TABLE DES VALEURS DES SOMMES

$$S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$$

PAR

T. J. STIELTJES
à TOULOUSE.

Dans le *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* (tome II, pag. 432), LEGENDRE a donné avec 16 décimales les valeurs de $S_2, \ldots, S_{35}$.

Cette table de LEGENDRE ne contient pas de graves erreurs, mais la comparaison avec nos résultats montre que dans 6 cas les valeurs de LEGENDRE ont besoin d'une correction d'une unité de la dernière (seizième) décimale; ce sont les suivants:

$$\begin{array}{lcccccc} & S_5, & S_7, & S_{10}, & S_{11}, & S_{16}, & S_{35}, \\ \text{corrections} & -1, & +1, & +1, & +1, & +1, & +1. \end{array}$$

Ces nombres S_k figurent dans le développement

$$\log \Gamma(1 + x) = -Cx + \sum_2^\infty \frac{(-1)^k}{k} S_k x^k,$$

et la table de LEGENDRE a ainsi servi de base au calcul des coefficients du développement de la fonction entière $[\Gamma(x)]^{-1}$ entrepris par M. BOURGUET. (Acta Mathematica t. 2, p. 271 et suiv.)

La disposition de la table suivante n'exige aucune explication, mais nous devons indiquer l'approximation des valeurs inscrites dans le tableau.

On a donné le résultat brut d'un calcul fait avec 32 décimales. Chaque nombre est la somme d'un certain nombre (trente au plus) de nombres calculés à une demi-unité de la $32^{\text{ème}}$ décimale près. Par conséquent l'erreur d'une des valeurs données sera toujours inférieure à

$$0{,}0000000000 \quad 0000000000 \quad 0000000000 \quad 15.$$

Mais il va sans dire que l'erreur sera presque toujours notablement inférieure à cette limite, d'abord par suite d'une compensation d'erreurs et ensuite aussi parce qu'à partir de $k = 22$ on a obtenu S_k par l'addition de moins de 30 nombres partiels.

Les relations

$$\sum_1^\infty (S_{2k} - 1) = \frac{3}{4}, \qquad \sum_1^\infty (S_{2k+1} - 1) = \frac{1}{4}$$

permettent de contrôler l'ensemble des calculs. La première vérification donne une erreur de 5 unités, la seconde une erreur de 3 unités de la $32^{\text{ème}}$ décimale.

k		S_k		
2	1,6449340668	4822643647	2415166646	03
3	1,2020569031	5959428539	9738161511	46
4	1,0823232337	1113819151	6003696541	18
5	1,0369277551	4336992633	1365486457	03
6	1,0173430619	8444913971	4517929790	93
7	1,0083492773	8192282683	9797549849	82
8	1,0040773561	9794433937	8685238508	65
9	1,0020083928	2608221441	7852769232	40
10	1,0009945751	2781808533	7145958900	34
11	1,0004941886	0411946455	8702282526	46
12	1,0002460865	5330804829	8637998047	72
13	1,0001227133	4757848914	6751836526	37
14	1,0000612481	3505870482	9258545105	14
15	1,0000305882	3630702049	3551728510	66
16	1,0000152822	5940865187	1732571487	66
17	1,0000076371	9763789976	2273600293	54
18	1,0000038172	9326499983	9856461644	61
19	1,0000019082	1271655393	8925656957	80
20	1,0000009539	6203387279	6113152038	70

k	S_k			
21	1,0000004769	3298678780	6463116719	62
22	1,0000002384	5050272773	2990003648	18
23	1,0000001192	1992596531	1073067788	73
24	1,0000000596	0818905125	9479612440	20
25	1,0000000298	0350351465	2280186063	69
26	1,0000000149	0155482836	5041234658	50
27	1,0000000074	5071178983	5429491981	01
28	1,0000000037	2533402478	8457054819	20
29	1,0000000018	6265972351	3049006403	90
30	1,0000000009	3132743241	9668182871	76
31	1,0000000004	6566290650	3378407298	92
32	1,0000000002	3283118336	7650549200	16
33	1,0000000001	1641550172	7005197759	30
34	1,0000000000	5820772087	9027008892	44
35	1,0000000000	2910385044	4970996869	29
36	1,0000000000	1455192189	1041984235	93
37	1,0000000000	0727595983	5057481014	52
38	1,0000000000	0363797954	7378651190	24
39	1,0000000000	0181898965	0307065947	59
40	1,0000000000	0090949478	4026388928	25
41	1,0000000000	0045474737	8304215402	68
42	1,0000000000	0022737368	4582465251	53
43	1,0000000000	0011368684	0768022784	94
44	1,0000000000	0005684341	9876275856	09
45	1,0000000000	0002842170	9768893018	55
46	1,0000000000	0001421085	4828031606	78
47	1,0000000000	0000710542	7395210852	72
48	1,0000000000	0000355271	3691337113	67
49	1,0000000000	0000177635	6843579120	33
50	1,0000000000	0000088817	8421093081	59

k		S_k		
51	1,0000000000	0000044408	9210314381	34
52	1,0000000000	0000022204	4605079804	20
53	1,0000000000	0000011102	2302514106	61
54	1,0000000000	0000005551	1151248454	81
55	1,0000000000	0000002775	5575621361	24
56	1,0000000000	0000001387	7787809725	24
57	1,0000000000	0000000693	8893904544	16
58	1,0000000000	0000000346	9446952165	92
59	1,0000000000	0000000173	4723476047	58
60	1,0000000000	0000000086	7361738011	99
61	1,0000000000	0000000043	3680869002	06
62	1,0000000000	0000000021	6840434499	72
63	1,0000000000	0000000010	8420217249	42
64	1,0000000000	0000000005	4210108624	57
65	1,0000000000	0000000002	7105054312	24
66	1,0000000000	0000000001	3552527156	10
67	1,0000000000	0000000000	6776263578	04
68	1,0000000000	0000000000	3388131789	02
69	1,0000000000	0000000000	1694065894	51
70	1,0000000000	0000000000	0847032947	25

Nous avons mis à profit nos résultats pour calculer la constante Eulérienne d'après la formule

$$C = 1 + \log 2 - \log 3 - \sum_{1}^{\infty} \frac{S_{2k+1} - 1}{(2k+1)4^k},$$

et nous avons obtenu la valeur suivante qui est exacte avec 33 déc.:

$$C = 0.5772156649 \quad 0153286060 \quad 6512090082 \quad 402.$$