 de G_2 est

$$(U_2(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\mu-1}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{\mu-1}, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y})\, f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1})$$
$$= \exp\left[i\lambda\left(\sum_{i=1}^{\mu-1} s_i\,\eta\tilde{y}_i + \xi_n \bar{\bar{x}}_n + \eta l + \tfrac{1}{2}\sum \tilde{y}_i\,\eta\tilde{x}_i\right)\right] f(s_1 + \tilde{x}_1, \ldots, s_{\mu-1} + \tilde{x}_{\mu-1}). \quad (7.11)$$

(ii) Revenons en coordonnées $(\bar{\bar{x}}_i, \bar{y})$ dans G_2, pour avoir d'après (7.10) $\tilde{x}_i = P_{2i-1}\bar{\bar{x}}_{2i-1}$, $\tilde{y}_i = \bar{\bar{x}}_{2i}$

$$U_2(\bar{\bar{x}}_i, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-2}, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y})\, f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1})$$
$$= \exp\left[i\lambda\left(\sum_{i=1}^{\mu-1} s_i\,\eta\bar{\bar{x}}_{2i} + \xi_n \bar{\bar{x}}_n + \eta\bar{y} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1} \bar{\bar{x}}_{2i}\,\eta P_{2i-1}\bar{\bar{x}}_{2i-1}\right)\right] f(s_1 + P_1\bar{\bar{x}}_1, \ldots, s_{\mu-1} + P_{2\mu-3}\bar{\bar{x}}_{2\mu-3}). \quad (7.12)$$

Reprenons maintenant le calcul de la représentation T_1, tout $g_1 \in G_1$ s'écrit de façon unique $g_1 = g_2 \exp\,(\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{X}}_{n-1})$ puisque $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbf{R}\bar{\bar{X}}_{n-1}$ où $g_2 \in G_2$; alors T_1 est induite par une représentation irréductible U_2 de G_2, i.e. en posant $H' = L^2(\mathbf{R}, H)$, on a si $f \in H'$

$$(T_0(g_2 \exp(\bar{\bar{x}}_{n-1} \cdot \bar{\bar{X}}_{n-1}))f)(\sigma) = (U_2(\exp(\sigma\bar{\bar{X}}_{n-1})\, g_2 \exp(-\sigma\bar{\bar{X}}_{n-2}))\, f(\sigma + \bar{\bar{x}}_{n-1})). \quad (7.13)$$

Le second membre a un sens car G_2 est sous groupe distingué de G_1. Dans le cas $\eta \neq 0$, comme

$$(\exp(\sigma\bar{\bar{X}}_{n-1})\, g_2 \exp(-\sigma\bar{\bar{X}}_{n-1}) = (\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-2}, \ldots, 0, \ldots, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y}_2 + \sigma\bar{\bar{x}}_n P_{n-1})$$

et comme l'élément générique de G_1 va s'écrire

$$\begin{aligned} g_1 &= (\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-2}, \ldots, 0, \ldots, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y} + \tfrac{1}{2}\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{x}}_n P_{n-1})(\exp(\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{X}}_{n-1}))\\ &= (\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-1}, \ldots, 0, \ldots, \bar{\bar{x}}_{n-1}, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y}) \end{aligned}$$

on a donc par (7.12) et (7.13)

$$\begin{aligned} &(T_1(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-2}, \ldots, 0, \ldots, \bar{\bar{x}}_{n-1}, \bar{\bar{x}}_n, y))f)(\sigma)\\ &\quad = U_2(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-2}, \ldots, 0, \ldots, \bar{\bar{x}}_n, y + \tfrac{1}{2}\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{x}}_n P_{n-1} + \sigma\bar{\bar{x}}_n P_{n-1})\, f(\sigma + \bar{\bar{x}}_{n-1})\\ &\quad = \exp\left[i\lambda\left(\sum_{i=1}^{\mu-1} s_i \eta\bar{\bar{x}}_{2i} + \xi_n\bar{\bar{x}}_n + \eta\bar{y} + \tfrac{1}{2}\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{x}}_n \eta P_{n-1} + \eta\sigma\bar{\bar{x}}_n P_{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1}\bar{\bar{x}}_{2i}\eta P_{2i-1}\bar{\bar{x}}_{2i-1}\right)\right]\\ &\qquad \times f(s_1 + P_1\bar{\bar{x}}_1, \ldots, x_{\mu-1} + P_{2\mu-3}\bar{\bar{x}}_{2\mu-3}, \sigma + \bar{\bar{x}}_{n-1}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Maintenant sur le centre $\bar{Y}$, i.e. $\bar{\bar{x}} = 0$, $\bar{y} = 0$. $T_1(0 \ldots 0\bar{y}) = \exp(i\lambda\eta\bar{y})\, Id$ d'après (7.14). Mais par définition, de $\bar{Y}$, $\bar{y} = \sum_{k<l} u_{kl}\xi_{kl}$ et on sait que T coïncide sur Z avec $\exp i(\sum u_{kl}\xi_{kl})$ par définition, d'où $\lambda = \eta^{-1}$. Ensuite sur le centre de L, T_1 coïncide avec $\exp(i\bar{y})\, Id$ d'après la considération précédente, d'après von Neumann comme L est algèbre d'Heisenberg, elle est somme directe de représentation irréductible de même paramètre α. L'élément générique de L est

$$l = (0, \ldots, 0, \bar{\bar{x}}_{n-1}, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y})$$

et on a par (7.14)

$$\begin{aligned} &(T_1(l)f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1}, \sigma)\\ &\quad = \exp[i\lambda(\xi_n\bar{\bar{x}}_n + \eta\bar{y} + \tfrac{1}{2}\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{x}}_n\eta P_{n-1} + \sigma\eta\bar{\bar{x}}_n P_{n-1})]\, f(s_1, \ldots, s_{\mu-1}, \sigma + \bar{\bar{x}}_{n-1}). \end{aligned}$$

Ici $\lambda = \eta^{-1}$. Cela ne coïncide donc avec une somme directe de représentations irréductibles de paramètre α, que lorsque $\alpha = 1$ et $\xi_n = 0$. (Tenant compte de ce que la loi de L est $[\bar{\bar{X}}_{n-1}, \bar{\bar{X}}_n] = P_{n-1}\bar{Y}$.) *D'où* $\xi_n = 0$ *et* $\lambda = \eta^{-1}$ *dans* (7.14).

Remontant maintenant à T_0 via (7.14) et (7.9), on a $\eta \neq 0$ que

$$\begin{aligned} &(T_0(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n, \bar{y})f(s_1, \ldots, s_{\mu-1}, \sigma)\\ &\quad = \exp\left(i\sum_{2\mu-1}^{2\nu-2}\xi_k\bar{\bar{x}}_k\right)\exp\left[i\left(\sum_{i=1}^{\mu-1} s_i\bar{\bar{x}}_{2i} + \bar{y} + \tfrac{1}{2}\bar{\bar{x}}_{n-1}\bar{\bar{x}}_n P_{n-1} + \sigma\bar{\bar{x}}_n P_{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1}\bar{\bar{x}}_{2i}\bar{\bar{x}}_{2i-1}P_{2i-1}\right)\right]\\ &\qquad \times f(x_1 + P_1\bar{\bar{x}}_1, \ldots, s_{\mu-1} + P_{2\mu-3}\bar{\bar{x}}_{2\mu-3}, \sigma + \bar{\bar{x}}_{n-1}). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Remontant alors à T par $y=\sum u_{kl}\xi_{kl}$ $(=\sum u_{2i-1,2i}P_{2i-1}$ dans le cas particulier de coordonnées choisies) puis utilisant (7.7) et le fait que $\bar{x}_l=u_l$, on a

$$\begin{aligned}(T(g)f)&(s_1,\dots,s_{\mu-1},\sigma)\\ &=\exp\left(i\sum_{2\mu-1}^{2\nu-2}\xi_k\omega_{lk}x_l\right)\exp\left[i\left(\sum_{i=1}^{\mu-1}s_i\omega_{l,2i}u_l+\sigma\omega_{l,n}u_lP_{n-1}+\sum_{k<l}u_{kl}\xi_{kl}\right.\right.\\ &\left.\left.\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1}P_{2i-1}\,\omega_{l,2i-1}\,\omega_{k,2i}\,u_lu_k+\tfrac{1}{2}P_{n-1}\,\omega_{l,n-1}\,\omega_{k,n}\,u_lu_k\right)\right]\\ &\quad\times f(s_1+P_1\omega_{l,1}u_l,\dots,s_{\mu-1}+P_{2\mu-3}\,\omega_{l,2\mu-3}\,u_l,\sigma+\omega_{l,n-1}\,u_l)\end{aligned}\tag{7.16}$$

où ω_{ij} et P_{2k-1} sont donnés par (7.4) et les conventions établies ci-dessus et sommation pour toutes valeurs de l.

2nd cas $b=2\nu+1$ est impair $(\nu\geqslant 1)$.

Commençons le même calcul qu'au début du ler cas : on a alors $[\bar{\bar{X}}_{2i-1},\bar{\bar{X}}_{2i}]=P_{2i-1}\bar{Y}\,(i\geqslant\nu)$ et tous les autres crochets sont nuls, on suppose que si $i=\nu$, $P_{2\nu-1}\neq 0$ et G_0 a pour centre $\{\bar{\bar{X}}_{2\mu-1},\bar{\bar{X}}_{2\mu},\dots,\bar{\bar{X}}_{2\nu-3},\bar{\bar{X}}_{2\nu-2},\bar{\bar{X}}_{2\nu+1},\ \bar{Y}\}$, d'où une décomposition en produit direct

$$G_0=G_1\times\mathbf{R}^{2(\nu-\mu)+1}$$

où $\mathbf{R}^{2(\nu-\mu)+1}$ est le groupe abélien central engendré par $\bar{\bar{X}}_{2\mu-1}$, $\bar{\bar{X}}_{2\mu}\dots\bar{\bar{X}}_{2\nu-3}$, $\bar{\bar{X}}_{2\nu-2}$, $\bar{\bar{X}}_{2\nu+1}$. La représentation quotient T_0 sur G_0 se factorise en

$$T_0(g_1g')=T_1(g_1)\,T(g')\quad\text{où } g_1\in G_1,\ g'\in\mathbf{R}^{2(\nu-\mu)+1}.$$

Le raisonnement est le même qu'au ler cas. On a

$$T'(\bar{\bar{x}}_{2\mu-1},\dots,\bar{\bar{x}}_{2\nu-2},\bar{\bar{x}}_{2\nu+1})=\exp\left[i\left(\sum_{2\mu-1}^{2\nu-2}\xi_k\bar{\bar{x}}_k+\xi_{2\nu+1}\bar{\bar{x}}_{2\nu+1}\right)\right]Id$$

et on calcule $T_1=T_0|_{G_1}$, G_1 étant le sous groupe engendré par $\{\bar{\bar{X}}_1,\dots,\bar{\bar{X}}_{2\mu-2},\bar{\bar{X}}_{2\nu-1},\bar{\bar{X}}_{2\nu},\bar{Y}\}$ dont le centre est alors réduit à $\bar{Y}$, T_1 est irréductible et on est ramené exactement à la situation du ler cas, le groupe G_1 est le même que celui du ler cas. Le résultat (7.17) du ler cas devient alors

$$\begin{aligned}(T(g)f)&(s_1,\dots,s_{\mu-1},\sigma)\\ &=\exp\left[i\left(\sum_{2\mu-1}^{2\nu-2}\xi_k\omega_{lk}u_l+\xi_{2\nu+1}\,\omega_{l,2\nu+1}\,u_l\right)\right]\exp\left[i\left(\sum_{i=1}^{\mu-1}s_i\,\omega_{l,2i}u_l+\sigma\omega_{l,2\nu}u_lP_{2\nu-1}+\sum_{k<l}u_{kl}\xi_{kl}\right.\right.\\ &\left.\left.\quad+\tfrac{1}{2}P_{2\nu-1}\,\omega_{l,2\nu-1}\,\omega_{k,2\nu}\,u_lu_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1}P_{2i-1}\,\omega_{l,2i-1}\,\omega_{k,2i}\,u_lu_k\right)\right]\\ &\quad\times f(s_1+P_1\omega_{l,1}u_l,\dots,s_{\mu-1}+P_{2\mu-3}\,\omega_{l,2\mu-3}\,u_l,\sigma+\omega_{l,n-2}\,u_l).\end{aligned}\tag{7.17}$$

Résumant les résultats du (b) et (c), on a donc

Théorème 2. *Les représentations irréductibles de $N_{n,2}$ se classifient explicitement de la façon suivante :*

(i) *On se donne un* $\binom{n}{2}$*-uplet* $(\xi_{kl})_{k<l}$ *de réels non tous nuls et on définit la matrice* $A(\xi_{kl})$ *antisymétrique associée. On définit alors les fonctions algébriques* $P_{2k-1}\, k \leqslant [n/2]$ *et les fonctions algébriques* ω_{ij} *des* ξ_{kl} *de sorte que la matrice* $\Omega = (\omega_{ij})$ *soit orthogonale et que l'on ait les relations* (7.4) *et que de plus on ait les conventions* (7.8) *(selon la parité de* n*).*

(ii) *Si* n *pair, on note* V_{2k-1} *la variété algébrique* $P_{2k-1}=0$. *Si* $\xi_k \in V_{2\mu-1} \cap \ldots \cap V_{2\nu-3}$, *on se donne un* $(n-2\mu)$*-uplet* $(\xi_{2\mu-1}, \ldots, \xi_{2\nu-2})$ *de réels et alors on obtient une représentation* $U_{(\xi_{kl}, \xi_{2\mu-1}, \ldots, \xi_{n-2})}$ *donnée par* (7.16). *Si* $\xi_{kl} \notin V_{n-2}$, *alors la représentation est déterminée par* ξ_{kl} *par* (7.16).

(iii) *Si* n *est impair, on se donne un réel* ξ_n. *Si* $\xi_{kl} \in V_{2\mu-1} \cap \ldots \cap V_{2\nu-3}$ *on se donne un* $\xi_{2\mu-1}, \ldots, \xi_{n-3}$ *et on obtient une représentation donnée par* (7.17) *Sinon, alors la représentation est déterminée par* (7.17) *seulement grâce aux* ξ_{kl} *et* ξ_n.

Remarque. Bien entendu, cela n'est qu'une reformulation de la structure des orbites de la représentations duale de la représentation adjointe de $N_{n,2}$ sur $\mathcal{N}^*_{n,2}$. Mais ici la forme explicite de la représentation a été mise en évidence.

7.3. Diagonalisation des laplaciens de $N_{n,2}$

(a) Diagonalisation des champs horizontaux.

Lemme 1. *Si* n *est impair et si* T *est représentation de* $N_{n,2}$ *donnée par* (7.17), *on a*

$$dT(X_i)(f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1}, \sigma) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{\partial f}{\partial s_k} P_{2k-1}\, \omega_{i,2k-1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\, \omega_{i,n-2} + i\left(\sum_{k=2\mu-1}^{2\nu-2} \xi_k\, \omega_{ik} + \xi_n\, \omega_{i,n} + \sum_{k=1}^{\mu-1} s_k\, \omega_{i,2k} + \sigma \omega_{i,n-1} P_{n-2}\right) f.$$

Lemme 2. *Si* n *est pair et si* T *est représentations de* $N_{n,2}$ *donnée par* (7.16), *on a*

$$dT(X_i(f)(s_1, \ldots, s_{n-1}, \sigma) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{\partial f}{\partial s_k} P_{2k-1}\, \omega_{i,2k-1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\, \omega_{i,n-1} + i\left(\sum_{k=2\mu-1}^{2\nu-2} \xi_k\, \omega_{ik} + \sum_{l=1}^{\mu-1} \omega_{i,2l} s_l + \sigma \omega_{i,n} P_{n-1}\right) f.$$

Preuve. Calcul direct.

(b) Diagonalisation des laplaciens

Lemme 1. *Si* n *est impair et* T *est donnée par* (7.17), *on a*

$$(dT)(\Delta)(f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1}, \sigma) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{\partial^2 f}{\partial s_k^2} P_{2k-1}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} - \left(\sum_{k=2\mu-1}^{2\nu-1} \xi_k^2 + \xi_n^2 + \sum_{k=1}^{\mu-1} s_k^2 + \sigma^2 P_{n-1}^2 \right) f.$$

LEMME 2. *Si n est pair et T donnée par* (7.16), *on a*

$$(dt)(\Delta)(f)(s_1, \ldots, s_{\mu-1}, \sigma) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{\partial^2 f}{\partial s_k^2} P_{2k-1}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} - \left(\sum_{k=2\mu-1}^{2\nu-2} \xi_k^2 + \sum_{k=1}^{\mu-1} s_k^2 + \sigma^2 P_{n-1}^2 \right) f.$$

Preuve. Calcul direct par (a) et en utilisant l'orthogonalité de Ω.

N.B. On obtient ainsi des ocillateurs harmoniques généralisés avec force de frottement (i.e. le terme $(\sum_{k=2\mu-1}^{2\nu-2} \xi_k^2) f$ ou $(\sum_{k=2\mu-1}^{2\nu-2} \xi_k^2 + \xi_n^2) f$ lorsque la représentation est déterminée par un ξ_{kl} d'une des variétés algébriques V_l introduite en § 7.2.

Remarque. On peut se demander si partant de la diagonalisation des laplaciens et de l'expression explicite des représentations on peut par inversion de Fourier obtenir la solution fondamentale de la chaleur pour $\Delta_{n,2}$ comme dans [15] et [32]. Le premier point serait de calculer la mesure de Plancherel. Le calcul de [32] dans le groupe d'Heisenberg repose sur une identité de fonction génératrice pour les polynômes d'Hermite. Il semble ici que la situation soit plus complexe.

7.4. Holonomie stochastique de certaines séries de représentations

Considérons l'application

$$g = (u_l, u_{kl}) \in N_{n,2} \to g' = (u_l, e^{iu_{kl}}) \in N'_{n,2}.$$

de sorte que $\pi : N'_{n,2} \to \mathbf{R}^n$ est alors une fibration en $\mathbf{T}^{\binom{n}{2}}$ et pour $m = (m_{kl})_{k<l} \in Z^{\binom{n}{2}}$;on introduit la notion de fonction m équivariante

$$f : N'_{n,2} \to \mathbf{C}$$
$$\text{par } f(g \cdot t) = \exp(im_{kl} u_{kl}) f(g) \tag{7.18}$$

et on note $L_m^2(N'_{n,2})$ les fonctions m équivariantes dans $L^2(N'_{n,2})$ et $2p(m) \geqslant 0$ l'infimum du spectre de $-\Delta_{n,2}$ sur cette classe de fonctions. On définit enfin *l'holonomie stochastique* de la représentation m de $\mathbf{T}^{\binom{n}{2}}$ par

$$h_t(m) = \max_{x \in \mathbf{R}^n} E_{y_0}^{(\pi(U_{kl,\omega}(t)) = x)} (e^{i \Sigma m_{kl} U_{kl,\omega}(t)}) \tag{7.19}$$

exactement comme dans le cas des fibres G-principaux généraux (voir [8]). On a alors le résultat suivant

THÉORÈME 3. *On a pour tout $m \in Z^{\binom{n}{2}}$ la formule exacte*

$$p(m) = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\log h_t(m)}{t} = \sum_{k=1}^{[n/2]} 2|P_{2k-1}(m)| \tag{7.20}$$

où $P_{2k-1}(m)$ est la fonction universelle de m introduite au § 4.3 *et au* 6.2.

Preuve. Faisons la dans le cas $n=2\nu$ pair.

(i) *Majoration de $p(m)$*

Soit $L^2_m(N_{n,2})$ la classe des fonctions $f\in L^2(N_{n,2})$ ayant la propriété d'équivariance suivante

$$f(g\circ g') = \chi_m(g')f(g) \tag{7.21}$$

où $g\in N_{n,2}$ et $g'\in G'$ où G' est le sous groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ engendrée par $\bar{\bar{X}}_2, \dots, \bar{\bar{X}}_{2k-2}, \dots, \bar{\bar{X}}_{2\mu-2}, \bar{\bar{X}}_{2\mu-1}, \bar{\bar{X}}_{2\mu}, \bar{\bar{X}}_{2\mu+1}, \dots, \bar{\bar{X}}_{2\nu-2}, \bar{\bar{X}}_{2\nu-1}, X_{kl}$, où on a posé

$$\bar{\bar{X}}_i = \omega_{li} X_l \quad \text{(voir 7.2)}$$

$\Omega=(\omega_{li})$ étant la matrice orthogonale associée à $m=(m_{kl})$ comme d'habitude et où

$$\chi_m(g') = \exp\,(i(\sum_{k<l} m_{kl}u_{kl})) \tag{7.22}$$

si $g'=(\bar{\bar{x}}_i, u_{kl})$ dans la base précédente. Alors par construction $|f(g)|$ ne dépend que de $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_3, \dots, \bar{\bar{x}}_{2k-1}, \dots, \bar{\bar{x}}_{2\mu-3}, \bar{\bar{x}}_n$ (composante de g sur la base des $\bar{\bar{X}}_i, \bar{\bar{X}}_{ik}$), et $|f|\in L^2(\mathbf{R}^\mu)$ comme fonction de ces nombres.

Nous identifions donc $f\in L^2_m(N_{n,2})$ à $f\in L^2(\mathbf{R}^\mu)$ et nous regardons la représentation régulière R de $N_{n,2}$ sur de telles fonctions. Si $g'\in G'$,

$$g' = \exp\left(\sum_{k=1}^{\mu-1} \bar{\bar{x}}'_{2k-1}\bar{\bar{X}}_{2k-1} + \bar{\bar{x}}'_n\bar{\bar{X}}_n\right) \quad \text{et} \quad g\in N_{n,2}$$

$$g = \exp\left(\sum_{k=1}^{u} \bar{\bar{x}}_k\bar{\bar{X}}_k + \sum_{k<l} x_{kl}X_{kl}\right), \text{ on a la table de multiplication}$$

$$\begin{aligned} g'g = \exp\Bigg[&\sum_{k=1}^{\mu-1} (\bar{\bar{x}}'_{2k-1} + \bar{\bar{x}}_{2k-1})\bar{\bar{X}}_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\mu-1} \bar{\bar{x}}_{2k}\bar{\bar{X}}_{2k} + \sum_{\substack{k\geqslant 2\mu-1\\ k\neq n}} \bar{\bar{x}}_k\bar{\bar{X}}_k \\ &+ (\bar{\bar{x}}_n + \bar{\bar{x}}'_n)X_n + \sum_{k<j} X_{lj}\left(x_{lj} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu-1}\sum_i \bar{\bar{x}}'_{2k-1}\bar{\bar{x}}_i(\omega_{l,2k-1}\omega_{ji} - \omega_{j2k-1}\omega_{li})\right) \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_i \bar{\bar{x}}'_n\bar{\bar{x}}_i(\omega_{ln}\omega_{ji} - \omega_{jn}\omega_{li})\Bigg] \end{aligned}$$

de sorte que

$$R(g)\,f(\bar{\bar{x}}'_{2k-1}, \bar{\bar{x}}'_n) = \exp\Bigg[i \sum_{l<j} m_{lj}\bigg(x_{lk} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu-1}\sum_i \bar{\bar{x}}'_{2k-1}\bar{\bar{x}}_i(\omega_{l,2k-1}\omega_{ji} - \omega_{j,2k+1}\omega_{li})$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_i \bar{\bar{x}}'_n \bar{\bar{x}}_i(\omega_{ln}\omega_{ji} - \omega_{jn}\omega_{lk})\bigg)\Bigg]\, f\Big(\bar{\bar{x}}'_{2k-1} + \bar{x}_{2k-1}, \bar{\bar{x}}'_n + \bar{\bar{x}}_n\Big).$$

Mais par construction

$$m_{lj}\,\omega_{l,2k-1}\,\omega_{ji} - m_{lj}\,\omega_{j,2k-1}\,\omega_{li} = P_{2k-1}\,\delta_{i,2k}$$
$$m_{lj}(\omega_{ln}\,\omega_{ji} - \omega_{jn}\,\omega_{li}) = P_{n-1}\,\delta_{i,n-1}$$

de sorte que l'exposant dans l'exponentielle est

$$i\left[\sum_{l<j} m_{lj}\,x_{lj} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu-1}\bar{\bar{x}}'_{2k-1}\,\bar{\bar{x}}_{2k}\,P_{2k-1} + \tfrac{1}{2}\bar{\bar{x}}_{n-1}\,\bar{\bar{x}}'_n\,P_{n-1}\right]$$

et la représentation régulière R sur f revient à faire agir la représentation U ainsi définie

$$(U(g)\,f)(s_1, \dots, s_{\mu-1}, \sigma)$$
$$= \exp\left[i\left(\sum_l m_{lj}\,x_{lj} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu-1}\bar{\bar{x}}_{2k}\,s_k\,P_{2k-1} + \tfrac{1}{2}\bar{x}_n\,P_{n-1}\,\sigma\right)\right] f(s_1 + \bar{\bar{x}}_1, \dots, s_{\mu-1} + \bar{\bar{x}}_{2\mu-3}, \bar{\bar{x}}_{n-1} + \sigma)$$

où g a été définie ci-dessus.

Dans cette représentation, $\Delta_{n,2}$ se lit comme

$$dU(\Delta_{n,2})(f)(s_1, \dots, s_{\mu-1})\sum_{k=1}^{\mu-1}\frac{\partial^2 f}{\partial s_k^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{\mu-1} s_k^2\,P_{2k-1}^2 + \sigma^2 P_{n-1}^2\right] f.$$

Donc ceci est encore une somme de μ oscillateurs harmoniques indépendants de fréquence $\frac{1}{2}P_{2k-1}^2$ et $\frac{1}{4}P_{n-1}^2$ et donc l'état d'énergie le plus bas $dU(\Delta_{n,2})$ est

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu-1}|P_{2k-1}| + \tfrac{1}{2}|P_{n-1}|$$

et ceci est donc l'infimum du spectre de $-\Delta_{n,2}$ sur les fonctions de $L_m^2(N_{n,2})$ (i.e. satisfaisant (7.21)). Mais toute fonction de $L_m^2(N_{n,2})$ est a fortiori m-équivariante au sens de (7.18), donc on a

$$2p(m) \leqslant \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\mu-1}|P_{2k-1}| + |P_{n-2}|\right).$$

(ii) *minoration de* $p(m)$

Utilisons le théorème énoncé en § 7.1 (Théorème 1). Comme le p_t du bas est le p_t-euclidien, on a donc

$$p(m) \geqslant -\lim_{s\to+\infty}\frac{\log h_s(m)}{s}.$$

Mais la formule de 7.3 ci-dessus donne le calcul exact suivant

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\log h_s(m)}{s} = -\sum_{k=1}^{\nu} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{2s} \log\left|\operatorname{sh}\left(\frac{s}{2} P_{2k-1}\right)\right| = -\sum_{k=1}^{\nu} \frac{|P_{2k-1}|}{2}$$

d'où

$$p(m) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} |P_{2k-1}|$$

et en particulier la formule de l'holonomie stochastique est une égalité.

Remarque. La conjecture générale est que la formule de l'holonomie stochastique de [21] (rappelée en 7.1) est une égalité pour tous les fibrés G-principaux à base simplement connexe.

7.5. Cas particulier des groupes d'Heisenberg

Ce cas particulier fait l'objet de [10]. On considère le groupe d'Heisenberg fibré en cercle i.e. image de H_{2n+1} par $(x_i, y_i, t) \to (x_i, y_i, e^{it})$. Alors les caractères de la fibre sont les entiers. On a alors

COROLLAIRE. *Pour le groupe d'Heisenberg H'_{2n+1} fibré en cercles sur $\mathbf{C}^n$, on a*

$$p(m) = 2|m| \cdot n, \quad \forall m \in Z$$

et la formule de l'holonomie stochastique est une égalité.

References

[1]. Bony, J. M., Cours au C.I.M.E. 1969.
[2]. Courant & Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol.* II. Interscience 1962.
[3]. Debiard, A., Espaces H_p géométriques et probabilistes sur l'espace hermitien hyperbolique. *C. R. Acad. Sci. Paris,* Sér A.-B., 281 (1975), 1023.
[4]. —— Intégrale d'aire de Calderon-Lusin sur l'espace hermitien hyperbolique. *C. R. Acad. Sci. Paris,* Sér A.-B., 282 (1976), 1231-1232.
[5]. Erdelyi, A., *Asymptotic expansions.* Dover publications 1956.
[6]. Feynmann, R. P. & Hibbs, A. R., *Quantum mechanics and path integrals.* Mc Graw Hill 1965.
[7]. Folland, G., A fundamental solution for a subelliptic operator. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 79 (1973), 373–376.
[8]. Folland, G. & Kohn, J., *The $\bar\partial$-Neumann problem.* Princeton University press.
[9]. Folland, G. & Stein, E., Estimates for the $\bar\partial_b$-complex and analysis on the Heisenberg group. *Comm. Pure Appl. Math.,* 27 (1974), 429–522.
[10]. Gaveau, B., Holonomie stochastique et représentations du groupe d'Heisenberg. *C. R. Acad. Sci. Paris.* Sér. A.-B., 280 (1975), 571–573.
—— Propagation de la chaleur et principe de moindre action pour le groupe d'Heisenberg. *C. R. Acad. Sci. Paris,* Sér. A.–B., 281 (1975), 327–330.

—— Solutions fondamentales, représentations et estimées sous-elliptiques pour les groupes nilpotents de rang 2. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, Sér. A.–B., 282 (1976), 563–566.

—— Solutions fondamentales asymptotique, caustique et quantification pour les groupes nilpotents de rang 2. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér A.–B., 282 (1976), 865–866.

[11]. GAVEAU, B., Fonction de Green fine et approximation dans les espaces de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A.–B. (1976).

[12]. GAVEAU, B. & VAUTHIER, J., Calculs infinitésimaux de laplaciens de fibrés et annulation. A paraître *Bull. Sci. Math.*, (1976).

[13]. GAVEAU, B., Etude de certains systèmes hamiltoniens associés à des opérateurs hypoelliptiques. A paraître *Bull. Sci. Math.* (1978).

[14]. GRUSHIN, V. V., On a class of degenerate hypoelliptic operators. *Math. Sbornik*, 12 (1970), 458–476.

[15]. HULANICKI, A., The distribution of energy in the Brownian motion in Gaussian field and analytic hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group. *Studia Mathematica* 56 (1976), 165–173.

[16]. ITÔ, K. & MC KEAN, H. P., *Diffusions processes and their sample paths.* Springer Verlag 1965.

[17]. KAC, M. & SIEGERT, J. F., *Ann. of Math. Statistics*, 18 (1947), 438–442.

[18]. LÉVY, P., 2nd symposium de Berkeley Probability and Statistics (1950), 171–186.

[19]. MC KEAN, H. P., *Stochastic Integrals.* Academic Press 1969.

[20]. MALLIAVIN, M. P. & MALLIAVIN, P., Spectre de l'opérateur de Casimir d'un groupe semi simple. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* A.–B. 279 (1974), 185–188.

[21]. MALLIAVIN, M. P. & MALLIAVIN, P., Holonomie stochastique au dessus d'un espace symétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A.–B. 280 (1975), 793–796.

[22]. MALLIAVIN, P., Formules de la noyenne et théorèmes d'annulation. *J. Func. Anal.*, 17 (1974), 274–291.

[23]. —— Intégration stochastique de systèmes semi-elliptiques diagonaux dans leur symbole principal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A.–B., 280 (1975), 941–943.

[24]. —— Paramétrix trajectorielle pour un opérateur hypoelliptique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A.–B., 281 (1975), 241–244.

[25]. —— Equation de la chaleur associée à une fonction plurisousharmonique et comportement au bord des fonctions de plusieurs variables complexes. *Ann. Inst. Fourier* (1976).

[26]. —— Annulation en degré 0 pour une variété kählérienne non complète. A paraître *Bull. Sci. Math.* (1976).

[27]. MASLOV, V., *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.* Dunod Paris 1970.

[28]. MOLCHANOV, S. A., Processus de diffusion et géométrie riemannienne. *Uspekhi Mat. Nayk.*, 30 (1975), 3–59 (en russe).

[29]. PUKANSKY, L., *Lecons sur la représentation des groupes.* Dunod Paris 1970.

[30]. ROTSCHILD, L. & STEIN, E., Hypoelliptic differential operators and nilpotent group. *Acta Math.*, 137 (1976), 247–320.

[31]. SERRE, J. P., *Algèbres de Lie et groupes de Lie.* Benjamin 1966.

[32]. SYGAN, J., Fundamental solution of the heat equation on Heisenberg group. Preprint Institut des sciences mathématiques de l'Académie de Pologne.

[33]. VARADHAN, S. R. S., Diffusions processes in small time intervals. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 659–685.
Behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 431–455.

[34]. VENTCELL, A. D. & FREIDLIN, M. I., Small random perturbations of dynamical systèms. *Russian Math. Surveys* (1970), 1–55.

Reçu le 6 *avril* 1977

10† – 772904 *Acta mathematica* 139. Imprimé le 14 Octobre 1977