SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES MINIMA

PAR

E. GOURSAT

À PARIS.

1. En interprétant géométriquement les formules de MONGE, M. SOPHUS LIE a rattaché la théorie des surfaces minima à celle des courbes dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini, et auxquelles il a donné le nom de *courbes minima.*[1] Bornons-nous d'abord, pour plus de netteté, aux surfaces réelles; il résulte des recherches de M. LIE que la surface minima réelle la plus générale peut être considérée comme le lieu du milieu d'une corde qui joint un point quelconque d'une courbe minima à un point quelconque de la courbe conjuguée.

Soient

$$X = A(t), \qquad Y = B(t), \qquad Z = C(t) \tag{1}$$

les équations d'une courbe minima Γ, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ désignant trois fonctions du paramètre variable t qui vérifient la relation

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0.$$

Les coordonnées d'un point *réel* de la surface minima *réelle* correspondante S seront données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \Re A(t), \\ y &= \Re B(t), \\ z &= \Re C(t), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

[1] S. LIE. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen:* I. *Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (Mathematische Annalen, t. **14**, p. 331; 1878). — II. *Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (même recueil t. **15**, p. 465; 1879).

le signe $\mathfrak{R}$ indiquant que l'on prend seulement la partie réelle d'une quantité imaginaire; comme t est une variable complexe, les coordonnées x, y, z dépendent bien, comme cela doit être, de deux paramètres réels.

Imaginons maintenant que l'on applique à la courbe minima Γ une transformation qui la change en une nouvelle courbe minima; à cette nouvelle courbe correspondra une autre surface minima réelle dont les relations avec la première surface seront plus ou moins simples, suivant le mode de transformation adopté. Or, parmi les transformations qui changent une courbe minima en une autre courbe minima, il n'en est pas de plus simples que les transformations homographiques qui conservent le cercle de l'infini. Toute transformation de cette nature est équivalente, comme on sait, à une combinaison des trois opérations suivantes: 1° une translation; 2° une transformation homothétique à pôle réel et à module réel ou imaginaire; 3° un déplacement autour d'un point réel. Si on imprime à la courbe Γ une translation dont les composantes suivant les axes soient h, k, l, les coordonnées x, y, z de la surface S seront augmentées respectivement des quantités

$$\mathfrak{R}h, \mathfrak{R}k, \mathfrak{R}l,$$

et la surface aura subi elle-même une translation. La seconde opération a été étudiée en détail; elle donne les surfaces homothétiques des surfaces *associées* à la première.[1] En ce qui concerne les rotations, il y a lieu de distinguer les rotations réelles des rotations imaginaires. Si on applique à une courbe minima une rotation réelle, il est facile de démontrer que la surface minima réelle correspondante subit la même rotation. Il ne reste donc plus qu'à étudier les surfaces que l'on obtient en appliquant à une même courbe minima des rotations imaginaires, et je ne connais sur ce sujet que quelques indications données par M. Lie dans le second Mémoire déjà cité.[2] Le présent travail est consacré à l'étude de ce mode de transformation. Je supposerai toujours qu'on a pris pour origine des coordonnées le point réel autour duquel s'effectue le déplacement.

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. **1**, p. 322 et 457; 1887.
[2] Mathematische Annalen, t. **15**, p. 475.

2. Rappelons d'abord la représentation analytique des rotations qui a son origine dans les travaux de RIEMANN et qui a été développée complètement par M. KLEIN. Soient α, β, γ les coordonnées rectangulaires d'un point de la sphère

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \tag{3}$$

on emploie, pour fixer la position de ce point sur la sphère, un nouveau système de coordonnées défini de la manière suivante. La sphère étant une surface du second ordre, on sait que par chaque point passent deux génératrices rectilignes. Ces deux systèmes de génératrices sont déterminés respectivement par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} &= \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta} = u, \\ \frac{\alpha - i\beta}{1 - \gamma} &= \frac{1 + \gamma}{\alpha + i\beta} = -\frac{1}{v}; \end{aligned} \tag{4}$$

nous prendrons u et v pour nouvelles coordonnées du point (α, β, γ) de la sphère. Quand on décrit une génératrice rectiligne, une de ces coordonnées conserve une valeur constante. Des formules (4) on tire inversement:

$$\alpha = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad \beta = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad \gamma = \frac{u + v}{u - v}. \tag{5}$$

Cela posé, on sait que tout déplacement de la sphère autour de son centre est caractérisé par une certaine substitution linéaire effectuée simultanément sur u et sur v, [1]

$$u = \frac{mu_1 + n}{pu_1 + q}, \qquad v = \frac{mv_1 + n}{pv_1 + q}. \tag{6}$$

Cherchons s'il existe des points réels de la sphère qui viennent coïncider après la rotation avec des points réels. Remarquons pour cela que, si un point de coordonnées (u, v) est réel, u et $-\frac{1}{v}$ sont conjuguées et réciproquement; cela résulte immédiatement des formules (4) et (5). De

---

[1] Voir, par exemple, DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Chapitre 3, p. 30.

même, pour que le point de coordonnées (u_1, v_1) soit réel, il faut et il suffit que u_1 et $-\frac{1}{v_1}$ soient conjuguées. On aura donc à la fois, en supposant que le point réel (u, v) vienne coïncider avec un point réel (u_1, v_1),

$$uv_0 = -1,$$
$$u_1(v_1)_0 = -1,$$

v_0 et $(v_1)_0$ désignant les imaginaires conjuguées de v et de v_1. Remplaçons dans la seconde relation u_1 et $(v_1)_0$ par leurs valeurs; il vient

$$\frac{(n - qu)(n_0 - q_0 v_0)}{(pu - m)(p_0 v_0 - m_0)} + 1 = 0.$$

Cette relation s'écrit, en remplaçant v_0 par $-\frac{1}{u}$

$$\frac{(n - qu)(n_0 u + q_0)}{(pu - m)(m_0 u + p_0)} - 1 = 0,$$

ou

$$(7) \quad (pm_0 + qn_0)u^2 + (qq_0 + pp_0 - mm_0 - nn_0)u - (p_0 m + q_0 n) = 0.$$

Pour que la rotation considérée soit réelle, il faut évidemment que cette équation (7) se réduise à une identité; on aura alors

$$\frac{p_0}{n} = \frac{-q_0}{m} = \frac{-m_0}{q} = \frac{n_0}{p},$$

et les formules (6) pourront s'écrire

$$(8) \qquad u = \frac{mu_1 + n}{m_0 - n_0 u_1}, \qquad v = \frac{mv_1 + n}{m_0 - n_0 v_1},$$

m_0 et n_0 étant conjuguées de m et de n. Cette forme particulière de substitution, qui convient aux rotations reelles, ne dépend que de trois paramètres réels arbitraires, comme le déplacement réel le plus général autour de l'origine, tandis que la substitution (6) et le déplacement imaginaire le plus général autour de l'origine dépendent de six paramètres réels arbitraires.

Supposons maintenant que l'équation (7) ne se réduise pas à une identité. Cette équation possèdera deux racines *distinctes* u', u'' et il est aisé de vérifier que ces racines satisfont à la relation

$$u'u_0'' = -1.$$

Les valeurs correspondantes de v seront

$$v' = -\frac{1}{u_0'} = u'',$$

$$v'' = -\frac{1}{u_0''} = u';$$

les deux points réels de coordonnées (u', u''), (u'', u') sont diamétralement opposés, comme on s'en assure aussitôt à l'inspection des formules (5). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Dans tout déplacement imaginaire autour de l'origine, il existe un diamètre réel et un seul qui vient coïncider avec un autre diamètre réel.

Soit AA' le diamètre réel qui vient coïncider avec un autre diamètre réel BB'. Faisons suivre ce déplacement d'une rotation réelle R amenant BB' sur AA'; nous aurons un nouveau déplacement qui ne changera pas le diamètre AA', c'est-à-dire une rotation imaginaire autour de cet axe. Si à ce nouveau déplacement nous ajoutons la rotation R^{-1}, inverse de la rotation R, nous retrouvons évidemment le déplacement primitif. Il suit de là que *toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de deux rotations:* 1° *une rotation imaginaire autour d'un axe réel;* 2° *une rotation réelle.*

On pourrait aussi décomposer la rotation imaginaire d'une autre façon, en mettant la première la rotation réelle composante. Enfin, on démontre de la même manière le théorème suivant que je me borne à énoncer: *Toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de trois rotations:* 1° *une rotation réelle;* 2° *une rotation imaginaire autour d'un axe réel choisi arbitrairement;* 3° *une nouvelle rotation réelle.*

3. Nous emploierons dans ce qui suit la forme particulière donnée aux formules de MONGE par M. WEIERSTRASS; je vais rappeler en quelques mots comment on parvient à cette forme, en partant des idées de M. S. LIE. Puisque les tangentes à une courbe minima rencontrent le cercle imaginaire de l'infini, le plan tangent à la surface développable formée par ces tangentes sera lui-même tangent au cercle de l'infini. Prenons l'équation de ce plan sous la forme

$$(1 - u^2)X + i(1 + u^2)Y + 2uZ + 4f(u) = 0, \tag{9}$$

u désignant le paramètre variable et $f(u)$ une fonction quelconque de ce paramètre. On aura pour les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement les expressions suivantes

$$\left\{\begin{aligned} X &= (1 - u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u), \\ Y &= i(1 + u^2)f''(u) - 2iuf'(u) + 2if(u), \\ Z &= 2uf''(u) - 2f'(u), \end{aligned}\right. \tag{10}$$

qui peuvent encore s'écrire, en posant $f'''(u) = \mathfrak{F}(u)$,

$$\left\{\begin{aligned} X &= \int (1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ Y &= \int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ Z &= \int 2u\mathfrak{F}(u)\,du; \end{aligned}\right. \tag{10'}$$

on obtiendra donc les nappes réelles de la surface minima réelle la plus générale en posant [1]

$$\left\{\begin{aligned} x &= \Re\int (1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ y &= \Re\int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ z &= \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)\,du, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$\mathfrak{F}(u)$ désignant une fonction analytique quelconque de u. Rappelons encore que la variable u est, dans le système employé par Riemann, l'affixe du point de la sphère qui est l'image sphérique du point de la surface minima répondant à cette valeur de u.

Imaginons que l'on imprime un déplacement autour de l'origine à la courbe minima représentée par les équations (10) et (10'). Que deviennent les fonctions $f(u)$, $\mathfrak{F}(u)$? La réponse à cette question se trouve dans l'ouvrage déjà cité de M. Darboux (p. 304). J'ai donné aussi une

[1] Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akademie, p. 612, 855; 1866.

méthode un peu différente de celle de M. Darboux pour traiter la même question, dans un Mémoire *Sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un des polyèdres réguliers.*[1] Il est vrai que je supposais les rotations réelles, mais la méthode reste la même pour les rotations imaginaires. Voici le résultat auquel on est conduit; soit

$$u = \frac{mv + n}{pv + q}$$

la substitution linéaire qui correspond à ce déplacement, et soient $g(v)$ et $\mathfrak{G}(v)$ les fonctions qui remplacent $f(u)$ et $\mathfrak{F}(u)$. On a

$$g(v) = f\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{(pv + q)^2}{\delta},$$

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{F}\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{\delta^2}{(pv + q)^4},$$

où

$$\delta = mq - np.$$

Supposons d'abord que l'on applique à la courbe Γ un déplacement réel; la surface minima réelle correspondante subira le même déplacement. J'ai admis cette proposition comme évidente dans le Mémoire que je viens de citer; mais il est bien facile de la démontrer en toute rigueur. Soit Γ la courbe minima représentée par les équations (1) et soit Γ_1' la courbe minima qui s'en déduit par une rotation réelle autour de l'origine. Cette courbe Γ_1' sera représentée par des équations de la forme

$$X_1 = aX + bY + cZ,$$
$$Y_1 = a'X + b'Y + c'Z,$$
$$Z_1 = a''X + b''Y + c''Z,$$

a, b, c, a', etc. étant les coefficients d'une substitution orthogonale, qui par hypothèse sont tous *réels*. La surface minima réelle S_1 que l'on déduit de Γ_1' sera donnée par les équations

$$x_1 = \Re X_1 = a\Re X + b\Re Y + c\Re Z,$$
$$y_1 = \Re Y_1 = a'\Re X + b'\Re Y + c'\Re Z,$$
$$z_1 = \Re Z_1 = a''\Re X + b''\Re Y + c''\Re Z,$$

[1] Annales de l'École Normale supérieure, 3ème série, t. 4, p. 251; 1887.

ou encore

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz, \\ y_1 &= a'x + b'y + c'z, \\ z_1 &= a''x + b''y + c''z; \end{aligned}$$

ces formules mettent en évidence le résultat annoncé. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Si on remplace dans les formules (11) $\mathfrak{F}(u)$ *par*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{mu + n}{m_0 - n_0 u}\right)\frac{(mm_0 + nn_0)^2}{(m_0 - n_0 u)^4},$$

m_0 *et* n_0 *désignant les imaginaires conjuguées de* m *et de* n, *les nouvelles formules représentent la même surface minima rapportée à des axes différents.*

4. Il ne nous reste plus qu'à étudier l'effet d'un déplacement imaginaire appliqué à la courbe minima. D'après les propositions combinées des paragraphes 2 et 3, nous pouvons même nous borner à considérer l'effet d'une rotation autour d'un diamètre réel de la sphère. Supposons que nous ayons pris ce diamètre pour axe des z; alors la substitution correspondante à cette rotation sera de la forme

$$u = ke^{\theta i}u_1,$$

k et θ étant réels (on peut même supposer $k > 0$). Cette rotation peut encore être décomposée en deux: 1° une rotation réelle d'un angle θ autour de Oz; 2° une rotation imaginaire caractérisée par la substitution

$$u = ku_1,$$

ces deux rotations pouvant d'ailleurs être effectuées dans l'ordre qu'on voudra. Comme la rotation réelle ne fait que déplacer la surface minima, nous n'avons en définitive qu'à examiner la rotation imaginaire définie par la substitution

$$u = ku_1,$$

où k est réel et différent de ± 1.

Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les coordonnées rectilignes de deux positions correspondantes du même point avant et après le déplacement. On a d'une manière générale

$$\alpha_1 = a\alpha + a'\beta + a''\gamma,$$
$$\beta_1 = b\alpha + b'\beta + b''\gamma,$$
$$\gamma_1 = c\alpha + c'\beta + c''\gamma,$$

$a, b, c, a', \ldots$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale dont on trouvera les valeurs en fonction de m, n, p, q à la page 34 de l'ouvrage de M. Darboux. Dans le cas actuel, ces valeurs s'obtiennent bien aisément. On a en effet, d'après les formules (5),

$$\alpha_1 = \frac{1 - u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \qquad \beta_1 = \frac{i(1 + u_1 v_1)}{u_1 - v_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{u_1 + v_1}{u_1 - v_1},$$

ou, en remplaçant u_1 par $\frac{u}{k}$ et v_1 par $\frac{v}{k}$,

$$\alpha_1 = \frac{k^2 - uv}{k(u - v)}, \qquad \beta_1 = \frac{i(k^2 + uv)}{k(u - v)}, \qquad \gamma_1 = \frac{u + v}{u - v};$$

éliminons u et v entre ces équations et les équations (5), il vient:

$$\alpha_1 = \frac{1 + k^2}{2k}\alpha - i\frac{k^2 - 1}{2k}\beta,$$

$$\beta_1 = \frac{1 + k^2}{2k}\beta + i\frac{k^2 - 1}{2k}\alpha,$$

$$\gamma_1 = \gamma.$$

Les coefficients $a, b, c, a', \ldots$ auront par conséquent les valeurs suivantes:

$$a = \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad a' = -i\frac{k^2 - 1}{2k}, \qquad a'' = 0,$$

$$b = i\frac{k^2 - 1}{2k}, \qquad b' = \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad b'' = 0,$$

$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad c'' = 1.$$

Appliquons la rotation précédente à la courbe minima Γ représentée par les équations (1); nous obtenons une nouvelle courbe minima Γ_1 représentée par les équations:

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{1+k^2}{2k}A(t) - i\frac{k^2-1}{2k}B(t), \\ Y_1 &= i\frac{k^2-1}{2k}A(t) + \frac{1+k^2}{2k}B(t), \\ Z_1 &= C(t). \end{aligned}\right.$$

Soient S et S_1 les surfaces minima réelles qui correspondent respectivement aux courbes Γ et Γ_1, S_0 la surface *adjointe* à S; désignons par x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0 les coordonnées de trois points correspondants de ces trois surfaces, c'est-à-dire de trois points qui correspondent à une même valeur de t. Les coordonnées d'un point réel de la surface adjointe S_0 sont données, comme on sait, par les formules

$$(12) \qquad x_0 = \Re iA(t), \qquad y_0 = \Re iB(t), \qquad z_0 = \Re iC(t);$$

on aura pour expressions des coordonnées d'un point de S_1

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+k^2}{2k}\Re A(t) - \frac{k^2-1}{2k}\Re iB(t), \\ y_1 &= \frac{1+k^2}{2k}\Re B(t) + \frac{k^2-1}{2k}\Re iA(t), \\ z_1 &= \Re C(t). \end{aligned}\right.$$

Entre ces dernières formules et les formules (2) et (12) éliminons

$$\Re A(t),\ \Re B(t),\ \Re C(t),\ \Re iA(t),\ \Re iB(t),\ \Re iC(t);$$

on arrive aux expressions suivantes pour les coordonnées d'un point de la surface S_1:

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+k^2}{2k}x - \frac{k^2-1}{2k}y_0, \\ y_1 &= \frac{1+k^2}{2k}y + \frac{k^2-1}{2k}x_0, \\ z_1 &= z. \end{aligned}\right.$$

Si k est positif, ce qu'on peut toujours supposer, on posera $k = e^\varphi$, et les formules pourront s'écrire

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 = x \cosh\varphi - y_0 \sinh\varphi, \\ y_1 = y \cosh\varphi + x_0 \sinh\varphi, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Il me paraît intéressant de faire remarquer l'analogie curieuse que présentent ces formules avec les formules qui définissent une rotation, dans le sens ordinaire du mot, autour de l'axe des z. Cette analogie est d'ailleurs purement formelle.

On arrive rapidement au même résultat au moyen des formules de M. Weierstrass. Si la courbe minima Γ a pour fonction caractéristique $\mathfrak{F}(u)$, la courbe Γ_1 aura pour fonction caractéristique $k^2\mathfrak{F}(ku)$ et les trois surfaces S, S_0, S_1 seront données respectivement par les groupes de formules ci-dessous:

$$S \begin{cases} x = \Re\int(1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ y = \Re\int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ z = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)\,du; \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} x_0 = \Re\int i(1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ y_0 = \Re\int -(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du, \\ z_0 = \Re\int 2iu\mathfrak{F}(u)\,du; \end{cases}$$

$$S_1 \begin{cases} x_1 = \Re\int(1 - v^2)k^2\mathfrak{F}(kv)\,dv, \\ y_1 = \Re\int i(1 + v^2)k^2\mathfrak{F}(kv)\,dv, \\ z_1 = \Re\int 2vk^2\mathfrak{F}(kv)\,dv. \end{cases}$$

Des deux premiers groupes on tire

$$\Re\int \mathfrak{F}(u)\,du = \frac{x - y_0}{2}, \qquad \Re\int u^2\mathfrak{F}(u)\,du = -\frac{x + y_0}{2},$$

$$\Re\int i\mathfrak{F}(u)\,du = \frac{x_0 + y}{2}, \qquad \Re\int iu^2\mathfrak{F}(u)\,du = \frac{y - x_0}{2};$$

les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 peuvent encore s'écrire, en posant $kv = u$,

$$x_1 = k\mathfrak{R}\int \mathfrak{F}(u)du - \frac{1}{k}\mathfrak{R}\int u^2\mathfrak{F}(u)du,$$

$$y_1 = k\mathfrak{R}\int i\mathfrak{F}(u)du + \frac{1}{k}\mathfrak{R}\int iu^2\mathfrak{F}(u)du,$$

$$z_1 = \mathfrak{R}\int 2u\mathfrak{F}(u)du,$$

et, en éliminant les intégrales, on retrouve précisément les formules (13).

Pour abréger le langage, je dirai que la surface S_1 est une surface *dérivée* de S; j'appellerai l'axe réel autour duquel s'effectue la rotation de la courbe minima *l'axe de dérivation* et la constante réelle k *paramètre de dérivation*. Si on se donne la surface S, l'axe et le paramètre de dérivation, la surface dérivée S_1 n'est pas entièrement déterminée; on sait en effet que la surface adjointe d'une surface minima donnée n'est pas complètement définie de position. Cette surface peut subir une translation quelconque ou être remplacée par sa symétrique relativement à l'origine des coordonnées. Lorsque la surface S_0 subit une translation, les formules (14) nous montrent qu'il en est de même de la surface S_1. Si x_0, y_0, z_0 changent de signe, cela revient à changer le signe de φ dans ces formules. On voit de même que, si l'axe de dérivation se déplace parallèlement à lui-même, la surface S_1 subit aussi une translation. Par conséquent, si on fait abstraction d'une translation quelconque, les surfaces dérivées d'une surface minima donnée dépendent de trois constantes réelles seulement, le paramètre de dérivation et les deux constantes réelles qui déterminent la direction de l'axe de dérivation.

5. Considérons le groupe des transformations homographiques qui conservent le cercle de l'infini; les coefficients d'une transformation de ce groupe dépendent de *quatorze* paramètres réels arbitraires. Ces transformations appliquées à une même courbe minima donneront naissance à une infinité de surfaces minima réelles; nous dirons que ces surfaces appartiennent à une même *famille*. Il est aisé de compter les paramètres dont dépendent les surfaces d'une même famille. Nous avons d'abord les six constantes réelles provenant du déplacement réel le plus général; nous avons ensuite les trois paramètres réels dont dépendent les surfaces dérivées. Enfin, quand on passe d'une surface minima à une surface homothétique d'une surface associée à la première, on introduit encore deux paramètres réels. Cela nous fait en tout *onze* paramètres réels, au lieu de quatorze dont dépend la transformation homographique la plus générale qui conserve le cercle de l'infini. On se rend compte de cette différence en remarquant qu'il existe une infinité de transformations homographiques, dépendant de trois constantes réelles, que l'on peut appliquer à une courbe minima Γ, sans changer la surface minima correspondante: ce sont les translations dont les composantes suivant les axes sont complètement imaginaires.

La fonction caractéristique de M. WEIERSTRASS $\mathfrak{F}(u)$ restant la même pour une surface minima quand on lui fait subir une translation quelconque, il est naturel de faire abstraction d'un déplacement de ce genre; c'est ce que nous ferons désormais. Alors les surfaces minima d'une même famille ne dépendront plus que de *huit* paramètres réels. Les fonctions caractéristiques seront comprises dans la forme générale

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right),$$

A, m, n, p, q étant des constantes quelconques. Parmi ce groupe de surfaces il y a lieu de distinguer des sous-groupes très-importants formés par les surfaces dérivées de l'une d'elles, déplacées en outre d'une façon arbitraire. Par exemple, si une surface a pour fonction caractéristique $\mathfrak{F}(u)$, les fonctions caractéristiques du sous-groupe auquel elle appartient seront de la forme

$$\frac{(mq-np)^2}{(pu+q)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right).$$

Il peut arriver que les surfaces d'une même famille ne dépendent pas de huit paramètres distincts; c'est une question qui sera examinée en détail plus loin.

Appelons *déformation* l'opération par laquelle on passe d'une surface minima à une surface minima associée, et *dilatation* l'opération par laquelle on passe d'une surface à une surface homothétique. Pour passer d'une surface minima à une surface homothétique ou à une surface associée on multiplie la fonction caractéristique par un facteur réel a ou par un facteur de la forme $e^{\theta i}$, θ étant réel; j'appellerai a le *paramètre de dilatation* et θ le *paramètre de déformation.* Il est clair que la dilatation, la déformation et la dérivation sont trois opérations commutatives. En particulier, toute surface associée à une surface dérivée de S est identique à la surface dérivée de la surface associée à S, les paramètres de dérivation et de déformation restant les mêmes dans les deux cas.

6. Je me propose d'étudier dans ce paragraphe les principales propriétés de la surface dérivée S_1 représentée par les équations (14),

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cosh\varphi - y_0\sinh\varphi, \\ y_1 = y\cosh\varphi + x_0\sinh\varphi, \\ z_1 = z; \end{cases}$$

on en tire

$$dx_1 = dx\cosh\varphi - dy_0\sinh\varphi,$$
$$dy_1 = dy\cosh\varphi + dx_0\sinh\varphi,$$
$$dz_1 = dz.$$

Or on a[1]

$$dx_0 = \beta dz - \gamma dy, \qquad dy_0 = \gamma dx - \alpha dz, \qquad dz_0 = \alpha dy - \beta dx,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs d'une direction convenable sur la normale à la surface S. Remplaçons dans les formules précédentes dx_0 et dy_0 par leurs valeurs; il vient

$$(15)\qquad \begin{cases} dx_1 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]dx + \alpha\sinh\varphi dz, \\ dy_1 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]dy + \beta\sinh\varphi dz, \\ dz_1 = dz. \end{cases}$$

Si on suppose $dz = 0$, dx_1 et dy_1 sont proportionnels à dx et à dy. Par conséquent, *les sections des deux surfaces S et S_1 par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation se correspondent point par point de façon*

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journal für Mathematik, t. **80**, p. 280; 1875).

que les tangentes aux deux sections aux points correspondants soient parallèles.

Soient ds et ds_1 les éléments linéaires des deux surfaces, dA et dA_1 les éléments superficiels. On a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]^2(dx^2 + dy^2)$$
$$+ [1 + (\alpha^2 + \beta^2)\sinh^2\varphi]dz^2 + 2\sinh\varphi[\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi](\alpha dx + \beta dy)dz;$$

en remplaçant $\alpha^2 + \beta^2$ par $1 - \gamma^2$, $\alpha dx + \beta dy$ par $-\gamma dz$ et en réduisant, on trouve

$$ds_1^2 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]^2 ds^2;$$

comme γ est inférieur à l'unité, $\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi$ est toujours positif et on a en valeur absolue

$$ds_1 = (\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi)ds. \tag{16}$$

Ainsi, *les deux surfaces S et S_1 sont appliquées conformément l'une sur l'autre par le mode de correspondance qui vient d'être établi.* En d'autres termes, deux courbes quelconques tracées sur S se coupent sous le même angle que leurs *images* sur la surface S_1. On déduit de la formule (16) la relation suivante entre les éléments superficiels

$$dA_1 = (\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi)^2 dA. \tag{17}$$

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de la normale à la surface S_1; en exprimant que l'on a identiquement

$$\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1 = 0,$$

on trouve aisément

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma\cosh\varphi - \sinh\varphi} = \frac{\pm 1}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi},$$

et par suite

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \pm\frac{\alpha}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}, \\ \beta_1 &= \pm\frac{\beta}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}, \\ \gamma_1 &= \pm\frac{\gamma\cosh\varphi - \sinh\varphi}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Inversement on aura

$$(18') \qquad \begin{cases} \alpha = \pm \dfrac{\alpha_1}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}, \\ \beta = \pm \dfrac{\beta_1}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}, \\ \gamma = \pm \dfrac{\gamma_1 \cosh\varphi + \sinh\varphi}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}. \end{cases}$$

Si α, β, γ vérifient une relation linéaire telle que

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p = 0,$$

l, m, n, p étant des constantes, α_1, β_1, γ_1 vérifient une relation de même forme et inversement. Par conséquent, *toute courbe de la surface S dont l'image sphérique est un cercle a pour transformée sur la surface S_1 une courbe jouissant de la même propriété, et réciproquement.*

En particulier, si γ est constant, il en sera de même de γ_1. Donc les méridiens et les parallèles de la surface S ont respectivement pour images les méridiens et les parallèles de la surface S_1. Nous appelons avec Minding méridiens d'une surface les courbes pour lesquelles la normale à la surface est parallèle à un plan vertical fixe, et parallèles les courbes pour lesquelles la normale fait un angle constant avec le plan horizontal.

Des valeurs trouvées plus haut pour α_1, β_1, γ_1 on déduit la relation

$$d\alpha_1 dx_1 + d\beta_1 dy_1 + d\gamma_1 dz_1 = \pm (d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz)$$

dont l'interprétation est immédiate. Supposons en effet que le point x, y, z décrive une ligne asymptotique de S; on aura

$$d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz = 0$$

et par suite

$$d\alpha_1 dx_1 + d\beta_1 dy_1 + d\gamma_1 dz_1 = 0,$$

de sorte que le point x_1, y_1, z_1 décrira aussi une ligne asymptotique de S_1. Comme les lignes de courbure des deux surfaces coupent les lignes asymptotiques sous un angle de 45° et que les angles se conservent dans la transformation, on peut énoncer le théorème suivant;

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S ont respectivement pour transformées les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S_1.

Si la surface S admet une ligne de courbure plane, la transformée de cette courbe sur la surface S_1 sera encore ligne de courbure de S_1, et son image sphérique sera encore un cercle. Elle sera donc aussi une ligne de courbure plane. De même si la surface S admet une ligne asymptotique hélicoïdale, l'image sphérique de cette courbe sera un petit cercle, et sa transformée sera une ligne asymptotique hélicoïdale de S_1. Donc:

Toute ligne de courbure plane de la surface S se change en une ligne de courbure plane de S_1, et toute ligne asymptotique hélicoïdale se change en une ligne asymptotique hélicoïdale.

Supposons que la surface S soit algébrique; il en sera de même de la surface S_1. D'ailleurs il est clair qu'une transformation homographique, qui conserve le cercle de l'infini, appliquée à une courbe minima, ne change pas l'ordre de la développable formée par les tangentes à cette courbe ni la multiplicité du cercle de l'infini sur cette développable. On a donc le théorème suivant, qui est vrai pour toutes les surfaces d'une même famille et qui a été énoncé par M. Lie.[1]

Etant données deux surfaces minima d'une même famille, si aucune n'est surface double ou si toutes les deux sont surfaces doubles, elles sont de même classe. Si une seule est surface double, sa classe est la moitié de celle de l'autre.

Il n'existe pas de loi aussi simple en ce qui concerne l'ordre de deux surfaces. Considérons par exemple une courbe minima Γ d'ordre m ayant un ou plusieurs points communs à l'infini avec sa conjuguée Γ_0; l'ordre de la surface minima correspondante sera inférieur à m^2. Il est clair qu'en appliquant à la courbe Γ un déplacement imaginaire quelconque la nouvelle courbe Γ_1 n'aura plus, en général, de point commun à l'infini avec sa conjuguée, et l'ordre de la nouvelle surface minima sera bien égal à m^2.

7. La plupart des propriétés qui viennent d'être démontrées s'établissent aussi très aisément au moyen des formules de M. Weierstrass. Afin

---

[1] Mathematische Annalen, t. **15**, p. 476.

de n'avoir à considérer que des substitutions linéaires homogènes, nous adopterons un nouveau système de formules, dues également à l'illustre géomètre et qui ont été employées aussi par M. Darboux.[1] Dans les formules (11) faisons un changement de variable et introduisons les notations nouvelles

$$u = -\frac{G(t)}{H(t)}, \qquad \mathfrak{F}(u)\,du = -iH^2(t)\,dt;$$

les équations de la surface minima S prendront la forme suivante:

$$(19) \qquad \begin{cases} x = \Re\int i[G^2(t) - H^2(t)]\,dt, \\ y = \Re\int [G^2(t) + H^2(t)]\,dt, \\ z = \Re\int 2iG(t)H(t)\,dt. \end{cases}$$

L'élément linéaire sera donné par la formule

$$(20) \qquad ds^2 = 4[G(t)G_0(t_0) + H(t)H_0(t_0)]^2\,dt\,dt_0,$$

$G_0(t_0)$ et $H_0(t_0)$ étant les imaginaires conjuguées de $G(t)$ et de $H(t)$; l'équation différentielle des lignes asymptotiques deviendra

$$(21) \qquad \Re i(HG' - GH')\,dt^2 = 0$$

et celle des lignes de courbure sera de même

$$(22) \qquad \Re(HG' - GH')\,dt^2 = 0.$$

Considérons maintenant une autre surface minima S_1 donnée par les équations

$$(23) \qquad \begin{cases} x_1 = \Re\int i[G_1^2(t) - H_1^2(t)]\,dt, \\ y_1 = \Re\int [G_1^2(t) + H_1^2(t)]\,dt, \\ z_1 = \Re\int 2iG_1(t)H_1(t)\,dt, \end{cases}$$

où on a

$$G_1(t) = aG(t) + bH(t),$$
$$H_1(t) = cG(t) + dH(t),$$

[1] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 453.

a, b, c, d désignant quatre constantes telles que $ad - bc$ ne soit pas nul. Toutes les surfaces minima ainsi obtenues appartiennent à une même famille; ces surfaces dépendent bien, comme on voit, de huit paramètres réels. Pour avoir le sous-groupe formé par les surfaces dérivées de la surface (19), déplacées d'une façon quelconque, il suffit de supposer

$$ad - bc = 1.$$

Enfin, si la seconde surface se déduit de la première par un simple déplacement, les formules de substitution auront la forme particulière suivante

$$G_1(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

$$H_1(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

m_0 et n_0 étant les imaginaires conjuguées de m et de n, et δ le discriminant $mm_0 + nn_0$.

Prenons le cas général où $ad - bc$ est égal à l'unité, et faisons correspondre les points des deux surfaces S et S_1 qui répondent à une même valeur de t. On aura

$$H_1 G_1' - G_1 H_1' = HG' - GH';$$

d'où on déduit que les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure sont les mêmes pour les deux surfaces. En comparant de même la formule (20) à la formule analogue pour la seconde surface on voit que le rapport $\frac{ds}{ds_1}$ ne dépend que de t.

Les formules qui précèdent permettent de démontrer très simplement la proposition que voici: si l'on considère sur une surface minima un point non singulier, le point correspondant sur toute autre surface de la même famille sera également un point non singulier; si le premier point est un *point de ramification* d'ordre $n - 2$, il en est de même du second.

Supposons qu'on ait pris l'axe des z parallèle à la normale à la surface S au point considéré, de façon que la valeur de u soit nulle pour ce point. On pourra toujours choisir la variable t de façon qu'elle soit nulle aussi pour $u = 0$ et que dans le voisinage de l'origine les fonctions $H(t)$, $G(t)$ aient respectivement les formes suivantes[1]

$$H(t) = P(t),$$
$$G(t) = t^{n-1} P_1(t),$$

$P(t)$ et $P_1(t)$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances positives de t et ne s'annulant pas pour $t = 0$, et n un nombre entier positif au moins égal à 2. Cela posé, considérons une surface de la même famille représentée par les équations (23) où on a pris

$$G_1(t) = aG(t) + bH(t),$$
$$H_1(t) = cG(t) + dH(t);$$

faisons subir à cette nouvelle surface un déplacement, ce qui revient à remplacer dans les formules (23) G_1 et H_1 par les nouvelles fonctions G_2 et H_2,

$$G_2(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t) = \frac{ma - nc}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{mb - nd}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

$$H_2(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t) = \frac{n_0 a + m_0 c}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{n_0 b + m_0 d}{\sqrt{\delta}} H(t).$$

En prenant m et n de façon que $mb - nd = 0$, les fonctions $G_2(t)$ et $H_2(t)$ auront dans le voisinage de l'origine la même forme que les fonctions $G(t)$ et $H(t)$; d'où résulte la proposition annoncée.

8. Revenons à la surface S_1 représentée par les équations (14); si dans ces équations on fait varier le paramètre φ, le point (x_1, y_1) décrit une branche de l'hyperbole ayant pour équation

$$(x_1 x_0 + y_1 y_0)^2 - (x_1 y - y_1 x)^2 = (x x_0 + y y_0)^2,$$

qui se réduit à une droite si l'on a $x x_0 + y y_0 = 0$. Par suite, lorsqu'on fait varier φ de $-\infty$ à $+\infty$, tous les points de la surface variable S_1 décrivent des hyperboles ayant leurs centres sur l'axe des z. Mais il

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 461.

est à remarquer qu'il n'y a qu'une branche de l'hyperbole qui soit décrite; pour avoir la seconde branche il faudrait donner au paramètre k qui figure dans les formules (13) des valeurs négatives.

On est ainsi conduit à se poser la question suivante. Etant données dans un même plan perpendiculaire à l'axe des z deux courbes quelconques C, C_1, peut-on choisir la surface minima S passant par C de façon que l'une de ses dérivées passe par la courbe C_1? Les propriétés obtenues plus haut permettent de répondre par l'affirmative. En effet, faisons correspondre les points des deux courbes C, C_1 où les tangentes sont parallèles, et donnons-nous le paramètre φ. Soient $x, y; x_1, y_1$ les coordonnées de deux points correspondants sur les courbes C, C_1, $d\sigma$, $d\sigma_1$ les éléments d'arcs correspondants, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{dy_1}{dy} = \frac{d\sigma_1}{d\sigma}.$$

Des formules (14) nous tirons

$$x_0 = \frac{y_1 - y\cosh\varphi}{\sinh\varphi}, \qquad dx_0 = dy\frac{\frac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi},$$

$$y_0 = \frac{x\cosh\varphi - x_1}{\sinh\varphi}, \qquad dy_0 = -dx\frac{\frac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi};$$

posons encore

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2.$$

On en tire

$$dz_0 = d\sigma\sqrt{1 - \gamma^2}, \qquad z_0 = \int\sqrt{1 - \gamma^2}\,d\sigma,$$

où

$$\gamma = \frac{\frac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi}.$$

Choisissons le paramètre φ de façon que γ soit inférieur à l'unité; nous déterminons une courbe gauche C_0 décrite par le point de coordonnées x_0, y_0, z_0, telle que les arcs correspondants des deux courbes C, C_0 sont égaux et les éléments correspondants orthogonaux, d'après la relation $dx\,dx_0 + dy\,dy_0 = 0$. Il existe donc une surface minima passant par la courbe C et telle que la courbe correspondante sur la surface adjointe soit précisément C_0. Dans les formules qui donnent cette surface il n'entre qu'une seule quadrature provenant de l'équation qui donne z_0. Si on applique à cette surface S les formules (14), on reconnaît par un calcul inverse du précédent que la surface dérivée S_1 passe par la courbe C_1.

Considérons en particulier une surface S admettant la courbe plane C pour ligne de courbure; γ étant constant le long de cette courbe, le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ sera constant d'après la formule (16) et par suite les sections des surfaces dérivées par le plan de la courbe C seront des courbes homothétiques à la première. D'autre part, les formules (18) nous montrent que γ_1 sera constant aussi le long de la courbe C_1. On a donc le théorème suivant:

Si une surface minima S admet une ligne de courbure plane C, les surfaces dérivées de S avec un axe de dérivation perpendiculaire au plan de cette courbe sont coupées par ce plan suivant des lignes de courbure homothétiques à la courbe C.

Ainsi on peut faire dériver les surfaces qui admettent une ligne de courbure plane des surfaces qui admettent pour ligne géodésique une ligne homothétique à celle-là.[1] Pour donner une application de cette propriété, considérons l'alysséide et un axe de dérivation perpendiculaire à un plan méridien; les surfaces dérivées admettront une chaînette pour ligne de courbure plane. Or, comme la dérivation change les lignes de courbure planes en lignes de courbure planes, les nouvelles surfaces auront encore toutes leurs lignes de courbure planes. Ce sont les surfaces trouvées par M. O. Bonnet.[2] Nous voyons que cette seule propriété d'une surface minima d'admettre pour ligne de courbure une chaînette permet d'affirmer que toutes les autres lignes de courbure de la surface sont également des courbes planes.

Si une surface minima admet une ligne de courbure plane C, les surfaces associées coupent un cylindre ayant pour section droite une courbe semblable à C suivant une ligne géodésique et sous un angle

[1] Voir S. Lie, Mathematische Annalen, t. **15**, p. 477.

[2] Comptes rendus, t. **41**, p. 1057; 1855.

constant. Le théorème qui précède rapproché de la remarque faite à la fin du paragraphe 5 nous donne ce nouveau théorème:

Si une surface minima coupe un cylindre suivant une ligne géodésique et sous un angle constant, les surfaces dérivées avec un axe de dérivation parallèle aux génératrices du cylindre coupent un cylindre homothétique au premier suivant une ligne géodésique et sous un angle constant.[1]

En particulier, on peut faire dériver les surfaces qui admettent une ligne asymptotique hélicoïdale des surfaces qui passent par une ligne droite.

9. Lorsqu'une surface minima passe par une droite réelle, on sait que cette droite est un axe de symétrie pour la surface, et de même lorsqu'une surface minima admet une ligne géodésique plane, le plan de cette ligne est un plan de symétrie pour la surface. Ces théorèmes peuvent être généralisés au moyen des surfaces dérivées.

Considérons une surface minima S ayant une ligne de courbure plane C dans le plan des xy; soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de cette courbe, σ l'arc compté à partir d'un point fixe et ω l'angle constant sous lequel la surface coupe le plan des xy. La courbe correspondante à C sur la surface adjointe S_0 sera une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite une courbe homothétique à C que l'on aurait fait tourner de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine; soient

$$x_0 = -y\cos\omega, \qquad y_0 = x\cos\omega, \qquad z_0 = \sigma\sin\omega$$

les équations de cette courbe. Posons

$$e^{\varphi} = \frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega};$$

on en tire

$$\cosh\varphi = \frac{1+\cos^2\omega}{1-\cos^2\omega}, \qquad \sinh\varphi = \frac{2\cos\omega}{1-\cos^2\omega}.$$

Le paramètre φ étant choisi de cette façon, considérons la surface S_1

---

[1] Voir S. Lie, Mathematische Annalen, t. **15**, p. 477.

représentée par les équations (14); pour tout point de la courbe C on aura, d'après les valeurs de x_0, y_0,

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la surface dérivée S_1 passera également par la courbe C. D'autre part, les formules (18) nous donnent, pour les cosinus directeurs de la normale à la nouvelle surface le long de la courbe C,

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \gamma_1 = -\cos\omega;$$

nous voyons que les plans tangents aux deux surfaces S et S_1 en un même point de la courbe C sont symétriques par rapport au plan des xy. Imaginons maintenant que l'on prenne la surface symétrique de S_1 par rapport au plan des xy, la nouvelle surface ainsi obtenue S_1' passera encore par la courbe C et aura le même plan tangent que la surface S tout le long de cette courbe. Donc, d'après une proposition bien connue de la théorie des surfaces minima, les surfaces S et S_1' coïncident. Ainsi:

Lorsqu'une surface minima S admet une ligne de courbure plane située dans un plan P, si on prend la dérivée de la portion de surface située d'un côté du plan P avec un axe de dérivation perpendiculaire à ce plan et un paramètre convenable, puis la surface symétrique de cette dérivée par rapport au plan P, on retrouve la portion de la surface primitive S située de l'autre côté de ce plan.

Cette proposition comprend évidemment comme cas particulier le théorème rappelé plus haut sur les surfaces à lignes géodésiques planes. On fait ainsi correspondre les sections des deux nappes de la surface S équidistantes du plan P et les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles. Il est aisé de trouver comment sont disposés sur la sphère les images sphériques de deux points correspondants M, M' de la surface S. Soient α, β, γ; α', β', γ' les cosinus directeurs des deux normales aux points M et M'. Au moyen des formules (18), nous obtenons les relations:

$$\alpha' = \frac{\alpha \sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega},$$

$$\beta' = \frac{\beta \sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega},$$

$$\gamma' = \frac{2\cos\omega - \gamma(1 + \cos^2\omega)}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega};$$

ces relations expriment, il est aisé de le vérifier, que la droite qui joint les deux points $m(\alpha, \beta, \gamma)$ et $m'(\alpha', \beta', \gamma')$ de la sphère va couper l'axe Oz en un point Q de coordonnées $\left(x = y = 0, z = \frac{1}{\cos \omega}\right)$. Ce point Q est précisément le pôle du petit cercle de la sphère qui est l'image sphérique de la ligne de courbure plane C. On peut donc dire que les images sphériques des deux points M, M' sont symétriques par rapport au petit cercle qui est l'image sphérique de la ligne de courbure plane considérée. J'appelle points *symétriques* par rapport à un petit cercle deux points tels que la droite qui les joint va passer par le pôle du plan de ce cercle.

On a un théorème analogue au précédent pour les surfaces minima qui admettent une ligne asymptotique hélicoïdale. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de cette hélice, ω l'angle de la tangente à l'hélice avec le plan horizontal; la courbe correspondante sur la surface adjointe sera une courbe plane représentée par les formules

$$x_0 = -\frac{y}{\cos \omega}, \qquad y_0 = \frac{x}{\cos \omega}.$$

Cela posé, prenons pour le paramètre k qui figure dans les formules (13) la valeur négative

$$k = -e^{\varphi} = -\frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega};$$

les formules (14) seront remplacées par les suivantes

$$\begin{aligned} x_1 &= -x \frac{1 + \cos^2 \omega}{\sin^2 \omega} + y_0 \frac{2 \cos \omega}{\sin^2 \omega}, \\ y_1 &= -y \frac{1 + \cos^2 \omega}{\sin^2 \omega} - x_0 \frac{2 \cos \omega}{\sin^2 \omega}, \\ z_1 &= z, \end{aligned}$$

et on aura de même pour les cosinus directeurs de la normale à la nouvelle surface

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-\alpha \sin^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega - 2\gamma \cos \omega}, \\ \beta_1 &= \frac{-\beta \sin^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega - 2\gamma \cos \omega}, \\ \gamma_1 &= \frac{\gamma(1 + \cos^2 \omega) - 2 \cos \omega}{1 + \cos^2 \omega - 2\gamma \cos \omega}. \end{aligned}$$

Si on applique ces formules à un point de l'hélice on aura

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z,$$

$$\alpha_1 = -\alpha, \qquad \beta_1 = -\beta, \qquad \gamma_1 = -\cos\omega;$$

par conséquent la nouvelle surface passe encore par cette hélice et elle admet le même plan tangent que la première tout le long de cette courbe. Donc les deux surfaces se confondent. Ainsi, *lorsqu'une surface minima réelle admet une ligne asymptotique hélicoïdale, les deux nappes de la surface se déduisent l'une de l'autre par une dérivation convenable, l'axe de dérivation étant parallèle aux génératrices du cylindre.* Les points correspondants sont dans un même plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre et les tangentes à la section de la surface par ce plan aux points correspondants sont parallèles. Les images sphériques de ces deux points sont encore symétriques par rapport au petit cercle qui est l'image sphérique de la ligne hélicoïdale.

10. Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à quelques surfaces minima. Prenons d'abord la surface du neuvième ordre d'Enneper, que l'on obtient en supposant que la fonction $\mathfrak{F}(u)$ se réduit à une constante réelle; toute surface de la même famille aura une fonction caractéristique de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{A}{(m + n_0 u)^4}.$$

Ces surfaces dépendent par conséquent de *quatre* constantes réelles seulement. Il est aisé de reconnaître que toutes ces surfaces sont semblables à la surface primitive. En effet, faisons subir à la surface minima ayant pour fonction caractéristique la fonction précédente le déplacement qui correspond à la substitution linéaire

$$u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v};$$

la fonction caractéristique de la surface minima dans sa nouvelle position se réduira à une constante ae^{bi}, a et b étant réels. La surface est donc homothétique à une surface associée à la surface d'Enneper, et on sait que cette dernière est superposable à ses associées. Du reste, on se rend compte de ce fait *a priori*, si on remarque que la surface d'ENNEPER est la seule surface minima algébrique à lignes de courbure planes et que, dans une dérivation, les lignes de courbure planes se changent en lignes de courbure planes.

Considérons en second lieu la famille de surfaces minima à laquelle appartient l'alysséide. Si on prend pour axe des z l'axe de l'alysséide, la fonction caractéristique sera $\frac{1}{u^2}$; toute autre surface de la même famille aura une fonction caractéristique de la forme

$$\frac{A}{(u-\alpha)^2(u-\beta)^2}, \quad \text{où} \quad \alpha \gtrless \beta,$$

un des facteurs $u-\alpha$, $u-\beta$ pouvant se réduire à l'unité. Ces surfaces dépendent donc de *six* paramètres arbitraires réels. D'une manière générale, on peut dire que cette famille se compose des surfaces minima, *non algébriques*, à lignes de courbure planes, et des surfaces associées à celles-là. Pour obtenir les surfaces dérivées de l'alysséide, supposons l'axe de dérivation perpendiculaire à un plan méridien et prenons cet axe pour axe des z. Les expressions des coordonnées, d'un point de l'alysséide auront la forme suivante:

$$\begin{cases} x = a\mu, \\ y = a\cos\lambda\cosh\mu, \\ z = a\sin\lambda\cosh\mu, \end{cases}$$

λ et μ étant les paramètres des lignes de courbure. On aura de même pour la surface adjointe

$$\begin{cases} x_0 = a\lambda, \\ y_0 = a\sin\lambda\sinh\mu, \\ z_0 = -a\cos\lambda\sinh\mu. \end{cases}$$

Appliquons à cette surface les formules générales (14); nous trouvons pour les coordonnées d'un point de la surface dérivée

$$\begin{cases} x_1 = a\mu\cosh\varphi - a\sin\lambda\sinh\mu\sinh\varphi, \\ y_1 = a\cos\lambda\cosh\mu\cosh\varphi + a\lambda\sinh\varphi, \\ z_1 = a\sin\lambda\cosh\mu; \end{cases}$$

si on divise par $a \cosh\varphi$ et qu'on pose $\operatorname{tgh}\varphi = h$, ces formules deviennent:

$$\begin{cases} x_1 = \mu - h \sin\lambda \sinh\mu, \\ y_1 = \cos\lambda \cosh\mu + h\lambda, \\ z_1 = \sqrt{1 - h^2} \sin\lambda \cosh\mu. \end{cases}$$

Il est aisé de reconnaître qu'elles sont équivalentes aux formules données par M. Darboux (*loc. cit.* p. 315). Le plan tangent a pour équation

$$X \sinh\mu - Y\cos\lambda + Z\left[\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\cosh\mu - \frac{\sin\lambda}{\sqrt{1-h^2}}\right]$$

$$= h\sin\lambda - h\lambda\cos\lambda + \mu\sinh\mu - \cosh\mu.$$

D'une manière générale, proposons-nous de déterminer toutes les familles de surfaces minima qui dépendent de moins de huit paramètres réels. Cela revient à chercher les fonctions $\mathfrak{F}(u)$ telles que les fonctions

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right),$$

qui paraissent dépendre de quatre constantes complexes, ne dépendent en réalité que d'un moindre nombre de constantes. S'il en est ainsi, la fonction précédente sera identique à elle-même pour une infinité de valeurs des paramètres A, m, n, p, q, formant une suite continue. En particulier on pourra prendre pour ces paramètres des fonctions continues d'une variable t telles que l'on ait identiquement

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right) = \mathfrak{F}(u),$$

et nous supposerons de plus, pour fixer les idées, que pour la valeur $t = 0$, on a

$$A = m = q = 1, \qquad n = p = 0.$$

Egalons à zéro la dérivée de la fonction précédente par rapport au paramètre t; il vient, en désignant par A', m', n', p', q' les dérivées de A, m, n, p, q

$$\frac{A'(pu+q)-4A(p'u+q')}{(pu+q)^5}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right)$$

$$+\frac{A}{(pu+q)^6}[(m'u+n')(pu+q)-(mu+n)(p'u+q')]\mathfrak{F}'\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right)=0.$$

Cette relation est satisfaite identiquement si on a

$$\frac{A'}{4A}=\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}$$

ou

$$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A_1^{\frac{1}{4}}}=\frac{p}{p_1}=\frac{q}{q_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1},$$

A_1, m_1, n_1, p_1, q_1 étant les valeurs des paramètres pour une valeur particulière t_1 de la variable t. Ce résultat était évident à priori d'après l'homogénéité de la fonction caractéristique. Laissant de côté ce cas singulier, faisons $t=0$ dans la relation précédente; nous voyons que la fonction $\mathfrak{F}(u)$ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)}+\frac{4au+b}{au^2+cu+d}=0,$$

a, b, c, d étant des constantes indépendantes de u. L'intégration ne présente aucune difficulté. Nous distinguerons plusieurs cas:

1°. Soit $a \gtrless 0$; si l'équation

$$au^2+cu+d=0$$

a deux racines distinctes α, β, l'équation pourra s'écrire

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)}-\frac{k}{u-\alpha}+\frac{k+4}{u-\beta}=0,$$

et on en tire

$$\text{(A)}\qquad \mathfrak{F}(u)=C\frac{(u-\alpha)^k}{(u-\beta)^{k+4}};$$

2°. Soit $a \gtrless 0$; si l'équation $au^2 + cu + d = 0$ a une racine double α, on aura

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} + \frac{4}{u-\alpha} + \frac{k}{(u-\alpha)^2} = 0.$$

On en tire

$$\text{(B)} \qquad \mathfrak{F}(u) = \frac{C}{(u-\alpha)^4} e^{\frac{k}{u-\alpha}};$$

3°. Soit $a = 0$, $bc \gtrless 0$. On aura

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = \frac{k}{u-\alpha},$$

et par suite

$$\text{(C)} \qquad \mathfrak{F}(u) = C(u-\alpha)^k;$$

4°. Soit $a = 0$, $c = 0$, $b \gtrless 0$. L'équation différentielle devient

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = k,$$

et on en tire

$$\text{(D)} \qquad \mathfrak{F}(u) = Ce^{ku};$$

5°. Soit $a = 0$, $b = 0$. On aura

$$\text{(E)} \qquad \mathfrak{F}(u) = C.$$

Il est visible que les formes (C) et (E) ne sont que des cas particuliers de la forme (A)

$$\mathfrak{F}(u) = C\frac{(u-\alpha)^k}{(u-\beta)^{k+4}},$$

qui caractérise la famille de surfaces minima dont fait partie la surface ayant pour fonction caractéristique

$$\mathfrak{F}(u) = u^k;$$

cette dernière surface est applicable, comme on sait, sur une surface de révolution ou sur une surface spirale. Comme cette surface est superposable ou semblable à ses associées, il était certain *a priori* que la famille de surfaces minima dont elle fait partie ne pourrait dépendre de huit paramètres réels arbitraires. Si k est quelconque, le nombre de ces paramètres sera égal à 6; il s'abaisse jusqu'à 4 pour la surface d'ENNEPER.

Les formes (B) et (D) sont elles-mêmes des cas particuliers de la forme suivante

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{e^{\frac{mu+n}{pu+q}}}{(pu+q)^4};$$

cette fonction $\mathfrak{F}(u)$ ne dépend que de trois constantes complexes. Elle reprend en effet la même valeur si on remplace m, n, p, q par

$$km + 4kpLk, \; kn + 4kqLk, \; kp, \; kq,$$

k étant une constante quelconque. Si on fait subir à la surface minima qui a pour fonction caractéristique la fonction précédente un déplacement réel convenable, il est facile de démontrer qu'on peut la ramener à avoir pour fonction caractéristique une fonction de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = e^{au+b+ci},$$

a, b, c étant réels.

11. Imaginons que nous ayons pris un axe de dérivation quelconque passant par l'origine, faisant avec les axes de coordonnées des angles de cosinus a_i, b_i, c_i et soit φ_i le paramètre de dérivation. Les formules (16) et (17) deviennent

$$(16') \qquad ds_i = [\cosh\varphi_i - (a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)\sinh\varphi_i]\,ds,$$

$$(17') \qquad dA_i = [\cosh\varphi_i - (a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)\sinh\varphi_i]^2\,dA.$$

Supposons que nous ayons pris cinq surfaces dérivées d'une même surface S, avec des axes et des paramètres de dérivation quelconques. Entre les cinq formules analogues à la formule (16') nous pourrons éliminer $\alpha, \beta, \gamma, ds$; par suite, *entre les longueurs des arcs correspondants de ces cinq surfaces il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants.* Il peut arriver d'ailleurs qu'on ait une relation de cette espèce en prenant moins de cinq surfaces. Considérons par exemple quatre surfaces dérivées d'une même surface par rapport à quatre axes situés dans un même plan que nous prendrons pour plan des xz; les formules analogues à la formule (16') ne contiendront plus que α et γ et, en éliminant α, γ

et ds on aura une relation linéaire et homogène entre les longueurs des arcs correspondants de ces quatre surfaces.

Prenons encore trois surfaces dérivées de la première suivant un même axe, que nous prendrons pour axe des z; on aura les trois relations

$$ds_1 = [\cosh\varphi_1 - \gamma\sinh\varphi_1]ds,$$
$$ds_2 = [\cosh\varphi_2 - \gamma\sinh\varphi_2]ds,$$
$$ds_3 = [\cosh\varphi_3 - \gamma\sinh\varphi_3]ds.$$

On en déduit

$$\sinh(\varphi_2 - \varphi_3)ds_1 + \sinh(\varphi_3 - \varphi_1)ds_2 + \sinh(\varphi_1 - \varphi_2)ds_3 = 0$$

et par suite

$$s_1\sinh(\varphi_2 - \varphi_3) + s_2\sinh(\varphi_3 - \varphi_1) + s_3\sinh(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

On verra de même, en partant de la formule (17'), qu'il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les aires correspondantes: 1° de *dix* surfaces dérivées, lorsque les axes et les paramètres de dérivation sont quelconques; 2° de *sept* surfaces, lorsque les axes sont dans un même plan; 3° de *quatre* surfaces dérivées suivant un même axe.

12. La plupart des considérations précédentes s'appliquent, avec quelques changements, aux surfaces minima imaginaires. Soient Γ, Γ_1 deux courbes minima quelconques représentées par les équations

$$\Gamma \begin{cases} X = 2A(t), \\ Y = 2B(t), \\ Z = 2C(t), \end{cases} \qquad \Gamma_1 \begin{cases} X_1 = 2A_1(\tau), \\ Y_1 = 2B_1(\tau), \\ Z_1 = 2C_1(\tau), \end{cases}$$

et soit S la surface minima, en général imaginaire, qui est le lieu des milieux des cordes joignant un point de Γ à un point de Γ_1, surface représentée par les équations

$$S \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau). \end{cases}$$

Supposons que l'on applique à la courbe Γ une transformation homographique conservant le cercle de l'infini, et une autre transformation de même nature à la courbe Γ_1. On obtient deux autres courbes minima Γ', Γ'_1;

$$\Gamma' \begin{cases} X' = 2\mathfrak{A}(t), \\ Y' = 2\mathfrak{B}(t), \\ Z' = 2\mathfrak{C}(t), \end{cases} \qquad \Gamma'_1 \begin{cases} X'_1 = 2\mathfrak{A}_1(\tau), \\ Y'_1 = 2\mathfrak{B}_1(\tau), \\ Z'_1 = 2\mathfrak{C}_1(\tau), \end{cases}$$

et une nouvelle surface minima S représentée par les équations

$$S' \begin{cases} x' = \mathfrak{A}(t) + \mathfrak{A}_1(\tau), \\ y' = \mathfrak{B}(t) + \mathfrak{B}_1(\tau), \\ z' = \mathfrak{C}(t) + \mathfrak{C}_1(\tau). \end{cases}$$

Nous venons d'étudier le cas où les deux courbes Γ, Γ_1 sont imaginaires conjuguées et où on applique à ces deux courbes des déplacements imaginaires conjugués. Considérons maintenant le cas général; nous allons voir que *les coordonnées d'un point de la surface S' s'expriment linéairement au moyen des coordonnées de deux points correspondants de la surface S et de la surface adjointe S_0.*

On a pour expressions des coordonnées d'un point de S_0

$$S_0 \begin{cases} x_0 = i[A(t) - A_1(\tau)], \\ y_0 = i[B(t) - B_1(\tau)], \\ z_0 = i[C(t) - C_1(\tau)], \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{aligned} x - ix_0 &= 2A(t), & x + ix_0 &= 2A_1(\tau), \\ y - iy_0 &= 2B(t), & y + iy_0 &= 2B_1(\tau), \\ z - iz_0 &= 2C(t), & z + iz_0 &= 2C_1(\tau). \end{aligned}$$

D'ailleurs $\mathfrak{A}(t)$, $\mathfrak{B}(t)$, $\mathfrak{C}(t)$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; de même $\mathfrak{A}_1(\tau)$, $\mathfrak{B}_1(\tau)$, $\mathfrak{C}_1(\tau)$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$. Par suite x', y', z' s'exprimeront linéairement au moyen de x, y, z, x_0, y_0, z_0.

Je suppose maintenant que les deux transformations appliquées aux courbes Γ, Γ_1 se réduisent à deux déplacements indépendants l'un de l'autre. Faisons correspondre les points des deux surfaces S, S' qui répondent aux mêmes valeurs de t et de τ; alors *les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent respectivement sur ces deux surfaces.* On le démontre facilement en prenant les équations de ces surfaces sous la forme générale qui précède. Désignons pour abréger par A', B', C', A'', B'', C''; $A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1''$ les dérivées de A, B, C; A_1, B_1, C_1 prises par rapport à t et à τ respectivement. Des relations

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 0,$$

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0$$

on tire

$$\frac{A'}{B'C'' - C'B''} = \frac{B'}{C'A'' - A'C''} = \frac{C'}{A'B'' - B'A''};$$

posons

$$I(t) = \frac{A'B'' - B'A''}{C'} = \frac{B'C'' - C'B''}{A'} = \frac{C'A'' - A'C''}{B'}.$$

Soient

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$; des égalités précédentes on tire

$$I(t) = \frac{(a'b'' - b'a'')(A'B'' - B'A'') + (b'c'' - c'b'')(B'C'' - C'B'') + (c'a'' - a'c'')(C'A'' - A'C'')}{aA' + bB' + cC'}$$

$$= \frac{(a'A' + b'B' + c'C')(a''A'' + b''B'' + c''C'') - (a''A' + b''B' + c''C')(a'A'' + b'B'' + c'C'')}{aA' + bB' + cC'}.$$

On voit donc que $I(t)$ est un invariant relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$ effectuée sur les fonctions A, B, C. De même, si on pose

$$I_1(\tau) = \frac{A_1'B_1'' - B_1'A_1''}{C_1'} = \frac{B_1'C_1'' - C_1'B_1''}{A_1'} = \frac{C_1'A_1'' - A_1'C_1''}{B_1'},$$

$I_1(\tau)$ sera un invariant relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$ effectuée sur les fonctions A_1, B_1, C_1. On sait que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S est

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & A'_1 \\ B' & B'' & B'_1 \\ C' & C'' & C'_1 \end{vmatrix} dt^2 + \begin{vmatrix} A'_1 & A' & A''_1 \\ B'_1 & B' & B''_1 \\ C'_1 & C' & C''_1 \end{vmatrix} d\tau^2 = 0,$$

ou, en développant et en supprimant le facteur commun $A'A'_1+B'B'_1+C'C'_1$,

$$I(t)dt^2 - I_1(\tau)d\tau^2 = 0.$$

De même l'équation différentielle des lignes de courbure sera

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix} = 0$$

où

$$u = B'C'_1 - C'B'_1, \qquad v = C'A'_1 - A'C'_1, \qquad w = A'B'_1 - B'A'_1;$$

en développant et réduisant les termes semblables, il vient pour cette équation

$$I(t)dt^2 + I_1(\tau)d\tau^2 = 0.$$

Puisque $I(t)$, $I_1(\tau)$ sont des invariants relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$, on voit aussitôt que ces équations sont les mêmes pour les deux surfaces S et S': d'où résulte la proposition générale énoncée plus haut.

Ce théorème se démontre aussi très simplement au moyen des formules de M. Weierstrass. Regardons les deux courbes minima Γ, Γ_1 comme les arêtes de rebroussement des deux développables enveloppes des plans

$$\begin{cases} (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 4f(u) = 0, \\ (1-u_1^2)X - i(1+u_1^2)Y + 2u_1Z + 4f_1(u_1) = 0; \end{cases}$$

la surface minima S sera représentée par les équations

$$\begin{cases} x = \int (1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du + \int (1 - u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y = \int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du - \int i(1 + u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z = \int 2u\mathfrak{F}(u)\,du + \int 2u_1\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{F}(u) = f'''(u), \qquad \mathfrak{F}_1(u) = f_1'''(u_1).$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques seront données par les équations différentielles

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 - \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0,$$

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 + \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

Si on suppose maintenant que les courbes Γ, Γ_1 subissent des déplacements, les fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ sont remplacées par des fonctions $\mathfrak{G}(v)$, $\mathfrak{G}_1(v_1)$ de la forme suivante

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{F}\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{(mq - np)^2}{(pv + q)^4},$$

$$\mathfrak{G}_1(v_1) = \mathfrak{F}_1\left(\frac{m_1v_1 + n_1}{p_1v_1 + q_1}\right)\frac{(m_1q_1 - n_1p_1)^2}{(p_1v_1 + q_1)^4},$$

et les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques deviennent respectivement

$$\mathfrak{G}(v)\,dv^2 - \mathfrak{G}_1(v_1)\,dv_1^2 = 0,$$

$$\mathfrak{G}(v)\,dv^2 + \mathfrak{G}_1(v_1)\,dv_1^2 = 0;$$

ces équations sont identiques aux premières où l'on aurait fait le changement de variables

$$u = \frac{mv + n}{pv + q}, \qquad u_1 = \frac{m_1v_1 + n_1}{p_1v_1 + q_1}.$$

Nous voyons de plus que, si on connaît l'image sphérique d'une ligne de la première surface, pour avoir l'image sphérique de la ligne correspondante de la seconde surface, il suffit de faire la transformation précédente. Une telle transformation change les cercles en cercles; par suite toute ligne de courbure plane se change en une ligne de courbure plane et toute ligne asymptotique hélicoïdale en une ligne asymptotique hélicoïdale.

Pour donner un exemple de la transformation générale qui précède, reprenons la surface représentée par les équations (14) [§ 6]. Rien n'empêche de supposer que la surface S d'où l'on part est imaginaire ainsi que le paramètre k; les propositions qui ont été démontrées sont encore vraies dans ce cas. La surface S étant considérée comme le lieu des milieux des cordes qui joignent un point d'une courbe minima Γ à un point d'une autre courbe minima Γ_1, on obtiendra la nouvelle surface minima représentée par les équations (14) en faisant subir aux deux courbes Γ, Γ_1 des rotations égales et de sens contraires autour de l'axe Oz. Je dirai encore que la nouvelle surface est dérivée de la première.

13. Nous avons vu au paragraphe 6 que deux surfaces minima dérivées l'une de l'autre jouissaient de la propriété suivante. Si on considère les sections de ces deux surfaces par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation et qu'on fasse correspondre les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles, on obtient un mode de correspondance entre les deux surfaces tel que l'angle de deux courbes quelconques tracées sur l'une d'elles est égal à l'angle des courbes correspondantes sur l'autre surface. On exprime ce fait en disant que les deux surfaces sont appliquées *conformément* l'une sur l'autre. Cette propriété appartient aussi aux surfaces de révolution. Soit Oz l'axe de la surface et

$$x = \varphi(z)$$

l'équation de la méridienne dans le plan des xz; l'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds^2 = \varphi^2(z)d\omega^2 + [1 + \varphi'^2(z)]dz^2,$$

ω désignant l'angle d'un plan méridien avec le plan xOz. Soit maintenant

$$x = \psi(z)$$

la méridienne d'une autre surface de révolution, dont l'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds_1^2 = \psi^2(z)d\omega^2 + [1 + \psi'^2(z)]dz^2.$$

Faisons correspondre les points des deux surfaces qui répondent aux mêmes valeurs de z et de ω; pour que ces deux surfaces soient appliquées conformément l'une sur l'autre, il faut et il suffit que le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ ne dépende que de ω et de z, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{1 + \varphi'^2(z)}{\varphi^2(z)} = \frac{1 + \psi'^2(z)}{\psi^2(z)}. \tag{24}$$

La première surface étant donnée, on connaîtra la fonction φ et on aura pour déterminer ψ une équation différentielle du premier ordre admettant φ comme intégrale particulière. Il est aisé d'interpréter la relation (24); soient C, C' les deux méridiennes du plan xOz, M et M' deux points de ces courbes situés sur une même parallèle $MM'P$ à l'axe Ox. La formule (24) exprime précisément que la projection de MP sur la normale MN à la courbe C est égale à la projection de $M'P$ sur la normale $M'N'$ à la courbe C'.

Supposons en particulier que la première surface soit un cylindre de révolution; alors $\varphi(z) = a$ et l'équation (24) devient

$$1 + \psi'^2(z) = \frac{\psi^2(z)}{a^2}.$$

L'intégrale générale est

$$x = \psi(z) = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{z-z_0}{a}} + e^{\frac{z_0-z}{a}}\right];$$

elle représente des chaînettes égales tangentes à la droite $x = a$, qui est alors une intégrale singulière. Ceci nous conduit à quelques propriétés curieuses de l'alysséide. Si on considère l'alysséide et le cylindre circonscrit suivant le cercle de gorge et qu'on fasse correspondre les points des deux surfaces situés sur une même droite perpendiculaire à Oz et rencontrant cet axe, les angles se conservent dans ce mode de correspondance. Les lignes asymptotiques de l'alysséide ont pour transformées des hélices inclinées à 45° sur les génératrices du cylindre, de sorte que ces lignes asymptotiques sont à l'intersection de l'alysséide et des hélicoïdes ayant Oz pour axe et égaux à l'hélicoïde adjoint.

Si on développe ensuite la surface du cylindre sur un plan, on obtiendra une carte de la surface de l'alysséide dans laquelle les lignes de courbure seront représentées par deux faisceaux rectangulaires de droites parallèles.

14. Nous sommes ainsi amenés à l'examen de la question suivante de Géométrie, par lequel je vais terminer. Etant données deux surfaces quelconques S, S_1, on prend les sections des deux surfaces par un plan variable parallèle à un plan fixe, et on fait correspondre les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles: dans quels cas obtient-on une application conforme des deux surfaces l'une sur l'autre par ce mode de correspondance?

Je prends le plan fixe pour plan des xy et j'appelle $x, y, z; x_1, y_1, z$ les coordonnées de deux points correspondants des deux surfaces; ces coordonnées sont supposées exprimées en fonction de deux variables indépendantes α, β. D'après l'énoncé du problème, on aura d'abord la relation

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz^2 = k(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{25}$$

D'autre part, le plan tangent à la première surface aura pour équation

$$(X - x)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right) + (Y - y)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$

$$+ (Z - z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right) = 0,$$

et le coefficient angulaire de la trace de ce plan sur le plan des xy sera

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}},$$

et on aura une expression toute pareille pour le plan tangent à la seconde surface. On en tire une nouvelle équation de condition

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}-\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial\beta}-\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)=\left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}-\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial y_1}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$$

ou, en développant,

$$(26)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial y_1}{\partial\beta}-\frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial x_1}{\partial\beta}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\right)\\&+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\left[\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial\beta}+\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}-\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y_1}{\partial\beta}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Il s'agit de trouver cinq fonctions x, y, x_1, y_1, z des variables α et β vérifiant les relations (25) et (26). Imaginons que nous ayons pris pour variables α et β les paramètres des lignes de longueur nulle de la première surface. L'équation (25) pourra être remplacée par les relations ci-dessous

$$(27)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2=0,\\&\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2=0;\end{aligned}\right.$$

$$(28)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2=0,\\&\left(\frac{\partial x_1}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$x=\frac{u+u_0}{2},\qquad x_1=\frac{v+v_0}{2},$$

$$y=i\frac{u_0-u}{2},\qquad y_1=i\frac{v_0-v}{2};$$

d'où

$$u=x+iy,\qquad v=x_1+iy_1,$$

$$u_0=x-iy,\qquad v_0=x_1-iy_1.$$

Des relations (27) et (28) on tire

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \dfrac{\partial v}{\partial \beta}\dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2. \end{cases}$$

On satisfait aux équations (29) de la façon la plus générale en prenant:

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = e^{i\varphi}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = e^{-i\varphi}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \end{cases} \qquad (30')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = e^{i\omega}\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = e^{-i\omega}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}, \end{cases}$$

φ et ω étant deux nouvelles fonctions de α et de β. Si on remplace x, y, x_1, y_1 par leurs valeurs dans l'équation de condition (26), elle devient, après quelques réductions faciles,

$$\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\left[e^{\frac{i(\omega-\varphi)}{2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right\} + e^{\frac{i(\varphi-\omega)}{2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right\}\right] = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation de deux manières: 1° en prenant $\omega + \varphi = 0$; 2° en posant

$$e^{i(\varphi-\omega)} = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}}.$$

Cette dernière solution est illusoire; en effet, on vérifie aisément, en tenant compte des équations (29), que l'on aurait

$$e^{i(\varphi-\omega)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}},$$

et les équations (30) nous donneraient

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v_0}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

de sorte que le point x_1, y_1, z décrirait, non pas une surface, mais une courbe, qui serait forcément une courbe minima. Il est aisé de s'expliquer la présence de cette solution étrangère. En effet, si on a une surface quelconque S et une courbe minima quelconque Γ et qu'on fasse correspondre tous les points de la surface S situés dans un plan parallèle au plan xOy au point unique de la courbe Γ situé dans ce plan, il est évident que la relation (25) sera satisfaite puisque on aura

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz^2 = 0.$$

D'autre part les quantités

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial x_1}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y_1}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

sont identiquement nulles et la relation (26) est vérifiée également.

Nous voyons par conséquent que, pour avoir une véritable solution, il nous faudra prendre

$$\omega + \varphi = 0$$

et les relations (30) et (30') pourront s'écrire

$$(31) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \end{cases} \qquad (31') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = \lambda \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Ecrivons les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha};$$

on en tire les relations

$$(32) \quad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \lambda(1 - \lambda^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \lambda^2 \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \lambda(1 - \lambda^2)\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{cases}$$

qui ne contiennent plus que les coordonnées u, u_0 de la première surface. Ces équations admettent toujours les deux solutions $\lambda = \pm 1$. Les surfaces S_1 que l'on obtient ainsi se déduisent de la surface S par une translation parallèle au plan des xy ou par une rotation de 180° autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Ces solutions étaient d'ailleurs évidentes *a priori*.

On aperçoit immédiatement un autre cas particulier où les équations (32) admettent une infinité d'intégrales: c'est celui où la surface S est une surface minima. On a en effet dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

et on satisfait aux équations (32) en prenant pour λ une constante quelconque. Des équations (31) on tire alors

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0;$$

ce qui nous montre que la seconde surface sera aussi une surface minima. Si on poursuit le calcul, ce qui n'offre aucune difficulté, on reconnaît que la surface S_1 est précisément une surface dérivée de S avec Oz pour axe de dérivation.

Prenons maintenant le cas général; les équations (32) peuvent se simplifier un peu en prenant pour nouvelle inconnue $\lambda^2 = \rho$. Elles deviennent, en les multipliant par 2λ,

$$\left\{\begin{aligned} &\rho\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 2\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta},\\ &\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + \rho\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 2\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta};\end{aligned}\right.$$

si on résout par rapport à $\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}, \frac{\partial\rho}{\partial\beta}$, on trouve

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\rho^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]\frac{\partial\rho}{\partial\beta} = 2\rho(1-\rho)\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right],\\ &\left[\rho^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 2\rho(1-\rho)\left[\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\right].\end{aligned}\right.$$

Ecartons le cas où on aurait une solution en prenant

$$\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = 0;$$

on aurait alors

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v_0}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha} = 0$$

et la surface S_1 serait un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. Ce cas sera examiné plus loin.

Si l'on veut qu'il y ait une infinité de surfaces S_1 correspondant à une surface donnée S, la condition d'intégrabilité du système (33)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta \partial \alpha}$$

devra être satisfaite identiquement. Le calcul un peu long n'offre aucune difficulté et on est conduit aux conditions suivantes:

$$(34) \qquad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right],$$

$$(35) \qquad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u}{\partial \beta}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\log \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right],$$

$$(36) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}}\right] = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}}\right],$$

$$(37) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}}\right] = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}}\right].$$

Des relations (34) et (35) on tire

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \varphi_1(\alpha)\psi_1(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \end{cases}$$

$\varphi(\alpha)$ et $\varphi_1(\alpha)$ ne dépendant que de α, $\psi(\beta)$ et $\psi_1(\beta)$ ne dépendant que de β. Si on porte ces valeurs de $\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u_0}{\partial \beta}$ dans les formules (29) et qu'on élimine $\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}$, on voit que la fonction z doit vérifier une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\pi_1(\beta)\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \pi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = F[\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)],$$

en posant:

$$\Phi(\alpha) = \int \pi(\alpha)d\alpha, \qquad \Psi(\beta) = \int \pi_1(\beta)d\beta.$$

Comme les variables α et β peuvent toujours être remplacées par deux nouvelles variables ne dépendant respectivement que de chacune des premières, rien n'empêche de supposer que l'on a pris pour variables les fonctions $\Phi(\alpha)$, $\Psi(\beta)$ elles-mêmes. Alors la coordonnée z aura pour expression

$$z = F(\alpha + \beta). \tag{39}$$

On déduit de là une conséquence importante; puisque les lignes

$$\alpha + \beta = Const., \qquad \alpha - \beta = Const.$$

forment sur la surface deux systèmes orthogonaux et isothermes, nous voyons que *les sections de la surface S par des plans parallèles au plan des xy forment un système isotherme.*

Soit

$$f(\alpha + \beta) = -[F'(\alpha + \beta)]^2;$$

les formules (29) deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} = f(\alpha + \beta). \tag{40}$$

On en déduit

$$\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}},$$

et les formules (38) deviennent:

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Combinées avec les formules (40), elles donnent

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \dfrac{f(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)\psi(\beta)}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)f(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Des relations (40) on tire

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{f'(\alpha+\beta)}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}} - f(\alpha+\beta)\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{f'(\alpha+\beta)}{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}} - f(\alpha+\beta)\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2};$$

on peut satisfaire à cette relation de deux manières: 1° en prenant

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

mais on aurait aussi $\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}$ et la surface S se réduirait à une courbe; 2° en posant

$$\frac{f'(\alpha+\beta)}{f(\alpha+\beta)} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\left[\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}} + \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}}\right].$$

La première des équations (42) nous donne aussi

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}+\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}}=\frac{f'(\alpha+\beta)}{f(\alpha+\beta)}-\frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

Ajoutons membre à membre les équations précédentes; il vient

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}L\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}L\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)=\frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial\beta}$ sera de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial\beta}=\frac{\pi(\alpha+\beta)}{\psi(\beta)};$$

on aura de même

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\frac{\pi_1(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)},$$

les fonctions π, π_1 vérifiant la condition

$$\pi(\alpha+\beta).\pi_1(\alpha+\beta)=f(\alpha+\beta).$$

On en tire encore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\pi'(\alpha+\beta)}{\psi(\beta)}=\frac{\pi_1'(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)};$$

si les fonctions π, π_1 sont des constantes, cette condition est satisfaite identiquement, et on retombe sur le cas déjà considéré des surfaces minima. S'il en est autrement, il faudra que le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}$ ne dépende que de $\alpha+\beta$, et par suite que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}\right)=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}\right),$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi(\beta)}=-\frac{\psi'(\beta)\varphi(\alpha)}{\psi^2(\beta)},$$

ou

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = -\frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

La valeur commune des rapports précédents sera forcément une constante indépendante de α et de β, et on aura

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = m, \qquad \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)} = -m;$$

on en tire

$$\varphi(\alpha) = ae^{m\alpha}, \qquad \psi(\beta) = be^{-m\beta},$$

a et b désignant deux nouvelles constantes, et finalement on obtient les formules

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{a} e^{-m\alpha} \pi_1(\alpha + \beta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \dfrac{1}{b} e^{m\beta} \pi(\alpha + \beta); \end{cases}$$

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = ae^{m\alpha} \pi(\alpha + \beta), \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = be^{-m\beta} \pi_1(\alpha + \beta), \end{cases}$$

où

$$\pi(\alpha + \beta) . \pi_1(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta).$$

Les relations (40) et (41) sont satisfaites et les conditions d'intégrabilité des deux systèmes (43) et (44) se reduisent à une seule

$$\pi_1'(\alpha + \beta) = \frac{a}{b} e^{m(\alpha+\beta)} \pi'(\alpha + \beta).$$

On vérifie facilement que les autres conditions d'intégrabilité du système (33) sont vérifiées identiquement.

Pour interpréter géométriquement les relations (43) formons l'équation du plan tangent à la surface S

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

On aura

$$A=\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}-\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}=\frac{i}{2}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\left[\left(ae^{m\alpha}+\frac{1}{b}e^{m\beta}\right)\pi(\alpha+\beta)-\left(\frac{1}{a}e^{-m\alpha}+be^{-m\beta}\right)\pi_1(\alpha+\beta)\right],$$

$$B=\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial u_0}{\partial\beta}-\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\left[\left(\frac{1}{b}e^{m\beta}-ae^{m\alpha}\right)\pi(\alpha+\beta)+\left(be^{-m\beta}-\frac{1}{a}e^{-m\alpha}\right)\pi_1(\alpha+\beta)\right],$$

$$C=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}-\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}=\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u_0}{\partial\beta}-\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\right)$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{b}{a}e^{-m(\alpha+\beta)}\pi_1^2(\alpha+\beta)-\frac{a}{b}e^{m(\alpha+\beta)}\pi^2(\alpha+\beta)\right].$$

On en tire

$$A^2+B^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2\left[-4\frac{a}{b}e^{m(\alpha+\beta)}\pi^2(\alpha+\beta)-4\frac{b}{a}e^{-m(\alpha+\beta)}\pi_1^2(\alpha+\beta)\right.$$
$$\left.+8\pi(\alpha+\beta)\pi_1(\alpha+\beta)\right].$$

Nous voyons que C et A^2+B^2, et par suite $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, ne dépendent que de $\alpha+\beta$ ou, ce qui revient au même, de z. Par conséquent, le plan tangent à la surface le long d'une section par un plan parallèle au plan xOy coupe ce plan sous un angle constant. La surface admet une série de lignes de courbure situées dans des plans parallèles; c'est donc une *surface moulure.*

15. Ce point étant démontré, il est commode pour achever le calcul d'employer un autre système de variables indépendantes. Choisissons comme variables la coordonnée z et l'angle α que fait avec Ox la trace du plan tangent sur le plan des xy. L'intersection du plan tangent au point M de coordonnées x, y, z avec le plan $Z=z$ aura pour équation

$$X\cos\alpha+Y\sin\alpha=F(\alpha, z);$$

les coordonnées du point M seront données par les deux équations

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = F(\alpha, z),$$

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha};$$

on en tire

$$\begin{cases} x = \cos \alpha F(\alpha, z) - \sin \alpha \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}, \\[2ex] y = \sin \alpha F(\alpha, z) + \cos \alpha \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -\sin \alpha \left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right] d\alpha + \left[\cos \alpha \dfrac{\partial F}{\partial z} - \sin \alpha \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} \right] dz, \\[2ex] dy = \cos \alpha \left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right] d\alpha + \left[\sin \alpha \dfrac{\partial F}{\partial z} + \cos \alpha \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} \right] dz, \\[2ex] ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right]^2 d\alpha^2 \\[2ex] \qquad + 2 \left[F(\alpha, z) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right] \dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} d\alpha\, dz + \left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} \right)^2 \right] dz^2. \end{cases}$$

Sur une surface moulure, les lignes

$$\alpha = Const., \qquad z = Const.$$

forment un système orthogonal. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} = 0,$$

et par suite $F(\alpha, z)$ devra être de la forme

$$F(\alpha, z) = f(\alpha) + \varphi(z).$$

L'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = [f(\alpha) + f''(\alpha) + \varphi(z)]^2 d\alpha^2 + [1 + \varphi'(z)^2] dz^2.$$

Pour que les courbes $z = Const.$ forment un système isotherme, il faudra évidemment que le coefficient de $d\alpha^2$ soit le produit d'une fonction de α par une fonction de z. Or cela ne peut arriver que dans deux cas:

1°. Si on a $f(\alpha) + f''(\alpha) = a$; on aura alors

$$f(\alpha) = a + C\cos\alpha + C'\sin\alpha$$

et la trace du plan tangent sur le plan $Z = z$ aura pour équation

$$(X - C)\cos\alpha + (Y - C')\sin\alpha = \varphi(z),$$

en réunissant la constante a à $\varphi(z)$. Cette trace est constamment tangente à un cercle de rayon $\varphi(z)$ ayant son centre au point $x = C$, $y = C'$. La surface est donc une surface de révolution autour de la parallèle à Oz représentée par ces deux équations. Imaginons que nous ayons pris cette droite pour l'axe Oz lui-même; on pourra supposer dans ce qui précède $f(\alpha) = 0$. Considérons ensuite une autre surface dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds_1^2 = [f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) + \varphi_1(z)]^2 d\alpha^2 + [1 + \varphi_1'(z)^2]dz^2;$$

le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ ne dépendra que de α et de z si on a

$$\left[\frac{f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) + \varphi_1(z)}{\varphi(z)}\right]^2 = \frac{1 + \varphi_1'(z)^2}{1 + \varphi'(z)^2}.$$

Pour que cette relation puisse avoir lieu, il faut évidemment que

$$f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)$$

se réduise à une constante; on en déduira comme tout-à-l'heure que la seconde surface est une surface de révolution autour d'une droite parallèle à Oz. Si on amène l'axe de cette surface à coïncider avec Oz, on pourra prendre $f_1(\alpha) = 0$, et on retombe sur la relation déjà obtenue directement

$$\frac{1 + \varphi_1'(z)^2}{\varphi_1(z)^2} = \frac{1 + \varphi'(z)^2}{\varphi(z)^2};$$

2°. Les courbes $z = Const.$ forment encore un système isotherme si $\varphi(z)$ est constant, c'est-à-dire si la surface considérée est un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. On démontre aisément que la seconde surface devra être un cylindre égal au premier à moins que le cylindre ne soit de révolution, cas qui a déjà été considéré.

En définitive, il n'y a pas d'autres surfaces jouissant de la propriété géométrique en question que les surfaces minima et les surfaces de révolution.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 24 Octobre 1887 (Comptes rendus, t. **105**, p. 743).

Paris, Novembre 1887.