MASSTHEORIE IN DER GEOMETRIE DER ZAHLEN

VON

WOLFGANG SCHMIDT

Wien

Einleitung

In der Geometrie der Zahlen ist es zweckmässig, ein Mass im Raum der Punktgitter einzuführen. Am besten ist es, sich auf Gitter Λ mit Determinante 1 zu beschränken und das von C. L. Siegel [19] eingeführte Mass zu benützen. Dieses ist so normiert, dass die Menge aller Gitter mit Determinante 1 Mass 1 besitzt. Es ist also

$$\int d\mu = 1. \tag{1}$$

Zunächst wurde in [19] die Formel

$$\int \sum_{\substack{g \in \Lambda \\ g \neq 0}} \varrho(g)\, d\mu = \int \varrho(X)\, dX \tag{2}$$

bewiesen. Dabei ist $\varrho(X) = \varrho(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ eine Riemann-integrierbare Funktion. (2) wurde in [11] auf

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1 \in \Lambda, \ldots, g_m \in \Lambda \\ \mathrm{Dim}\,(g_1, \ldots, g_m) = m \end{bmatrix} \varrho(g_1, \ldots, g_m)\, d\mu = \int \cdots \int \varrho(X_1, \ldots, X_m)\, dX_1 \ldots dX_m \tag{3}$$

verallgemeinert, wobei $m \leqslant n-1$ und $\varrho(X_1, \ldots, X_m) \geqslant 0$ als Borel-integrierbare Funktion im $R_{n \times m}$ vorausgesetzt wird. In [19] wurde auch noch

$$\int \sum \begin{bmatrix} g \in \Lambda \\ g \text{ primitiv} \end{bmatrix} \varrho(g)\, d\mu = \frac{1}{\zeta(n)} \int \varrho(X)\, dX \tag{4}$$

gezeigt, allgemeiner ist nach [7] und [17]

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \dots, g_m \in \Lambda \\ \text{lassen sich zu einer} \\ \text{Basis von } \Lambda \text{ ergänzen} \end{bmatrix} \varrho(g_1, \dots g_m)\, d\mu$$
$$= [\zeta(n)\,\zeta(n-1) \dots \zeta(n-m+1)]^{-1} \int \dots \int \varrho(X_1, \dots, X_m)\, dX_1 \dots dX_m \qquad (5)$$

unter derselben Voraussetzung wie in (3). In Satz 14 dieser Arbeit werden (3) und (5) weiter verallgemeinert. Eine Verallgemeinerung in anderer Richtung findet sich in [17].

In [17] wurde noch

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \dots, g_n \in \Lambda \\ \text{Det}\,|g_1, \dots, g_n| = +1 \end{bmatrix} \varrho(g_1, \dots, g_n)\, d\mu$$
$$= [\zeta(n)\,\zeta(n-1) \dots \zeta(2)]^{-1} \int \dots \int \int \dots \int \varrho(X_1, \dots X_{n-1}, \tilde{X} + x_1 X_1 + \dots + x_{n-1} X_{n-1}) \cdot$$
$$\cdot\, dx_1 \dots dx_{n-1}\, dX_1 \dots dX_{n-1} \qquad (6)$$

gezeigt. Hierbei ist $\tilde{X} = \tilde{X}(X_1, \dots, X_{n-1})$ ein Punkt, für welchen

$$\text{Det}\,|X_1, \dots, X_{n-1}, \tilde{X}| = +1. \qquad (7)$$

In [17] findet sich auch eine Formel für

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \dots, g_k \in \Lambda \\ \text{Dim}\,(g_1, \dots, g_k) = n \end{bmatrix} \varrho(g_1, \dots, g_k)\, d\mu \qquad (8)$$

im Fall $k = n$. Der allgemeine Fall $k \geqslant n$ wird im Kapitel 1 behandelt werden.

In [11] wurde für $m < n$ eine Formel für

$$\int \sum [g_1 \in \Lambda, \dots, g_m \in \Lambda]\, \varrho(g_1, \dots, g_m)\, d\mu \qquad (9)$$

in Gestalt einer unendlichen Reihe gegeben, von der in [16] gezeigt wurde, dass sie konvergiert, falls ϱ beschränkt ist und ausserhalb eines kompakten Bereiches verschwindet. Ist $m \geqslant n$, so divergiert (9) im allgemeinen, wie man sich etwa durch das Beispiel in § 2.2 überzeugen kann.

Sei nun S eine Borelmenge im R_n. Ein Punktgitter Λ heisse S-zulässig, falls kein Gitterpunkt von Λ, ausser eventuell der Ursprung 0, in S liegt. $A(S)$ sei die Menge der S-zulässigen Gitter mit Determinante 1. Von besonderer Bedeutung ist

$$m(A(S)),$$

das Mass von $A(S)$. In Kapitel 2 leiten wir eine Formel für $m(A(S))$ ab. Die Formel ist gültig, falls S beschränkt und Borel-integrierbar ist. Sie besteht im allgemeinen aus einer unendlichen Summe von gewissen Integralen, reduziert sich aber bei Sternkörpern oder Ringkörpern (Definition in § 4.4) im R_2 auf eine endliche Summe. Die Hauptschwierigkeit des Beweises besteht in einer Konvergenzfrage, die in Kapitel 3 gelöst wird.

In Kapitel 4 finden sich Anwendungen der Formel. Es stellt sich heraus (Satz 7), dass in der bekannten Formel [5]

$$Q(S)=\frac{V(S)}{\Delta(S)}\geqslant 1 \tag{10}$$

das $\geqslant$-Zeichen durch $>$ ersetzt werden kann. Dies ist neu im R_2. Hier ist $V(S)$ das Borelmass von S und $\Delta(S)$ die kritische Determinante. Weiter wird $m(A(S))$ für Kreise und einige Kreisringe explizit berechnet.

Es ist wünschenswert, $m(A(S))$ durch $V(S)$ abzuschätzen. Es gelten die längst bekannten Schranken

$$m(A(S))\geqslant 1-V(S)$$

und

$$m(A(S^*))\geqslant 1-V(S^*)/2\zeta(n),$$

falls S^* symmetrischer Sternkörper. Ist $n>n_0$ und ist S Halbbereich, das heisst es ist niemals zugleich $X\in S$ und $-X\in S$, so gilt

$$m(A(S))=e^{-V}(1-R), \tag{11}$$

wobei

$$|R|<6\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n}e^{4V}+V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}, \tag{12}$$

falls $V\leqslant n-1$, nach [18], hingegen

$$|R|<c\,n^2\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n}e^{2V}+V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}, \tag{13}$$

falls $V\leqslant n/8$ nach [15].

In Kapitel 5 werden wir zeigen, dass für $n>n_0(\varepsilon)$ und $V\leqslant n-1$

$$|R|<V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}(1+\varepsilon)+\varepsilon. \tag{14}$$

Daraus folgt für $n>\bar{n}_0$

$$Q(S)\geqslant nr-2,\quad r=0.278\,\dots. \tag{15}$$

Frühere Abschätzungen von $Q(S)$ werden in [15] aufgezählt.

In Kapitel 6 fragen wir nach dem Mass der Menge der Gitter, die unendlich viele Gitterpunkte in S haben. Dabei lassen wir die Voraussetzung $|\Lambda|=\operatorname{Det}(\Lambda)=1$ fallen und nehmen das Volumen im Koeffizientenraum als Mass. (Näheres im Satz 15.) Wir beweisen: Ist $n\geqslant 2m+1$ und $V(S)=\infty$, dann gibt es für fast alle Gitter unendlich viele m-tupel von Gitterpunkten $g_1, \ldots, g_m$ in S, die sich zu einer Basis von Λ ergänzen lassen. Dieser Satz wurde für $m=1$ von C. A. Rogers [11] bewiesen. Durch einen Druckfehler wurde in [11] der Satz auch für $m=1$, $n=2$ behauptet, doch ist der Beweis dann nicht stichhältig. Es ist unbekannt, ob der Satz für $n \leqslant 2m$ richtig ist (1).

C. A. Rogers, der mir in sehr freundlicher Weise sein Manuskript vor dessen Veröffentlichung sandte, bemerkte, dass man die obigen Methoden auch auf folgende Probleme anwenden kann:

In Kapitel 7 verstehen wir unter $\varepsilon(S, \Lambda)$ die Dichte der Menge der Punkte, die in keiner der Mengen

$$S+g, \qquad \text{wobei } g \in \Lambda$$

liegen. Es wird eine Formel für

$$M(S) = \int \varepsilon(S, \Lambda)\, d\mu \tag{16}$$

gegeben. Die Abschätzung über die Dichte der rationellsten Gitterüberdeckung des Raumes durch konvexe Körper lässt sich von

$$\vartheta(K, \Lambda) \leqslant (1.85 \ldots)^n \tag{17}$$

in [15] auf

$$\vartheta(K, \Lambda) \leqslant (1.75 \ldots)^n \tag{18}$$

verbessern. Auch die Probleme von Kapitel 6 lassen sich sinngemäss übertragen.

Im Anhang werden zwei Integralabschätzungen hergeleitet, die in Kapitel 5 benötigt werden.

Wir beginnen die Nummerierung in jedem Kapitel von neuem. Wird eine Formel aus einem anderen Kapitel zitiert, so bedeutet etwa (5.3) Kapitel 5, Formel 3. Kapitel 5 sowie Kapitel 6 können getrennt vom übrigen gelesen werden.

1. Ein Mittelwertsatz

1.1. Seien k, m natürliche Zahlen, $k \geqslant m$. Mit $\nu(k, m)$ bezeichnen wir Einteilungen $(\nu_1, \ldots, \nu_m; \mu_1, \ldots, \mu_{k-m})$ der Zahlen $1, 2, \ldots, k$ in zwei Folgen

$$\nu_1, \ldots, \nu_m$$

und

$$\mu_1, \ldots, \mu_{k-m},$$

(1) In einer bei den Trans. Amer. Math. Soc. eingereichten Arbeit „A metrical theorem in geometry of numbers" konnte ich inzwischen zeigen, dass der Satz auch für $m=1$, $n=2$ gilt.

wobei
$$1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_m \leq k$$
$$1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_{k-m} \leq k,$$
$$\nu_i \neq \mu_j.$$

Ist $k=n$, dann muss $\nu(k,k)$ die Form $(1, 2, \ldots, k;)$ haben. Wir setzen

$$\nu(k, m) > \varrho(k, m), \tag{1}$$

falls
$$\nu_1 = \varrho_1, \; \nu_2 = \varrho_2, \ldots, \nu_{l-1} = \varrho_{l-1}, \; \nu_l > \varrho_l$$

für ein $l \leq m$.

Ist R eine $m \times k$-Matrix, das heisst eine Matrix mit m Zeilen und k Spalten, so soll $R(\nu(k,m))$ die quadratische Teilmatrixe mit Spalten $\nu_1, \ldots, \nu_m$ und Det $R(\nu(k,m))$ der Absolutbetrag der Determinante von $R(\nu(k,m))$ sein.

Unter $\Delta_m, E_m, \ldots$ verstehen wir Teilgitter des natürlichen Gitters im R_m. $|\Delta_m|$ sei die Determinante von Δ_m. Ist $R = (r_{ij})$ eine rationale $m \times k$-Matrix, so setzen wir

$$R \cong \Delta_m, \tag{2}$$

falls
$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} a_j = \text{ganz rational} \qquad (1 \leq j \leq k)$$

genau dann, wenn der Punkt $A(a_1, \ldots, a_m) \in \Delta_m$.

Jedes R kann in der Form
$$R = \frac{D}{q}$$

geschrieben werden, wobei D eine ganzzahlige Matrix und der grösste gemeinsame Teiler der Elemente von D relativ prim zu q ist. q hängt, falls $R \cong \Delta_m$, nur von Δ_m ab. $q = q(\Delta_m)$.

1.2. Satz 1. *Sei $k \geq n$ und $\varrho(X_1, \ldots, X_k)$ eine nicht negative Borelintegrierbare Funktion im $R_{n \times k}$. Dann ist*

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda \\ \text{Dim}\,(g_1, \ldots, g_k) = n \end{bmatrix} \varrho(g_1, \ldots, g_k)\, d\mu = \sum_{\nu(k,n)} \sum_{\Delta_n} \sum_{R \cong \Delta_n} |\Delta_n|^{-n+1} \cdot$$
$$\cdot \sum_{r \neq 0} \frac{\varrho_n(|r|)}{|r|^{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \cdots \int \int \cdots \int \varrho\left(\sum_{i=1}^{n} r_{i1} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_{ik} X_i\right) dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}, \tag{3}$$

wobei
$$X_n = x_1 X_1 + \cdots + x_{n-1} X_{n-1} + r\,|\Delta_n|\,\check{X}. \tag{4}$$

Die Summe erstreckt sich über sämtliche Teilgitter Δ_n des natürlichen Gitters Δ_n^0. Hernach summiert man über alle jene $R \cong \Delta_n$, für welche

$$R(\nu(k,n)) = I \tag{5}$$

$$\operatorname{Det} R(\varrho(k,n)) = 0, \text{ falls } \varrho(k,n) < \nu(k,n). \tag{6}$$

Schliesslich ist $\varrho_t(r)$*, ebenso wie in* [17]*, durch*

$$\begin{aligned} \varrho_1(r) &= 1 \\ \varrho_m(r) &= \sum_{d \mid r} d^{m-1} \varrho_{m-1}(r/d) \end{aligned} \tag{7}$$

erklärt. $\tilde{X}$ *ist durch* (0.7) *definiert.*

Zusatz: Summiert man in (3) links nur über k-tupel von verschiedenen g, so ist rechts nur über R zu summieren, die keine zwei gleiche Spaltenvektoren haben.

Da man in (3) über $x_1, \ldots, x_{n-1}$ integriert, kommt es auf die spezielle Wahl von $\tilde{X}$ nicht an.

1.3. Wir erwähnen ein Lemma, das in [11] mit anderer Bezeichnung aufgestellt wurde:

Lemma 1. *Ist* $\varrho(X_1, \ldots, X_k) \geqslant 0$*, so ist*

$$\sum_{g_i \in \Lambda} \varrho(g_1, \ldots, g_k) = \sum_{m=1}^{\min(k,n)} \sum_{\nu(k,m)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{D} \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_m \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(h_1, \ldots, h_m) = m \\ \sum_{i=1}^{m} d_{ij} h_i / q \in \Lambda \end{bmatrix} \varrho\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d_{i1}}{q} h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \frac{d_{ik}}{q} h_i\right).$$

Die Summation erstreckt sich über jene ganzzahligen $D = (d_{ij})$*, deren Element ganz rational sind und einen grössten gemeinsamen Teiler relativ prim zu* q *haben. Weiter soll*

$$R = \frac{D}{q}$$

Bedingungen (5) *und* (6) *erfüllen.*

Aus Lemma 1 folgt sofort

Lemma 2. *Ist wieder* $\varrho(X_1, \ldots, X_k) \geqslant 0$*, so ist*

$$\sum_{g_i \in \Lambda} \varrho(g_1, \ldots, g_k)$$
$$= \sum_{m=1}^{\min(k,n)} \sum_{\nu(k,m)} \sum_{\Delta_m} \sum_{R \cong \Delta m} \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_m \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(h_1, \ldots, h_m) = m \\ (h_1, \ldots, h_m) \circ \Delta_m \end{bmatrix} \varrho\left(\sum_{i=1}^{m} r_{i1} h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} r_{ik} h_i\right). \tag{8}$$

Die Summe ist über jene $R \cong \Delta_m$*, die* (5) *und* (6) *erfüllen.*

$$(h_1, \ldots, h_m) \circ \Delta_m \tag{9}$$

bedeutet, dass $\sum_{i=1}^{m} r_i h_i \in \Lambda$ für alle $(r_1, \ldots, r_m)$, für die $\sum_{i=1}^{m} r_i a_i = \text{ganz}$ für beliebiges $A(a_1, \ldots, a_m) \in \Delta_m$.

Als Folgerung von Lemma 2 erhalten wir für $n \leqslant k$

$$\begin{aligned} &\sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda \\ \\ \operatorname{Dim}(g_1, \ldots, g_k) = n \end{bmatrix} \varrho(g_1, \ldots, g_k) \\ &= \sum_{\nu(k,n)} \sum_{\Delta_n} \sum_{R=\Delta_n} \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_n \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(h_1, \ldots, h_n) = n \\ (h_1, \ldots, h_n) \circ \Lambda_n \end{bmatrix} \varrho\left(\sum_{i=1}^{n} r_{i1} h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_{ik} h_i\right). \end{aligned} \tag{10}$$

1.4. Lemma 3.

$$\int \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_n \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(h_1, \ldots, h_n) = n \\ (h_1, \ldots, h_n) \circ \Delta_n \end{bmatrix} e(h_1, \ldots, h_n)\, d\mu = |\Delta_n|^{-n+1} \sum_{r \neq 0} \frac{\varrho_n(|r|)}{|r|^{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \int \cdots \int \int \cdots \int e(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1},$$

falls $e(\ldots) \geqslant 0$ *Borel-integrierbar ist. Dabei gelten* (4) *und* (0.7).

Beweis. Wir gehen wie bei Satz 3 in [17, I] vor.

Es gibt eine $n \times n$-Matrix c_{ij} mit Determinante $|\Delta_n|$, so dass $Y(y_1, \ldots, y_n)$ alle Gitterpunkte von Δ_n durchläuft, falls

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

und falls $X(x_1, \ldots, x_n)$ die Gitterpunkte des natürlichen Gitters durchläuft. Dann ist

$$\sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_n \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(h_1, \ldots, h_n) = n \\ (h_1, \ldots, h_n) \circ \Delta_n \end{bmatrix} e(h_1, \ldots, h_n) = \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_n \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(g_1, \ldots, g_n) = n \end{bmatrix} e\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} g_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{in} g_i\right).$$

Setzen wir

$$f(g_1, \ldots, g_n) = e\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} g_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{in} g_i\right)$$

und wenden wir Satz 4 aus [17, II] an, so folgt

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_n \in \Lambda \\ \mathrm{Dim}\,(g_1, \ldots, g_n) = n \end{bmatrix} f(g_1, \ldots, g_n)\, d\mu = \sum_{r \neq 0} \frac{\varrho_n(|r|)}{|r|^{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \int \cdots \int \int \cdots \int f(Y_1, \ldots, Y_{n-1}, y_1 Y_1 \ldots y_{n-1} Y_{n-1} + r\tilde{Y})\, dy_1 \ldots dy_{n-1}\, dY_1 \ldots dY_{n-1}.$$

Da dieser Ausdruck invariant gegen Transformationen mit Determinante 1 sein muss, ist das Integral gleich

$$\int \cdots \int \int \cdots \int e(X_1, \ldots, X_{n-1}, |\Delta_n|(x_1 X_1 + \cdots + x_{n-1} X_{n-1} + r\tilde{X})) \cdot$$
$$dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}$$
$$= |\Delta_n|^{-n+1} \int \cdots \int \int \cdots \int e(X_1, \ldots, X_{n-1}, x_1 X_1 + \cdots + x_{n-1} X_{n-1} + r|\Delta_n|\tilde{X})$$
$$dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

1.5. *Beweis von Satz* 1. Indem wir in Lemma 3

$$e(h_1, \ldots, h_n) = \varrho\left(\sum_{i=1}^{n} r_{i1} h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_{ik} h_i\right)$$

setzen und (10) benützen, erhalten wir Satz 1. Der Beweis des Zusatzes ist unmittelbar klar.

2. Eine Formel für $m(A(S))$

2.1. Sei S eine Borelmessbare Menge mit charakteristischer Funktion $\varrho(X)$. Wir erklären $A(S)$ als die Menge der S-zulässigen Gitter mit Determinante 1, und setzen

$$\alpha(\Lambda) = \begin{cases} 1, \text{ falls } \Lambda \in A(S) \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Weiter soll $\varrho(\Lambda)$ die Anzahl der Gitterpunkte $\neq 0$ von Λ in S sein. Dann ist

$$\alpha(\Lambda) \geqslant 1 - \varrho(\Lambda). \tag{2}$$

Für das in der Einleitung definierte $m(A(S))$ gilt offenbar

$$m(A(S)) = \int_{A(S)} d\mu = \int \alpha(\Lambda)\, d\mu. \tag{3}$$

Das Funktional $m(A(S))$ hat die Eigenschaften

$$0 \leqslant m(A(S)) \leqslant 1,$$

$$m(A(S_1)) \leqslant m(A(S_2)), \text{ falls } S_1 \supseteqq S_2,$$

und nach [19]

$$m(A(S)) = \int \alpha(\Lambda)\, d\mu \geqslant \int (1-\varrho(\Lambda))\, d\mu = 1 - \int \varrho(X)\, dX = 1 - V(S). \tag{4}$$

Ist T eine weitere Borelmessbare Menge, und bedeutet $S-T$ die Menge der $X \in S$, die $\notin T$, so ist

$$m(A(S-T)) + m(A(T)) \leqslant m(A(S)) + 1$$

und nach (4)

$$1 - V(S-T) + m(A(T)) \leqslant m(A(S)) + 1.$$

$$m(A(T)) \leqslant m(A(S)) + V(S-T). \tag{5}$$

Indem wir noch den Abstand

$$d(S, T) = V(S-T) + V(T-S) \tag{6}$$

einführen, erhalten wir.

Lemma 4. *$m(A(S))$ ist stetig in der durch* (6) *eingeführten Topologie.*

2.2. Wie in [15] erwähnt wurde, ist

$$\alpha(\Lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda \\ g_i \neq g_j, \text{ falls } i \neq j \\ g_i \neq 0 \end{bmatrix} \prod_{r=1}^{k} \varrho(g_r) \tag{7}$$

Um $m(A(S))$ zu berechnen, wäre es naheliegend, (7) gliedweise zu integrieren. Es wird hier aber gezeigt, dass die Ausdrücke

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda \\ g_i \neq g_j, \text{ falls } i \neq j \\ g_i \neq 0 \end{bmatrix} \prod_{r=1}^{k} \varrho(g_r)\, d\mu \tag{8}$$

im allgemeinen divergieren.

Nehmen wir nämlich einen symmetrischen Sternkörper im R_2 und berechnen wir (8) für $k=2$.

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, g_2 \in \Lambda \\ \\ 0 \neq g_1 \neq g_2 \neq 0 \end{bmatrix} \varrho(g_1)\,\varrho(g_2)\, d\mu \geqslant \int \sum \begin{bmatrix} g_1, g_2 \in \Lambda, \neq 0 \\ \mathrm{Dim}\,(g_1, g_2) = 1 \\ |g_1| \neq |g_2| \end{bmatrix} \varrho(g_1)\,\varrho(g_2)\, d\mu$$

$$= 2 \int \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{-q<r<q \\ (r,q)=1}} \sum_{\substack{g \in \Lambda \\ g \neq 0}} \varrho(g)\, \varrho\left(\frac{r}{q} g\right) d\mu = 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^2} \int \varrho(X)\, dX.$$

Wir benutzten [11], Theorem 3. Die Summe

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^2} \geqslant \sum_{\substack{p \\ p \text{ Primz.}}} \frac{p-1}{p^2}$$

ist divergent.

Wir müssen daher (7) umordnen.

2.3. Zunächst führen wir eine Ordnung für die Punkte des R_n ein. Zum Beispiel ordnen wir lexikographisch und setzen

$$X(x_1, \ldots, x_n) < Y(y_1, \ldots, y_n) \tag{9}$$

falls
$$x_1 = y_1, \ldots, x_{l-1} = y_{l-1}, x_l < y_l$$
für ein l, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Wir setzen nun

$$\varrho_1(X) = \varrho(X)$$

und für $k > 1$

$$\varrho_k(X_1, \ldots, X_k) = \begin{cases} \varrho(X_1) \ldots \varrho(X_k), \text{ falls } X_1 > X_2 > \ldots > X_k \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{10}$$

Nun erklären wir $\vartheta_m(\Lambda)$:

$$\begin{aligned} \vartheta_m(\Lambda) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda, \neq 0 \\ \text{Dim } (g_1, \ldots, g_k) = m \\ g_i \neq g_j, \text{ falls } i \neq j \end{bmatrix} \prod_{r=1}^{k} \varrho(g_r) \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda, \neq 0 \\ \text{Dim } (g_1, \ldots, g_k) = m \end{bmatrix} \varrho_k(g_1, \ldots . g_k). \quad (1 \leqslant m \leqslant n) \end{aligned} \tag{11}$$

Indem wir von Lemma 2 Gebrauch machen, erhalten wir

$$\vartheta_m(\Lambda) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \sum_{\nu(k,m)} \sum_{\Delta_m} \sum_{R=\Delta_m} \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_m \in \Lambda \\ \text{Dim } (h_1, \ldots, h_m) = m \\ (h_1, \ldots, h_m) \circ \Delta_m \end{bmatrix} \varrho_k\left(\sum_{i=1}^{m} r_{i1} h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} r_{ik} h_i\right).$$

Die Summe erstreckt sich über alle rationalen $R \cong \Delta_m$, die (1.5) und (1.6) erfüllen. Da wir $g_i \neq g_j$, $g_i \neq 0$ voraussetzten, besitzt R keine zwei gleichen Spaltenvektoren, und kein Spaltenvektor ist der Nullvektor.

2.4. Daher ist

$$\alpha(\Lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{n} \vartheta_m(\Lambda), \tag{12}$$

wobei
$$\vartheta_m(\Lambda)=\sum_{\Delta_m}\gamma_\Delta(\Lambda) \tag{13}$$

und

$$\gamma_\Delta(\Lambda)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\sum_{\nu(k,m)}\sum_{R\cong\Delta_m}\sum\begin{bmatrix}h_1,\ldots,h_m\in\Lambda\\ \mathrm{Dim}\,(h_1,\ldots,h_m)=m\\ (h_1,\ldots,h_m)\circ\Delta_m\end{bmatrix}\varrho_k\left(\sum_{i=1}^{m}r_{i1}h_i,\ldots,\sum_{i=1}^{m}r_{ik}h_i\right). \tag{14}$$

Hier, wie im folgenden, setzen wir manchmal Δ statt Δ_m. Der Sinn dieser Anordnung ist der, dass, wie wir in der Folge zeigen werden, nicht nur

$$\Gamma_\Delta=\int\gamma_\Delta(\Lambda)\,d\mu \tag{15}$$

existiert, sondern dass auch

$$\|\Gamma_\Delta\|=\int|\gamma_\Delta(\Lambda)|\,d\mu \tag{16}$$

existiert und
$$\sum_{\Delta_m}\|\Gamma_\Delta\| \tag{17}$$

konvergiert. Daher ist Summation und Integration vertauschbar und

$$\Theta_m(S)=\int\vartheta_m(\Lambda)\,d\mu=\sum_{\Delta_m}\Gamma_\Delta. \tag{18}$$

Wir bringen jetzt gleich unsere Hauptformeln:

Satz 2. *Für beschränktes, Borel-messbares S ist*

$$m(A(S))=1+\sum_{m=1}^{n}\Theta_m(S),$$

wobei für $m<n$

$$\Theta_m(S)=(-1)^m[\zeta(n)\,\zeta(n-1)\ldots\zeta(n+m+1)]^{-1}\sum_{\Delta_m}\frac{c(\Delta_m)}{|\Delta_m|^n}. \tag{19}$$

Hier bedeutet $c(\Delta_m)$ das Volumen des Bereiches der m-tupel $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ für welche

1. $\varrho_m(X_1,\ldots,X_m)>0$
2. *Es gibt kein $X\in S$, so dass*

   i) $X\neq X_i$, $X\neq 0$ (20)

   ii) $X=\sum_{i=1}^{m}r_iX_i$, *so dass* $\sum_{i=1}^{m}a_ir_i=$ *ganz für jedes* $A(a_1,\ldots,a_m)\in\Delta_m$.

   iii) *Ist* $X>X_j$, *so ist* $r_j=r_{j+1}=\cdots=r_m=0$.

Hingegen ist
$$\Theta_n(S) = \sum_{\Delta_n} \Gamma_\Delta, \tag{21}$$
wobei
$$\Gamma_\Delta = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \sum_{\nu(k,n)} \sum_{R \simeq \Delta_n} |\Delta_n|^{-n+1} \sum_{r \neq 0} \frac{\varrho_n(|r|)}{|r|^{n-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \cdots \int \int \cdots \int \varrho_k \left(\sum_{i=1}^{n} r_{i1} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_{ik} X_i \right) dx_1, \ldots, dx_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}, \tag{22}$$
sowie (0.7) *und* (1.4) *gelten.*

2.5. Wir entwickeln nun Hilfsmittel, um Satz 2 beweisen zu können. Seien G, H endliche Abelsche Gruppen. Wir schreiben
$$G \mid H \tag{23}$$
falls G Untergruppe von H ist. Die Gruppe, die aus dem Einheitselement allein besteht, bezeichnen wir mit I.

LEMMA 5. (Delsarte). *Es existiert eine eindeutig bestimmte Funktion* $\mu(G)$, *so dass*
$$\mu(G) = \mu(H), \quad \textit{falls } G \cong H \tag{24}$$
$$\sum_{G|H} \mu(G) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } H = I \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{25}$$

Beweis. Siehe [4].

Sei Δ° das natürliche Gitter im R_m, Δ, E, F Teilgitter. Ist E Teilgitter von Δ, so setzen wir $E \subseteq \Delta$. Unter
$$\Delta / E$$
verstehen wir die (stets endliche) Faktorgruppe.

Wir erwähnen eine Variante des Umkehrsatzes von Delsarte:

LEMMA 6. *Sei* $\Delta^* \subseteq \Delta^\circ$. *Sind* $\varphi(\Delta)$ *und* $\psi(\Delta)$ *für jedes* Δ *in*
$$\Delta^* \subseteq \Delta \subseteq \Delta^\circ$$
erklärt, und ist für jedes solche Δ
$$\psi(\Delta) = \sum_{\Delta \subseteq E \subseteq \Delta^\circ} \varphi(E), \tag{26}$$
dann ist auch
$$\varphi(F) = \sum_{F \subseteq \Delta \subseteq \Delta^\circ} \psi(\Delta)\, \mu(\Delta/F), \tag{27}$$
falls
$$\Delta^* \subseteq F \subseteq \Delta^\circ.$$

Beweis.

$$\sum_{F\subseteq\Delta\subseteq\Delta^\circ}\psi(\Delta)\,\mu(\Delta/F)=\sum_{F\subseteq\Delta\subseteq\Delta^\circ}\;\sum_{\Delta\subseteq E\subseteq\Delta^\circ}\varphi(E)\,\mu(\Delta/F)$$

$$=\sum_{F\subseteq E\subseteq\Delta^\circ}\varphi(E)\sum_{F\subseteq\Delta\subseteq E}\mu(\Delta/F)=\sum_{F\subseteq E\subseteq\Delta^\circ}\varphi(E)\sum_{H|(E/F)}\mu(H)=\varphi(F).$$

Satz 3. *Sei z eine komplexe Zahl mit Realteil* $\mathrm{R}\,z\geqslant m+1$. *Dann gilt*

$$\sum_{\Delta_m}|\Delta|^{-z}=\zeta(z)\,\zeta(z-1)\ldots\zeta(z-m+1) \tag{28}$$

und

$$\sum_{\Delta_m}\mu(\Delta^\circ/\Delta)\,|\Delta|^{-z}=[\zeta(z)\,\zeta(z-1)\ldots\zeta(z-m+1)]^{-1}. \tag{29}$$

Beide Reihen sind absolut konvergent.

Der Beweis von Satz 3 wird in Kapitel 3 nachgetragen.

2.6. Nach (14) ist

$$\gamma_\Delta(\Lambda)=\sum\begin{bmatrix}h_1,\ldots,h_m\in\Lambda\\ \mathrm{Dim}\,(h_1,\ldots,h_m)=m\\ (h_1,\ldots,h_m)\circ\Delta_m\end{bmatrix}\varphi(\Delta,h_1,\ldots,h_m), \tag{30}$$

wobei

$$\varphi(\Delta,h_1,\ldots,h_m)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\sum_{v(k,m)}\;\sum_{R\cong\Delta_m}\varrho_k\left(\sum_{i=1}^{m}r_{i1}h_i,\ldots,\sum_{i=1}^{m}r_{ik}h_i\right). \tag{31}$$

$$R\supseteq\Delta_m \tag{32}$$

soll bedeuten $R\cong E_m$ für ein $E_m\supseteq\Delta_m$. Ist also $A\,(a_1,\ldots,a_m)\in\Delta_m$, so folgt

$$\sum_{i=1}^{m}r_{ij}\,a_i=\text{ganz}\qquad(1\leqslant j\leqslant k),$$

während die Umkehrung nicht allgemein richtig ist.

Wir definieren nun

$$\psi(\Delta,h_1,\ldots,h_m)=\sum_{\Delta_m\subseteq E_m\subseteq\Delta_m^0}\varphi(E_m,h_1,\ldots,h_m)$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\sum_{v(k,m)}\;\sum_{R\supseteq\Delta_m}\varrho_k\left(\sum_{i=1}^{m}r_{i1}h_i,\ldots,\sum_{i=1}^{m}r_{ik}h_i\right)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\,\chi(\Delta,h_1,\ldots,h_m,k), \tag{33}$$

wobei

$$\chi(\Delta,h_1,\ldots,h_m,k)=\sum_{v(k,m)}\;\sum_{R\supseteq\Delta_m}\varrho_k\left(\sum_{i=1}^{m}r_{i1}h_i,\ldots,\sum_{i=1}^{m}r_{ik}h_i\right). \tag{34}$$

Hier wie überall wird selbstverständlich nur über R summiert, die (1.5) und (1.6) erfüllen. Die Spaltenvektoren von R sind untereinander und vom Nullvektor verschieden.

2.7. Sei $k>m$. Ist $\varrho_m(h_1,\ldots,h_m)>0$ und $\nu(k,m)=(\nu_1,\ldots,\nu_m;\ \mu_1,\ldots,\mu_{k-m})$ fest, so ist

$$\sum_{R \supseteq \Delta_m} \varrho_k\left(\sum_{i=1}^m r_{i1} h_i, \ldots, \sum_{i=1}^m r_{ik} h_i\right)$$

die Anzahl der k-tupel $g_1>g_2>\cdots>g_k$, $g_i \in S$, $g_i \neq 0$, so dass $g_{\nu_i}=h_i$, allgemeiner

$$g_j=\sum_{i=1}^m r_{ij} h_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

wobei $R=(r_{ij})$ (1.5) und (1.6) erfüllt und wobei für $A(a_1,\ldots,a_m) \in \Delta_m$

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} a_i = \text{ganz} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Dies gibt eine separate Bedingung für jedes g_j. Wegen (1.6) soll daher

$$\operatorname{Det}(g_{\varrho_1},\ldots,g_{\varrho_m})=0$$

sein, falls

$$\varrho(k,m)=(\varrho_1,\ldots,\varrho_m;\ \sigma_1,\ldots,\sigma_{k-m})<\nu(k,m)=(\nu_1,\ldots,\nu_m;\ \mu_1,\ldots,\mu_{k-m}).$$

Diese letzte Bedingung kann auch so ausgedrückt werden, dass aus $g_j>h_i$ folgt, g_j hängt linear von $h_1,\ldots,h_{i-1}$ ab. Zusammenfassend sieht man,

$$\chi(\Delta,h_1,\ldots,h_m,k)=\sum_{\nu(k,m)}\sum_{R\supseteq\Delta_m}\varrho_k\left(\sum_{i=1}^m r_{i1}h_i,\ldots,\sum_{i=1}^m r_{ik}h_i\right)$$

ist die Anzahl von k-tupeln $g_1>g_2>\cdots>g_k$, $g_i \in S$, $g_i \neq 0$, so dass $h_1>h_2>\cdots>h_m$ Teilfolge ist, und wobei jedes g von der Gestalt

$$g=\sum_{i=1}^m r_i^{(g)} h_i$$

ist, wobei für jedes $A(a_1,\ldots a_m) \in \Delta_m$ auch

$$\sum_{i=1}^m r_i^{(g)} a_i = \text{ganz};$$

ist schliesslich $g>h_i$, so wird $r_i^{(g)}=r_{i+1}^{(g)}=r_m^{(g)}=0$ sein.

Daher ist $\chi(\Delta,h_1,\ldots,h_m,k)$ die Anzahl der $(k-m)$-tupel von Punkten der folgenden Art in S:

i) $g \neq 0,\ g \neq h_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$

ii) $g = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(g)} h_i$, wobei $r_i^{(g)}$ so ist, dass für jedes $\qquad$ (35)

$A(a_1, \ldots, a_m) \in \Delta_m$ folgt $\sum_{i=1}^{m} r_i^{(g)} a_i$ ist ganz.

iii) Ist $g > h_i$ für ein i, so ist $r_i^{(g)} = r_{i+1}^{(g)} = \cdots = r_m^{(g)} = 0$.

Ist N die Anzahl der Punkte mit Eigenschaften i), ii) und iii), so ist

$$\chi(\Delta, h_1, \ldots, h_m, k) = \binom{N}{k-m}. \tag{36}$$

(36) bleibt auch für $k = m$ richtig, denn wegen $\varrho_m(h_1, \ldots, h_m) = 1$ folgt $\chi(\Delta, h_1, \ldots, h_m, m) = 1$.

Wir schliessen weiter

$$\psi(\Delta, h_1, \ldots, h_m) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \chi(\Delta, h_1, \ldots, h_m, k) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \binom{N}{k-m}$$

$$= (-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{N}{l} = \begin{cases} (-1)^m, & \text{falls } N = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{37}$$

2.8. Zusammenfassend ergibt sich

LEMMA 7.

$$\psi(\Delta, h_1, \ldots, h_m) = \begin{cases} (-1)^m, & \textit{falls } \varrho_m(h_1, \ldots, h_m) = 1 \textit{ und es kein } g \textit{ in } S \textit{ gibt,} \\ & \textit{das Bedingungen i), ii), iii) aus (35) erfüllt.} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

LEMMA 8. *Ist $m < n$ und $\Delta_m \subseteqq E_m$, so folgt*

$$\int \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_m \in \Lambda \\ \mathrm{Dim}\ (h_1, \ldots, h_m) = m \\ (h_1, \ldots, h_m) \circ \Delta_m \end{bmatrix} \psi(E_m, h_1, \ldots, h_m)\, d\mu = (-1)^m \frac{c(E_m)}{|\Delta_m|^n}, \tag{38}$$

wobei $c(E_m)$ wie in Satz 2 erklärt ist.

2.9. *Beweis von Satz* 2. In diesem Paragraphen beweisen wir (19), wir berechnen also Θ_m für $m < n$. In § 2. 10 beweisen wir (21), berechnen also Θ_n.

Aus (33) und den Erwägungen von § 2.5 folgt

$$\varphi(\Delta_m, h_1, \ldots, h_m) = \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m \subseteqq \Delta_m^\circ} \psi(E, h_1, \ldots, h_m)\, \mu(E/\Delta) \tag{39}$$

und weiter, unter Zuhilfenahme von Lemma 8,

$$\Gamma_\Delta = \int \gamma_\Delta(\Lambda)\, d\mu = (-1)^m \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m \subseteqq \Delta_m^\circ} \frac{c(E)}{|\Delta|^n} \mu(E/\Delta). \tag{40}$$

Indem wir zunächst ohne Bedenken Integration und Summation vertauschen, erhalten wir

$$\Theta_m(S) = \int \vartheta_m(\Lambda)\, d\mu = \int \sum_{\Delta_m} \gamma_\Delta(\Lambda)\, d\mu$$

$$= \sum_{\Delta_m} \int \gamma_\Delta(\Lambda)\, d\mu = (-1)^m \sum_{\Delta_m} \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m \subseteqq \Delta_m^\circ} \frac{c(E_m)}{|\Delta_m|^n} \mu(E_m/\Delta_m)$$

$$= (-1)^m \sum_{E_m} \frac{c(E_m)}{|E_m|^n} \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m} \frac{\mu(E_m/\Delta_m)}{(|\Delta_m|/|E_m|)^n} = (-1)^m [\zeta(n) \ldots \zeta(n-m+1)]^{-1} \sum_{E_m} c(E_m)\, |E_m|^{-n}$$

nach Satz 3.

Es bleibt die Konvergenz von

$$\sum_{\Delta_m} \|\Gamma_\Delta\| \tag{17}$$

zu zeigen, wobei $\|\Gamma_\Delta\|$ in (16) definiert ist.

Nun ist nach Lemma 7, ähnlich wie in Lemma 8,

$$\int \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_m \in \Lambda \\ \mathrm{Dim}\,(h_1, \ldots, h_m) = m \\ (h_1, \ldots, h_m) \circ \Delta_m \end{bmatrix} |\psi(E_m, h_1, \ldots, h_m)|\, d\mu = \frac{c(E_m)}{|\Delta_m|^n}$$

und infolge (39)

$$|\varphi(\Delta_m, h_1, \ldots, h_m)| \leqslant \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m \subseteqq \Delta_m^\circ} |\psi(E_m, h_1, \ldots, h_m)|\, |\mu(E_m/\Delta_m)|.$$

Daraus folgt

$$\|\Gamma_\Delta\| = \int |\gamma_\Delta(\Lambda)|\, d\mu \leqslant \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m \subseteqq \Delta_m^\circ} \frac{c(E_m)}{|\Delta_m|^n} |\mu(E_m/\Delta_m)|. \tag{41}$$

Da aber $c(E_m) \leqslant V^m/m!$, genügt es, die Konvergenz von

$$\sum_{\Delta_m} \sum_{\Delta_m \subseteqq E_m \subseteqq \Delta_m^\circ} |\mu(E_m/\Delta_m)|\, |\Delta_m|^{-n} = \Big(\sum_{\Delta_m \subseteqq \Delta_m^\circ} |\mu(\Delta_m^0/\Delta_m)|\, |\Delta_m|^{-n}\Big) \Big(\sum_{\Delta_m \subseteqq \Delta_m^\circ} |\Delta_m|^{-n}\Big) \tag{42}$$

zu zeigen. Diese ist aber durch Satz 3 gewährleistet.

2.10. Wir wenden uns dem Fall $m = n$ zu. Aus (13), (14) und Satz 1 folgen (21) und (22) rein formal. Wir werden die Richtigkeit der letzten beiden Gleichungen daraus folgern, dass die auftretenden Summen stets nach endlich vielen Gliedern abbrechen.

Da S beschränkt ist, gibt es ein K, so dass $|\mathrm{Det}\,|Y_1, \ldots, Y_n|| \leqslant K$ für jedes n-tupel von Punkten $Y \in S$. Da aber wegen (0.7), (1.4) der Ausdruck

$$\int \cdots \int \int \cdots \int \varrho_k \left(\sum_{i=1}^{n} r_{i1} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_{ik} X_i \right) d x_1 \ldots d x_{n-1} \, d X_1 \ldots d X_{n-1}$$

in (22) verschwindet, falls eine $n \times n$-Teilmatrix von R Determinante $> K$ besitzt, dürfen wir uns auf R beschränken, deren $n \times n$-Teilmatrizen Determinante $\leqslant K$ besitzen. Nun gibt es nach (1.5) eine $n \times n$-Teilmatrix von R, welche Einheitsmatrix. Daher dürfen wir uns auf Matrixen R beschränken, deren Elemente $\leqslant K$ sind. Da weiter die Nenner von R nicht grösser sein dürfen als $q(\Delta_m)$, gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für jedes Element von R. Da R n Zeilen hat, gibt es für jede Spalte von R nur endlich viele Möglichkeiten. Da schliesslich keine zwei Spalten von R gleich sein dürfen ist auch die Zahl der Spalten, also k, beschränkt.

Da in (1.4)

$X_n = x_1 X_1 + \cdots + x_{n-1} X_{n-1} + r\,|\Delta_n|\,\tilde{X}$, muss $|r|\,|\Delta_n|$ beschränkt bleiben, wenn $|\mathrm{Det}\,|X_1, \ldots, X_n||$ beschränkt sein soll. Es gibt folglich nur endlich viele Möglichkeiten für r und $|\Delta_n|$.

3. Ein Konvergenzproblem

3.1. In diesem Kapitel soll Satz 3 bewiesen werden. Formel (2.28) wurde in [7], Lemma 10, für den Fall bewiesen, dass z eine natürliche Zahl. Der allgemeine Fall geht indessen genau so, und die absolute Konvergenz stellt hier kein Problem dar. Es bleibt (2.29) zu zeigen.

Zunächst ist

$$\sum_{\Delta_m} |\mu(\Delta^o/\Delta)|\,\|\Delta|^{-z}| = \sum_{G} |\mu(G)|\,\pi(G)\,|o(G)^{-z}|. \tag{1}$$

Hier wird über alle abstrakten Abelschen Gruppen summiert, $o(G)$ ist die Ordnung von G und $\pi(G)$ ist die Anzahl der $\Delta \subseteqq \Delta_m^o$, so dass

$$\Delta^o/\Delta \cong G. \tag{2}$$

3.2. Jede Abelsche Gruppe kann bekanntlich als direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung dargestellt werden,

$$G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \cdots \times G_{p_t}, \tag{3}$$

oder

$$H = H_{p_1} \times H_{p_2} \times \cdots \times H_{p_t}. \tag{4}$$

Nach Delsarte [4] nennen wir eine Funktion $f(G)$ multiplikativ, falls aus (3) folgt

$$f(G) = f(G_{p_1}) \cdot f(G_{p_2}) \dots f(G_{p_t}). \tag{5}$$

Wir nennen $f(G, H)$ multiplikativ, falls aus (3), (4) folgt

$$f(G, H) = f(G_{p_1}, H_{p_1}) \dots f(G_{p_t}, H_{p_t}). \tag{6}$$

Definition. Seien G, H Abelsch.

$$u(G, H)$$

sei die Anzahl der Gruppen J, so dass $J \mid G$ und $J \cong H$.

$$v(G, H)$$

sei die Anzahl der Gruppen J, so dass $J \mid G$ und $G \mid J \cong H$.

Lemma 9. *$u(G, H)$ sowohl wie auch $v(G, H)$ sind multiplikativ. Weiter ist*

$$u(G, H) = v(G, H). \tag{7}$$

Beweis. Die Multiplikativität folgt aus dem Hauptsatz über Abelsche Gruppen. (7) folgt aus dem Dualitätsprinzip.

3.3. Lemma 10.

$$\sum_G |\mu(G)| \pi(G) | o(G)^{-2}| = \prod_p (1 + \sum_{G_p} |\mu(G_p)| \pi(G_p) | o(G_p)^{-2}|). \tag{8}$$

Das Produkt erstreckt sich über alle Primzahlen p, die Summe rechts über alle Abelschen Gruppen G_p von Primzahlpotenzordnung. Beide Seiten von (8) *können auch unendlich sein.*

Beweis. Das Lemma folgt aus der Tatsache, dass

$$\mu(G), \pi(G), o(G)$$

multiplikativ sind. Dass μ multiplikativ ist wurde in [4] gezeigt; offenbar ist $o(G)$ multiplikativ. Es bleibt $\pi(G)$.

Mit $l\Delta^0$ bezeichnen wir das Teilgitter jener Gitterpunkte h, die von der Form

$$h = lg,$$

wobei

$$g \in \Delta^0.$$

Aus

$$G \cong \Delta^0/\Delta$$

folgt, dass $o(G) \cdot g \in \Delta$ für jedes $g \in \Delta^0$. Daher ist

$$o(G)\,\Delta^0 \subseteqq \Delta$$

und
$$G \cong \Delta^0/\Delta \cong (\Delta^0/o(G)\,\Delta^0)/(\Delta/o(G)\,\Delta^0),$$

woraus
$$\pi(G) = v(\Delta^0/o(G)\,\Delta^0, G) = v(Z^m(o(G)), G). \tag{9}$$

Hier ist $Z^m(o(G))$ die m-te Potenz der zyklischen Gruppe $Z(o(G))$ der Ordnung $o(G)$. Aus (9) folgt mittels Lemma 9 die Multiplikativität von $\pi(G)$.

3.4. *Beweis von Satz* 3. Delsarte [4] zeigte: Ist G_p vom Typ $(p, \ldots, p) = Z^r(p)$, das direkte Produkt von r zyklischen Gruppen der Ordnung p, dann ist

$$\mu(G_p) = (-1)^r p^{r(r-1)/2}. \tag{10}$$

Ist G_p nicht von diesem Typ, so ist $\mu(G_p) = 0$.

Da nun $\pi(G_p) = 0$, falls $G_p = Z^r(p)$ und $r > m$, folgt

$$\sum_{G_p} |\mu(G_p)\,|\,\pi(G_p)\,|\,o(G_p)^{-z}| = \sum_{r=1}^{m} p^{r(r-1)/2}\,\pi(Z^r(p))\,|\,p^{-rz}|. \tag{11}$$

Nun ist, falls
$$\Delta^0/\Delta \cong Z^r(p),$$

$p\,\Delta^0 \subseteqq \Delta$ und

$$\pi(Z^r(p)) = v(\Delta^0/p\,\Delta^0, Z^r(p)) = v(Z^m(p), Z^r(p)) = u(Z^m(p)), Z^r(p)) \leqslant c\,p^{r(m-r)}$$

nach Lemma 9 und Satz 51 in [20]. Nach (11) ist daher

$$\sum_{G_p} |\mu(G_p)\,|\,\pi(G_p)\,|\,o(G_p)^{-z}| \leqslant c \sum_{r=1}^{m} p^{-r(\Re z - (r-1)/2 + r - m)} \leqslant c\,p^{-2},$$

falls $\Re z \geqslant m+1$. Deshalb konvergiert nach Lemma 10 die Summe in (2.29) absolut.

Endlich ist

$$\Big(\sum_{E \subseteqq \Delta^0} |E|^{-z}\Big)\Big(\sum_{\Delta \subseteqq \Delta^0} \mu(\Delta^0/\Delta)\,|\Delta|^{-z}\Big) = \sum_{E \subseteqq \Delta^0} |E|^{-z} \sum_{\Delta \subseteqq E} \mu(E/\Delta)\,(|\Delta|/|E|)^{-z}$$
$$= \sum_{\Delta \subseteqq \Delta^0} |\Delta|^{-z} \sum_{\Delta \subseteqq E \subseteqq \Delta^0} \mu(E/\Delta) = \sum_{\Delta \subseteqq \Delta^0} |\Delta|^{-z} \sum_{G|\Delta^0/\Delta} \mu(G) = |\Delta^0|^{-z} = 1.$$

3.5. *Bemerkung.* Die Summen (2.28) und (2.29) sind mit der Redei'schen Zetafunktion [10] verwandt. Verwenden wir die vor Formel 40 in [10] stehende Formel, die der Definition 1 aus [10] wahrscheinlich in vielen Fällen vorzuziehen ist, weil sie eher konvergiert (man kann die μ-Funktion noch über den Bereich der Abelschen Gruppen ausdehnen), so ist dort

$$\varrho(z) = \varrho(z;\, A_1, A_2, \ldots) = \sum_H{}' \sum_{H \subseteq K \subseteq G} \mu(K/H)\, o(K)^{-z}, \tag{12}$$

wo man über die kein A_i enthaltenden Untergruppen H von G und alle Gruppen K zwischen H und G zu summieren hat. Für die duale Funktion $\varrho'(z)$ gilt

$$\varrho'(z) = \varrho'(z;\, A_1, A_2, \ldots) = \sum_H{}' \sum_{G \subseteq K \subseteq H} \mu(H/K)\, o(G/K)^{-z}, \tag{13}$$

wobei über jene H zu summieren ist, die in keinem A_i enthalten sind.

Sei nun G das Punktgitter Δ^0 (das ja auch als Gruppe auffassbar). Durchlaufe $A_1, A_2, \ldots$ alle Teilgitter, aber nicht Δ^0 selbst. Dann wird H nur Δ^0 sein dürfen und wir erhalten

$$\varrho'(z) = \sum_{\Delta^0 \subseteq \Delta} \mu(\Delta^0/\Delta)\, |\Delta|^{-z}.$$

4. Spezialisierungen und Anwendungen

4.1. Wir stellen diesem Kapitel Untersuchungen voran, die ein Licht auf die Beziehungen zwischen $m(A(S))$ und $\Delta(S)$, der kritischen Determinante von S, werfen.

Zunächst ist klar, das aus $m(A(S)) > 0$ folgt $\Delta(S) \leqslant 1$. Etwas interessanter sind die beiden folgenden Sätze:

Satz 4. (i) *Sei S_n eine wachsende Folge offener Mengen, $S = \bigcup S_n$. Ist entweder*

$$0 \textit{ innerer Punkt von } S$$

oder $\quad S$ *beschränkt,*

so folgt aus $\quad m(A(S_n)) > 0, \;\; \Delta(S) \leqslant 1.$

(ii) *Sei $T \subset S$ und S beschränkt. Ist $m(A(T)) = 0$ und existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass stets $|X - Y| \geqslant \varepsilon$ falls $X \in T$, $Y \notin S$, dann ist*

$$\Delta(S) \neq 1.$$

Satz 5. *Ist S^* Sternkörper, dann ist*

$$\Delta(S^*) = \lambda_0^{-n}, \tag{1}$$

wobei $\quad \lambda_0 = \min \lambda:\; \{m(A(\lambda S^*)) = 0\}.$

4.2. Wir erwähnen das folgende in [3] bewiesene Lemma (Lemme D'Approximation).

LEMMA 11. *Ist* S_n *eine Folge nicht abnehmender offener Mengen,* $S = \bigcup S_n$ *und* $0 \notin S$, *so ist*

$$\Delta(S) = \lim_{n\to\infty} \Delta(S_n). \tag{2}$$

Hier beweisen wir das analoge

LEMMA 12. *Ist* S_n *eine Folge nicht abnehmender offener Mengen,* $S = \bigcup S_n$ *und* S *beschränkt, so gilt wieder* (2).

Beweis. Wir nehmen zunächst an, nicht alle S_n seien vom Nulltypus, das heisst, $\Delta(S_n) > 0$ ab einem n_0. Wir wählen eine Folge Λ_n von S_n-kritischen Gittern (d.h. Λ_n ist S_n-zulässig und $|\Lambda_n| = \Delta(S_n)$. Die Existenz S_n-kritischer Gitter für beschränkte Mengen S_n wurde in [9], Theorem 3 gesichert).

Wir zeigen, dass die Folge Λ_n beschränkt im Sinne von Mahler [8] ist. Das heisst, es gibt Konstante K_1, K_2, so dass $|\Lambda_n| \leqslant K_1$ und $|g| \geqslant K_2$ für jedes $g \neq 0$ aus einem Λ_n. Sei nun S in der Kugel $|X| \leqslant \varrho$ enthalten. Wäre die zweite Bedingung nicht erfüllt, so gäbe es eine Teilfolge von Gittern Λ_{n_j} und Gitterpunkten $g_{n_j} \in \Lambda_{n_j}$, so dass $|g_{n_j}| \leqslant 2^{-j}$. Da die ganzzahligen Vielfachen von g_{n_j} nicht in S_{n_j} sind, kann man g_{n_j} zu einem S_{n_j}-zulässigen Gitter mit Determinante $2^{-j}\varrho^{n-1}$ ergänzen, so dass

$$\Delta(S_{n_j}) \leqslant 2^{-j}\varrho^{n-1}$$

$$\lim_{j\to\infty} \Delta(S_{n_j}) = 0.$$

Wegen $S_{n+1} \supseteqq S_n$ folgt daraus $\Delta(S_n) = 0$ für jedes n, was einen Widerspruch zu unserer Annahme bedeutet, die S_n seien nicht alle von Nulltypus. Daher muss $|g| \geqslant K_2$ und die Folge der Λ_n beschränkt sein. Es gibt daher eine konvergente Teilfolge Λ_{n_i} mit Limes Λ etwa.

Offenbar ist Λ ein S-kritisches Gitter. Wäre nämlich ein Gitterpunkt g im Inneren von S, dann wäre er auch im Inneren von S_{n_i} ab $i > i_0$. Doch da $\lim \Lambda_{n_i} = \Lambda$, könnte dann Λ_{n_i} nicht S_{n_i}-zulässig sein, falls i gross genug ist.

Daher ist Λ S-zulässig. Aus $|\Lambda| = \lim |\Lambda_{n_i}|$ und $\Delta(S) \geqslant \lim \Delta(S_n)$ folgt $|\Lambda| = \Delta(S)$ und Λ ist S-kritisch.

Es bleibt der Fall, alle S_n sind vom Nulltypus. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem n ein g_n mit $0 < |g_n| < \varepsilon$, so dass die Vielfachen von g_n, $\pm m g_n \notin S_n$, falls $m \neq 0$. Es gibt daher ein h_n, $\varepsilon \leqslant |h_n| < 2\varepsilon$, so dass $\pm m h_n \notin S_n$, sofern $m \neq 0$. Eine konvergente Teilfolge h_{n_j} der h_n konvergiert gegen ein h mit $\varepsilon \leqslant |h| \leqslant 2\varepsilon$. Für $i > j$ ist wegen des Wachsens der S_n

$$\pm m h_{n_i} \notin S_{n_j},$$

daher $\pm m h \notin S_n$ für $m \neq 0$, $n > 0$. Folglich ist auch $\pm m h \notin S$. Man kann daher ein Gitter Λ finden, in welchem h primitiver Gitterpunkt, und dessen Determinante wegen $|h| \leqslant 2\varepsilon$ und $|X| \leqslant \varrho$ für $X \in S$ sicher

$$|\Lambda| \leqslant 2\varrho^{n-1}\varepsilon$$

befriedigt. Daher ist auch S vom Nulltypus.

4.3. *Beweis von Satz* 4.

i) Infolge Lemma 11 und Lemma 12 folgt (2) aus unseren Voraussetzungen. Da $\Delta(S_n) \leqslant 1$, gilt die Behauptung.

ii) Sei Λ ein S-kritisches Gitter. Aus den Voraussetzungen folgt, dass es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von Λ im Raum der Gitter mit Determinante $|\Lambda|$ geben muss, so dass jedes $\Lambda' \in \mathfrak{U}$ T-zulässig ist. Dann wäre aber, falls $\Delta(S) = 1$ wäre, $|\Lambda| = 1$ und $m(A(T)) > 0$. Daher ist $\Delta(S) \neq 1$.

Beweis von Satz 5. $m(A(0\,S^*)) = 1$ und $m(A(\lambda S^*)) = 0$, falls λ gross genug ist. Da $m(A(\lambda S^*))$ nach Lemma 4 stetig in λ ist, existiert λ_0. Setzen wir

$$R^* = \text{Inneres von } S^*$$

$$R_n^* = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda_0 R^*,$$

dann ist $\lambda_0 R^* = \bigcup R_n^*$. Da $m(A(R_n^*)) > 0$ ist, folgt nach Satz 4 i) $\Delta(\lambda_0 R^*) \leqslant 1$, $\Delta(R^*) \leqslant \lambda_0^{-n}$.

Ist hingegen $\lambda > \lambda_0$, so ist $T = \lambda_0 R^* \subset \lambda R^*$ und es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $|X - Y| \geqslant \varepsilon$ für $X \in T$, $Y \notin \lambda R^*$. Nach Satz 4 ii) ist folglich $\Delta(\lambda R^*) \neq 1$, $\Delta(R^*) \neq \lambda^{-n}$.

Wir schliessen daraus $\Delta(R^*) \geqslant \lambda_0^{-n}$ und somit

$$\Delta(S^*) = \Delta(R^*) = \lambda_0^{-n}.$$

4.4. Definitionen. Ein *Sternbereich* S^* ist ein Bereich, so dass mit jedem $X \in S$ auch $\lambda X \in S$, wenn $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ein *Ringbereich* S ist ein Bereich der Gestalt

$$S = S^* - \varkappa S^*,$$

wobei S^* Sternbereich und der Quotient $\varkappa$ in $0 \leqslant \varkappa < 1$ liegt. Ein *Halbbereich* H ist ein Bereich, für den niemals zugleich $X \in H$ und $-X \in H$ sein kann. Bei der Berechnung von $m(A(S))$ darf man sich auf Halbbereiche beschränken.

Wir bezeichnen mit $\beta(\Lambda)$ die Anzahl der Geraden G durch 0, auf denen ein $g \in \Lambda$, $g \neq 0$, $g \in S$, liegt. Offenbar ist

$$\alpha(\Lambda) \geqslant 1 - \beta(\Lambda) = 1 + \vartheta_1(\Lambda). \tag{3}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus der Definition von $\vartheta_1(\Lambda)$ und denselben Überlegungen, die zu (2.7) führen.

LEMMA 13. *Für jeden Halbringbereich ist*

$$\int \beta(\Lambda)\, d\mu = -\Theta_1(S) = (V(S)/\zeta(n)) \left\{1 + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{(m_0-1)^n} + \frac{1}{m_0^n(1-\varkappa^n)}\right\}, \tag{4}$$

wobei

$$m_0 = \left[\frac{1}{1-\varkappa}\right], \tag{5}$$

das heisst, die grösste ganze in $\dfrac{1}{1-\varkappa}$ *enthaltene Zahl.*

Bemerkung 1. Es folgt die wichtige Tatsache, dass wir $m(A(S))$ für Ringbereiche im R_2 durch eine endliche Summe von Integralen angeben können. Denn $\Theta_1(S)$ ist nach Lemma 13 gegeben und der Ausdruck für $\Theta_2(S)$ in Satz 2 enthält im R_2 von vornherein nur endlich viele Terme.

Bemerkung 2. Lemma 13 war für $\varkappa = 0$, also Sternbereiche, schon lange bekannt.

Bemerkung 3. Aus (3) folgt $m(A(S)) > 0$ und $\Delta(S) \leqslant 1$, falls $\Theta_1(S) > -1$. Daher ist

$$\Delta(S) \leqslant (V(S)/\zeta(n)) \left\{1 + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{(m_0-1)^n} + \frac{1}{m_0^n(1-\varkappa^n)}\right\}. \tag{6}$$

Beweis. Wir brauchen nur den in Satz 2 gegebenen Ausdruck für $\Theta_1(S)$ zu berechnen. Wir dürfen dabei noch annehmen, es sei für $X \in S$ niemals $-\lambda X \in S$, falls $0 < \lambda \leqslant 1$. Die Summe (2.19), $m = 1$, erstreckt sich über alle Teilgitter des natürlichen Gitters im R_1. Die Teilgitter sind jeweils die Vielfachen einer festen ganzen Zahl $m > 0$. Indem wir die Gitter selbst mit m bezeichnen, erhalten wir

$$-\Theta_1(S) = \zeta(n)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^n}, \tag{8}$$

wobei $c(m)$ das Volumen des Bereiches jener Punkte $X_1 \in S$ ist, für welche es kein $X \in S$ gibt, so dass

i) $X \neq X_1,\ X \neq 0$

ii) $X = \dfrac{d}{m} X_1.$

iii) Ist $X > X_1$, so ist $X = 0$.

Aus i) und iii) folgt, $c(m)$ ist das Volumen jener $X_1 \in S$, für die es kein $X < X_1$, $X \in S$, $X = \frac{d}{m} X_1$ gibt, wobei $d \neq 0$. Wir ordnen nun so, dass aus $|X| < |Y|$ folgt $X < Y$. Dann ist

$$c(1) = V,$$

denn $|X| < |X_1|$, $X = dX_1$, $d \neq 0$ ist unmöglich. Allgemein wird $c(m)$ das Volumen des Bereiches jener $X_1 \in S$, für welche $((m-1)/m) X_1 \notin S$. Solange $(m-1)/m \leqslant \varkappa$, dass heisst $m \leqslant m_0$, ist

$$c(m) = V.$$

Ist aber $m > m_0$, so erhalten wir

$$c(m) = \frac{(m^n (m-1)^{-n} - 1)\varkappa^n}{1 - \varkappa^n} V.$$

Es ergibt sich daher

$$\Theta_1(S) = -\frac{V}{\zeta(n)} \left\{ 1 + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{(m_0 - 1)^n} + \frac{1}{m_0^n} + \frac{(m_0+1)^n m_0^{-n} - 1}{(m_0+1)^n (1 - \varkappa^n)} \varkappa^n \right.$$
$$\left. + \frac{(m_0+2)^n (m_0+1)^{-n} - 1}{(m_0+2)^n (1-\varkappa^n)} \varkappa^n + \cdots \right\}.$$
$$= -\frac{V}{\zeta(n)} \left\{ 1 + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{(m_0-1)^n} + \frac{1}{m_0^n (1 - \varkappa^n)} \right\}.$$

4.5. Definition.

$$\nabla_0(S) = 2 \sup_{X_i \in S} F(0, X_1, X_2), \tag{9}$$

wobei $F(0, X_1, X_2)$ die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, X_1, X_2 ist.

Satz 6. *Für Halbsternbereiche im R_2 mit $\nabla_0(S^*) \leqslant 1$ ist*

$$m(A(S^*)) = 1 - V(S^*)/\zeta(2).$$

Beweis von Satz 6. Nach Satz 2 ist $m(A(S)) = 1 + \Theta_1(S) + \Theta_2(S)$. $\Theta_1(S)$ ergibt sich nach Lemma 13 zu $-V(S)/\zeta(2)$, wogegen $\Theta_2(S)$ wegen $\nabla_0(S) \leqslant 1$ verschwindet.

4.6. Lemma 13 ergab eine Verschärfung des Satzes von Minkowski-Hlawka für Ringbereiche. Tatsächlich gilt sogar

Satz 7. *Es gibt eine absolute Konstante c mit der folgenden Eigenschaft: Sei S eine Borelmenge im R_2, die in einem Sternbereich S^* mit endlichem Volumen enthalten ist. Falls*

$$V(S) \leqslant 1 + c/V^3(S^*), \tag{10}$$

dann ist

$$\Delta(S) \leqslant 1.$$

Weiter ist

$$Q(S) = V(S)/\Delta(S) > 1 \tag{11}$$

für jede (beschränkte oder unbeschränkte) Borelmenge.

Um Satz 7 zu beweisen, dürfen wir uns auf Borelmengen beschränken, die im Halbraum $x_1 \geqslant 0$ liegen. Wir ordnen wieder so, dass $X_1 < X_2$ mit $|X_1| < |X_2|$ gleichbedeutend ist.

LEMMA 14. *Es gibt eine absolute Konstante $c_1 < 1$, so dass*

$$C(m, j) = \frac{c(m)}{m^2} + \frac{c(m-1)}{(m-1)^2} + \cdots + \frac{c(m-j+1)}{(m-j+1)^2} \leqslant \frac{V(S^*)}{m^2}\left(1 + \frac{3j^2}{m}\right)$$

falls $j < c_1 m$.

Beweis. Nach § 4.4 ist $c(m)$ das Volumen des Bereiches jener $X \in S$ für die keiner der Punkte $\frac{1}{m}X, \frac{2}{m}X, \ldots, \frac{m-1}{m}X$ in S ist. Es ist daher

$$c(m) = \int_{S^*} \varrho(X)\left(1 - \varrho\left(\frac{m-1}{m}X\right)\right)\cdots\left(1 - \varrho\left(\frac{1}{m}X\right)\right) dX. \tag{12}$$

Definieren wir $c(m, j)$ für $0 \leqslant j < m$ durch

$$c(m, 0) = \int_{S^*} \varrho(X)\, dX = V(S) \tag{13}$$

und

$$c(m, j) = \int_{S^*} \varrho(X)\left(1 - \varrho\left(\frac{m-1}{m}X\right)\right)\cdots\left(1 - \varrho\left(\frac{m-j}{m}X\right)\right) dX \qquad (1 \leqslant j < m). \tag{14}$$

Dann ist

$$c(m) \leqslant c(m, j) \qquad (0 \leqslant j < m) \tag{15}$$

und

$$C(m, j) \leqslant \frac{c(m, j-1)}{m^2} + \frac{c(m-1, j-2)}{(m-1)^2} + \cdots + \frac{c(m-j+1, 0)}{(m-j+1)^2}. \tag{16}$$

Wir schätzen nun $c(m, j-1)$ ab:

$$\begin{aligned}
\frac{c(m, j-1)}{m^2} &\leqslant \frac{1}{m^2} \int_{S^*} \left(1 - \varrho\left(\frac{m-1}{m}X\right)\right)\cdots\left(1 - \varrho\left(\frac{m-j+1}{m}X\right)\right) dX \\
&= \frac{1}{m^2} \int_{S^*} \left\{1 - \varrho\left(\frac{m-1}{m}X\right)\left(1 - \varrho\left(\frac{m-2}{m}X\right)\right)\cdots\left(1 - \varrho\left(\frac{m-j+1}{m}X\right)\right)\right. \\
&\qquad - \varrho\left(\frac{m-2}{m}X\right)\left(1 - \varrho\left(\frac{m-3}{m}X\right)\right)\cdots\left(1 - \varrho\left(\frac{m-j+1}{m}X\right)\right) \\
&\qquad \cdots \qquad \cdots \\
&\qquad \left. - \varrho\left(\frac{m-j+1}{m}X\right)\right\} dX.
\end{aligned} \tag{17}$$

Nun ist aber

$$\int\limits_{S^*} d\,X = V(S^*),$$

$$\int\limits_{S^*} \varrho\left(\frac{m-i}{m}X\right)\left(1-\varrho\left(\frac{m-i-1}{m}X\right)\right)\cdots\left(1-\varrho\left(\frac{m-j+1}{m}X\right)\right)d\,X$$

$$=\left(\frac{m}{m-i}\right)^2 \int\limits_{\frac{m-i}{m}S^*} \varrho(Y)\left(1-\varrho\left(\frac{m-i-1}{m-i}Y\right)\right)\cdots\left(1-\varrho\left(\frac{m-j+1}{m-i}Y\right)\right)d\,Y$$

vermittels der Substitution $Y=\frac{m-i}{m}X$. Der letzte Ausdruck ist

$$\geqslant\left(\frac{m}{m-i}\right)^2\left\{c\,(m-i,\ j-1-i)-V(S^*)\left(1-\left(\frac{m-i}{m}\right)^2\right)\right\}.$$

So erhalten wir mit Hilfe von (17)

$$\frac{c\,(m,j-1)}{m^2}\leqslant\frac{V(S^*)}{m^2}\left[1+\frac{2\,m-1}{(m-1)^2}+\cdots+\frac{2\,m\,i-i^2}{(m-i)^2}+\cdots+\frac{2\,m\,(j-1)-(j-1)^2}{(m-j+1)^2}\right]$$
$$-\frac{c\,(m-1,j-2)}{(m-1)^2}-\cdots-\frac{c\,(m-j+1,0)}{(m-j+1)^2}.$$

Hieraus folgt sofort

$$C\,(m,j)\leqslant\frac{V(S^*)}{m^2}\left(1+\sum_{i=1}^{j-1}\frac{2\,m\,i-i^2}{(m-i)^2}\right). \tag{18}$$

Es gibt ein $c_1<1$, so dass für $j<c_1\,m$

$$\sum_{i=1}^{j-1}\frac{2\,m\,i-i^2}{(m-i)^2}<\frac{3\,j^2}{m},$$

woraus Lemma 14 folgt.

4.7. *Beweis von Satz* 7. Nach Lemma 14 ist

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c\,(m)}{m^2}\leqslant V(S)\,\zeta(2)+\frac{V(S^*)}{n^2}(1+3\,j^2/n)-V(S)\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n-j+1)^2}\right)$$
$$\leqslant V(S)\,(\zeta(2)-j/n^2)+(V(S^*)/n^2)\,(1+3\,j^2/n)$$

für beliebiges j, n mit $j<c_1\,n$. Ist $j\leqslant\sqrt{n}$, so ist nach (8)

$$\Theta_1(S)\geqslant -V(S)+\frac{V(S)\,j}{n^2\,\zeta(2)}-\frac{4\,V(S^*)}{n^2}. \tag{19}$$

Setzen wir
$$j = \left\{\left\{\frac{5\zeta(2)V(S^*)}{V(S)}\right\}\right\}, \qquad n = j^2, \tag{20}$$

wobei $\{\{\ \}\}$ die nächst grössere ganze Zahl bedeutet, so ist

$$\Theta_1(S) \geqslant -V(S) + \frac{V(S^*)}{n^2} \geqslant -V(S) + c\frac{V(S)^4}{V(S^*)^3}.$$

Daher ist nach (3), (4) $m(A(S)) > 0$ und $\Delta(S) \leqslant 1$, ausser

$$V(S) \geqslant 1 + \frac{V^4(S)}{V^3(S^*)}c > 1 + \frac{c}{V^3(S^*)}.$$

Damit ist der erste Teil von Satz 7 bewiesen. Man sieht sofort $Q(S) > 1$ für beschränkte Borelmengen. Ist S nicht beschränkt, so gibt es immerhin einen Sternkörper S^* von endlichen Volumen, so dass

$$V(S \cap S^*) \geqslant \tfrac{1}{2}V(S).$$

Indem wir in $S \cap S^*$ $C(m, j)$ wie oben abschätzen, und in $S - S \cap S^*$ $C(m, j)$ trivial durch

$$V(S - S \cap S^*)\left(\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{(m - j + 1^2)}\right)$$

abschätzen, erhalten wir statt Lemma 14

$$C(m, j) \leqslant \frac{V(S \cap S^*)}{m^2}(1 + 3j^2/m) + V(S - S \cap S^*)\left(\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{(m - j + 1)^2}\right), \tag{21}$$

wenn nur $j < \bar{c}_1 m$. Man schliesst nun ähnlich weiter wie oben und erhält:

Ist
$$V(S) \leqslant 1 + \bar{c}/V^3(S^*), \tag{22}$$
so ist
$$\Delta(S) \leqslant 1.$$

Daraus folgt (11).

4.8. Satz 8. *Sei S der Kreisring $\varrho \leqslant |X| \leqslant R$. Dann ist für $0 \leqslant R \leqslant 1$:*

$$m(A(S)) = 1 - \frac{3}{\pi}(R^2 - \varrho^2)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(w-1)^2} + \frac{1}{w^2}\frac{R^2}{R^2 - \varrho^2}\right).$$

Hierbei ist
$$w = \left[\frac{R}{R - \varrho}\right].$$

$1 \leqslant R \leqslant \sqrt[4]{4/3}$:
$$m(A(S)) = 1 - \frac{3}{\pi}(R^2-\varrho^2)\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{w^2}\frac{R^2}{R^2-\varrho^2}\right)$$
$$+2 \operatorname{arc} \cos 1/R^2 - \langle 4 \operatorname{arc} \cos 1/R\varrho\rangle + \langle\langle 2 \operatorname{arc} \cos 1/\varrho^2\rangle\rangle$$
$$-2\sqrt{R^4-1} + \langle 4\sqrt{R^2\varrho^2-1}\rangle - \langle\langle 2\sqrt{\varrho^4-1}\rangle\rangle.$$

Hier sind die in $\langle\ \rangle$ oder $\langle\langle\ \rangle\rangle$-Klammern stehenden Ausdrücke nur zu berücksichtigen, falls $R\varrho > 1$ bzw. $\varrho^2 > 1$.

$\sqrt[4]{4/3} \leqslant R < \sqrt{2}$:
$$m(A(S)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqslant \varrho \leqslant R/2 \\ >0, & \text{falls } R/2 < \varrho \leqslant R. \end{cases}$$

Folgerungen. Ist C der Einheitskreis, so ist
$$m(A(\lambda C)) = \begin{cases} 1-3\lambda^2/\pi, & \text{wenn } \lambda \leqslant 1 \\ 1-3/\pi(\lambda^2+2 \operatorname{arc} \cos \lambda^{-2} - 2\sqrt{\lambda^4-1} & \text{für } 1 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt[4]{4/3} \\ 0, & \text{wenn } \lambda \geqslant \sqrt[4]{4/3}. \end{cases} \tag{23}$$

Insbesondere ist in der Ausdrucksweise von Satz 5
$$\lambda_0 = \sqrt[4]{4/3}$$
und daher
$$\Delta(C) = \lambda_0^{-2} = \sqrt{3}/2.$$

Eine andere Folgerung ist

Satz 9. *Ist $R < \sqrt{2}$ und $\varrho > R/2$, so gibt es eine positiv definite quadratische Form $f(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$ mit Diskriminante $ac-b^2=1$, so dass die Ungleichungen*
$$\varrho^2 \leqslant f(x,y) \leqslant R^2$$
keine ganzzahligen Lösungen $\neq (0,0)$ besitzen.

Es ist klar, dass man bei Aufwendung entsprechender Mühe Satz 7 und Satz 8 verallgemeinern könnte.

4.9. *Beweis von Satz* 8. Da $m(A(S)) = m(A(S'))$, wobei S' der Halbbereich des $X \in S$ ist, für die $x_1 \geqslant 0$, wollen wir zunächst $\Theta_1(S')$ ermitteln. Nach Lemma 13 ist
$$\Theta_1(S') = -\left\{(R^2-\varrho^2)\pi/2\frac{\pi^2}{6}\right\}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{w^2}\frac{R^2}{R^2-\varrho^2}\right),$$
wobei
$$\varkappa = \varrho/R, \quad w = \left[\frac{1}{1-\varkappa}\right] = \left[\frac{R}{R-\varrho}\right].$$

Also ist $$\Theta_1(S') = -\frac{3}{\pi}(R^2-\varrho^2)\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{w^2}\frac{R^2}{R^2-\varrho^2}\right). \tag{24}$$

i) Ist $0 \leqslant R \leqslant 1$, so ist wegen $\nabla_0(S') \leqslant 1$, $\Theta_2(S') = 0$ und

$$m(A(S)) = 1-\frac{3}{\pi}(R^2-\varrho^2)\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{w^2}\frac{R^2}{R^2-\varrho^2}\right).$$

ii) Sei $1 \leqslant R \leqslant \sqrt[4]{4/3}$. Wir berechnen $\Theta_2(S')$ nach (2.21), (2.22). In S' gibt es kein Punktepaar $X_1 \in S'$, $X_2 \in S'$ mit Determinante $|X_1, X_2|$ (1) $\geqslant 2$. Daher darf man sich auf $r = \pm 1$, $|\Delta_2| = 1$ beschränken. Δ_2 ist folglich das Einheitsgitter, die r_{ik} sind ganze Zahlen. Ist $|X_1, X_2| = 1$, so wird $X_3 = r_1 X_1 + r_2 X_2$ nur dann $|X_1, X_3| < 2$, $|X_2, X_3| < 2$ erfüllen, wenn $r_i = \pm 1$. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass wenn $X_1 \in S'$, $X_2 \in S'$, $|X_1, X_2| = 1$, dann $\pm X_1 \pm X_2 \notin S'$. Man beschränkt sich folglich in (2.22) auf $r = \pm 1$, $\Delta_2 = \Delta_2^0$, $R = \begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$, $k=2$, $\nu(2,2) = (1,2;)$. Somit erhält man

$$\Theta_2(S') = \Gamma_{\Delta^0}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Delta^0} &= \zeta(2)^{-1}\int\int\{\varrho_2'(X_1, x_1X_1+\tilde{X})+\varrho_2'(X_1, x_1X_1-\tilde{X})\}\,dx_1\,dX_1\\ &= \zeta(2)^{-1}\int\int\varrho'(X_1)\,\varrho'(x_1X_1+\tilde{X})\,dx_1\,dX_1 \qquad (26)\\ &= \tfrac{1}{4}\zeta(2)^{-1}\int\int\varrho(X_1)\,\varrho(x_1X_1+\tilde{X})\,dx_1\,dX_1.\end{aligned}$$

Dabei ist ϱ' die charakteristische Funktion von S', ϱ_2' ist die zu S' gehörende Funktion ϱ_2.

4.10. Sei nun zunächst $R\varrho < 1$. Führt man Polarkoordinaten ein, so erhält man

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}\zeta(2)^{-1}\int\int\varrho(X)\,\varrho(xX+\tilde{X})\,dx\,dX\\ &= \tfrac{1}{4}\zeta(2)^{-1}\cdot 2\int_{R>|X|>R^{-1}}\frac{1}{|X|}\sqrt{R^2-|X|^{-2}}\,dX = \pi\,\zeta(2)^{-1}\int_{R^{-1}}^{R}\sqrt{R^2-r^{-2}}\,dr\\ &= -\pi\,\zeta(2)^{-1}(\arccos R^{-2}-\sqrt{R^4-1}).\end{aligned}$$

Sei als nächstes $R^{-1} < \varrho < 1$.

(1) $|X_1, X_2| = |\mathrm{Det}\,(X_1, X_2)|$.

$$\tfrac{1}{4}\zeta(2)^{-1}\int\int \varrho(X)\,\varrho(xX+\tilde{X})\,dx\,dX$$

$$=\tfrac{1}{2}\zeta(2)^{-1}\int\limits_{R>|X|>\varrho}\frac{1}{|X|}\sqrt{R^2-|X|^{-2}}\,dX-\tfrac{1}{2}\zeta(2)^{-1}\int\limits_{R>|X|>\varrho^{-1}}\frac{1}{|X|}\sqrt{\varrho^2-|X|^{-2}}\,dX$$

$$=\pi\zeta(2)^{-1}\int\limits_{\varrho}^{R}\sqrt{R^2-r^{-2}}\,dr-\pi\zeta(2)^{-1}\int\limits_{\varrho^{-1}}^{R}\sqrt{\varrho^2-r^{-2}}\,dr$$

$$=-\frac{3}{\pi}\left(2\sqrt{R^4-1}-4\sqrt{R^2\varrho^2-1}-2\arccos R^{-2}+4\arccos R^{-1}\varrho^{-1}\right).$$

Ist $1\leqslant\varrho$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\zeta(2)^{-1}\int\limits_{R>|X|>\varrho}\frac{1}{|X|}\sqrt{R^2-|X|^{-2}}\,dX-\tfrac{1}{2}\zeta(2)^{-1}\int\limits_{R>|X|>\varrho}\frac{1}{|X|}\sqrt{\varrho^2-|X|^{-2}}\,dX$$

und wieder die in Satz 8 gegebene Formel.

iii) $\sqrt[4]{4/3}\leqslant R<\sqrt{2}$. Da $m(A(S))=0$, falls $\varrho=0$, $R=\sqrt[4]{4/3}$, bleibt $m(A(S))=0$, falls $\varrho=0$, $R\geqslant\sqrt[4]{4/3}$. Offenbar ist aber auch $m(A(S))=0$, falls $R\geqslant\sqrt[4]{4/3}$, $\varrho\leqslant\frac{1}{2}R$.

Ist $R<\sqrt{2}$, so wird sich an $\Theta_2(S')$ nichts ändern, wenn ϱ von $R/2$ bis R^{-1} wächst. Anderseits wird aber $\Theta_1(S')$ zunehmen, wenn ϱ den Wert $\frac{1}{2}R$ überschreitet.

Ist nämlich $\varrho\leqslant\frac{1}{2}R$, so ist

$$\Theta_1(S')=-\frac{3}{\pi}R^2$$

nach (24). Hingegen ist in $R/2\leqslant\varrho\leqslant 2R/3$

$$\Theta_1(S')=-\frac{3}{\pi}(R^2-\varrho^2)\left(1+\frac{1}{4}\,\frac{R^2}{R^2-\varrho^2}\right)=-\frac{3}{\pi}R^2+\frac{3}{\pi}(\varrho^2-R^2/4).$$

Folglich ist in $R<\sqrt{2}$, $\varrho>\frac{1}{2}R$, $m(A(S))>0$.

5. Abschätzungen für grosses n

5.1. In diesem Kapitel beweisen wir

SATZ 10. *Ist $V\leqslant n-1$ und $n>n_0(\varepsilon)$, so ist*

$$m(A(S))=e^{-V}(1-R), \tag{1}$$

wobei

$$|R|<V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}(1+\varepsilon)+\varepsilon. \tag{2}$$

Eine Folgerung davon ist

SATZ 11. *Ist* $n > \tilde{n}_0$, *so ist*

$$Q(S) = V(S)/\Delta(S) \geq n\,r - 2, \tag{3}$$

wobei

$$1 + r + \log r = 0, \tag{4}$$

$$0.278 < r < 0.279.$$

Bemerkung. Satz 10 und Satz 11 sind Verschärfungen von Sätzen in [18] und [15], wo sich weitere Literaturangaben finden. Der wesentlich neue Gedanke ist Satz 12, der Theorem 1 in [18] ersetzt. Dadurch werden Ausdrücke wie

$$\int\int \varrho(X)\,\varrho(Y)\,\varrho(X+Y)\,dX\,dY$$

in der Abschätzung vermieden.

5.2. Unter K, L, ... verstehen wir Punktmengen im R_n. Unter K_k, L_k, ... Punktmengen mit k verschiedenen Elementen. Weiter sollen E_k, F_k, ... Mengen bezeichnen, deren Elemente K_k sind. E_k sind daher Mengen von Mengen; über die Zahl der Elemente von E_k ist nichts ausgesagt.

Eine Folge von Mengen E_k, nämlich $E_1, E_2, \ldots, E_l$ habe Eigenschaft

A, falls aus $K_{k-1} \subset K_k$ und $K_k \in E_k$ folgt $K_{k-1} \in E_{k-1}$ $(2 \leq k \leq l)$.

Eine dazugehörende zweite Folge $E_1', E_2', \ldots, E_l'$ habe Eigenschaft

A', falls für jedes $K_{k-1} \in E_{k-1}$ und jedes $K_1 \in E_1$, wobei $K_1 \not\subseteq K_{k-1}$, gilt

$$K_k = K_{k-1} \cup K_1 \in E_k' \quad (2 \leq k \leq l).$$

Beispiel. Die Folge $E_1, E_2, \ldots, E_n$, wobei E_k aus allen K_k mit linear unabhängigen Punkten besteht (¹), hat Eigenschaft A. Die Folge $E_1', \ldots, E_n'$, wobei E_k' aus allen K_k mit k Punkten vom Rang $k-1$ oder Rang k besteht, hat dazu Eigenschaft A'.

Sei T eine endliche Punktmenge. Sind Folgen E_j, E_j' mit A bzw. A' gegeben, so bilden wir neue Folgen $F_1, \ldots, F_l$; $F_1', \ldots, F_l'$ durch die Festsetzung

$$K_k \in F_k, \text{ falls } K_k \in E_k \text{ und } K_k \subseteq T$$
$$K_k \in F_k', \text{ falls } K_k \in E_k' \text{ und } K_k \subseteq T.$$

(¹) Wir meinen: die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ sind linear unabhängig.

Die neuen Folgen haben wieder die Eigenschaften A und A'. Wir bezeichnen die Zahl der Elemente von F_k mit σ_k, die Zahl der Elemente von F'_k mit σ'_k. Endlich definieren wir τ_k und π_k durch

$$\tau_k = \begin{cases} \sigma_k, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \sigma'_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (1 \leqslant k \leqslant l) \tag{6}$$

und

$$\pi_k = \begin{cases} \sigma_k, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \sigma'_k, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \qquad (1 \leqslant k \leqslant l). \tag{7}$$

5.3. Lemma 15. *Seien $E_1, E_2, \ldots, E_l$; $E'_1, E'_2, \ldots, E'_l$ mit Eigenschaft A und A' gegeben. Weiter bestehe E_1 sowie E'_1 aus sämtlichen K_1. Ferner gegeben sei eine Punktmenge T mit $m \neq 0$ Elementen. Wir bilden τ_k und π_k wie vorhin. Sei nun $r = \min(l, m)$ und*

$$a_0 = b_0 = 1$$

sowie

$$\tau_k = a_k \binom{m}{k}, \quad \pi_k = b_k \binom{m}{k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant r). \tag{8}$$

Wir behaupten: Die a_k befriedigen

$$1 = a_0 = a_1, \quad a_{2t} \geqslant a_{2t+2} \qquad (0 \leqslant 2t \leqslant r-2) \tag{9 a}$$

und

$$a_{2t} \leqslant a_{2t+1} \qquad (0 \leqslant 2t \leqslant r-1). \tag{10 a}$$

Die b_k hingegen befriedigen

$$1 = b_0 = b_1, \quad b_{2t-1} \geqslant b_{2t+1} \qquad (2 \leqslant 2t \leqslant r-1) \tag{9 b}$$

sowie

$$b_{2t-1} \leqslant b_{2t} \qquad (2 \leqslant 2t \leqslant r). \tag{10 b}$$

Beweis. Aus $\tau_1 = m = a_1 \binom{m}{1}$ folgt $a_1 = 1$. Weiter definieren wir c_k durch

$$\sigma_k = c_k \binom{m}{k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant r). \tag{11}$$

Dann folgt

$$c_{k+1} \binom{m}{k+1} = \sigma_{k+1} \leqslant \sigma_k \frac{m-k}{k+1} = c_k \binom{m}{k} \frac{m-k}{k+1} = c_k \binom{m}{k+1}. \tag{12}$$

Diese Ungleichung gilt, weil jedes $K_{k+1} \in F_{k+1}$ in $k+1$ Weisen als Vereinigung eines $K_k \in F_k$ und eines $K_1 \in F_1$ dargestellt werden kann. Nun gibt es aber genau σ_k solche K_k, und wenn K_k gegeben ist, gibt es $m-k$ weitere $K_1 \in F_1$, so dass $K_1 \not\subseteq K_k$.

Aus (12) folgt $c_{k+1} \leqslant c_k$. Da für gerades k $a_k = c_k$, folgt $a_{2t} \geqslant a_{2t+2}$, falls $t > 0$. Doch ist auch

$$a_0 = a_1 = c_1 \geqslant c_2 = a_2.$$

Dies beweist (9 a).

Ist k gerade, $k > 0$, so hat man

$$a_{k+1}\binom{m}{k+1} = \tau_{k+1} = \sigma'_{k+1} \geqslant \sigma_k \frac{m-k}{m+1} = \tau_k \frac{m-k}{m+1} = a_k \binom{m}{k} \frac{m-k}{k+1} \tag{13}$$
$$= a_k \binom{m}{k+1}.$$

Die Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Vereinigung eines $K_k \in F_k$ und eines $K_1 \in F_1$, wobei $K_1 \notin K_k$, ein $K_{k+1} \in F'_{k+1}$ gibt, und dass man jedes K_{k+1} auf diese Weise höchstens $k+1$ mal erhält. Anderseits hat F_k σ_k Elemente, und sobald $K_k \in F_k$ gewählt ist, gibt es noch $m-k$ nicht in K_k gelegene Elemente $K_1 \in F_1$.

Aus (13) folgt (10 a).

(9 b) und (10 b) beweist man ähnlich.

5.4. Wir setzen

$$\alpha = \alpha(T) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T \text{ leer,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{14}$$

SATZ 12. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 15 (*es darf aber auch* $m = 0$ *sein*) *ist*

$$(-1)^h \alpha \leqslant (-1)^h + \sum_{k=0}^{h} (-1)^{k+h} \sigma_k + \sum_{k=2}^{h} (\sigma'_k - \sigma_k), \tag{15}$$

wenn

$$1 \leqslant h \leqslant l.$$

Beweis von Satz 12. Sei zunächst h ungerade und $m \neq 0$. Wir definieren $a_0, a_1, \ldots, a_r$ wie vorhin. Dann dürfen wir Lemma 2 aus [18] anwenden und erhalten

$$\sum_{k=0}^{h^*} \binom{m}{k} (-1)^k a_k \leqslant 0, \tag{16}$$

falls entweder h^* ungerade oder falls $h^* = m$. Somit ist

$$(-1)^h + \sum_{k=1}^{h} (-1)^{k+h} \sigma_k + \sum_{k=1}^{h} (\sigma'_k - \sigma_k)$$
$$\geqslant -1 - \sum_{k=1}^{h} (-1)^k \sigma_k + \sum \begin{bmatrix} 1 \leqslant k \leqslant h \\ k \text{ ungerade} \end{bmatrix} (\sigma'_k - \sigma_k)$$
$$= -1 - \sum_{k=1}^{h} (-1)^k \tau_k = -\sum_{k=0}^{h^*} (-1)^k \binom{m}{k} a_k \geqslant 0$$
$$= (-1)^h \alpha.$$

Hierbei ist $h^* = \min(h, m)$. Ist aber $m = 0$, so ist $\alpha = 1$ und alle σ, σ' sind gleich Null.

Ähnlich beweist man Satz 12 für gerades h.

5.5. Unter dem Kern $\mathfrak{R}$ von K_k verstehen wir die Menge jener $g \in K_k$, die von den anderen Elementen aus K_k linear abhängig sind(1). Hat der Kern $t = t(K_k)$ Elemente, so ist der Kern ein $\mathfrak{R} = K_t \subseteqq K_k$. Unter K_0 verstehen wir die Nullmenge.

Definition: $K_k \cong L_l$, falls $t(K_k) = t(L_l)$ und falls man die Elemente $g_1, \ldots, g_t$ aus $\mathfrak{R}(K)$ und $h_1, \ldots, h_t$ aus $\mathfrak{R}(L)$ so anordnen kann, dass

$$a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t = 0$$

genau dann gilt, wenn

$$a_1 h_1 + \cdots + a_t h_t = 0.$$

Hierbei sind $a_1, \ldots, a_t$ reelle Zahlen.

Wir haben eine Äquivalenzrelation definiert. Wir bezeichnen Äquivalenzklassen mit Q. Sämtliche K mit $t(K) = 0$, also sämtliche K mit linear unabhängigen Punkten, bilden eine Äquivalenzklasse Q_0.

Wir setzen $Q_1 \leqslant Q_2$, falls es ein $K \in Q_1$, ein $L \in Q_2$ gibt, so dass $K \subseteqq L$. Es ist $Q_0 \leqslant Q$ für jedes Q.

Lemma 16. *Sei U eine nicht leere Menge von Äquivalenzklassen Q, so dass mit $Q \in U$ und $Q' \leqslant Q$ auch $Q' \in U$. Wir definieren nun $E_1, \ldots, E_n$; $E'_1, \ldots, E'_n$ so:*

$$K_k \in E_k, \text{ falls } K_k \in Q, \text{ wobei } Q \in U.$$

$$K_k \in E'_k, \text{ falls } K_k = K_{k-1} \cup K_1,\ K_{k-1} \in E_{k-1}, K_1 \in E_1.$$

Wir behaupten: Die $E_1, \ldots, E_n$; $E'_1, \ldots, E'_n$ erfüllen A und A'.

Beweis. Sei $K_{k-1} \subset K_k$, $K_k \in E_k$. Es gibt dann ein $Q \in U$, so dass $K_k \in Q$. Folglich gehört K_{k-1} einem Q' an, wobei $Q' \leqslant Q$. Indessen ist $Q' \in U$ und $K_{k-1} \in E_{k-1}$. Dies beweist die Gültigkeit von A. A' folgt aus der Definition der E'_j.

5.6. Seien $g_1, \ldots, g_t$ die Punkte aus $\mathfrak{R}(K)$. Unter $Z(K)$ verstehen wir die Anzahl der Anordnungen $(i_1, \ldots, i_t)$ von $(1, 2, \ldots, t)$, so dass

$$a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t = 0 \tag{17}$$

genau dann, wenn

$$a_1 g_{i_1} + a_1 g_{i_2} + \cdots + a_t g_{i_t} = 0 \tag{18}$$

---

(1) Wir meinen die Vektoren $\overrightarrow{OP}$. Beispiel: K_4 besteht aus $(1, 1, 0)$, $(1-1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$. Dann besteht $\mathfrak{R}(K_4)$ nur aus den ersten drei Punkten.

$Z(K) = z(Q)$ hängt nur von der Äquivalenzklasse Q ab, zu der K gehört. Unter $d(Q)$ verstehen wir den Rang der Punkte eines $\mathfrak{R}(K)$, wobei natürlich $d(Q) \leqslant t(Q)$.

Unter rationalem Q verstehen wir eines, bei welchem (17) höchstens gilt, falls die Quotienten a_i/a_j rational sind.

Ist Q rational und ist $t = t(Q)$, $d = d(Q)$, so gibt es eine Matrix $M = M(Q)$ mit rationalen Elementen,

$$M = \begin{pmatrix} v_{1\,d+1} & \cdots & v_{1t} \\ \cdots & & \\ v_{d\,d+1} & & v_{dt} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

so dass

$$\sum_{K_t \in Q} \prod_{\substack{g \in K_t \\ g \in \Lambda}} \varrho(g) = \frac{1}{z(Q)} \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_d \in \Lambda \\ \text{lin. unabh.} \\ g_j = \sum\limits_{i=1}^{d} v_{ij} g_i \in \Lambda \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{t} \varrho(g_i). \tag{20}$$

Da in (20) über $g_i \neq g_k$ summiert wurde, hat M keine zwei gleichen Spalten, und kein Spaltenvektor von M ist von der Form

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kann M so wählen, dass $|v_{ij}| \leqslant 1$. Auch unter dieser Bedingung ist $M(Q)$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, doch greifen wir eben ein passendes $M(Q)$ heraus.

Allgemeiner als (20) ist

$$\sum_{K_k \in Q} \prod_{\substack{g \in K_k \\ g \in \Lambda}} \varrho(g) = \frac{1}{z(Q)(k-t)!} \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_d; g_{t+1}, \ldots, g_k \in \Lambda \\ \text{linear unabhängig} \\ g_j = \sum\limits_{i=1}^{d} v_{ij} g_i \in \Lambda \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{k} \varrho(g_i). \tag{21}$$

5.7. Lemma 17.

$$\int \sum_{K_k \in Q} \prod_{\substack{g \in K_k \\ g \in \Lambda}} \varrho(g)\, d\mu$$
$$= \frac{V^{k-t}}{(k-t)!} \frac{1}{z(Q)} \frac{1}{|\Delta|^n} \int \cdots \int \varrho(X_1) \ldots \varrho(X_d)\, \varrho\left(\sum_{i=1}^{d} v_{i\,d+1} X_i\right) \ldots \varrho\left(\sum_{i=1}^{d} v_{it} X_i\right) dX_1 \ldots dX_d.$$

Hierbei ist $|\Delta|$ *die Determinante des Gitters jener ganzzahligen Punkte*

$$X(x_1, \ldots, x_d)$$

im R_d, *für die*

$$\sum_{i=1}^{d} v_{ij} x_i = \text{ganz} \qquad (d+1 \leqslant j \leqslant t).$$

Beweis. Folgt aus (21) und [11], Theorem 2, oder [17, II], Lemma 4.

LEMMA 18.

$$\frac{1}{z(Q)} \frac{1}{|\Delta|^n} \int \cdots \int \varrho(X_1) \ldots \varrho(X_d)\, \varrho\left(\sum_{i=1}^{d} v_{i\,d+1} X_i\right) \ldots \varrho\left(\sum_{i=1}^{d} v_{it} X_i\right) dX_1 \ldots dX_d \leqslant 2\, V^d (3/4)^{\frac{1}{2}n}.$$

Beweis. Nur für $|\Delta| = 1$ bleibt etwas zu beweisen. Dann sind die v_{ij} ganz rational. In jeder Spalte von M in (19) sind mindestens zwei v, welche $+1$ oder -1 sind. Unser Ergebnis folgt nun sofort aus Lemma 5 in [12].

LEMMA 19. *Sei* h *entweder gleich* $n-1$ *oder gleich* $n-2$. *Dann ist*

$$\left| \sum_{k=t}^{h} (-1)^k \int \sum_{K_k \in Q} \prod_{\substack{g \in K_k \\ g \in \Lambda}} \varrho(g)\, d\mu \right| < \delta\, e^{-V} (1 + V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n}),$$

falls $n > n_1(\delta, Q)$ *und* $V \leqslant n-1$.

Beweis. Aus Lemma 17 und Lemma 18 folgert man, dass der links stehende Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2\,(3/4)^{\frac{1}{2}n} \left| 1 - V + \frac{V^2}{2} \pm \cdots \pm (-1)^{h-t} \frac{V^{h-t}}{(h-t)!} \right| V^d \\
&\leqslant 2\,(3/4)^{\frac{1}{2}n} \left(e^{-V} + \frac{V^{h-t+1}}{(h-t+1)!} \right) V^d < 2\,(3/4)^{\frac{1}{2}n} \left(e^{-V} + \frac{V^{h+1}}{(h+1)!} n^t \right) V^d \\
&< 2\, e^{-V} [(3/4)^{\frac{1}{2}n} + n^t (3/4)^{\frac{1}{2}n}\, V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n}]\, V^d \\
&< \delta\, e^{-V} (1 + V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n}),
\end{aligned}$$

wenn nur n genügend gross ist.

5.8. Wir setzen

$$\xi(S, Q) = \frac{V^{-d}}{|\Delta|^n} \int \cdots \int \varrho(X_1) \ldots \varrho(X_d)\, \varrho\left(\sum_{i=1}^{d} v_{i\,d+1} X_i\right) \ldots \varrho\left(\sum_{i=1}^{d} v_{it} X_i\right) dX_1 \ldots dX_d, \quad (22)$$

wobei v_{ij} die Elemente von $M(Q)$ sind, $d = d(Q)$, $|\Delta| = |\Delta|(Q)$ wird in Lemma 17 erklärt.

LEMMA 20. (C. A. Rogers)

$$\xi(S, Q) \leqslant \xi(C, Q), \tag{23}$$

wobei C die Kugel im R_n mit Mittelpunkt 0 ist.

Beweis. Siehe [13], Theorem 1.

SATZ 13. *Sei $\delta > 0$. Dann ist*

$$\xi(C, Q) = O(\delta^n) \tag{24}$$

für alle bis auf endlich viele Q. ($\xi(C, Q)$ hängt natürlich von n ab.)

Die folgenden § 5.9 bis § 5.11 dienen dem Beweis von Satz 13. Hier bedeuten $\sigma(X)$ die charakteristische Funktion der Einheitskugel im R_n, und $V(C)$ deren Volumen.

5.9. Wir beginnen mit zwei Lemmas, die im Anhang bewiesen werden.

LEMMA 21. *Seien $a_1, a_2, \ldots, a_r$ reelle Zahlen, so dass*

$$0 < |a_r| \leqslant |a_{r-1}| \leqslant \cdots \leqslant |a_1| \leqslant 1.$$

Dann ist

$$V(C)^{-r} \int \cdots \int \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\, \sigma(a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r)\, d X_1 \ldots d X_r \prec \left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r a_r^2}\right)^{\frac{1}{2} n}.$$

Dabei bedeutet

$$c_n \prec d_n$$

$$\limsup_{n \to \infty} c_n^{1/n} / d_n^{1/n} \leqslant 1. \tag{25}$$

Insbesondere ist für $r > c_1(\delta, q)$ und ganzzahlige nicht verschwindende $b_1, \ldots, b_r$

$$V(C)^{-r} \int \cdots \int \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\, \sigma\left(\frac{b_1}{q} X_1 + \cdots + \frac{b_r}{q} X_r\right) d X_1 \ldots d X_r = O(\delta^n). \tag{26}$$

LEMMA 22. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 21 ist*

$$V(C)^{-r-1} \int \cdots \int \sigma(X_0)\, \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\, \sigma(a_1 X_0 + X_1) \ldots \sigma(a_r X_0 + X_r)\, d X_0\, d X_1 \ldots d X_r$$
$$\prec \left(\frac{4 r^2}{(r+1)^{r+1} a_r^2}\right)^{\frac{1}{2} n}.$$

Insbesondere ist für $r > c_2(\delta, q)$ und ganzzahlige nicht verschwindende $b_1, \ldots, b_r$

$$V(C)^{-r-1} \int \cdots \int \sigma(X_0) \ldots \sigma(X_r)\, \sigma\left(\frac{b_1}{q} X_0 + X_1\right) \ldots \sigma\left(\frac{b_r}{q} X_0 + X_r\right) \cdot d X_0 \ldots d X_r = O(\delta^n). \tag{27}$$

Im Beweis von Satz 13 dürfen wir uns auf $|\Delta| \leqslant \delta^{-1}$ beschränken. Insbesondere aber auf $q \leqslant \delta^{-1}$, wobei q der kleinste gemeinsame Nenner der v_{ij} von $M(Q)$. Wegen Lemma 21 gibt es daher ein $c_3(\delta)$, so dass (24) gilt, wenn in einer Spalte von $M(Q)$ mehr als $c_3(\delta)$ nicht verschwindende Elemente sind. Daraus folgt

5.10. LEMMA 23. *Sind in einer Spalte von $M(Q)$ mehr als $c_3(\delta)$ nicht verschwindende Elemente, dann gilt* (24).

LEMMA 24. *Ist M eine Matrix mit rationalen Elementen v_{ij}, $|v_{ij}| \leqslant 1$, deren Nenner $\leqslant \delta^{-1}$, mit keinen zwei gleichen Spalten, in einer Spalte höchstens $c_3(\delta)$ nicht verschwindende Elemente, und ist die Spaltenzahl*

$$S \geqslant c_4(r, \delta),$$

dann gibt es mindestens r nicht verschwindende Elemente

$$v_{i_1 j_1}, v_{i_2 j_2}, \ldots, v_{i_r j_r} \quad \begin{matrix} i_a \neq i_b \\ j_a \neq j_b \end{matrix} \quad (1 \leqslant a < b \leqslant 1),$$

wobei $$v_{i_a j_b} = 0, \text{ falls } a \neq b.$$

Beweis. Für jedes v_{ij} gibt es nur endlich viele Möglichkeiten. Es gibt daher ein $c_5(\delta)$, so dass für die Zahl der Zeilen

$$Z \geqslant 2\, c_3(\delta), \tag{28}$$

falls $S \geqslant c_5(\delta)$, denn keine zwei Spalten dürfen gleich sein. Sei nun $S \geqslant c_5(\delta)$ und wir bilden die aus der ersten $c_3(\delta)$ Zeilen von M gebildete Teilmatrix T. Die Zahl der verschiedenen Spalten von T ist beschränkt. Es gibt ein $c_6(\delta)$, so dass es höchstens $c_6(\delta)$ verschiedene Spalten in T gibt. Nun beweisen wir das Lemma mit

$$c_4(1, \delta) = c_5(\delta) \tag{29}$$

$$c_4(r+1, \delta) = 2\, c_4(r, \delta)\, c_6(\delta) \tag{30}$$

durch Induktion nach r.

Sei $S \geqslant c_4(r+1, \delta)$. Es gibt eine Zeile mit höchstens

$$c_3(\delta)\, S\, Z^{-1}$$

nicht verschwindenden Elementen. Sei $v_{11} \neq 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit in dieser Zeile und sei

$$v_{k1} = 0, \text{ falls } k > c_3(\delta)$$

$$v_{1k} = 0, \text{ falls } k > c_3(\delta)\, S\, Z^{-1}.$$

Die Teilmatrix M' der v_{ij} mit $i > c_3(\delta)$, $j > c_3(\delta)\, SZ^{-1}$ hat mindestens $S(1 - c_3(\delta)\, Z^{-1}) \geqslant \frac{1}{2} S$

Spalten wegen (28). Da höchstens $c_6(\delta)$ davon gleich sein dürfen, gibt es eine Teilmatrix M'' mit mindestens

$$\tfrac{1}{2}\, S/c_6(\delta) \geqslant c_4(r, \delta)$$

verschiedenen Spalten. Nach Induktionsannahme gibt es in M'' Elemente

$$v_{i_2 j_2}, \ldots, v_{i_{r+1} j_{r+1}}$$

von der gewünschten Eigenschaft, die mit v_{11} zu

$$v_{i_1 j_1}, v_{i_2 j_2}, \ldots, v_{i_{r+1} j_{r+1}}$$

ergänzt werden können.

LEMMA 25. *Sind in einer Zeile von $M(Q)$ mehr als $c_7(\delta)$ nicht verschwindende Elemente, dann gilt* (24).

Beweis. Wir setzen

$$c_7(\delta) = c_4(r, \delta),\; r = c_2(\delta, [\delta^{-1}]) - \log \delta/\log 2 + 1.$$

Seien etwa in der ersten Zeile die ersten $c_7(\delta)$ Elemente nicht verschwindend. Ist nun M die Teilmatrix der ersten $c_7(\delta)$ Spalten, so gibt es die im Lemma 24 beschriebenen Elemente

$$v_{i_1 j_1}, \ldots, v_{i_r j_r}.$$

Sind mehr als $-\log \delta/\log 2$ dieser v_{ij} nicht ganz rational, so ist $|\Delta| \geqslant 2^{-\log\delta/\log 2} = \delta^{-1}$ und (24) gilt. Man darf daher annehmen,

$$v_{i_1 j_1}, \ldots, v_{i_s j_s},$$

wobei $s = c_2(\delta, [\delta^{-1}])$, sind ganz rational. Dann schätzt man

$$\int \cdots \int \sigma(X_1)\, \sigma(X_{i_1}) \ldots \sigma(X_{i_s})\, \sigma\left(\frac{b_1}{q} X_1 + X_{i_1}\right) \ldots \sigma\left(\frac{b_s}{q} X_1 + X_{i_s}\right) d X_1\, d X_{i_1} \ldots d X_{i_s}$$

mit Lemma 22 ab und erhält wieder (24).

5.11. LEMMA 26. *Ist M eine Matrix, so dass in einer Spalte mindestens 2, aber höchstens $c_3(\delta)$ nicht verschwindende Elemente, in einer Zeile höchstens $c_7(\delta)$ nicht verschwindende Elemente sind, und ist die Gesamtzahl der nicht verschwindenden Elemente $E \geqslant c_8(r, \delta)$, so gibt es mindestens $2r$ nicht verschwindende Elemente*

$$v_{i_1 j_1}, v_{k_1 j_1};\quad v_{i_2 j_2}, v_{k_2 j_2}; \ldots ; v_{i_r j_r}, v_{k_r j_r},$$

$$i_a \neq k_b \begin{pmatrix} 1 \leqslant a \leqslant r \\ 1 \leqslant b \leqslant r \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i_a \neq i_b \\ k_a \neq k_b \\ j_a \neq j_b, \end{matrix} \quad (1 \leqslant a < b \leqslant r),$$

so dass $$v_{i_a j_b} = 0,\; v_{k_a j_b} = 0, \text{ falls } a \neq b.$$

Beweis. Ähnlich wie Lemma 24. Kann dem Leser überlassen werden.

Beweis von Satz 13. Wir setzen $r=2\log\delta/\log(3/4)+1-\log\delta/\log 2$. Sei die Anzahl der nicht verschwindenden Elemente von $M(Q)$

$$E \geqslant c_8(r,\delta)-(2\delta^{-1}+1)\log\delta/\log 2.$$

Man darf annehmen, höchstens $-(2\delta^{-1}+1)\log\delta/\log 2$ dieser Elemente sind in Spalten mit bloss einem nicht verschwindenden Element. Denn höchstens $2\delta^{-1}+1$ Spalten haben dieses eine nicht verschwindende Element in derselben Zeile, und höchstens $-\log\delta/\log 2$ Zeilen dürfen nicht ganze Elemente haben, die in solchen Ausnahmsspalten liegen, da sonst $|\Delta|>2^{-\log\delta/\log 2}=\delta^{-1}$.

Die Teilmatrix von M, die keine Spalten mit nur einem einzigen nicht verschwindenden Element besitzt, hat mindestens $c_8(r,\delta)$ nicht verschwindende Elemente. Wegen Lemma 23 und Lemma 25 darf man Lemma 26 anwenden. Man erhält so Elemente

$$v_{i_1 j_1},\ldots,v_{k_r j_r},$$

unter denen mindestens $s=2\log\delta/\log(4/3)$ ganzzahlige Paare sein müssen. Man schätzt nun

$$\int\cdots\int \varrho(X_{i_1})\,\varrho(X_{k_1})\ldots\varrho(X_{i_s})\,\varrho(X_{k_s})\,\varrho(X_{i_1}+X_{k_1})\ldots\varrho(X_{i_s}+X_{k_s})\,d\,X_{i_1}\ldots d\,X_{k_s}$$

durch Lemma 21, $r=2$ oder Theorem 5 in [12] ab und erhält (24).

Mit der Anzahl E der nicht verschwindenden Elemente ist die Zahl Z der Zeilen und, da keine zwei Spalten gleich sein dürfen, die Zahl der Spalten von M beschränkt. Dies beweist Satz 13.

5.12. *Beweis von Satz* 10 (*Anfang*). Sei im folgenden $0<\delta<1$ fest. Wir bilden die Menge U jener Äquivalenzklassen Q, für welche nicht

$$\xi(C,Q)=O(\delta^{2n}).$$

U ist nach Satz 13 endlich, und mit $Q\in U$, $Q'\leqslant Q$ ist auch $Q'\in U$. Wir bilden nach Lemma 16 Mengen $E_1,\ldots,E_n$; $E_1',\ldots,E_n'$. Bedingungen A und A' gelten.

Wir bilden nun noch $T=S\cap\Lambda-O$. T ist die Menge der Gitterpunkte $g\in\Lambda$, $g\neq 0$, die in S liegen. Wir dürfen Satz 12 anwenden, woraus

$$(-1)^h\alpha=(-1)^h\alpha(\Lambda)\leqslant(-1)^h+\sum_{k=1}^{h}(-1)^{k+h}\sigma_k+\sum_{k=2}^{h}(\sigma_k'-\sigma_k). \tag{31}$$

Wir wenden (31) für $h=n-1$ und $h=n-2$ an. Da

$$(-1)^h\left(1-V\pm\cdots+(-1)^h\frac{V^h}{h!}\right)\leqslant(-1)^h e^{-V}+V^{h+1}/(h+1)!$$
$$\leqslant(-1)^h e^{-V}+V^{n-1}n^{-n+1}e^n,$$

und infolge Lemma 17 ($Q=Q_0$) und Lemma 19 ist

$$(-1)^h m(A(S))\leqslant(-1)^h e^{-V}+e^{-V}\{V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}+(V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}+1)\delta\}+$$
$$+\left|\sum_{k=2}^{n-1}\int(\sigma'_k-\sigma_k)\,d\mu\right| \qquad (32)$$

für $n>n_2(\delta)=\max\limits_{Q\in U} n_1(\delta/K,Q)$, wobei $K=K(\delta)$ die Anzahl der Elemente von U bedeutet.

Im folgenden müssen wir noch die rechte Summe abschätzen.

5.13. $\sigma'_k(\Lambda)-\sigma_k(\Lambda)$ ist die Gesamtheit der k-tupel K_k, $K_k\in F'_k$, $K_k\notin F_k$. Das heisst, man hat $K_k\notin F_k$ und es ist $K_k=K_{k-1}\cup K_1$, wobei $K_{k-1}\in F_{k-1}$, $K_1\in F_1$. Daher ist

$$\sigma'_k(\Lambda)-\sigma_k(\Lambda)=\sum\begin{bmatrix}K_{k-1}\in F_{k-1}\\ K_1\in F_1\\ K_{k-1}\cup K_1\notin F_k\end{bmatrix}\prod_{g\in K_{k-1}\cup K_1}\varrho(g)$$

$$=\sum_{\substack{Q\in U\\ t(Q)\leqslant k-1}}\sum\begin{bmatrix}K_{k-1}\in Q\\ K_{k-1}\subset\Lambda,\ K_1\subset\Lambda\\ \text{Gibt kein } Q'\in U \text{ mit } K_{k-1}\cup K_1\in Q'\end{bmatrix}\prod_{g\in K_{k-1}\cup K_1}\varrho(g)=\sum_{\substack{Q\in U\\ t(Q)\leqslant k-1}}\omega_k(Q). \qquad (33)$$

LEMMA 27. *Ist wieder $t=t(Q)$, $d=d(Q)$, $w=k-t-1+d$, so ist für $n>n_3(\delta)$*

$$\int\omega_k(Q)\,d\mu\leqslant\frac{1}{(k-1-t)!}\sum_{\mathfrak{a}}f_k(\mathfrak{a}), \qquad (34)$$

wobei
$$f_k(\mathfrak{a})=\min\left(\delta^n V^w,\int\sum\begin{bmatrix}h_1,\dots,h_w\in\Lambda\\ \mathrm{Dim}\,(h_1,\dots h_w)=w\\ h_{w+1}=\sum_{i=1}^{w}a_i h_i\in\Lambda\end{bmatrix}\prod_{j=1}^{w+1}\varrho(h_j)\,d\mu\right). \qquad (35)$$

Dabei wird über alle $\mathfrak{a}(a_1,\dots,a_w)$ mit rationalen Elementen summiert.

Beweis. Jedes $K_{k-1}\in Q$ besteht aus $k-t-1+d=w$ linear unabhängigen Punkten $g_1,\dots,g_d;\ g_{t+1},\dots,g_{k-1}$ und den davon abhängigen Punkten

$$g_j=\sum_{i=1}^{d}v_{ij}g_i \qquad (d+1\leqslant j\leqslant t).$$

K_1 besteht aus einem Punkt g_k, der wegen $K_{k-1}\cup K_1\notin Q$ von $g_1,\dots,g_{k-1}$, also von $g_1,\dots,g_d;\ g_{t+1},\dots,g_{k-1}$, d. h. von $h_1,\dots,h_w$ linear abhängt; $g_k=h_{w+1}=\sum a_i h_i$. Nun ist infolge

$$K_{k-1} \cup K_1 \notin Q', \text{ wobei } Q' \notin U, \text{ für } n > n_3(\delta)$$

$$\int \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_d;\ g_{t+1}, \ldots, g_{k-1} \in \Lambda, \text{ lin. unabh.} \\ g_j = \sum_{i=1}^{d} v_{ij}\, g_i \in \Lambda\ (d+1 \leqslant j \leqslant t);\ g_k = \sum_{j=1}^{w} a_i\, h_i \in \Lambda \end{bmatrix} \prod_{j=1}^{k} \varrho\,(g_j)\, d\,\mu \leqslant \delta^n\, V^w.$$

Anderseits ist das obige Integral

$$\leqslant \int \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_w \in \Lambda, \text{ lin. u.} \\ h_{w+1} = \sum_{i=1}^{w} a_i\, h_i \in \Lambda \end{bmatrix} \prod_{j=1}^{w+1} \varrho\,(h_j)\, d\,\mu.$$

Aus Lemma 27 folgt noch

$$\int \omega_k\,(Q)\, d\,\mu \leqslant \frac{w+1}{(k-1-t)\,!} \sum_{\mathfrak{a}}^{*} f\,(\mathfrak{a}), \tag{36}$$

wobei jetzt über $\mathfrak{a}$ mit $|a_i| \leqslant 1$ summiert wird.

Lemma 28.

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{*} f\,(\mathfrak{a}) \leqslant c_\varrho\,(\delta)\,(4\sqrt{\delta})^n\, V^w. \tag{37}$$

Beweis. Wir betrachten drei Fälle A), B), C).

A) Wir summieren über $\mathfrak{a}$, deren kleinster gemeinsamer Nenner $q \leqslant \delta^{-\frac{1}{2}}$. Ist q gegeben, so gibt es für $\mathfrak{a}$ höchstens $(2\,\delta^{-\frac{1}{2}} + 1)^w$ Möglichkeiten. Die Gesamtheit dieser Terme gibt wegen $w \leqslant k - 1 < n$ $\delta^{-\frac{1}{2}}\,(2\,\delta^{-\frac{1}{2}} + 1)^w\, \delta^n\, V^w \leqslant (3\,\delta^{-\frac{1}{2}})^n\, \delta^n\, V^w < (4\,\sqrt{\delta})^n\, V^w$.

B) Nach Lemma 21 gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $C\,(\delta)$, so dass

$$\int \cdots \int \varrho\,(X_1) \ldots \varrho\,(X_C)\, \varrho\,(a_1 X_1 + \cdots + a_C X_C)\, d\,X_1 \ldots d\,X_C \leqslant (\sqrt{\delta})^n\, V^C$$

falls $|a_i| \geqslant \delta^{\frac{1}{2}}$.

Wir betrachten nun jene $\mathfrak{a}$ mit $q > \delta^{-\frac{1}{2}}$, für die es weniger als $C\,(\delta)$ Indices i mit $|a_i| \geqslant \delta^{\frac{1}{2}}$ gibt. Ist q vorgegeben, so gibt es

$$\leqslant (2\,q\,\delta^{\frac{1}{2}} + 1)^{w - C(\delta)}\,(2\,q + 1)^{C(\delta)}\, w^{C(\delta)}$$

solche $\mathfrak{a}$ bei gegebenen q, und es gilt

$$f\,(\mathfrak{a}) \leqslant V^w\, q^{-n}.$$

Daher ist insgesamt

$$\sum_{q > \delta^{-\frac{1}{2}}} q^{-n} (2\,q\,\delta^{\frac{1}{2}} + 1)^{w - C(\delta)}\,(2\,q + 1)^{C(\delta)}\, V^w < \sum_{q > \delta^{-\frac{1}{2}}} q^{-n}\,(3\,q\,\delta^{\frac{1}{2}})^{w - C(\delta)}\,(3\,q)^{C(\delta)}\, V^w$$

$$< \sum_{q > \delta^{-\frac{1}{2}}} 3^n\, q^{w-n}\, \delta^{\frac{1}{2}(w - C(\delta))}\, V^w \leqslant \sum_{q > \delta^{-\frac{1}{2}}} 3^n\, q^{-2}\, \delta^{\frac{1}{2}(n-2-C(\delta))}\, V^w \leqslant c_{10}\,(\delta)\, 4^n\, \delta^{\frac{1}{2}n}\, V^w.$$

C) Nun sei $q > \delta^{-\frac{1}{2}}$ und es gebe mindestens $C(\delta)$ a_i mit $|a_i| \geqslant \delta^{\frac{1}{2}}$. Es sind höchstens $(2q+1)^w$ solche $\mathfrak{a}$ vorhanden und es ist

$$f(\mathfrak{a}) \leqslant V^w q^{-n} \delta^{\frac{1}{2}n}.$$

So erhalten wir wegen $w \leqslant n-2$ insgesamt höchstens

$$4^n \delta^{\frac{1}{2}n} V^w.$$

5.14. *Beweis von Satz* 10 (*Ende*). Aus (33), (36) und (37) folgt für $n > n_3(\delta)$

$$\int (\sigma_k'(\Lambda) - \sigma_k(\Lambda))\, d\mu \leqslant c_\varrho(\delta) \sum_{\substack{Q \in U \\ t(Q) \leqslant k-1}} \frac{1}{(k-1-t)!} 4^n \delta^{\frac{1}{2}n} V^w (w+1),$$

wobei $w = k - 1 - t + d$, $t = t(Q)$, $d = d(Q)$.

$$J = e^V \sum_{k=2}^{n-1} \int (\sigma_k'(\Lambda) - \sigma_k(\Lambda))\, d\mu \leqslant c_\varrho(\delta)\, 4^n \delta^{\frac{1}{2}n} \sum_{Q \in U} \sum_{k=t(Q)+1}^{n-1} \frac{V^w}{(k-1-t)!} e^V (w+1). \tag{38}$$

Nun ist infolge $V \leqslant n-1$

$$\sum_{k=t(Q)+1}^{n-1} \frac{V^w}{(k-1-t)!} e^V \leqslant \sum_{k=t(Q)+1}^{n-1} \frac{n^w}{(k-1-t)!} e^n < n^d \sum_{k=1}^{n-t+1} \frac{n^k}{k!} e^n < n^d \left(e^n + \frac{n^{n-t}}{(n-t)!}\right) e^n. \tag{39}$$

Da
$$\lim_{n \to \infty} \left[n^d \left(e^n + \frac{n^{n-t}}{(n-t)!} \right) e^n \right]^{1/n} = e^2 < 10$$

ist, können wir, indem wir

$$\delta = \min\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon,\ 80^{-2}\right) \tag{40}$$

setzen, und wenn wir $n_0(\varepsilon)$ passend wählen, infolge (38) und (39) erreichen, dass

$$J < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

wenn $n > n_0(\varepsilon)$.

Aus (32) folgt nun

$$|m(A(S)) - e^{-V}| \leqslant e^{-V} [V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n} (1+\delta) + \delta + J] \leqslant e^{-V} [V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n} (1+\varepsilon) + \varepsilon].$$

6. Ein weiterer Mittelwertsatz; Mengen mit unendlichem Volumen

6.1. Unter $\overline{H}_m(\Lambda)$ verstehen wir die Menge jener m-tupel $g_1, \ldots, g_m$ von Gitterpunkten aus Λ, die sich zu einer Basis von Λ ergänzen lassen. In § 6.2 bis § 6.6 beweisen wir

SATZ 14. *Sei $\varrho(X_1, \ldots, X_m) \geqslant 0$ eine Borelmessbare Funktion im $m \times n$-dimensionalen Raum der m-tupel von Punkten $X_1, \ldots, X_m$, $m < n$. Seien $j_1, \ldots, j_t$ natürliche Zahlen $0 \leqslant t \leqslant m$, $j_1 + \cdots + j_t \leqslant m$.*

Setzen wir zur Bequemlichkeit $j_0 = 0$, so ist

$$J = \int \sum \left[\begin{array}{l} h_1, \ldots, h_m;\ \mathrm{Dim}\,(h_1, \ldots, h_m) = m \\ (h_{j_0+j_1+\cdots+j_{k-1}+1}, \ldots, h_{j_0+j_1+\cdots+j_{k-1}+j_k}) \in \bar{H}_{j_k}(\Lambda) \\ \qquad (1 \leqslant k \leqslant t) \end{array}\right] \varrho\,(h_1, \ldots, h_m)\, d\,\mu$$

$$= \prod_{k=1}^{t} \left(\prod_{i=0}^{j_k - 1} \zeta\,(n-i) \right)^{-1} \int \cdots \int \varrho\,(X_1, \ldots, X_m)\, d\,X_1 \ldots d\,X_m. \tag{1}$$

Im Falle $t = 0$ fällt das Produkt weg und wir erhalten (0.3), für $t = 1$, $j_1 = m$ (0.5). Für $t = 2$, $j_1 = j_2 = 1$ erhält man Formel (53) aus [11].

In § 6.7 bis § 6.9 zeigen wir

SATZ 15. *Sei $\varrho\,(X) \geqslant 0$ eine beschränkte, Borel-messbare Funktion, die für alle Punkte X des R_n definiert ist.*

A. *Die Summe*

$$\sum_{g \in A\Lambda^0} \varrho\,(g) \tag{2}$$

ist endlich für fast alle Matrizen A, falls das Integral

$$\int \varrho\,(X)\, d\,X \tag{3}$$

endlich ist $(n \geqslant 1)$,

B. *Die Summe*

$$\sum_{(g_1, \ldots, g_m) \in \bar{H}_m(A\Lambda_0)} \varrho\,(g_1) \ldots \varrho\,(g_m) \tag{4}$$

divergiert für fast alle A, falls das Integral (3) *divergiert und falls $n \geqslant 2\,m + 1$.*

„Fast alle" verstehen wir dabei im Sinne der durch $d\,s^2 = \sigma\,(d\,A'\,d\,A) = \sum_{i,j=1}^{n} (d\,a_{ij})^2$ eingeführten n^2-dimensionalen euklidischen Metrik.

Der A-Teil des Satzes wurde für $n \geqslant 2$ von Rogers ([11], Th. 6); für $n = 1$ von Lekkerkerker ([6, I], Th. 2) gegeben. Auch der B-Teil wurde für $m = 1$, $n \geqslant 3$ von Rogers bewiesen. Auf $m = 1$, $n = 2$ ist Rogers' Methode nicht anwendbar, da sein Theorem 5 nur für $n \geqslant 3$ gültig ist. Trotz meiner Bemühungen konnte ich in diesem Fall keine Entscheidung erzielen(1). Für $m = 1$, $n = 1$, wäre der B-Teil falsch ([6, I], Th. 3). Theorem 10 in [6, II], das das Gegenteil von B behauptet, ist nicht stichhältig.

Wir brauchen also nur den B-Teil zu beweisen. Der Beweis wird sich eng an [11] halten.

(1) In einer bei den Trans. Amer. Math. Soc. eingereichten Arbeit „A metrical theorem in geometry of numbers" konnte ich inzwischen zeigen, dass der Satz auch für $m = 1$, $n = 2$ gilt.

6.2. Unter U, U_i, V verstehen wir eigentliche unimodulare Transformationen. Seien die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt.

Wir setzen
$$v = \begin{cases} t, \text{ falls } j_1 + \cdots + j_t = m \\ t+1 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{5}$$

Ist $v = t+1$, so setzen wir noch $j_v = m - j_1 - \cdots - j_t$. Stets ist $j_1 + \cdots + j_v = m$.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$i_k = \sum_{l=0}^{k} j_l \qquad (0 \leqslant k \leqslant v). \tag{6}$$

Nun führen wir verschiedene Äquivalenzrelationen ein. Dabei sind $g, h, \ldots$ Punkte aus Λ^0, also Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

1.
$$(h_1, \ldots, h_m) \sim (h_1', \ldots, h_m'),$$

falls es ein U gibt, so dass $\quad U h_i = h_i' \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$

2. Wir führen v Äquivalenzrelationen ein durch

$$(g_{i_{k-1}+1}, \ldots, g_{i_k}) \sim (k) \sim (g_{i_{k-1}+1}', \ldots, g_{i_k}'),$$

falls es ein U gibt, so dass $\quad U g_u = g_u' \quad (i_{k-1} < u \leqslant i_k).$

Dabei ist k fest gegeben, $1 \leqslant k \leqslant v$.

Jeder Äquivalenzklasse ordnen wir einen Repräsentanten $(g_{i_{k-1}+1}, \ldots, g_{i_k})$ zu, dessen Punkte von den Einheitsvektoren $E_{i_{k-1}+1}, \ldots, E_{i_k}$ aufgespannt werden.

3. Wir setzen $\quad (g_1, \ldots, g_m) \sim\sim (g_1', \ldots, g_m'),$

falls alle $\sim (k) \sim$ Äquivalenzrelationen zugleich gelten. (Aber nicht notwendig mit demselben U.)

4.
$$(U_1, \ldots, U_v) \cong (U_1', \ldots, U_v'),$$

falls es ein V gibt, so dass

$$V U_k E_j = U_k' E_j \qquad (i_{k-1} < j \leqslant i_k,\ 1 \leqslant k \leqslant v).$$

Lemma 29.

$$(h_1, \ldots, h_m) = (U_1 g_1, \ldots, U_1 g_{i_1}, U_2 g_{i_1+1}, \ldots, U_2 g_{i_2}, \ldots, U_v g_{i_{v-1}+1}, \ldots, U_v g_m) \tag{7}$$

durchläuft genau ein Repräsentantensystem $\sim$, *wenn* $(g_1, \ldots, g_m)$ *ein Repräsentantensystem* $\sim\sim$ *und* $(U_1, \ldots, U_v)$ *ein Repräsentantensystem* $\cong$ *durchlaufen.*

Beweis. Durch $h_{i_{k-1}+1}, \ldots, h_{i_k}$ ist auch $g_{i_{k-1}+1}, \ldots, g_{i_k}$ modulo $\sim (k) \sim$ gegeben. Daher ist durch $(h_1, \ldots, h_m)$ auch $(g_1, \ldots, g_m)$ gegeben, wenn man vereinbart, dass $g_{i_{k-1}+1}, \ldots, g_{i_k}$ der jeweilige Repräsentant der Klasse mod $\sim (k) \sim$ ist. Offenbar gibt es ein $(U_1, \ldots, U_t)$, so dass (7) gilt.

Ist nun $(h_1, \ldots, h_m) \sim (h'_1, \ldots, h'_m)$, so wird $(g_1, \ldots, g_m) = (g'_1, \ldots, g'_m)$. Es ist aber auch $(U_1, \ldots, U_v) \cong (U'_1, \ldots, U'_v)$. Denn aus

$$(U_1 g_1, \ldots, U_v g_m) \sim (U'_1 g_1, \ldots, U'_v g_m)$$

folgt wegen unserer Wahl der Repräsentanten

$$(U_1 E_1, \ldots, U_v E_m) \sim (U'_1 E_1, \ldots, U'_v E_m),$$

woraus
$$(U_1, \ldots, U_v) \cong (U'_1, \ldots, U'_v).$$

Daraus folgt Lemma 29.

6.3. Zu jedem m-tupel $g_1, \ldots, g_m$, $m \leqslant n$, $g_i \in \Lambda^0$, gibt es ein U, so dass

$$U g_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} E_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{8}$$

Wir setzen nun
$$D(g_1, \ldots, g_m) = |\operatorname{Det}|c_{ij}||. \tag{9}$$

D hängt nicht von U ab.

Nach dem Lemma in [17, II] gibt es genau $\varrho_m(r)$ (1) Äquivalenzklassen von m-tupeln mit Determinante r im R_m (mod $\sim$). Es gibt dann auch

$$\varrho_m(r)$$

Äquivalenzklassen (mod $\sim$) von m-tupeln mit $D(g_1, \ldots, g_m) = r$ im R_n. Ebenso gibt es

$$\varrho_{j_k}(r)$$

Äquivalenzklassen (mod $\sim (k) \sim$) von j_k-tupeln $(g_{i_{k-1}+1}, \ldots, g_{i_k})$ mit

$$D(g_{i_{k-1}+1}, \ldots, g_{i_k}) = r.$$

Wir setzen schliesslich

$$D(U_1, \ldots, U_v) = D(U_1 E_1, \ldots, U_v E_m). \tag{10}$$

Mit $\varrho(r)$ bezeichnen wir die Zahl der Äquivalenzklassen (mod $\cong$); für welche

$$D(U_1, \ldots, U_v) = r.$$

(1) Definition (1.7).

Ist $$D(g_{i_{k-1}}, \ldots, g_{i_k}) = r_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant v)$$

und $$D(U_1, \ldots, U_v) = r,$$

so ist $$D(U_1 g_1, \ldots, U_v g_m) = r \prod_{k=1}^{v} r_k. \tag{11}$$

6.4. LEMMA 30.

$$\prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i) \Big/ \prod_{k=1}^{t} \left(\prod_{i=0}^{j_k - 1} \zeta(n-i) \right) = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{\infty} \dfrac{\varrho(r)}{r^n}, & \textit{falls } v = t \\ \left(\sum\limits_{r=1}^{\infty} \dfrac{\varrho(r)}{r^n} \right) \left(\sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{\varrho_{j_v}(s)}{s^n} \right) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es ist $$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho_s(r)}{r^n} = \prod_{i=0}^{s-1} \varrho(n-i),$$

wie der Leser als Übung nachweisen kann. Aus (11) und Lemma 29 folgt

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho_m(r)}{r^n} = \prod_{k=1}^{v} \left(\sum_{r_k=1}^{\infty} \frac{\varrho_{j_k}(r_k)}{r_k^n} \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho(r)}{r^n} \right).$$

$$\prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i) = \prod_{k=1}^{v} \left(\prod_{i=0}^{j_k-1} \zeta(n-i) \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho(r)}{r^n} \right).$$

Ist $v = t$, so sind wir fertig. Ist aber $v = t + 1$, so wird

$$\prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i) = \prod_{k=1}^{t} \left(\prod_{i=0}^{j_k-1} \zeta(n-i) \right) \left(\sum_{r_v=1}^{\infty} \frac{\varrho_{j_v}(r)}{r_v^n} \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho(r)}{r^n} \right).$$

6.5. Wir erinnern uns jetzt daran, dass

$$\int \varrho(\Lambda)\, d\mu$$

eine Abkürzung für $$\int_F \varrho(A\Lambda^0)\, d\mu(A)$$

ist, wobei über den Raum die Matrizen A mit Determinante 1 integriert wird. F ist ein Fundamentalbereich in diesem Raum ([19], [7]).

LEMMA 31.

$$\int_F \sum_{(h_1, \ldots, h_m) \in K} \varrho(A h_1, \ldots, A h_m)\, d\mu(A) = k^{-n} \prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i)^{-1} \int \cdots \int \varrho(X_1, \ldots, X_m)\, dX_1 \ldots dX_m,$$

wenn über alle m-tupel einer Äquivalenzklasse K (mod $\sim$) summiert wird. K sei so, dass $D(h_1, \ldots, h_m) = k$ für $(h_1, \ldots, h_m) \in K$.

Beweis. Im Falle $k=1$ ist unser Lemma richtig, denn in diesem Falle ist $K=\overline{H}_m(\Lambda^0)$, das heisst die Menge jener m-tupel, die sich zu einer unimodularen Matrix ergänzen lassen, und nach [17, II], Satz 1 und [7] ist

$$\int_F \sum_{(h_1,\ldots,h_m)\in \overline{H}_m(\Lambda^0)} \varrho(A h_1,\ldots,A h_m)\,d\mu(A)$$
$$=\prod_{i=0}^{m-1}\zeta(n-i)^{-1}\int\cdots\int\varrho(X_1,\ldots,X_m)\,dX_1\ldots dX_m. \qquad (12)$$

Im allgemeinen gibt es ein $(f_1,\ldots,f_m)\in K$, so dass

$$f_i=\sum_{j=1}^m c_{ij}e_j \qquad (1\leqslant i\leqslant m),\ |\mathrm{Det}\,|c_{ij}||=k.$$

Das allgemeine $(g_1,\ldots,g_m)\in K$ ist dann von der Gestalt

$$g_i=\sum_{j=1}^m c_{ij}h_i \qquad (1\leqslant i\leqslant m),$$

wobei $(h_1,\ldots,h_m)\in\overline{H}_m(\Lambda^0)$. Infolgedessen ist

$$\int_F \sum_{(g_1,\ldots,g_m)\in K}\varrho(A g_1,\ldots,A g_m)\,d\mu(A)$$
$$=\prod_{i=0}^{m-1}\zeta(n-i)^{-1}\int\cdots\int\varrho\left(\sum_{j=1}^m c_{1j}X_j,\ldots,\sum_{j=1}^m c_{mj}X_j\right)dX_1\ldots dX_m.$$

Unsere Behauptung folgt nach einer Variablentransformation.

6.6. *Beweis von Satz* 14. Offenbar ist

$$J=\int\sum\begin{bmatrix} h_1,\ldots,h_m;\ \mathrm{Dim}\,(h_1,\ldots,h_m)=m\\ (h_{i_{k-1}+1},\ldots,h_{i_k})\in\overline{H}_{j_k}(\Lambda^0)\\ (1\leqslant k\leqslant t)\end{bmatrix}\varrho(A h_1,\ldots,A h_m)\,d\mu(A).$$

Wir haben über jene m-tupel $h_1,\ldots,h_m$ zu summieren, welche in Äquivalenzklassen liegen, für welche

$$(h_{i_{k-1}+1},\ldots,h_{i_k})\in\overline{H}_{j_k}(\Lambda^0)\qquad(1\leqslant k\leqslant t).$$

Nach Lemma 29 kommen Äquivalenzklassen von m-tupeln

$$(U_1g_1,\ldots,U_1g_{i_1},U_2g_{i_1+1},\ldots,U_2g_{i_2},\ldots,U_v g_{i_{v-1}+1},\ldots,U_v g_m)$$

in Betracht, bei welchen

$$(g_{i_{k-1}+1},\ldots,g_{i_k})\in\overline{H}_{j_k}(\Lambda^0)\qquad(1\leqslant k\leqslant t).$$

Ist zunächst $v=t$, so ist also $(g_1, \dots, g_m)$ (mod $\sim\sim$) bestimmt, wogegen $(U_1, \dots, U_v)$ willkürlich ist. Weil in diesem Falle

$$D(U_1 g_1, \dots, U_v g_m) = D(U_1, \dots, U_v),$$

ist unter Benutzung von Lemma 31

$$J = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varrho(r)}{r^n} \prod_{i=0}^{m-1} \varrho(n-i)^{-1} \int \cdots \int \varrho(X_1, \dots, X_m)\, dX_1 \dots dX_m.$$

Satz 14 folgt nun aus Lemma 30.

Ist $v=t+1$, so ist nicht nur $(U_1, \dots, U_v)$, sondern auch $(g_{i_t+1}, \dots, g_{i_v})$ willkürlich und

$$D(U_1 g_1, \dots, U_v g_m) = D(U_1, \dots, U_m)\, D(g_{i_t+1}, \dots, g_m).$$

Daraus folgt

$$J = \sum_{r=1}^{m} \frac{\varrho(r)}{r^n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varrho_{j_v}(s)}{s^n} \prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i)^{-1} \int \cdots \int \varrho(X_1, \dots, X_m)\, dX_1, \dots, dX_m.$$

6.7. Lemma 32. *Sei $\varrho(X)$ so gegeben wie in Satz 15. Es gibt dann also ein K, so dass $0 \leqslant \varrho(X) \leqslant K$. Falls $n \geqslant 2m+1$ und falls* (3) *konvergiert, ist*

$$\int \Bigg[\sum_{(g_1, \dots, g_m) \in \bar{H}_m(\Lambda)} \varrho(g_1) \dots \varrho(g_m) \Bigg]^2 d\mu = \prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i)^{-2} V^{2m} + O(1 + V^{2m-1}).$$

Hier ist $V = \int \varrho(X)\, dX$ und das O-symbol ist bei gegebenem m, n, K gleichmässig für alle $\varrho(X)$ mit $0 \leqslant \varrho(X) \leqslant K$.

Beweis.

$$0 < \Bigg[\sum_{(g_1, \dots, g_m) \in \bar{H}_m(\Lambda)} \varrho(g_1) \dots \varrho(g_m) \Bigg]^2 - \sum \begin{bmatrix} (g_1, \dots, g_m) \in \bar{H}_m(\Lambda) \\ (h_1, \dots, h_m) \in \bar{H}_m(\Lambda) \\ \operatorname{Dim}(g_1, \dots, h_m) = 2m \end{bmatrix} \varrho(g_1) \dots \varrho(h_m) \tag{13}$$

$$< \sum \begin{bmatrix} f_1, \dots, f_{2m} \\ \operatorname{Dim}(f_1, \dots, f_{2m}) \leqslant 2m-1 \end{bmatrix} \varrho(f_1) \dots \varrho(f_{2m}).$$

Daraus schliesst man mit Hilfe von Satz 14

$$\left| \int \Bigg[\sum_{(g_1, \dots, g_m) \in \bar{H}_m(\Lambda)} \varrho(g_1) \dots \varrho(g_m) \Bigg]^2 d\mu - \prod_{i=0}^{m-1} \zeta(n-i)^{-2} V^{2m} \right|$$

$$< \int \sum \begin{bmatrix} f_1, \dots, f_{2m} \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(f_1, \dots, f_{2m}) \leqslant 2m-1 \end{bmatrix} \varrho(f_1) \dots \varrho(f_{2m})\, d\mu \tag{14}$$

$$= \sum_{l=1}^{2m-1} \int \sum \begin{bmatrix} f_1, \dots, f_{2m} \in \Lambda \\ \operatorname{Dim}(f_1, \dots, f_{2m}) = l \end{bmatrix} \varrho(f_1), \dots, \varrho(f_{2m})\, d\mu = \sum.$$

Die Konvergenz der auftretenden Integrale wurde in [16] nachgewiesen. In Formel (21) von [16] wird (in der dortigen Bezeichnung)

$$\int \cdots \int \varrho \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d_{i1}}{q} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \frac{d_{ik}}{q} X_i \right) d X_1, \ldots, d X_m$$

gleich $O(1)$ gesetzt. In unserem Falle kann man die auftretenden Integrale

$$\int \cdots \int \varrho \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{d_{i1}}{q} X_i \right) \ldots \varrho \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{d_{ik}}{q} X_i \right) d X_1 \ldots d X_l \qquad (k = 2m)$$

durch

$$K^{k-l} \int \cdots \int \varrho (X_1) \ldots \varrho (X_l) \, d X_1 \ldots d X_l$$

abschätzen. Daher ist

$$\sum = O \left(\sum_{l=1}^{2m-1} V^l \right) = O (1 + V^{2m-1}).$$

6.8. Lemma 33. *Gelten die Voraussetzungen von Satz* 15, *so haben, wenn* (3) *unendlich ist, die Matrixen A mit Determinante* 1, *für welche*

$$\sum_{(g_1, \ldots, g_m) \in \bar{H}_m (\Lambda^o)} \varrho (A g_1) \ldots \varrho (A g_m)$$

konvergiert, Mass null im Sinne des Siegel'schen Masses.

Beweis. Sei

$$\varrho_R (X) = \begin{cases} \varrho (X), & \text{falls } |X| \leqslant R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bilden $m_R = \int \varrho_R (X) \, d X$. Angenommen, es gäbe ein $M > 0$ und eine Teilmenge $C_\varepsilon \in F$ mit Siegel'schem Mass $\varepsilon > 0$ (wobei F der Fundamentalbereich im Raum der Matrizen mit Determinante 1 ist [19]), so dass

$$\sum_{(g_1, \ldots, g_m) \in \bar{H}_m (\Lambda^o)} \varrho (A g_1) \ldots \varrho (A g_m) \leqslant M$$

für alle $A \in C_\varepsilon$. Ist R so gross, dass

$$m_R^m \prod_{i=0}^{m-1} \zeta (n-i)^{-1} > M, \tag{15}$$

dann ist für alle $A \in C_\varepsilon$

$$m_R^m \prod_{i=0}^{m-1} \zeta (n-i)^{-1} - \sum_{(g_1, \ldots, g_m) \in \dot{H}_m} \varrho_R (A g_1) \ldots \varrho_R (A g_m) > m_R^m \prod_{i=0}^{m-1} \zeta (n-i)^{-1} - M > 0.$$

Daher

$$\int\limits_{C_\varepsilon}\Bigg[\sum_{(g_1,\ldots,g_m)\in \overline{H}_m}\varrho_R(A g_1)\ldots\varrho_R(A g_m)-\prod_{i=0}^{m-1}\zeta(n-i)^{-1}m_R^m\Bigg]^2 d\mu(A) \geqslant \left(m_R^m\prod_{i=0}^{m-1}\zeta(n-i)^{-1}-M\right)^2\varepsilon. \tag{16}$$

Anderseits folgt aus dem Satz 14 und Lemma 32

$$\int\limits_{F}\Bigg[\sum_{(g_1,\ldots,g_m)\in \overline{H}_m}\varrho_R(A g_1)\ldots\varrho_R(A g_m)-\prod_{i=0}^{m-1}\zeta(n-i)^{-1}m_R^m\Bigg]^2 d\mu(A)=O(m_R^{2m-1}).$$

Dies gibt, wenn R und daher m_R genügend gross ist, einen Widerspruch zu (16).

6.9. *Beweis von Satz* 15. Unser Ergebnis folgt aus Lemma 33 und der folgenden Gleichung von Rogers ([11], Lemma 2)

$$\int\Bigg[\begin{matrix}A \text{ in } C\\ 0\leqslant |A|\leqslant N\end{matrix}\Bigg]\sigma(A\Lambda^0)\,dA = c(n)\int_0^N \nu^{n-1}\left\{\int\limits_F \sigma(\nu^{1/n}A\Lambda^0)\,d\mu(A)\right\}d\nu. \tag{17}$$

Hierbei ist C der Kegel jener A, welche $A\in\lambda F$ für ein $\lambda\geqslant 0$ leisten. Somit divergiert (4) für fast alle A in C. Da aber jedes beliebige A von der Form $A=A'U$, wobei $A'\in C$, ist (4) für fast alle A divergent.

7. Überdeckungen durch Figurengitter

7.1. Sei S eine Borelmenge mit charakteristischer Funktion ϱ, Λ ein Punktgitter im R_n. Nach Hadwiger bezeichnen wir die Vereinigung aller Mengen der Form

$$S+g, \qquad \text{wobei } g\in\Lambda,$$

als Figurengitter $F(S,\Lambda)$. Hierbei ist $S+g$ die Menge aller Punkte $X+g$, wobei $X\in S$. Ein Figurengitter bedeckt den ganzen Raum oder nur einen Teil davon. Ebenso wie in [14] und [15] sei $\varepsilon(S,\Lambda)$ die Dichte der Menge jener Punkte, die nicht in $F(S,\Lambda)$ liegen. Von Rogers stammt die Idee, die mit $\varepsilon(S,\Lambda)$ und Überdeckungen des Raumes zussammenhängenden Probleme ähnlich zu behandeln wie die mit $\alpha(\Lambda)$ und der kritischen Determinante zusammenhängenden.

Man kann einige der bisher gewonnenen Sätze übertragen. Da alles analog zu früheren Überlegungen ist, werden wir die Beweise zu den folgenden Sätzen meistens nur skizzieren.

7.2. Zunächst definieren wir

$$M(S)=\int \varepsilon(S,\Lambda)\,d\mu. \tag{1}$$

Genau wie für $m(A(S))$ gilt

$$0 \leqslant M(S) \leqslant 1,$$
$$M(S_1) \leqslant M(S_2), \text{ falls } S_1 \supseteqq S_2,$$
$$M(S) \geqslant 1 - V(S).$$

Schliesslich ist nach Theorem 1 in [14]

$$M(S) \leqslant 1 - V(S) + \tfrac{1}{2} V^2(S). \tag{2}$$

Auch gilt

LEMMA 4*. *$M(S)$ ist stetig in der durch (2.6) definierten Topologie.*

Wir führen wieder eine Ordnung der Punkte des R_n ein. Unter $S\langle X\rangle$ verstehen wir die Menge jener Y, die

$$X + Y \in S, \qquad X + Y < X$$

erfüllen.

SATZ 2*.
$$M(S) = 1 - \int \varrho(X)\, m(A(S\langle X\rangle))\, dX.$$

Beweis von Satz 2.* Sei

$$\alpha(\Lambda, X) = \begin{cases} 1, & \text{falls } X \notin F(S, \Lambda). \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Sei weiter (Λ) ein Fundamentalparallelogram des Gitters Λ.

Dann ist
$$\varepsilon(S, \Lambda) = \int_{(\Lambda)} \alpha(\Lambda, X)\, dX \tag{4}$$

und
$$M(S) = \int \int_{(\Lambda)} \alpha(\Lambda, X)\, dX\, d\mu. \tag{5}$$

Nun ist

$$\alpha(\Lambda, X) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum \begin{bmatrix} g_1, \ldots, g_k \in \Lambda \\ g_i \neq g_k, \\ \text{falls } i \neq k \end{bmatrix} \varrho(g_1 + X) \ldots, \varrho(g_k + X)$$

$$= 1 - \sum_{g_1 \in \Lambda} \varrho(g_1 + X) -$$

$$- \sum_{g_1 \in \Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_k \in \Lambda \\ h_i \neq h_k \text{ für } i \neq k \\ h_i \neq 0 \end{bmatrix} \varrho_{k+1}(g_1 + X, g_1 + X + h_1, \ldots, g_1 + X + h_k) \tag{6}$$

$$= 1 - \sum_{g_1 \in \Lambda} \varrho(g_1 + X) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum \begin{bmatrix} h_1, \ldots, h_k \in \Lambda \\ h_i \neq h_k \text{ für } i \neq k \\ h_i \neq 0 \end{bmatrix} \varrho_k(h_1, \ldots, h_k)\, [g_1 + X] \right\}.$$

Hierbei ist $\varrho_k(h_1, \ldots, h_k)$ $[g_1+X]$ das $\varrho_k(h_1, \ldots, h_k)$ für den Körper $S\langle g_1+X\rangle$. Vergleicht man (6) mit (2.7), so sieht man

$$\alpha(\Lambda, X) = 1 - \sum_{g_1 \in \Lambda} \varrho(g_1+X)\,\alpha(\Lambda)\,[g_1+X]. \tag{7}$$

So folgt
$$M(S) = \int_{(\Lambda)}\int \alpha(\Lambda, X)\, dX\, d\mu = 1 - \int\int_{R} \varrho(X)\,\alpha(\Lambda)\,[X]\, dX\, d\mu$$
$$= 1 - \int_{R} \varrho(X)\, m(A(S\langle X\rangle))\, dX.$$

7.3. Definition.

$$\nabla(S) = 2 \sup_{X_i \in S} F(X_1, X_2, X_3), \tag{8}$$

wobei $F(X_1, X_2, X_3)$ der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten X_1, X_2, X_3 ist.

Satz 6*. *Sei K eine konvexe Menge im R_2 mit $\nabla(K) \leqslant 1$. Dann ist*

$$M(S) = 1 - V + V^2/2\,\zeta(2). \tag{9}$$

Beispiele. Sei C der Kreis mit Radius $r = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$. Dies ist bekanntlich der kleinste Kreis, zu dem es ein Gitter Λ mit Determinante 1 gibt, so dass $\varepsilon(C, \Lambda) = 0$, das heisst, $F(S, \Lambda)$ bedeckt den ganzen Raum. Einsetzen in (9) ergibt

$$M(C) = (13 - 2\pi\sqrt{3})/9 \sim 0.232.$$

Für das Quadrat Q mit Seitenlänge 1 ist $M(Q) = 3/\pi^2 \sim 0.302$.

Beweis von Satz 6. Nach Satz 2* ist

$$M(S) = 1 - \int m(A(S\langle X\rangle))\,\varrho(X)\, dX.$$

Zur Berechnung von $m(A(S\langle X\rangle))$ kann man Satz 6 anwenden und erhält

$$m(A(S\langle X\rangle)) = 1 - \zeta(2)^{-1}\, V(S\langle X\rangle).$$

Nun ist
$$V(S\langle X\rangle) = \int_{Y<X} \varrho(Y)\, dY.$$

Alles zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} M(S) &= 1 - V + \zeta(2)^{-1} \int \varrho(X) \int_{Y<X} \varrho(Y)\, dY\, dX \\ &= 1 - V + \zeta(2)^{-1} \iint \varrho_2(X, Y)\, dX\, dY \\ &= 1 - V + V^2/2\,\zeta(2). \end{aligned}$$

7.4. SATZ 10*. *Ist* $V \leqslant n-1$ *und* $n > n_0(\varepsilon)$, *so ist*

$$M(S) = e^{-V}(1 - R^*), \tag{10}$$

wobei

$$|R^*| < V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n}(1+\varepsilon) + \varepsilon. \tag{11}$$

Beweisskizze zu Satz 10*. Der Beweis ist eine Verfeinerung des Beweises von Theorem 1 in [15], ebenso wie der Beweis von Satz 10 eine Verfeinerung der Beweismethode von Theorem 4 in [18] und Theorem 4 in [15] darstellt. Er soll in § 7.4 und § 7.5 skizziert werden.

Zunächst sind § 5.2 bis § 5.4 wortwörtlich zu übernehmen.

Ab § 5.5 sind einige Änderungen vorzunehmen.

DEFINITION. Wir nennen Punkte $g_1, \ldots, g_k$ linear abhängig* (l. a.*), falls es reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_k \neq 0, \ldots, 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{k} a_i g_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} a_i = 0. \tag{12}$$

Sonst heissen sie linear unabhängig* (l. u.*). Weiter nennen wir g_1 l. a.* von $g_1, \ldots, g_k$, falls eine Relation (12) mit $a_1 \neq 0$ besteht. Dann ist für passende $d_2, \ldots, d_k$

$$g_1 = \sum_{i=2}^{k} d_i g_i \qquad \sum_{i=2}^{k} d_i = 1.$$

Im folgenden ersetzen wir den Begriff l. a. von Kapitel 5 durch l. a.*. Unter dem Kern $\mathfrak{Q}^*$ von K_k verstehen wir die Menge jener $g \in K_k$, die von den anderen Punkten aut K_k l. a.* sind. Ähnlich definieren wir nun $t^*(K)$ als die Zahl der Elemente von $\mathfrak{Q}^*(K)$. Wir setzen

$$K_k \cong L_l,$$

falls $t^*(K_k) = t^*(L_l)$ und falls man die Elemente $g_1, \ldots, g_t$ aus $\mathfrak{Q}^*(K)$ und $h_1, \ldots, h_t$ aus $\mathfrak{Q}^*(L)$ so ordnen kann, dass

$$a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t = 0 \quad \text{und} \quad a_1 + \cdots + a_t = 0$$

genau dann gilt, wenn

$$a_1 h_1 + \cdots + a_t h_t = 0 \quad \text{und} \quad a_1 + \cdots + a_t = 0$$

ist. Auf Grund dieser Äquivalenzrelation definiert man nun Äquivalenzklassen Q^*. Insbesondere ist Q_0^* die Klasse der K mit $t^*(K)=0$.

In (5.17) und (5.18) ist noch $a_1+\cdots+a_t=0$ hinzuzufügen.

In (5.19) gelten noch die Gleichungen

$$v_{1j}+\cdots+v_{dj}=1 \qquad (d+1\leqslant j\leqslant t). \tag{13}$$

Aus (5.21) wird

$$\sum_{K_k\in Q^*}\prod\begin{bmatrix}g\in K_k\\ g\in\Lambda\end{bmatrix}\varrho(g)=\frac{1}{z(Q^*)}\frac{1}{(k-t)!}\sum\begin{bmatrix}g_1,\ldots,g_d;\ g_{t+1},\ldots,g_k\\ \text{l. u.* Punkte aus }\Lambda\\ g_j=\sum_{i=1}^{d}v_{ij}g_i\in\Lambda\ (d+1\leqslant j\leqslant t)\end{bmatrix}\prod_{i=1}^{k}\varrho(g_i). \tag{14}$$

7.5. Aus Lemma 17 wird

LEMMA 17*.

$$\int\limits_{(\Lambda)}\int\sum_{K_k\in Q^*}\prod\begin{bmatrix}g\in K_k\\ g\in\Lambda\end{bmatrix}\varrho(g+X)\,dX\,d\mu$$
$$=\frac{V^{k-t}}{(k-t)!}\frac{|\Delta|^{-n}}{z(Q^*)}\int\cdots\int\varrho(X_1)\ldots\varrho(X_d)\,\varrho\left(\sum_{i=1}^{d}v_{i\,d+1}X_i\right)\ldots\varrho\left(\sum_{i=1}^{d}v_{it}X_i\right)dX_1\ldots dX_d.$$

Beweis. Nach (14) ist

$$\sum_{K_k\in Q^*}\prod\begin{bmatrix}g\in K_k\\ g\in\Lambda\end{bmatrix}\varrho(g+X)$$
$$=\frac{1}{z(Q^*)}\frac{1}{(k-t)!}\sum_{g_1\in\Lambda}\sum\begin{bmatrix}h_2,\ldots,h_d;\ h_{t+1},\ldots,h_k\in\Lambda\\ \text{linear unabh. Punkte}\\ h_j=\sum_{i=2}^{d}v_{ij}h_i\in\Lambda\ (d+1\leqslant j\leqslant t)\end{bmatrix}\varrho(X+g_1)\prod_{i=2}^{k}\varrho(X+g_1+h_i).$$

Integration über (Λ) und Summation über $g_1\in\Lambda$ gibt ein Integral über den R_n. So erhält man

$$\frac{1}{z(Q^*)}\frac{1}{(k-t)!}\int\sum\begin{bmatrix}h_2,\ldots,h_d;\ h_{t+1},\ldots,h_k\in\Lambda\\ \text{linear unabhängig}\\ h_j=\sum_{i=2}^{d}v_{ij}h_i\in\Lambda\ (d+1\leqslant j\leqslant t)\end{bmatrix}\int\varrho(X)\prod_{i=2}^{k}\varrho(X+h_i)\,dX\,d\mu$$
$$=\frac{V^{k-t}}{(k-t)!}\frac{|\Delta'|^{-n}}{z(Q^*)}\int\cdots\int\varrho(X)\,\varrho(X+Y_2)\ldots\varrho(X+Y_d)\cdot$$
$$\cdot\varrho\left(X+\sum_{i=2}^{d}v_{i\,d+1}Y_i\right)\ldots\varrho\left(X+\sum_{i=2}^{d}v_{it}Y_i\right)dX\,dY_2\ldots dY_d$$
$$=\frac{V^{k-t}}{(k-t)!}\frac{|\Delta'|^{-n}}{z(Q^*)}\int\cdots\int\varrho(X_1)\ldots\varrho(X_d)\,\varrho\left(\sum_{i=1}^{d}v_{i\,d+1}X_i\right)\ldots\varrho\left(\sum_{i=1}^{d}v_{it}X_i\right)dX_1\cdots dX_d.$$

Hier ist $|\Delta'|$ die Determinante des Gitters jener ganzzahligen Punkte $(y_2, \ldots, y_d)$ im R_{d-1}, für welche

$$\sum_{i=2}^{d} v_{ij} y_i = \text{ganzzahlig} \qquad (d+1 \leqslant j \leqslant t).$$

Wegen (13) ist
$$\sum_{i=1}^{d} v_{ij} x_i = \sum_{i=2}^{d} v_{ij}(x_i - x_1) + x_1$$

und $|\Delta'| = |\Delta|$.

Lemma 18 und Lemma 19 sind leicht übertragbar. Satz 12* gilt umso mehr, als wir uns auf Q^* mit (13) beschränken. In Analogie zu § 5.12 nehmen wir jetzt $T^* = (S - X) \cap \Lambda$, wobei $S - X$ die Menge der Punkte Y mit $X + Y \in S$ ist. Wir erhalten

$$(-1)^h \alpha = (-1)^h \alpha(\Lambda, X) \leqslant (-1)^h + \sum_{k=1}^{h} (-1)^{k+h} \sigma_k + \sum_{k=2}^{h} (\sigma_k' - \sigma_k).$$

Mit Lemma 17*, $Q^* = Q_0^*$ und Lemma 19* erhält man weiter

$$(-1)^h M(S) \leqslant e^{-V}(1 + V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n})(1+\delta) + \sum_{k=2}^{n-1} \int \int_{(\Lambda)} (\sigma_k' - \sigma_k)\, dX\, d\mu,$$

falls $n \geqslant n_2(\delta)$.

Die Abschätzung der rechten Summe ist nun ähnlich wie in Kapitel 5 durchführbar, so dass Satz 10* folgt.

7.6. Satz 11*. *Sei $n > n_0$. Dann gibt es zu jedem konvexen Körper K im R_n eine Überdeckung des Raumes durch Figurengitter $F(K, \Lambda)$, wobei für die Dichte der Überdeckung*

$$\vartheta(K, \Lambda) = \frac{V(K)}{|\Lambda|} \leqslant (1+\eta)^n = (1.75 \ldots)^n. \tag{15}$$

η ist die reelle Nullstelle von

$$e \log \eta + \eta = 0. \qquad \eta \sim 0.75 \ldots (^1) \tag{16}$$

Beweisskizze von Satz 11.* Der Beweis folgt der Idee des Beweises von Theorem 2 in [15]. Wir dürfen annehmen, K habe das Volumen

$$V = r n,$$

wobei r die in § 5.1 definierte Zahl ist. Wir bemerken hier gleich

$$\eta = r e = e^{-r}.$$

Nach (2) ist
$$M(\eta K) \leqslant 1 - \eta^n V + \tfrac{1}{2} \eta^{2n} V^2$$

(1) Anmerkung bei der Korrektur. Satz 11* ist überholt durch die kürzlich erschienene Arbeit: C. A. Rogers, Lattice coverings of space, *Mathematika* 6 (1959), 33–39.

und nach Satz 10* ist, falls $n > n_0$ (1)

$$M(K) \leqslant 2\,e^{-V} + 2\,V^{n-1}\,n^{-n+1}\,e^n.$$

Es gibt daher für $n > n_0$ (1) ein Gitter Λ mit Determinante 1 und

$$\begin{aligned}\varepsilon(\eta K, \Lambda) + \varepsilon(K, \Lambda) &< 1 - \eta^n V + \tfrac{1}{2}\eta^{2n} V^2 + 2\,e^{-V} + 2\,V^{n-1}\,n^{-n+1}\,e^n \\ &= 1 - \eta^n r n + \tfrac{1}{2}\eta^{2n} r^2 n^2 + 2\,e^{-rn} + 2\,r^{n-1}\,e^n \\ &= 1 - \eta^n r n + \tfrac{1}{2}\eta^{2n} r^2 n^2 + 2\eta^n + 2\eta^n/r \\ &< 1\end{aligned}$$

wenn n gross genug ist. Alles weitere folgt wortwörtlich wie in § 1.3 von [15].

7.7. Definition. Wir sagen, X werde vom Figurengitter $F(S, \Lambda)$ k mal bedeckt, falls es genau k Gitterpunkte $g \in \Lambda$ gibt, so dass

$$X \in S + g.$$

Satz 15*. *Sei S eine Borelmenge mit charakteristischer Funktion $\varrho(X)$.*

A. *Fast jeder Punkt X wird von $F(S, \Lambda)$ nur endlich oft bedeckt, falls*

$$V(S) = \int \varrho(X)\,dX \tag{17}$$

endlich ist.

B. *Für fast jedes A (im Sinne von Satz 15) wird fast jeder Punkt X von $F(S, A\Lambda^0)$ unendlich oft überdeckt, falls (17) divergiert.*

Satz 15 ist eng verwandt mit Theorem II in Kapitel VII aus [2]. Siehe auch [1], Theoreme 1, 3.

Der A-Teil des Satzes ist trivial. Im Falle der Divergenz von (17) ist nach Satz 15

$$\sum_{g \in A\Lambda^0} \varrho(X - g)$$

divergent für fast alle A $(n \geqslant 3)$. Daher wird X für fast alle A von $F(S, A\Lambda^0)$ unendlich oft überdeckt. Umgekehrt wird daher für fast alle A fast jedes X von $F(S, A\Lambda^0)$ unendlich oft überdeckt.

Dieses Argument ist erst ab $n \geqslant 3$ brauchbar. Wir geben daher für den B-Teil einen einfacheren Beweis.

7.8. Definieren wir $\varrho_R(X)$ wie in § 6.8, so ist

$$\int_{(\Lambda)} \int \sum_{g \in \Lambda} \varrho_R(X - g)\,dX\,d\mu = \int \varrho_R(X)\,dX = m_R, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{(\Lambda)} \Big[\sum_{g\in\Lambda} \varrho_R(X-g)\Big]^2 dX\,d\mu \\ &= \int\int_{(\Lambda)} \sum_{\begin{bmatrix} g_1, g_2 \\ \in\Lambda\end{bmatrix}} \varrho_R(X-g_1)\,\varrho_R(X-g_1-g_2)\,dX\,d\mu \\ &= \int \Big[\sum_{g_2\in\Lambda} \int \varrho_R(X)\,\varrho_R(X-g_2)\,dX\Big]\,d\mu \\ &= \Big[\int \varrho_R(X)\,dX\Big]^2 = m_R^2.\end{aligned} \tag{19}$$

Lemma 33*. *Ist $V(S)$ unendlich, so ist für fast alle A mit Determinante* 1 *(„fast alle" im Sinne des Siegel'schen Masses) für fast alle X*

$$\sum_{g\in A\Lambda^0} \varrho(X-g)$$

divergent.

Beweis (indirekt): Angenommen, es gäbe ein $M>0$ und eine Menge C mit positivem Mass im Raum der A derart, dass für jedes $A\in C$ es eine Menge $D(A)$ mit positivem Mass im R_n gibt, so dass

$$\sum_{g\in A\Lambda^0} \varrho(X-g) < M \tag{20}$$

für $A\in C$, $X\in D(A)$. Man darf annehmen, $D(A)\subseteq(A\Lambda^0)$. Dann gibt es auch ein $\delta>0$ und eine Menge C_δ vom Mass δ im Raum der A derart, dass es für jedes $A\in C_\delta$ eine Menge $D_\delta(A)\subseteq(A\Lambda^0)$ von Mass δ gibt, so dass wieder (20) gilt.

Wir wählen nun R so gross, dass $m_R>M$. Dann wäre

$$\int\int_{(\Lambda)} [m_R - \sum_{g\in A\Lambda^0} \varrho_R(X-g)]^2\,dX\,d\mu > \delta^2(m_R-M)^2>0.$$

Anderseits ist nach (18) und (19)

$$\int\int_{(\Lambda)} [m_R - \sum_{g\in A\Lambda^0} \varrho_R(X-g)]^2\,dX\,d\mu = 0.$$

Beweis von Satz 15. Genau wie Satz 15 aus Lemma 33 folgt Satz 15* aus Lemma 33*.

Anhang

A. 1. Wir beweisen Lemma 21 in A. 2 bis A. 7, während in A. 8 und A. 9 Lemma 22 bewiesen wird. Lemma 21 ist eine Verallgemeinerung von Theorem 5 von Rogers [15], in welchem der Spezialfall $a_i = 1$ betrachtet wurde. Unser Beweis hält sich äusserst eng an die Methode von Rogers, ihn aber wegzulassen schien mir doch unangebracht.

A. 2. Zur Bequemlichkeit setzen wir $a_0 = 1$, so dass

$$1 = a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_r > 0.$$

Wir definieren

$$f(Z) = \int \cdots \int \sigma(Z + a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r)\, \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\, dX_1 \ldots dX_r. \tag{1}$$

Uns interessiert natürlich $f(0)$. Verstehen wir unter (ZT) das Skalarprodukt, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int f(Z)\, e^{2\pi i (ZT)}\, dZ \\
&\quad = \int \cdots \int \sigma(Z + a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r)\, \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\, e^{2\pi i (ZT)}\, dZ\, dX_1 \ldots dX_r \\
&\quad = \int \cdots \int \sigma(X_0) \ldots \sigma(X_r) \exp 2\pi i\, (a_0 (X_0 T) - \cdots - a_r (X_r T))\, dX_0 \ldots dX_r \\
&\quad = \prod_{k=0}^{r} \left\{ \int \sigma(X)\, e^{2\pi i a_k (XT)}\, dX \right\} \\
&\quad = \prod_{k=0}^{r} \left\{ \int \sigma(X) \cos(2\pi a_k (XT))\, dX \right\}.
\end{aligned}$$

Ist nun $$|T| = \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_n^2},$$

so folgt, genau wie bei Rogers,

$$\int \sigma(X) \cos(2\pi a_k (XT))\, dX = a_k^{-\frac{1}{2}n}\, |T|^{-\frac{1}{2}n}\, J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k |T|). \tag{2}$$

Daher $$\int f(Z)\, e^{2\pi i (ZT)}\, dZ = \prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n}\, |T|^{-\frac{1}{2}n}\, J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k |T|). \tag{3}$$

Nun ist, wie in Rogers' Beweis ausführlicher gezeigt wird,

$$\lim_{R\to\infty} \int e^{-|T|^2/R^2} \int f(Z)\, e^{2\pi i (ZT)}\, dZ\, dT = f(0). \tag{4}$$

Anderseits ist

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{R\to\infty} \int e^{-|T|^2/R^2} \int f(Z)\, e^{2\pi i (ZT)}\, dZ\, dT \\ &= \lim_{R\to\infty} \int e^{-|T|^2/R^2} \left[\prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n}\, |T|^{-\frac{1}{2}n} J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k |T|)\right] dT \\ &= \int |T|^{-\frac{1}{2}n(r+1)} \left[\prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k |T|)\right] dT \\ &= \int_0^\infty V n t^{n-1}\, t^{-\frac{1}{2}n(r+1)} \left[\prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k t)\right] dt \\ &= n V \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}n(r-1)-1} \left[\prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k t)\right] dt, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei V das Volumen der Kugel $|X| \leqslant 1$ im R_n bedeutet.

A. 3. Sei ζ eine Zahl $0 < \zeta < 1$ und sei $\xi > 0$ durch

$$\xi^4 = 1 - \zeta^2$$

definiert. Nun bilden wir

$$T_k = \frac{n}{4\pi a_k} \zeta \qquad (0 \leqslant k \leqslant r), \tag{6}$$

woraus

$$T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_r.$$

Ferner definieren wir $T_{-1} = 0$, $T_{r+1} = \infty$ und

$$\sum\nolimits_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} t^{-\frac{1}{2}n(r-1)-1} \left[\prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k t)\right] dt \qquad (0 \leqslant i \leqslant r+1). \tag{7}$$

Wenn es uns gelingt,

$$\sum\nolimits_i \prec \left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r a_r^2}\right)^{\frac{1}{2}n} V^{r-1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant r+1) \tag{8}$$

zu zeigen, so folgt daraus wegen (5) auch Lemma 21.

A. 4. Im Intervall $J_i = [T_{i-1}, T_i]$ schätzen wir den Integranden folgendermassen ab: zunächst folgt aus Watson [21], Seite 169 beziehungsweise 161

$$J_{\frac{1}{2}n}(x) < J_{\frac{1}{2}n}(\tfrac{1}{2}n) \cdot 1.5868,$$
$$J_{\frac{1}{2}n}(\tfrac{1}{2}n) < (\tfrac{1}{2}n)^{-\frac{1}{3}} \cdot 0.44731,$$

woraus

$$J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k t) < 1 \qquad (0 \leqslant k \leqslant r). \tag{9}$$

Wir setzen

$$y = \frac{4\pi}{n} t.$$

Dann ist für $t \in J_i$

$$a_k y \leqslant \frac{4\pi a_k}{n} T_i = \frac{a_k}{a_i} \zeta.$$

Ist $k \geqslant i$, so folgt $a_k y \leqslant \zeta < 1$. Für

$$J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k t) = J_{\frac{1}{2}n}(\tfrac{1}{2} n a_k y)$$

können wir für $k \geqslant i$ wegen $a_k y < 1$ eine Formel aus Watson [21], Seite 156 benützen und erhalten

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}n}(2\pi a_k t) &< \frac{a_k^{\frac{1}{2}n} y^{\frac{1}{2}n} \exp \frac{1}{2} n \sqrt{1 - a_k^2 y^2}}{(1 + \sqrt{1 - a_n^2 y^2})^{\frac{1}{2}n} (\pi n)^{\frac{1}{2}} (1 - a_k^2 y^2)^{\frac{1}{4}}} \\ &< \frac{a_k^{\frac{1}{2}n} y^{\frac{1}{2}n} \exp \frac{1}{2} n \sqrt{1 - a_k^2 y^2}}{(1 + \sqrt{1 - a_k^2 y^2})^{\frac{1}{2}n}}, \end{aligned} \qquad (t \in J_i,\ k \geqslant i) \tag{10}$$

denn

$$\frac{1}{(1 - a_k^2 y^2)^{\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{1}{\xi} < 1.$$

Im Intervall J_i $(0 \leqslant i \leqslant r+1)$ benützen wir nun (9) für die Faktoren im Produkt mit $k = 0, 1, \ldots, i-1$ (d. h. in J_0 benützen wir (9) gar nicht). Hingegen benützen wir (10) für die Faktoren mit $k = i, i+1, \ldots, r$ (d. h. in J_{r+1} benützen wir (10) gar nicht).

Insgesamt erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \Sigma_i &< \prod_{k=0}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} \int_{T_{i-1}}^{T_i} t^{-\frac{1}{2}ni} t^{-\frac{1}{2}n(r-i-1)-1} \prod_{k=i}^{r} \frac{a_k^{\frac{1}{2}n} y^{\frac{1}{2}n} \exp \frac{1}{2} n \sqrt{1 - a_k^2 y^2}}{(1 + \sqrt{1 - a_k^2 y^2})^{\frac{1}{2}n}} \, dt \\ &= \prod_{k=-1}^{i-1} a_k^{-\frac{1}{2}n} \left(\frac{4\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}n(r-i+1)} \int_{T_{i-1}}^{T_i} t^{-\frac{1}{2}ni} \exp \Bigg((n-1) \log t + \\ &\qquad + \frac{n}{2} \sum_{k=i}^{r} \left[\sqrt{1 - a_k^2 y^2} - \log\left(1 + \sqrt{1 - a_k^2 y^2}\right)\right] \Bigg) dt \qquad (i \leqslant r), \end{aligned} \tag{11}$$

wobei wir, um auch $i=0$ mitzuerfassen, $a_{-1}=1$ gesetzt haben. Weiter ist

$$\sum_{r+1} \prec \sum_{k=-1}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} \int_{T_r}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}n(r-1)-1}\, dt. \tag{12}$$

A. 5. Sei jetzt $i \leqslant r$. Wir bilden

$$\begin{aligned} g(t) &= (n-1)\log t + \frac{n}{2} \sum_{k=i}^{r} \left[\sqrt{1-a_k^2 y^2} - \log\left(1+\sqrt{1-a_k^2 y^2}\right)\right] \\ &= \frac{n}{r-i+1}\left\{\sum_{k=i}^{r}\left[\frac{n-1}{n}\log a_k t + \tfrac{1}{2}(r-i+1)\left[\sqrt{1-a_k^2 y^2} - \log\left(1+\sqrt{1-a_k^2 y^2}\right)\right]\right] \right. \\ &\qquad \left. - \frac{n-1}{n}\sum_{k=i}^{r}\log a_k\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Setzen wir
$$u = \frac{4\pi}{n} v,$$

$$h(v) = \frac{n-1}{n}\log v + \tfrac{1}{2}(r-i+1)\left[\sqrt{1-u^2} - \log\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)\right],$$

so ist
$$h'(v) = \frac{1}{2v}\left[(r-i+1)\sqrt{1-u^2} - (r-i-1+2/n)\right].$$

Ist zunächst $i<r$, so ist in $0<v<\frac{n}{4\pi}$ genau eine Nullstelle von $h'(v)$, nämlich

$$v = v_0 = \frac{n}{4\pi}\left(1-\left(\frac{r-i-1+2/n}{r-i+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\begin{aligned} h(v) \leqslant h(v_0) &= \frac{n-1}{n}\left[\log\frac{n}{4\pi} + \log\left(1-\left(\frac{r-i-1+2/n}{r-i+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(r-i+1)\left[\frac{r-i-1+2/n}{r-i+1} - \log\left(1+\frac{r-i-1+2/n}{r-i+1}\right)\right] \\ &< \log\frac{n}{4\pi} + \log\left(1-\left(\frac{r-i-1}{r-i+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\left[r-i-1-(r-i+1)\log\frac{2(r-i)}{r-i+1}\right] \\ &= \log\frac{n}{4\pi} + \tfrac{1}{2}\left[r-i-1+\log\frac{4(r-i)}{(r-i+1)^2} - (r-i+1)\log\frac{2(r-i)}{r-i+1}\right] \qquad (14) \\ &= \log\frac{n}{4\pi} + \tfrac{1}{2}\left[(r-i-1)(1-\log 2) + (r-i-1)\log(r-i+1) - (r-i)\log(r-i)\right] \\ &\leqslant \log\frac{n}{4\pi} + \tfrac{1}{2}\left[(r-1)(1-\log 2) + (r-1)\log(r+1) - r\log r\right], \end{aligned}$$

weil
$$(s-1)(1-\log 2)+(s-1)\log(s+1)-s\log s \tag{15}$$
mit s monoton wächst.

Ist hingegen $i=r$, so ist in $0<v<n/4\pi$ $h'(v)>0$ und
$$h(v)\leqslant h\left(\frac{n}{4\pi}\right)<\log\frac{n}{4\pi}.$$

Da der Ausdruck (15) positiv ist, gilt wieder (14). Daher gilt (14) für $i\leqslant r$.

Also erhalten wir
$$g(t)\leqslant n\log\frac{n}{4\pi}+\frac{n}{2}[(r-1)(1-\log 2)+(r-1)\log(r+1)-r\log r]$$
$$-\frac{n-1}{r-i+1}\sum_{k=i}^{r}\log a_k.$$

Da aber
$$-\sum_{k=i}^{r}\log a_k\leqslant-(r-i+1)\log a_r,$$
ist weiter
$$e^{g(t)}\prec\left(\frac{n}{4\pi}\right)^n\left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(r-1)}\left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r}\right)^{\frac{1}{2}n}a_r^{-n}\qquad(i\leqslant r). \tag{16}$$

A. 6. Nach (11) erhalten wir also, wenn wir noch
$$\prod_{k=-1}^{i-1}a_k^{-\frac{1}{2}n}\leqslant a_{i-1}^{-\frac{1}{2}ni}$$
berücksichtigen,
$$\sum\nolimits_i\prec a_{i-1}^{-\frac{1}{2}ni}a_r^{-n}\left(\frac{4\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}n(r-i-1)}\left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(r-1)}\left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}t^{-\frac{1}{2}ni}\,dt\qquad(i\leqslant r).$$

Ist nun $i>0$, so erhalten wir
$$\int_{T_{i-1}}^{T_i}t^{-\frac{1}{2}ni}\,dt<T_{i-1}^{-\frac{1}{2}ni+1}\prec\left(\frac{n}{4\pi a_{i-1}}\zeta\right)^{-\frac{1}{2}ni}\qquad(1\leqslant i\leqslant r).$$

Ist aber $i=0$, so ist
$$\int_{T_{i-1}}^{T_i}dt=\int_0^{T_0}dt=T_0=\frac{n}{4\pi a_0}\zeta\prec 1.$$

Daher ist allgemein

$$\sum_i \prec \left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r a_r^2}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{(\frac{1}{2}n)^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}n}}\right)^{r-1} \zeta^{-\frac{1}{2}nr} \qquad (i \leqslant r). \tag{17}$$

A. 7. Es bleibt noch $i=r+1$. Indem wir (12) benützen, beachten wir zunächst

$$\prod_{k=-1}^{r} a_k^{-\frac{1}{2}n} < a_r^{-\frac{1}{2}n(r+1)}$$

und

$$\int_{T_r}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}n(r-1)-1}\, dt < T_r^{-\frac{1}{2}n(r-1)} = \left(\frac{n}{4\pi a_r}\zeta\right)^{-\frac{1}{2}n(r-1)}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{r+1} &\prec \left(\frac{(4\pi)^{\frac{1}{2}n}}{n^{\frac{1}{2}n}}\right)^{r-1} a_r^{-n}\, \zeta^{-\frac{1}{2}n(r-1)} \\ &\prec \left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r a_r^2}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{(\frac{1}{2}n)^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{1}{2}n}}\right)^{r-1} \zeta^{-\frac{1}{2}nr}, \end{aligned} \tag{18}$$

weil

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{r-1} \leqslant \frac{(r+1)^{r-1}}{r^r}.$$

Da $0<\zeta<1$ beliebig, ist infolge (17) und (18)

$$\begin{aligned} \sum_i &\prec \left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r a_r^2}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}\right)^{r-1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant r+1) \\ &= \left(\frac{(r+1)^{r-1}}{r^r a_r^2}\right)^{\frac{1}{2}n} V^{r-1}. \end{aligned}$$

A. 8. Stellt E einen Einheitsvektor dar, so ist

$$\begin{aligned} J &= \int \cdots \int \sigma(X_0)\,\sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\,\sigma(a_1 X_0 + X_1) \ldots \sigma(a_r X_0 + X_r)\, dX_0\, dX_1 \ldots dX_r \\ &= n V_n \int_0^1 \int \cdots \int t^{n-1} \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_r)\,\sigma(a_1 tE + X_1) \ldots \sigma(a_r tE + X_r)\, dX_1 \ldots dX_r\, dt \\ &= n V_n \int_0^1 t^{n-1} \left[\prod_{k=1}^{r} \int \sigma(X)\,\sigma(a_k tE + X)\, dX\right] dt. \end{aligned} \tag{19}$$

V_n ist das Volumen der Einheitskugel im R_n. Wir müssen daher

$$\int \sigma(X)\,\sigma(a_k t E + X)\,dX \qquad (0 < t < 1) \tag{20}$$

berechnen. Dieser Ausdruck ist aber gleich

$$\begin{aligned}
&\int \sigma(X - a_k t E/2)\,\sigma(X + \tfrac{1}{2} a_k t E)\,dX \\
&\quad = 2 \int\limits_{(XE)>0} \sigma(X + \tfrac{1}{2} a_k t E)\,dX \\
&\quad = 2(n-1)\,V_{n-1} \int\limits_{a_k t/2}^{1} (1 - s^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,ds \\
&\quad \leqslant 2(n-1)\,V_{n-1}\,(1 - a_k^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}(n-1)} \\
&\quad \leqslant 2(n-1)\,V_{n-1}\,(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}(n-1)}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
J &\leqslant n\,V_n\,(2(n-1)\,V_{n-1})^r \int\limits_0^1 t^{n-1}(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}(n-1)r}\,dt \\
&\prec V_n^{r+1} \int\limits_0^1 t^{n-1}(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}r(n-1)}\,dt.
\end{aligned} \tag{21}$$

A. 9. Bilden wir

$$g(t) = t^{n-1}(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}r(n-1)} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
g'(t) &= (n-1)\,t^{n-2}(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}r(n-1)} + t^{n-1}(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}r(n-1)-1}\frac{r}{2}(n-1)(-\tfrac{1}{2}a_r^2 t) \\
&= (n-1)\,t^{n-2}(1 - a_r^2 t^2/4)^{\frac{1}{2}r(n-1)-1}\left[(1 - a_r^2 t^2/4) - r\,a_r^2 t^2/4\right].
\end{aligned} \tag{23}$$

Dann liegt die einzige Nullstelle von $g'(t)$ in $0 < t < 1$ in

$$t = t_0 = \frac{2}{a_r \sqrt{r+1}}$$

und

$$\begin{aligned}
g(t) \leqslant g(t_0) &= \frac{2^{n-1}}{a_r^{n-1}(1+r)^{\frac{1}{2}(n-1)}}\left(1 - \frac{1}{1+r}\right)^{\frac{1}{2}r(n-1)} \\
&\prec \left(\frac{4\,r^r}{(r+1)^{r+1}\,a_r^2}\right)^{\frac{1}{2}n}.
\end{aligned}$$

Daraus und aus (21), (22) folgt Lemma 22.

Literatur

[1]. Cassels, J. W. S., Some metrical theorems in diophantine approximation I: *Proc. Cambridge. Philos. Soc.* 46 (1950), 209–218.

[2]. ——, *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge Tracts in Math. 45 (1957).

[3]. Chabauty, C., Sur les minima arithmétiques des formes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) 66 (1949), 367–394.

[4]. Delsartes, S., Fonctions de Möbius sur les groupes Abeliens finis. *Ann. of Math.* 49 (1948), 600–609.

[5]. Hlawka, E., Zur Geometrie der Zahlen. *Math. Z.* 49 (1944), 285–312.

[6]. Lekkerkerker, C. G., Lattice points in unbounded point sets I, II. *Indagationes Math.* 20 (1958), 197–205 und 206–222.

[7]. Macbeath, A. M., & Rogers, C. A., Siegel's mean value theorem in the geometry of numbers. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 54 (1958), 139–151.

[8]. Mahler, K., On lattice points in n-dimensional starbodies I. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.* 187 (1946), 151–187.

[9]. ——, On the critical lattices of arbitrary point sets. *Canadian J. Math.* 1 (1949), 78–87.

[10]. Redei, L., Zetafunktionen in der Algebra. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 6 (1955), 5–25.

[11]. Rogers, C. A., Mean values over the space of lattices. *Acta Math.* 94 (1955), 249–287.

[12]. ——, The number of lattice points in a set. *Proc. London Math. Soc.* 3 (6) (1956), 305–320.

[13]. ——, A single integral inequality. *J. London Math. Soc.* 32 (1957), 102–108.

[14]. ——, Lattice covering of space with convex bodies. *J. London Math. Soc.* 33 (1958), 208–212.

[15]. ——, Lattice covering of space; the Minkowski-Hlawka theorem. *Proc. London Math. Soc.* 3 (8) (1958), 447–465.

[16]. Schmidt, W., On the convergence of mean values over lattices. *Canadian J. Math.* 10 (1958), 103–110.

[17]. ——, Mittelwerte über Gitter I, II. *Monatsh. Mathematik* 61 (1957), 269–276 und 62 (1958), 250–258.

[18]. ——, The measure of the set of admissible lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958), 390–403.

[19]. Siegel, C. L., A mean value theorem in geometry of numbers. *Ann. of Math.* 46 (1945), 340–347.

[20]. Speiser, A., *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.* Springer, Grundlehren V, 3. Aufl. (1937).

[21]. Watson, G. N., Bessels functions and Kapteyn series. *Proc. London Math. Soc.* (2) 16 (1917), 150–174.