MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES

PAR

H. POINCARE.

§ 1. *Séries Thétafuchsiennes.*

Dans un mémoire antérieur, j'ai montré comment il est possible de former des groupes discontinus avec des substitutions de la forme:

$$(1) \qquad \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

en choisissant les coëfficients α_i, β_i, γ_i, δ_i de telle facon que les diverses substitutions du groupe n'altèrent pas un certain cercle appelé cercle fondamental. Je supposerai dans tout ce qui va suivre que ce cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, de telle sorte que son équation soit:

$$\text{mod. } z = 1.$$

Je considère un de ces groupes discontinus, dits *groupes fuchsiens,* que j'appelle G. A ce groupe correspondra une décomposition du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux R, tous congruents entre eux.

Je me propose de démontrer qu'il existe toujours un système de fonctions uniformes de z qui demeurent inaltérées par les diverses substitutions du groupe G et que j'appellerai fonctions fuchsiennes.

A cet effet j'envisage les diverses substitutions de G comprises dans la formule (1) et je pose pour abréger:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z)$$

comme je l'ai fait au § 3 du mémoire cité. Je forme ensuite la série:

$$\sum_0^\infty {}_i \text{ mod. } \left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^m \tag{2}$$

où m est un entier positif plus grand que 1.

Je vais démontrer que cette série est convergente en faisant successivement diverses hypothèses:

1° Supposons d'abord que z soit intérieur au cercle fondamental: il sera alors intérieur à l'un des polygones R, par exemple au polygone R_h qui correspond à la substitution de G qui a pour indice h et qui s'écrit:

$$\left(z,\ f_h(z)\right)$$

Soit:

$$f_k(z) = f_i[f_h(z)]$$

La substitution

$$\left(z,\ f_k(z)\right)$$

fera partie du groupe G et correspondra à un certain polygone R_k. Puisque z est supposé intérieur à R_h, $f_i(z)$ sera intérieur à R_k.

Supposons que l'on décrive autour de z un contour très petit C_0, enveloppant le point z et étant situé tout entier à l'intérieur de R_h; le transformé de C_0 par la substitution $[z, f_i(z)]$ sera un certain contour très petit C_i, enveloppant le point $f_i(z)$ et situé tout entier à l'intérieur de R_k.

Afin d'établir la convergence de la série (2) nous allons démontrer successivement un certain nombre de lemmes.

Lemme I. *La somme des surfaces de tous les contours C_i est égale à une quantité finie C.*

En effet ces différents contours C_i en nombre infini sont tous intérieurs au cercle fondamental; de plus ils n'ont aucune partie commune puisque chacun d'eux est tout entier intérieur à l'un des polygones R. La somme de leurs surfaces est donc plus petite que la surface du cercle fondamental. Elle est donc finie. C. Q. F. D.

Lemme II. *Le rapport de la plus grande à la plus petite valeur que puisse prendre le module de* $\frac{df_i}{dz}$ *quand* z *reste intérieur à* C_0 *est plus petit qu'une certaine quantité* K *indépendante de* i.

En effet on a:

$$\frac{df_i}{dz} = \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

Le module de $\frac{df_i}{dz}$ est donc égal à $\frac{1}{\text{mod. } \gamma_i^2}$ divisé par le carré de la distance du point z au point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont les divers transformés du point ∞; ils sont donc tous extérieurs au cercle fondamental comme le point ∞ lui-même et ils ne peuvent être infiniment voisins les uns des autres que dans le voisinage de ce cercle. Soient M_i et m_i la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre ce module quand z reste intérieur à C_0; soient a et b la plus grande et la plus petite distance du point $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ au contour C_0; nous aurons évidemment:

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a^2}{b^2}$$

Or tous les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont extérieurs au cercle fondamental. Soient donc A et B la plus grande et la plus petite distance de l'origine, centre du cercle fondamental, au contour C_0. Ces deux distances seront plus petites que 1 puisque C_0 est tout entier intérieur au cercle fondamental. On a alors:

$$a < 1 + A \qquad\qquad b > 1 - B$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1+A}{1-B}\right)^2$$

D'ailleurs $\left(\frac{1+A}{1-B}\right)^2 = K$ est indépendant de i. C. Q. F. D.

Lemme III. *On a quel que soit* i

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}$$

En effet soit $z = x + iy$; la surface du contour C_0 s'écrit alors

$$C_0 = \int\int dx\ dy$$

et la surface du contour C_i

$$C_i = \int\int\left[\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right]^2 dx\ dy$$

les deux intégrales doubles étant prises à l'intérieur du contour C_0. On a donc

$$C_i > \int\int m_i^2\, dx\, dy > m_i^2\, C_0$$

ou bien

$$C_i > \frac{M_i^2}{K^2} C_0$$

ou enfin:

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}.$$

C. Q. F. D

Rien n'est plus aisé maintenant que d'établir la convergence de la série (2). Supposons en effet d'abord $m = 2$; nous aurons à envisager la série:

$$(2) \qquad \sum \text{mod. } \left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 = \sum \text{mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

Or nous aurons:

$$\text{mod. } \left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 < M_i^2 < \frac{K^2}{C_0} C_i.$$

Les termes de la série (2) sont donc plus petits respectivement que $\frac{K^2}{C_0}$ multiplié par le terme correspondant de la série $\sum C_i$ dont la somme est un nombre fini C d'après le lemme I.

La série (2) aura donc aussi une somme finie S. On a par conséquent a fortiori quel que soit i

$$\text{mod. } \frac{df_i}{dz} < \sqrt{S}$$

On aura donc pourvu que $m > 2$

$$\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m < \left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^2 S^{\frac{m-2}{2}}$$

C'est à dire que chaque terme de la série $\sum\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m$ est plus petit que la constante $S^{\frac{m-2}{2}}$ multipliée par le terme correspondant de la série $\sum\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^2$ qui est convergente.

La convergence de la série (2) est donc démontrée et il s'agit ici, non d'une semi-convergence, mais d'une convergence absolue puisque tous les termes de la série sont positifs.

2° Supposons maintenant que le point z soit extérieur au cercle fondamental.

Si le point z est l'un des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, l'un des termes de la série est infini et la convergence est impossible. Supposons donc que le point z ne se confonde avec aucun des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, je dis que la série (2) sera encore convergente.

Considérons en effet un autre point z_1 intérieur au cercle fondamental. La série

$$\sum \text{mod. } \left(\frac{df_i(z_1)}{dz_1}\right)^m = \sum \text{mod. } (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m} \tag{2a}$$

est convergente d'après ce qu'on vient de voir. Je dis qu'il en est de même de la série

$$\sum \text{mod. } \left(\frac{df_i}{dz}\right)^m = \sum \text{mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \tag{2}$$

En effet nous pouvons trouver une limite supérieure R de mod. $\left(z_1 + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$ et une limite inférieure r de mod. $\left(z + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$; car les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ ont un module fini et limité et ils ne sont pas infiniment rapprochés du point z.

On a donc:

$$\frac{\text{mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}}{\text{mod. } (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}} < \frac{R^{2m}}{r^{2m}}.$$

Chaque terme de la série (2) est donc plus petit que $\left(\frac{R}{r}\right)^{2m}$ multiplié par le terme correspondant de la série (2^a) qui est convergente.

La série (2) est donc aussi convergente.

3° Supposons maintenant que le point z soit sur la circonférence du cercle fondamental. La démonstration précédente sera encore applicable pourvu que le point z ne soit pas infiniment rapproché d'une infinité de points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. C'est ce qui arrivera si le point z appartient à l'un des côtés de la 2^{me} sorte de l'un des polygones R. La série (2) est alors convergente. Dans le cas contraire, les termes de la série (2) sont susceptibles de croître indéfiniment, de sorte que la convergence n'a pas lieu.

Les points de la circonférence du cercle fondamental se divisent en deux classes, les uns appartiennent à l'un des côtés de la 2^{me} sorte de l'un des polygones R; les autres, qui ne satisfont pas à cette condition, s'appelleront les *points singuliers essentiels du groupe G,* de sorte que la condition de convergence de la série (2) pourra s'énoncer ainsi: *le point z devra ne se confondre ni avec aucun des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, ni avec aucun des points singuliers essentiels du groupe G.*

La série (2) définit une fonction de z, mais cette fonction n'est pas monogène, comme on le voit aisément d'après la forme même de la série. La somme de la série (2) dépend également du groupe G et si on suppose que les coëfficients des substitutions fondamentales de ce groupe sont des fonctions d'un certain paramètre t, la somme de la série (2) sera aussi une fonction de t.

Une petite digression est nécessaire pour me permettre d'exprimer plus nettement ma pensée. Reportons-nous au § 11 du mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé: Formation effective des groupes fuchsiens, et prenons pour fixer les idées l'exemple I de ce paragraphe. Dans cet exemple, il s'agissait de former les groupes fuchsiens de la 3^{me} famille, engendrés par un polygone normal de $2n$ côtés de la 2^{me} sorte. Nous avons vu que les coëfficients des n substitutions fondamentales de ce groupe ne sont assujettis qu'à des inégalités. Il est donc possible de les exprimer en fonctions rationnelles de $3n$ paramètres arbitraires

$$u_1, u_2, \ldots . u_{3n}$$

assujettis seulement à être réels et à satisfaire à certaines inégalités. Les coëfficients de toutes les substitutions du groupe sont alors, comme ceux des substitutions fondamentales, des fonctions rationnelles des paramètres u. De plus il est évident que tous les groupes différents que l'on obtient en attribuant aux u différents systèmes de valeurs, sont tous isomorphes entre eux.

Ce qui précède peut être étendu au cas le plus général et, pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, je vais introduire une définition nouvelle qui nous sera utile dans la suite. Considérons deux polygones normaux R_0 et R'_0; je suppose qu'ils soient désignés de même dans le système de notation du § 7 du mémoire cité. Les cycles de chaque catégorie seront en même nombre dans R_0 et R'_0 et ils se correspondront un à un. Je suppose de plus que la somme des angles de R_0 qui appartiennent à un même cycle de la 1ère catégorie, est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0. Je dirai alors que les deux polygones, ainsi que les deux groupes qu'ils engendrent, font partie de la même *classe*. Il est clair que dans ce cas les deux groupes sont isomorphes entre eux.

Considérons donc une infinité de groupes appartenant à la même classe C et dérivés de n substitutions fondamentales. Prenons n substitutions quelconques et cherchons si elles peuvent être prises pour les substitutions fondamentales d'un groupe discontinu appartenant à la classe C. Nous trouverons en général que leurs coëfficients doivent satisfaire à certaines égalités et à certaines inégalités. Ces coëfficients pourront alors s'exprimer rationnellement en fonctions de p paramètres arbitraires

$$u_1, u_2, \dots u_p$$

assujettis seulement à rester réels et à satisfaire à certaines inégalités. La seule différence avec l'exemple I du § 11 c'est que l'on a en général

$$p < 3n,$$

au lieu de $p = 3n$.

Deux groupes qui sont de la même classe sont en général de la même famille. Il y a cependant des exceptions. Ainsi reprenons l'exemple I du § 11 que j'ai cité plus haut. Les groupes envisagés sont en général de la 3me famille; mais dans certains cas limités, ils peuvent se réduire à des groupes de la 2^{me} ou de la 4^{me} familles. En général un groupe de la 2^{me} famille ou de la 4^{me} famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la 3^{me} famille qui ne se réduisent à la 2^{me} et à la 4^{me} familles que pour certaines valeurs particulières des paramètres u. De même un groupe de la 6^{me} ou de la 7^{me} familles peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la 5^{me} famille, qui ne se réduisent à la 6^{me} ou à la 7^{me} familles que pour certaines valeurs particulières des paramètres u. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

Ainsi il existe des classes de groupes fuchsiens qui sont tous isomorphes entre eux; les coëfficients de leurs substitutions sont des fonctions rationnelles de certains paramètres réels u, assujettis à certaines inégalités. Si l'on forme la série (2) à l'aide des différents groupes appartenant à une même classe, la somme de cette série sera évidemment une fonction des u; je dis que ce sera une fonction *continue* de ces paramètres.

Il est clair que chaque terme de la série, étant rationnel par rapport aux u, sera une fonction continue de ces paramètres; mais cela ne suffit pas pour qu'il en soit de même de la somme de cette série. Si nous considérons en effet une série

$$S(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots\ldots\ldots + F_n(x) + \ldots\ldots$$

dont les termes sont des fonctions continues de x et qui est convergente, la somme $S(x)$ de cette série peut être une fonction discontinue de x. Mais faisons une hypothèse de plus. Supposons que quand on a:

$$x_1 \geqq x \geqq x_0 \tag{3}$$

on ait:

$$\text{mod. } F_n(x) < C_n$$

et que la série

$$C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots + C_n + \ldots\ldots$$

soit convergente; on sait que $S(x)$ restera fonction continue de x tant que cette variable satisfera aux inégalités (3). Ce résultat est d'ailleurs facile à étendre au cas de plusieurs variables. Ainsi pour démontrer que la série (2) est une fonction continue des u, il suffit de faire voir que l'on peut trouver une infinité de nombres positifs A_i (indépendants des u), tels que la série $\sum A_i$ soit convergente et que l'inégalité

$$\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m < A_i$$

soit satisfaite quels que soient les u, pourvu que ces paramètres restent compris entre certaines limites qui peuvent d'ailleurs être aussi voisines que l'on veut du système de valeurs pour lequel on veut démontrer la continuité de la somme de la série (2).

Pour démontrer cette continuité, je vais faire usage de certaines considérations qui me fourniront en même temps une démonstration nouvelle de la convergence de cette série, ce qui ne sera pas inutile, vu l'importance de ce résultat. Je vais rappeler quelques-unes des définitions du § 2 du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Dans ce paragraphe j'avais appelé figures congruentes deux figures qui sont les transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coëfficients réels. Posant ensuite

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

j'avais appelé L d'un arc, l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod. } dz}{y}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire plane l'intégrale

$$\int\int \frac{dx\, dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire.

La L d'un arc et la S d'une aire sont des invariants pour ces figures, c'est à dire que deux arcs congruents ont même L et que deux aires congruentes ont même S.

Plus tard au § 12 du mémoire cité, j'ai envisagé des groupes de substitutions qui n'étaient plus assujetties à être réelles, mais à conserver un certain *cercle fondamental*. Par une extension toute naturelle, deux figures seront dites congruentes lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire conservant le cercle fondamental. Il y aura pour les arcs et les aires deux invariants analogues à ceux que nous avons rencontrés dans le cas des substitutions réelles et que nous appellerons par extension L et S. Par exemple dans le cas qui nous occupe, le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Posons

$$z = \rho e^{i\omega}$$

J'appellerai L d'un arc, l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod. } dz}{1-\rho^2}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire l'intégrale

$$\int\int \frac{\rho d\rho d\omega}{(1-\rho^2)^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire. On vérifie aisément que deux arcs congruents ont même L, pendant que deux aires congruentes ont même S.

Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ. La S sera:

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho} \frac{\rho d\rho}{(1-\rho^2)^2} = \frac{\pi\rho^2}{1-\rho^2}$$

La L de son rayon sera:

$$R = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{1-\rho^2} = \frac{1}{2} L \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

Nous appellerons cette quantité le R du cercle.

On a, en fonction de R:

$$\rho = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}$$

$$S = \frac{\pi}{4}(e^{2R} + e^{-2R} - 2)$$

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de la série (2), et supposons pour fixer les idées que le point z est intérieur au cercle fondamental; la démonstration s'étendrait sans peine au cas général.

Nous décrirons autour de z un contour C_0 que nous pourrons prendre assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de l'un des polygones R, de R_h par exemple. Quand les paramètres u varieront entre les limites que nous leur avons fixées, les polygones R varieront, mais nous pourrons toujours supposer que C_0 est assez petit pour rester constamment tout entier à l'intérieur de R_h. Si nous considérons maintenant les différents transformés du point z, c'est à dire les différents points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, chacun de ces points sera contenu à l'intérieur d'un petit contour C_i situé tout entier à l'intérieur d'un certain polygone R_k ainsi qu'on l'a vu plus haut. Tous les contours C_i seront *congruents eutre eux et extérieurs les uns aux autres.*

J'appellerai σ la S de C_0 qui sera celle de tous les C_i. Si je considère maintenant diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par C_0, la L de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle λ.

Démontrons maintenant quelques lemmes.

LEMME IV. *Considérons les points transformés de z, c'est à dire les points*

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

qui sont intérieurs à un cercle C' qui a pour centre l'origine et pour rayon

$$\rho' = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

le nombre de ces points est plus petit que:

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

En effet soit N ce nombre.

Si un point $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ est intérieur au cercle C', le contour C_i correspondant sera évidemment tout entier à l'intérieur du cercle C'' qui a pour centre l'origine et dont le R surpasse de λ celui du cercle C', c'est à dire dont le R est égal à $R' + \lambda$.

Il y a donc à l'intérieur du cercle C'' au moins N contours C_i dont la S totale est égale à $N\sigma$.

Or la S du cercle C'' est

$$\frac{\pi}{4}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

On a donc:

$$N < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

C. Q. F. D.

Lemme V. *On a identiquement:*

$$\text{mod.}\, \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \text{mod.}\, z^2}$$

En effet envisageons un contour infiniment petit C_0 décrit autour du point z et le transformé C_i de ce contour par la substitution

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

Soient ω_0 et ω_i leurs surfaces, on aura:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \text{mod.}\left[\frac{d\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}}{dz}\right]^2 = \text{mod.}\, \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^4}$$

Les S de ω_0 et de ω_i seront:

$$\int\int \frac{dx\, dy}{(1 - \text{mod.}\, z^2)^2} = \frac{\omega_0}{(1 - \text{mod.}\, z^2)^2}$$

$$\int\int \frac{dx\, dy}{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2} = \frac{\omega_i}{\left[1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2\right]^2}$$

Or ces figures sont congruentes et ont même S.
On a donc

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \left[\frac{1 - \text{mod.}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \text{mod.}\, z^2}\right]^2$$

d'où:

$$\text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \text{mod.}\left(\dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^2}{1 - \text{mod.}\ z^2}$$

C. Q. F. D.

Considérons deux cercles ayant pour centre l'origine et passant, l'un par le point z et l'autre par le point $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$.

Soit A le R du premier cercle et R' le R du second cercle. On aura:

$$\text{mod.}\ z = \frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1} \qquad \text{mod.}\ \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

et enfin

$$\text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R'} + e^{-2R'} + 2}$$

THÉORÈME. *La série (2) est convergente.*

Décrivons en effet une infinité de cercles ayant pour centre commun l'origine et dont les R croissent en progression arithmétique. Soient K_1, $K_2, \ldots . K_n, \ldots$ ces cercles, et soit nr le R du cercle K_n.

Ecrivons la série (2) sous la forme suivante:

$$\text{(2 bis)} \qquad \Sigma = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_n + \ldots\ldots$$

On obtient le terme U_n de la série (2 bis) en groupant tous les termes de la série (2) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ compris dans la couronne circulaire située entre les deux cercles K_{n-1} et K_n.

Comme les termes de la série (2) sont positifs, un pareil groupement est licite et la convergence de la série (2 bis) entraîne celle de la série (2).

Le nombre des termes de (2) groupés ensemble dans le terme U_n est, en vertu du Lemme IV, plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} - 2) < \frac{\pi}{4\sigma}e^{2(nr+\lambda)}$$

Chacun d'eux est, en vertu du Lemme V plus petit que

$$\left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)} + e^{-2(nr-r)} + 2}\right)^m < \left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)}}\right)^m$$

On a donc

$$U_n < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda+2mr} e^{-n(m-1)r}$$

Posons:

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + e)^m e^{2\lambda+2mr} = K$$

on aura:

$$(3) \qquad U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)r}}$$

K sera une constante indépendante de n et le second membre de l'inégalité (3) sera, puisque $m > 1$, le n^{me} terme d'une progression géométrique décroissante. La série (2 bis), et par conséquent la série (2), est donc convergente.

C. Q. F. D.

Voyons quelle erreur on commet quand on se restreint dans la série (2) aux termes qui correspondent aux points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ intérieurs à un cercle ayant pour centre l'origine et dont le R est $(n-1)r$. La somme des termes négligés est égale à

$$U_n + U_{n-1} + \dots\dots\dots$$

et par conséquent plus petite que

$$\frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}}$$

Théorème. *La somme Σ de la série (2) est une fonction continue des paramètres u.*

En effet soit Σ la valeur de cette somme pour certaines valeurs

$$u_1,\ u_2,\ \dots\dots\ u_p$$

de ces paramètres u.

Soit $\Sigma + \Delta\Sigma$ la valeur de cette même somme pour des valeurs voisines

$$u_1 + \Delta u_1,\ u_2 + \Delta u_2,\ \dots\dots\ u_p + \Delta u_p$$

de ces mêmes paramètres. Je dis qu'on peut prendre les Δu assez petits pour que:

$$\triangle \Sigma < \varepsilon$$

ε étant une quantité donnée.

Soit Σ_0 la somme des $n - 1$ premiers termes de la série (2 bis)

$$\Sigma_0 = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_{n-1}$$

Soit

$$\Sigma_1 = U_n + U_{n+1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Soit de même $\Sigma_0 + \triangle \Sigma_0$, $\Sigma_1 + \triangle \Sigma_1$, la somme des termes correspondants de la série $\Sigma + \triangle \Sigma$; de telle sorte que

$$\Sigma + \triangle \Sigma = (\Sigma_0 + \triangle \Sigma_0) + (\Sigma_1 + \triangle \Sigma_1)$$

On aura:

$$\Sigma_1 < \frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}} \qquad \Sigma_1 + \triangle \Sigma_1 < \frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}}$$

Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que:

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \Sigma_1 + \triangle \Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

Or, une fois n choisi, Σ_0 sera fonction continue des u; on pourra donc prendre les $\triangle u$ assez petits pour que

$$\triangle \Sigma_0 < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par conséquent pour que

$$\triangle \Sigma < \varepsilon$$

C. Q. F. D.

Considérons maintenant la série suivante

(4) $$\theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Je suppose:

1° que l'algorithme $H(z)$ représente une fonction rationnelle de z dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais qui est d'ailleurs quelconque.

2° que le nombre m est un entier plus grand que 1. La fonction $H(z)$ aura un certain nombre d'infinis

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_p.$$

Si le point z se confond avec un des points

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i}$$

l'un des termes de la série est infini et par conséquent la série ne peut être convergente.

Supposons au contraire que cela n'ait pas lieu. Nous pourrons trouver un nombre positif M tel que l'on ait, quel que soit i

$$\text{mod. } H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) < M$$

on pourra même choisir M assez grand pour que cette inégalité subsiste quand on fait varier les paramètres u entre certaines limites.

Je dis maintenant que la série $\Theta(z)$ que j'appellerai *série thétafuchsienne* est convergente. En effet nous aurons

$$\text{mod. }\left[H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}\right] < M \text{ mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Le module de chaque terme de la série (4) est donc plus petit que le terme correspondant d'une série convergente à termes positifs. C'est à dire que la série (4) est convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

D'ailleurs on démontrerait, comme pour la somme de la série (2) que la somme de la série (4) est une fonction *continue* des paramètres u.

§ 2. *Classification et Propriétés Générales.*

Ainsi la série (4) est convergente sauf pour certains points singuliers; dans ces conditions elle définit une fonction $\Theta(z)$ holomorphe. La fonction $\Theta(z)$ est essentiellement uniforme, mais elle cesse d'être holomorphe aux points singuliers pour lesquels la série (4) cesse d'être convergente.

Ces points singuliers sont:

1° Les points

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i}$$

c'est à dire les divers transformés des infinis de $H(z)$. Ces points sont des pôles dans le voisinage desquels $\theta(z)$ est méromorphe.

2° Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, c'est à dire les divers transformés du point ∞. Ces points sont encore des pôles dans le voisinage desquels $\theta(z)$ est méromorphe.

On démontrerait ce double fait en remarquant que dans le voisinage de ces points un des termes de la série (4) devient infini et que si l'on supprime ce terme, la série reste convergente.

3° Nous avons enfin les points singuliers essentiels du groupe G, c'est à dire les points du cercle fondamental qui n'appartiennent pas à un côté de la 2e sorte de l'un des polygones R. Ce sont aussi pour la fonction $\theta(z)$ des points singuliers essentiels.

Voici maintenant la propriété fondamentale de cette fonction. Considérons une substitution quelconque du groupe G, par exemple:

$$\left(z, \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) \tag{5}$$

cherchons quelle relation il y a entre

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) \text{ et } \theta(z)$$

Le système des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formant un groupe dont fait partie la substitution (5) sera identique au système des substitutions:

$$\left[z, \frac{\alpha_i\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) + \beta_i}{\gamma_i\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) + \delta_i}\right] = (z, f_i[f_k(z)])$$

en posant pour abréger:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z) \qquad\qquad \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} = f_k(z)$$

ce qui permet d'écrire:

$$\theta(z) = \sum H[f_i[f_k(z)]] \left[\frac{d[f_i[f_k(z)]]}{dz}\right]^m$$

ou:

$$\theta(z) = \sum H[f_i(f_k)] \left(\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right)^m \left(\frac{df_k}{dz}\right)^m$$

On a d'ailleurs:

$$\theta(f_k) = \sum H[f_i(f_k)] \left(\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right)^m$$

On a donc:

$$\theta(f_k) = \theta(z) \left(\frac{df_k}{dz}\right)^{-m}$$

ou bien:

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}. \tag{6}$$

Nous appellerons *fonction thétafuchsienne* toute fonction uniforme de z jouissant de la propriété (6). Nous classerons les fonctions thétafuchsiennes de la même facon que les groupes fuchsiens, à l'aide des propriétés du polygone normal R_0 correspondant.

On a vu que les polygones R_0 pouvaient se distribuer en 7 familles et que la 1ère, la 2me, la 4me, la 6me et la 7me de ces familles se subdivisent en deux ordres. Mais tout groupe du 2d ordre de la 2me, de la 4me, de la 6me et de la 7me familles est identique à un groupe de la 3me ou de la 5me familles, ou à un groupe du 1er ordre de la 6me ou de la 7me familles. (Voir § 9 et 11 du mémoire sur les groupes fuchsiens.) Nous pouvons donc toujours supposer que le groupe G n'appartient pas au 2d ordre de la 2me, de la 4me, de la 6me ou de la 7me familles.

Cela posé, je dirai que la fonction $\theta(z)$ fait partie de la 1ère, de la 3me et de la 5me familles si le groupe G fait partie de l'une de ces familles et que la fonction $\theta(z)$ fait partie de la 2me, de la 4me, de la

6^{me} ou de la 7^{me} familles si le groupe G appartient au 1^{er} ordre de l'une de ces familles.

De même je dirai qu'une fonction thétafuchsienne est du genre p, si le groupe G correspondant est de ce genre.

Je puis également étendre aux fonctions thétafuchsiennes la classification des groupes fuchsiens en classes dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent.

Envisageons d'abord les fonctions de la $1^{ère}$, de la 2^{me} et de la 5^{me} familles. Les polygones R correspondants n'ont pas de côtés de la 2^{me} sorte, de telle manière que tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels. Le plan se trouve divisé en deux parties, à savoir l'intérieur et l'extérieur de ce cercle, par une ligne singulière essentielle; il faut en conclure, conformément aux principes actuellement admis dans la théorie des fonctions, et mis en lumière par les travaux de M. Weierstrass, que le développement (4) représente deux fonctions distinctes, selon que z est intérieur on extérieur au cercle fondamental. La première de ces fonctions n'existera qu'à l'intérieur de ce cercle et admettra comme espace lacunaire toute la partie du plan qui lui est extérieure; la seconde au contraire n'existera qu'à l'extérieur du cercle fondamental. Dans ce qui va suivre nous n'envisagerons jamais que la première de ces fonctions; en effet la seconde d'entre elles, c'est à dire celle qui n'existe qu'à l'extérieur du cercle fondamental, peut aisément par un changement de z en $\frac{1}{z}$ se ramener à une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Considérons donc une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et définie par une série telle que (4); nous pouvons faire deux hypothèses:

Nous pouvons supposer qu'un ou plusieurs des infinis de $H(z)$ sont intérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\theta(z)$ aura des infinis (sauf dans certains cas exceptionnels où plusieurs infinis de cette fonction se détruisent mutuellement) et nous dirons qu'elle est de la *1^ere^ espèce;* nous serons certains alors que la somme de la série (4) n'est pas identiquement nulle puisque cette somme peut croître indéfiniment.

On peut supposer au contraire que tous les infinis de $H(z)$ sont extérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\theta(z)$ n'a pas d'infinis et nous dirons qu'elle est de la *2^de^ espèce.* La fonction $\theta(z)$ peut alors se développer en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et qui reste convergente tant que z reste intérieur au cercle fondamental, c'est à dire tant que la fonction $\theta(z)$ existe.

Rien n'empêche dans ce cas que la somme de la série (4) ne soit identiquement nulle et nous démontrerons en effet plus loin que toutes les fonctions θ de *2^de^ espèce* s'expriment linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Passons maintenant aux fonctions de la 3^e^, de la 4^e^, de la 6^e^ et de la 7^e^ familles; les polygones R ont alors des côtés de la 2^de^ sorte, tous les points du cercle fondamental ne sont plus des points singuliers essentiels; nous n'avons plus une ligne singulière essentielle, mais une infinité de points singuliers isolés. Il résulte de là que la série (4) au lieu de représenter deux fonctions distinctes selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental, représente une seule et même transcendante qui est partout holomorphe, sauf en certains points isolés. La fonction $\theta(z)$ est donc une transcendante uniforme existant dans toute l'étendue du plan et présentant une infinité de points singuliers essentiels.

On peut se demander quelle place elle occupe dans la classification que M. Mittag-Leffler a donné de pareilles fonctions dans sa communication du 3 Avril 1882 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

Les points singuliers essentiels étant en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de 2^de^ espèce; ceux-ci à leur tour s'ils sont en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de 3^me^ espèce, et ainsi de suite.

Je dis que nous ne serons jamais arrêtés et que nous trouverons ainsi une infinité de points singuliers de toutes les espèces. En effet si nous avons une infinité de points singuliers de la $n - 1$^e^ espèce; il y aura au moins un point singulier de la n^e^ espèce; mais s'il y en a un, il y en aura une infinité, car tous ses transformés par les diverses substitutions du groupe G devront aussi être des points singuliers de la n^e^ espèce.

C. Q. F. D.

Nous avons donc affaire à une de ces fonctions que M. MITTAG-LEFFLER a appelées du 2e genre.

Il semble d'abord que toutes les fonctions aient des infinis, car elles existent dans tout le plan et elles doivent avoir pour pôles ceux de la fonction rationnelle $H(z)$ qui doit devenir infinie en quelque point du plan. Mais il peut arriver que plusieurs des infinis de la fonction $\theta(z)$ se détruisent mutuellement; de sorte qu'on peut construire comme dans le cas précédent des fonctions thétafuchsiennes de la 2e espèce; on en verra un exemple au § 8.

Parmi les points singuliers de nos fonctions thétafuchsiennes, il en est qui doivent particulièrement attirer notre attention; ce sont les sommets des polygones R qui sont de la 2de catégorie et qui appartiennent à un cycle de la 3me sous-catégorie. (Voir le § 5 du mémoire sur les groupes fuchsiens).

Soit α un pareil sommet, il y aura parmi les substitutions du groupe G une substitution parabolique de la forme:

$$\left(\frac{1}{z-\alpha}, \frac{1}{z-\alpha}+\beta\right)$$

C'est là la définition même des cycles de la 3me sous-catégorie.

Posons:

$$\frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{z-\alpha}=t \qquad \frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{f_i(z)-\alpha}=\varphi_i(t)$$

en conservant pour le symbole $f_i(z)$ la signification qu'on lui a donnée plus haut, c'est à dire:

$$f_i(z)=\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$$

Définissons maintenant un symbole H_1 de la façon suivante:

$$H_1(t)=H\left(\alpha+\frac{2i\pi}{\beta t}\right)\left[\frac{-2i\pi}{\beta t^2}\right]^m$$

Il est clair que H_1 sera l'algorithme d'une fonction rationnelle. On trouvera alors identiquement:

$$\theta(z)=\sum H[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m=\sum H_1[\varphi_i(t)]\left(\frac{d\varphi_i(t)}{dt}\right)^m\left(\frac{dt}{dz}\right)^m$$

Mais la série $\Theta(z)$ étant absolument convergente on peut en ordonner les termes comme on le veut. Voici comment nous allons les ordonner:

Parmi les fonctions $\varphi_i(t)$ on peut en choisir une infinité

$$\theta_0(t) = t, \ \theta_1(t), \ \theta_2(t), \ \ldots\ldots$$

de telle façon que toute fonction $\varphi_i(t)$ puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme:

$$\varphi_i(t) = \theta_k(t + 2hi\pi)$$

h étant un entier positif ou négatif; ce qui permet d'écrire:

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H_1[\theta_k(t + 2hi\pi)] \left[\frac{d\theta_k(t + 2hi\pi)}{dt}\right]^m$$

Considérons un nouvel algorithme $H'_k(t)$ défini comme il suit:

$$H'_k(t) = H_1[\theta_k(t)]\left(\frac{d\theta_k}{dt}\right)^m$$

d'où:

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t + 2hi\pi)$$

Il faut d'abord effectuer la sommation par rapport à h; or $H'_k(t)$ est une fonction rationnelle de t qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. On aura donc:

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t + 2hi\pi) = H''_k(e^t)$$

$H''_k(e^t)$ désignant une fonction rationelle de e^t qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Il vient donc:

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_k H''_k(e^t)$$

La convergence de cette série est évidente, puisqu'on l'a obtenue en groupant d'une certaine manière les termes de la série (4) qui est uniformément convergente. De plus les termes sont rationnels en e et leurs infinis ne sont pas infiniment rapprochés dans le voisinage de

$$e^t = 0 \quad \text{ou de} \quad e^t = \infty$$

de telle sorte que l'on peut trouver une limite supérieure et inférieure des modules des valeurs de e^t qui rendent infinie l'une des fonctions H''_k.

Il suit de là que dans le voisinage du point singulier $z = \alpha$ la fonction $\theta(z)(z - \alpha)^{2m}$ est holomorphe en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ ou en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ selon que l'on approche du point α par l'intérieur ou par l'extérieur du cercle fondamental.

En d'autres termes, α est pour la fonction θ un *point singulier logarithmique.*

Ainsi, si l'on envisage les différents sommets des polygones R, on reconnaîtra:

1° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 1ère et de la 3me catégorie sont pour la fonction θ des points ordinaires ou des pôles.

2° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 3me sous-catégorie sont des points singuliers logarithmiques.

3° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 4me sous-catégorie sont des points singuliers d'une nature plus élevée.

§ 3. *Zéros et Infinis.*

Nous allons maintenant étudier la distribution des zéros et des infinis de la fonction θ. Il est clair que si un point z est pour cette fonction un zéro ou un infini, il en sera de même de tous les points correspondants à z, c'est à dire de tous les points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. De cette facon à tout zéro contenu à l'intérieur du polygone R_0, correspondra un zéro contenu dans chacun des polygones R, et que nous ne regarderons pas comme *réellement distinct* du premier. De sorte que le nombre des zéros et des infinis *réellement distincts* de la fonction θ sera le nombre des zéros et des infinis contenus à l'intérieur de R_0, si la fonction n'existe que dans le cercle fondamental, et à l'intérieur de $R_0 + R'_0$ si elle existe dans tout le plan. Je rappelle que R'_0 est le polygone symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental.

Cependant quelques conventions spéciales sont nécessaires, si l'on veut pouvoir énoncer simplement le résultat auquel nous allons arriver au sujet du nombre des zéros et des infinis. Il est d'abord évident qu'un zéro double ou un infini double doit compter pour deux zéros ou pour deux infinis; de même pour les zéros et les infinis multiples. Mais outre les zéros contenus à l'intérieur de R_0, il peut y en avoir qui se trouvent sur le périmètre de ce polygone. Supposons qu'il y en ait un sur un côté ab de la 1ère sorte, il y en aura un autre, correspondant au premier sur le côté conjugué de ab. Ces deux zéros ne seront pas réellement distincts et on ne devra les compter que pour un seul zéro, ou, si l'on veut, on devra compter chacun d'eux pour un demi zéro. Supposons maintenant qu'un sommet de la 1ère catégorie soit un zéro d'ordre p; les sommets qui font partie du même cycle seront au nombre de n par exemple et chacun d'eux sera un zéro d'ordre p comme le premier. Supposons que la somme des angles qui correspondent à ces sommets soit $\frac{2\pi}{K}$; chacun d'eux appartiendra à $n.K$ polygones différents, de manière qu'on devra en quelque sorte le partager entre ces $n.K$ polygones et que la part du polygone R_0 sera un zéro d'ordre $\frac{p}{n.K}$. Il résulte de là que les différents sommets du cycle représenteront seulement $\frac{p}{K}$ zéros distincts.

Il est facile d'étendre cette convention au cas où l'un des zéros est un des sommets de la 2de catégorie et appartenant à un cycle de la 3me sous-catégorie. Nous avons vu que si α est un pareil sommet, la fonction θ peut se mettre sous la forme:

$$(z-\alpha)^{2m}\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}\right]$$

Φ étant une fonction holomorphe de $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ s'annulant pour

$$z=\alpha$$

c'est à dire pour:

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}=0$$

$u = 0$ sera alors un zéro de la fonction rationnelle $\Phi(u)$. Supposons que ce soit un zéro d'ordre p. Nous dirons alors que les différents sommets du cycle auquel appartient α représentent p zéros distincts de la fonction θ.

Ce qui précède s'applique évidemment aux infinis.

Occupons-nous d'abord des infinis. La série (4) devient infinie quand $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ ou $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ devient infini. Supposons d'abord que la fonction θ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Alors $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ ne peut devenir infini; de plus à chaque infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspondra en général un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ qui sera intérieur à R_0.

Donc:

Le nombre des infinis distincts de θ est égal au nombre des infinis de H intérieurs au cercle fondamental.

Supposons maintenant que θ existe dans tout le plan.

A tout infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ intérieur à R_0.

A tout infini de $H(z)$ extérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ intérieur à R'_0.

A l'intérieur de chacun des polygones R'_i et par conséquent à l'intérieur de R'_0, nous trouverons un des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ qui sont pour θ des infinis d'ordre $2m$. Il y a cependant une exception: les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont les différents points correspondants de l'infini; la surface de l'un des polygones R' contient le point ∞ et ne contient pas de point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; le point ∞ n'est pas en général un infini de θ. Nous supposerons, pour éviter cette difficulté, que le polygone R'_0 ne contient pas le point ∞ et nous pourrons énoncer le résultat suivant:

Le nombre des infinis de θ contenus à l'intérieur de $R_0 + R'_0$, c'est à dire *le nombre des infinis distincts de θ est égal au nombre des infinis de H augmenté de $2m$.*

Passons à la recherche des zéros. Parmi eux il y en a qui doivent d'abord attirer l'attention; je veux parler des sommets de la 1[ère] catégorie qui dans certains cas sont forcément des zéros d'ordre déterminé.

Soit α un sommet de la 1[ère] catégorie et α' son symétrique par rapport au cercle fondamental. Supposons que α fasse partie d'un cycle et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{K}$. L'une des substitutions de G sera:

$$\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'},\ e^{\frac{2i\pi}{K}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right) = \left(z,\ f_1(z)\right)$$

Nous aurons:

$$\theta\left(f_1(z)\right) = \theta(z)\left(\frac{df_1}{dz}\right)^{-m}$$

ou

$$\theta(f_1)(f_1-\alpha')^{2m} = \theta(z)(z-\alpha')^{2m}\left[\frac{d\left(\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'}\right)}{d\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)}\right]^{-m} \tag{5}$$

Mais:

$$\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'} = e^{\frac{2i\pi}{K}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}$$

Remarquons de plus que nous pouvons développer $\theta(z)(z-\alpha')^{2m}$ suivant les puissances de $\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}$; de façon à poser:

$$\theta(z)(z-\alpha')^{2m} = \theta_1\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right) = \sum A_p\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p$$

L'équation (5) devient alors:

$$\sum A_p e^{\frac{2ip\pi}{K}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p = \sum A_p e^{-\frac{2mi\pi}{K}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p$$

Cette identité exige que l'on ait:

$$A_p = 0$$

ou bien:

$$e^{\frac{2i\pi p}{K}} = e^{-\frac{2mi\pi}{K}}$$

c'est à dire:

$$p + m \equiv 0 \quad \text{mod. } K. \tag{6}$$

Donc le développement de θ_1 ne contient que des termes dont l'ordre p satisfait à la congruence (6). Si donc K ne divise pas m, $z = \alpha$ est un zéro pour θ_1 et par conséquent pour θ.

Ce zéro est d'ordre au moins égal au reste de la division de $m(K - 1)$ par K; et si l'ordre de ce zéro diffère de ce reste c'est d'un multiple de K. Il y a exception évidemment si α est un infini de θ.

De même nous avons vu que les sommets qui appartiennent à un cycle de la 3^me^ sous-catégorie sont en général des zéros de la fonction θ.

Nous allons maintenant chercher quel est le nombre des zéros réellement distincts de notre fonction θ et pour fixer les idées nous supposerons qu'il s'agit d'une fonction de la 1^ère^ famille. Soit q le nombre des infinis distincts, soit p le nombre des zéros réellement distincts, c'est à dire le nombre cherché; soit maintenant p_0 le nombre des zéros situés à l'intérieur de R_0 en laissant de côté les zéros qui pourraient se trouver sur le périmètre et sur les sommets. Nous supposerons, ce qui arrivera en général, qu'il n'y a pas de zéro sur le périmètre en dehors de ceux qui sont sur les sommets; s'il y en avait, on n'aurait qu'à considérer les zéros situés sur les côtés comme des sommets séparant deux côtés consécutifs du polygone situés dans le prolongement l'un de l'autre. Supposons maintenant que les sommets se répartissent en un certain nombre de cycles de la 1^ère^ catégorie $C_1, C_2, \ldots\ldots C_i, \ldots\ldots$ Supposons que tous les sommets du cycle C_i soient des zéros d'ordre p_i et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{K_i}$ de telle sorte que l'ensemble de ces zéros doivent être comptés, d'après la convention faite plus haut pour $\frac{p_i}{K_i}$ zéros distincts. On devra avoir:

$$p_i + m \equiv 0 \quad \text{mod. } K_i$$

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i}$$

Le problème consiste à évaluer p_0. Pour cela il faut prendre l'intégrale:

$$\int \frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)} \tag{7}$$

le long du périmètre de R_0. La partie réelle de cette intégrale sera nulle et la partie imaginaire s'écrira:

$$2i\pi(p_0 - q)$$

L'évaluation de l'intégrale (7) présente ici une difficulté spéciale.

En effet la fonction sous le signe $\int$ devient infinie en divers points du contour d'intégration puisque nous avons vu qu'un certain nombre de sommets de R_0 étaient des zéros de Θ. On tournera cette difficulté en décrivant autour de chacun de ces sommets comme centre des arcs de cercle infiniment petits, raccordant les deux côtés qui aboutissent au sommet considéré; il faudra décrire ces arcs de cercle à l'intérieur de R_0, de façon à laisser les sommets en dehors du contour, puisque nous voulons évaluer p_0, c'est à dire le nombre des zéros *intérieurs* à R_0.

Il faudra donc évaluer l'intégrale (7):

1° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets.

2° le long des côtés de la 1ère sorte.

3° le long des côtés de la 2de sorte.

Il suffira d'ailleurs de calculer la partie imaginaire de l'intégrale, car nous savons d'avance que la partie réelle est nulle, et cette partie imaginaire n'est autre chose que la variation de l'argument de Θ.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction de la 1ère famille, de telle façon que nous n'ayons que des sommets de la 1ère catégorie et des côtés de la 1ère sorte. Soit $2n$ le nombre de ces côtés.

Considérons d'abord un des petits arcs de cercle décrit autour d'un sommet; supposons que ce sommet appartienne au cycle C_i dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{K_i}$ et dont tous les sommets sont des zéros d'ordre p_i. Soit λ l'angle du sommet considéré. L'intégrale prise le long du petit arc de cercle correspondant sera $-p_i\lambda$; prise le long de tous les arcs de cercle décrits autour des divers sommets du cycle, elle sera:

$$-\frac{2\pi}{K_i}p_i$$

Enfin l'intégrale (7) prise le long de tous les arcs infiniment petits décrits autour des sommets de R_0 sera:

$$-2\pi\sum\frac{p_i}{K_i}.$$

Il reste à évaluer notre intégrale le long des côtés de la 1[ère] sorte. Soient donc ab, $a'b'$ deux côtés conjugués de R_0. Il faut calculer:

$$J=\int_a^b\frac{\theta' dz}{\theta}+\int_{b'}^{a'}\frac{\theta' dz}{\theta}=\int_a^{b}\frac{\theta' dz}{\theta}-\int_{a'}^{b'}\frac{\theta' dz}{\theta}$$

Soit $(z, f_i(z))$ celle des substitutions du groupe G qui change $a'b'$ en ab. Nous aurons, d'après ce qu'on a vu plus haut:

$$\theta(f_i)=\theta(z)\left(\frac{df_i}{dz}\right)^{-m}$$

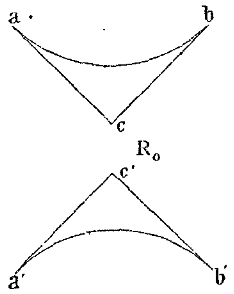
ou:

$$L\theta(f_i)=L\theta-mL\frac{df_i}{dz}.$$

Donc:

$$J=\int_{a'}^{b'}\left[\frac{\theta'(f_i)}{\theta(f_i)}-\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right]dz=-m\int_{a'}^{b'}d\left[L\frac{df_i}{dz}\right]$$

Il reste donc à chercher comment varie la partie imaginaire de $L\frac{df_i}{dz}$ ou l'argument de $\frac{df_i}{dz}$ quand z varie de a' à b'.



Je rappelle que les côtés de R_0, ab, $a'b'$ sont des arcs de cercle; je vais mener aux points a, b, a', b' les tangentes aux arcs de cercle ab, $a'b'$; soient ac, bc; $a'c'$, $b'c'$ ces tangentes. Soient maintenant ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les arguments des quantités imaginaires $(c-a)$, $(b-c)$, $(c'-a')$, $(b'-c')$.

Supposons qu'on opère de la même manière pour tous les côtés du polygone curviligne R_0; on obtiendra un polygone rectiligne P_0 de $4n$ côtés, dont les côtés seront les tangentes menées aux côtés de R_0 par les sommets de R_0 et dont les sommets seront ceux de R_0 et les points tels que c, c'; je désignerai simplement par les lettres c et c' les angles du polygone P_0 qui correspondent aux sommets c et c'. Outre les sommets tels que c, le polygone P_0 admet $2n$ angles qui lui sont communs avec R_0 et dont la somme est $\sum\frac{2\pi}{K_i}$, d'où la relation:

$$\sum c + \sum\frac{2\pi}{p_i} = (4n-2)\pi.$$

Nous pouvons écrire maintenant:

$$\arg.\frac{df_i}{dz} = \omega_1 - \omega_3 \qquad \text{pour } z = a'$$

$$\arg.\frac{df_i}{dz} = \omega_2 - \omega_4 \qquad \text{pour } z = b'$$

$$J = m(\omega_2 - \omega_1 - \omega_4 + \omega_3)$$

$$c = \omega_2 - \omega_1 + \pi$$

$$c' = \pi - \omega_4 + \omega_3$$

$$J = m(c + c' - 2\pi)$$

L'intégrale (7) prise le long de tous les côtés de la 1ère sorte aura donc pour partie imaginaire $\sum J$ ou bien:

$$m\sum c - 2nm\pi$$

ou

$$(4n-2)m\pi - 2\pi\sum\frac{m}{K_i} - 2nm\pi = (n-1)2m\pi - 2\pi\sum\frac{m}{K_i}$$

L'intégrale (7) se réduit alors à:

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum\frac{p_i+m}{K_i}\right]$$

d'où la relation:

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum\frac{p_i+m}{K_i}$$

Ce nombre p_0 des zéros intérieurs à R_0 est entier à cause des congruences:

$$p_i + m \equiv 0 \quad \text{mod. } K_i.$$

Exprimons maintenant le nombre p des zéros réellement distincts, défini par les conventions faites plus haut; nous trouverons:

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$$

Ainsi l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m, du nombre $2n$ des côtés de R_0 et de la somme $\sum \frac{2\pi}{K_i}$ des angles de ce polygone.

Cette somme satisfait à l'inégalité:

$$\sum \frac{2\pi}{K} < \pi(2n - 2)$$

d'où

$$\sum \frac{1}{K_i} < n - 1$$

et par conséquent $p > q$. L'expression $\left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$ est proportionnelle à la S du polygone R_0.

Supposons maintenant que la fonction θ soit de la 2ᵉ ou de la 6ᵉ familles. Nous n'aurons toujours que des côtés de la 1ère sorte, mais outre les cycles de la 1ère catégorie $C_1, C_2, \ldots . C_i, \ldots .$ que nous avions rencontrés dans le premier cas, nous aurons des cycles $C'_1, C'_2, \ldots . . C'_i$ de la 2de catégorie et de la 3me sous-catégorie. Considérons le cycle C'_i; divers sommets de ce cycle seront des zéros; je suppose d'après la convention faite plus haut qu'ils comptent pour h_i zéros distincts. On aura alors:

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i} + \sum h_i \tag{8}$$

Il faut évaluer l'intégrale (7):

1° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la 1ère catégorie.

2° le long des côtés de la 1ère sorte.

3° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la 2de catégorie.

La première partie de l'intégrale se réduit comme plus haut à $-2i\pi\sum\frac{p_i}{K_i}$; la seconde à

$$\sum J = 2i\pi m\left(n - 1 - \sum\frac{1}{K_i}\right)$$

Pour évaluer la troisième il suffit d'étudier comment varie l'argument de θ dans le voisinage des sommets de la 2^{de} catégorie; à cet effet, il faut mettre la fonction θ sous la forme:

$$(z - a)^{-2m}\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(a-z)}}\right]$$

(Φ étant l'algorithme d'une fonction holomorphe), ce qui est possible, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On reconnaîtra alors que cette 3^{me} partie de l'intégrale se réduit à $-2i\pi\sum h_i$.

Il restera donc pour l'expression de l'intégrale (7)

$$2i\pi\left[m(n - 1) - \sum\frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i\right]$$

d'où:

$$p_0 = q + m(n - 1) - \sum\frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i$$

et:

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum\frac{1}{K_i}\right)$$

Nous sommes conduits pour l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts à la même expression que dans le cas précédent. Cet excès est proportionnel au nombre m et dépend en outre du nombre des côtés du polygone R_0 et de la somme de ses angles; ou bien encore il est proportionnel à la fois à m et à la S de R_0.

Supposons enfin que la fonction θ soit de la 3^{me}, de la 4^{me}, de la 5^{me} ou de la 7^{me} familles, c'est à dire existe dans tout le plan. Nous aurons alors des côtés de la $1^{ère}$ et de la 2^{de} sorte, des sommets de la $1^{ère}$ et de la 3^{me} catégorie et des sommets de la 2^{me} catégorie appartenant à des cycles de la 3^{me} sous-catégorie. Nous allons chercher le nombre des zéros et des infinis distincts; ce nombre sera défini comme précédemment. Cependant il y a une remarque à faire au sujet du nombre des infinis distincts; ce sera en général le nombre des infinis intérieurs à R_0 et à R'_0, mais une difficulté se présentera si le point ∞ fait partie de la région R'_0. Dans ce cas il peut se faire que ∞ ne soit pas un infini de θ, mais que tous les transformés du point ∞ par les substitutions du groupe G soient des infinis de θ. Le nombre des infinis réellement distincts sera égal alors au nombre des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$ *plus un*. Pour éviter cette difficulté, je supposerai que le polygone R_0 ait été choisi de telle sorte que le point ∞ ne fasse pas partie de la région R'_0.

Cela posé reprenons l'intégrale (7); il va falloir l'évaluer le long du contour de R_0, puis le long du contour de R'_0 et ajouter. Soit $2n$ le nombre des côtés de la $1^{\text{ère}}$ sorte; l celui des côtés de la 2^{de} sorte; conservons d'ailleurs les notations employées plus haut: p_0 et q représenteront alors le nombre des zéros et des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$.

Il faut évaluer l'intégrale

1° le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la $1^{\text{ère}}$ catégorie.

2° le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la 3^{me} sous-catégorie.

3° le long des côtés de la $1^{\text{ère}}$ sorte.

4° le long des côtés de la 2^{de} sorte.

La première et la seconde partie de l'intégrale seront égales à $-2i\pi\left(\sum\frac{p_i}{K_i} + \sum h_i\right)$.

La troisième sera égale comme plus haut à $\sum J$. Construisons un polygone P_0 en menant par les différents sommets de R_0 des tangentes aux côtés de la $1^{\text{ère}}$ sorte. Le polygone rectiligne ainsi obtenu aura $4n + l$ côtés; ses angles seront de deux sortes: les uns seront analogues aux angles que nous avons appelés plus haut c, c'; les autres lui seront communs avec les angles de R_0, mais parmi ceux-ci les uns, dont la somme sera $\sum\frac{2\pi}{K_i}$, correspondront aux sommets de la $1^{\text{ère}}$ catégorie; les autres, qui seront nuls, correspondront aux sommets de la 2^{de} catégorie;

les autres enfin, qui seront droits et au nombre de $2l$, correspondront aux sommets de la 3me catégorie; d'où la relation:

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{K_i} + l\pi = (4n + l - 2)\pi$$

Or on a trouvé plus haut:

$$\sum J = m \sum c - 2nm\pi$$

on aura donc:

$$\sum J = 2i\pi m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$$

Appelons enfin $2\pi I$ la partie imaginaire de l'intégrale prise le long des côtés de la 2e sorte; nous trouverons pour l'intégrale (7) prise le long de R_0:

$$2i\pi\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i + I\right]$$

Il faut prendre maintenant l'intégrale (7) le long de R'_0. Supposons que, d'après les conventions faites plus haut, les sommets de la 1ère catégorie de R'_0 comptent pour $\sum \frac{p'_i}{K_i}$ zéros distincts et ceux de la 2de catégorie pour $\sum h'_i$ zéros distincts. Nous trouverons pour la valeur de l'intégrale prise le long de R'_0 en raisonnant comme plus haut:

$$2i\pi\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum h'_i - I\right]$$

ou en ajoutant les deux intégrales:

$$2i\pi\left[2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum h_i - \sum h'_i\right]$$

d'où:

$$p_0 = q + 2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum (h_i + h'_i)$$

Mais si p désigne comme plus haut le nombre des zéros distincts, on aura:

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i} + \sum \frac{p'_i}{K_i} + \sum h_i + \sum h'_i$$

d'ou:

$$p = q + 2m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i}\right)$$

Ainsi l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m, du nombre $2n$ des côtés de la 1ère sorte et de la somme des angles de la 1ère catégorie.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, dans tous les cas possibles, le nombre des zéros et celui des infinis distincts est toujours fini.

§ 4. *Fonctions Fuchsiennes.*

Si une fonction $F(z)$ est uniforme, si elle se reproduit par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien G de telle sorte que si

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

est une substitution de ce groupe on ait identiquement:

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z)$$

si enfin le fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et d'infinis réellement distincts, je dirai que cette fonction est une *fonction fuchsienne.* Existe-t-il de pareilles fonctions? Il est aisé d'en former.

Considérons en effet deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de l'entier m, leur quotient sera une fonction fuchsienne. Il est aisé de généraliser ce procédé. Nous dirons que le nombre m est le *degré* de la série θ. Si nous envisageons ensuite un produit de plusieurs séries telles que θ, le degré de ce monôme sera la somme des degrés de tous les facteurs. Si nous considérons un polynôme entier par rapport à diverses séries θ, nous dirons que ce polynôme est homogène et de degré K si tous ses termes sont d'un même degré K; le quotient de deux polynômes homogènes de degrés K et K' sera une fonction rationnelle homogène de degré $K - K'$. Il est clair que toute fonction rationnelle, homogène de degré 0 par rapport à diverses séries θ est une fonction fuchsienne. Nous verrons plus tard comment toute fonction fuchsienne peut s'exprimer de cette façon.

Quelles sont les propriétés des fonctions fuchsiennes?

1° *Les singularités sont les mêmes que celles des fonctions thétafuchsiennes;* nous avons par conséquent des fonctions fuchsiennes n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et pour lesquelles toute la circonférence de ce cercle est une ligne singulière essentielle, et d'autres qui existent dans tout le plan et dont les points singuliers, situés tous sur le cercle fondamental, sont isolés quoique en nombre infini.

2° Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne $F(z)$ est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal d'autre part au nombre des zéros distincts de la fonction fuchsienne $F(z) - a$, c'est à dire au nombre des points réellement distincts pour lesquels $F(z)$ prend la valeur a. En conséquence, le nombre des points intérieurs à R_0 (ou à $R_0 + R'_0$) et pour lesquels $F(z)$ reprend une même valeur est *constant* et *fini*.

3° Soient deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ correspondant à un même groupe fuchsien G, et supposé que la première reprenne p fois et la seconde p_1 fois la même valeur à l'intérieur de R_0, je dis qu'il y aura entre F et F_1 une relation algébrique. En effet à chaque valeur de F correspondent p_1 valeurs de F_1; toute fonction symétrique de ces p_1 valeurs est méromorphe en F pour toutes les valeurs de F finies ou infinies. Toutes ces fonctions symétriques sont donc des fonctions rationnelles de F; donc F_1 elle-même est fonction algébrique de F.

C. Q. F. D.

4° Considérons maintenant toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe G. Entre deux quelconques d'entre elles nous venons de voir qu'il y a une relation algébrique. Il suit de là que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y. Nous aurons d'ailleurs entre x et y une relation algébrique

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

quel est le genre de la relation (1) ou ce qui revient au même celui de la surface de Riemann correspondante? Pour résoudre cette question, il faut se reporter au § 7 du mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé *Classification en genres;* dans ce paragraphe, je supposais que l'on découpait la région R_0 (ou $R_0 + R'_0$) puis qu'on la repliait en la déformant de manière à recoller ensemble les côtés conjugués et à obtenir ainsi une surface fermée. Il est clair qu'au point de vue de la géométrie de situation la surface fermée ainsi obtenue ne diffère pas de la surface de Riemann qui nous occupe. Il en résulte que le genre de la relation (1) et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide d'*une seule* d'entre elles que j'appellerai x.

On peut éviter ces considérations empruntées à la géométrie de situation. C'est ce que j'ai fait dans un travail inséré dans les mémoires de l'Académie de Caen où je détermine le genre de la relation (1) par le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x, y), mais on est conduit ainsi à une discussion assez longue.

5° Considérons la fonction fuchsienne que nous venons d'appeler x et formons les deux fonctions suivantes:

$$(2) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}} \qquad\qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}.$$

Il est clair que l'on aura:

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{dx^2} = \frac{4\frac{d^3x}{dz^3}\frac{dx}{dz} - 3\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\frac{dx}{dz}\right)}$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de z; c'est donc, d'après ce que nous venons de voir, une fonction rationnelle de x et de y, que j'appellerai $\varphi(x, y)$.

Les deux intégrales de l'équation linéaire:

$$(3) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

sont donc:

$$v = v_1 \qquad\qquad v = v_2$$

Ainsi la considération de la fonction fuchsienne x permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coëfficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x, y). On voit que la variable indépendante x

s'exprime par une fonction fuchsienne de z, c'est à dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne on en déduit les intégrales elles-mêmes à l'aide des formules (2).

Dans le cas particulier où le groupe G est de genre 0, l'équation (3) pourra s'écrire:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x) \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle de x seulement; dans ce cas en effet, nous venons de voir que toute fonction fuchsienne s'exprime rationnellement en x.

Cherchons maintenant quels sont les points singuliers de l'équation (3) et comment se comportent les intégrales dans le voisinage de chacun d'eux. En général, les intégrales seront des fonctions holomorphes de x; il y aura deux exceptions qui nous donnent deux sortes de points singuliers.

1° pour les points singuliers de la relation (1), y cesse d'être fonction holomorphe de x, et il en est de même des intégrales v_1 et v_2; mais v_1 et v_2 restent *fonctions holomorphes du point* analytique (x, y). Nous n'avons donc pas ainsi un véritable point singulier.

2° pour les points (x, y) qui correspondent aux divers sommets du polygone R_0. Dans cette seconde espèce de points singuliers, nous distinguerons 1° ceux qui correspondent à des sommets de la 1ère catégorie. Dans le voisinage d'un pareil point singulier, les intégrales de l'équation (3) sont régulières, pour employer l'expression de M. Fuchs. Si nous formons maintenant l'équation déterminante correspondant à ce point singulier, la différence des racines de cette équation est l'inverse d'un nombre entier. En effet le point singulier correspond à un sommet de R_0 qui fait partie d'un cycle de la 1ère catégorie et la somme des angles de ce cycle est égal à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier; on voit aisément que la différence des racines de l'équation déterminante est précisément $\frac{1}{p}$.

Dans le cas particulier où le sommet de R_0 envisagé appartient à un cycle de la 1ère sous-catégorie, on a $p = 1$, d'après la définition même de cette sous-catégorie. Par conséquent la différence des racines de l'équation déterminante est l'unité. Un semblable point n'est donc pas un point singulier.

2° Considérons maintenant un point singulier qui corresponde à un sommet de R_0 appartenant à un cycle de la 2de catégorie. Ce cycle sera de la 3^{me} sous-catégorie, puisque, d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de cycle de la 4^{me} sous-catégorie. Formons l'équation déterminante correspondant à un pareil point singulier; les racines de cette équation seront égales et les intégrales de l'équation (3) seront *logarithmiques* mais *régulières.*

3° Il faudrait envisager enfin les points analytiques (x, y) qui correspondent à des sommets de la 3^{me} catégorie, mais on reconnaîtrait aisément que ce ne sont pas des points singuliers.

En résumé les intégrales de l'équation (3) sont partout régulières et (si on laisse de côté les points singuliers de la relation (1)) le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (3) est égal à celui des cycles de la 2^{me} ou de la 3^{me} sous-catégories que présente le polygone R_0 (ou les deux polygones R_0 et R'_0).

§ 5. *1ère famille; genre 0.*

Après avoir étudié les propriétés des fonctions fuchsiennes en général, nous allons nous occuper séparément des diverses familles et des divers genres entre lesquels se répartissent ces fonctions; nous commencerons par l'étude spéciale des fonctions les plus simples; celles de la 1ère famille et du genre 0.

Je rappelle d'abord quelle est pour de semblables fonctions la forme du polygone R_0. Les côtés sont tous de la première sorte et au nombre de $2n$; les côtés de rang p et $2n + 1 - p$ sont conjugués et par conséquent congruents. Les cycles sont au nombre de $n + 1$; deux d'entre eux ne contiennent qu'un seul sommet, le premier le sommet de rang 1; le second le sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles sont formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n + 2 - p$. (C'est l'exemple II du § 7 du mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Un cas particulier remarquable est celui où le polygone R_0 est symétrique par rapport à l'arc de cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental et qui joint les sommets de rang 1 et $n + 1$. Je dirai alors simplement que ce polygone et symétrique.

Dans le cas qui nous occupe, le genre est égal à 0 et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai x ou bien $f(z)$. Cette condition ne détermine pas complètement la fonction $x = f(z)$. Si en effet toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de x, elles s'expriment aussi rationnellement à l'aide de $\frac{ax + b}{cx + d}$, a, b, c, d étant des constantes quelconques. Il faut donc pour définir complètement la fonction $x = f(z)$ s'imposer encore trois conditions. Voici celles que nous choisirons. Soient α_1, α_2, α_{n+1} les sommets de rang 1, 2 et $n + 1$; nous supposerons que l'on a:

$$f(\alpha_1) = 0 \qquad f(\alpha_2) = 1 \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

La fonction $f(z)$ sera alors entièrement déterminée. A l'égard de cette fonction, je remarquerai ce qui suit. Si le polygone R_0 est symétrique, la fonction $f(z)$ est réelle et positive sur tout le périmètre de ce polygone.

J'appellerai α_i le sommet de rang i; ce sommet formera avec α_{2n+2-i} un cycle dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{\beta_i}$, β_i étant un nombre entier. Enfin je poserai:

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i})$$

d'où

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = \infty.$$

Pour $z = \alpha_i$, les $\beta_i - 1$ premières dérivées de $f(z)$ s'annulent de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme:

$$f(z) = a_i + b_1(z - \alpha_i)^{\beta_i} + b_2(z - \alpha_i)^{\beta_i + 1} + \dots\dots$$

Pour $z = \alpha_{n+1}$, $f(z)$ est un infini d'ordre β_{n+1} de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme:

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}}} + \frac{b_2}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}+1}} + \dots\dots$$

Nous avons vu que si l'on pose:

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction v ainsi définie satisfait à une équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x) \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$. On trouve aisément:

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \ldots\ldots (x-a_n)^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x-a_1)(x-a_2) \ldots\ldots (x-a_n)$ et $P(x)$ étant un polynôme en x de degré $2n-2$.

Le polynôme $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$P(a_i) = -Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right)$$

Nous désignons par la notation $Q'(x)$ la dérivée de $Q(x)$. De plus le coëfficient de x^{2n-2} dans $P(x)$ doit être égal à

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right)$$

Voilà donc $n+1$ conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire le polynôme $P(x)$ pour que l'équation (3 bis) soit intégrable de la façon que nous avons dite. Ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet, le polynôme $P(x)$ étant de degré $2n-2$, il reste dans ce polynôme $n-2$ paramètres arbitraires; mais dans ces $n-2$ paramètres qui sont des quantités *complexes*, je dois distinguer les parties réelle et imaginaire de telle facon qu'ils équivalent à $2n-4$ paramètres *réels*. Or combien avons-nous de paramètres arbitraires dans le groupe G. Le groupe G est defini par un polygone R_0 de $2n$ côtés. Pour définir un pareil polygone il faut en général $4n-3$ conditions. Mais notre polygone n'est pas quelconque: en effet les côtés conjugués doivent être congruents ce qui fait n conditions; la somme des angles des divers cycles doit être respectivement égale à $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\ldots \frac{2\pi}{\beta_{n+1}}$ ce qui fait $n+1$ conditions. Il reste donc en tout dans notre groupe G $2n - 4$ paramètres arbitraires. Dans notre fonction $\varphi(x)$ au contraire nous avons $2n - 4$ paramètres qui restent arbitraires dans $P(x)$; nous avons en outre dans $Q(x)$ $n - 2$ paramètres complexes arbitraires, à savoir $a_3, a_4, \ldots\ldots a_n$; cela équivant à $2n - 4$ paramètres complexes. Donc dans la fonction $\varphi(x)$ il y a $2n - 4$ paramètres arbitraires de plus que dans le groupe G. Donc pour que l'équation (3 bis) s'intègre de la façon que j'ai dite il faut, outre les conditions énoncées plus haut, que $2n - 4$ autres conditions soient remplies. Ces conditions sont transcendantes et très compliquées; leur étude trouvera place dans un autre mémoire.

Supposons maintenant que l'on se donne $a_3, a_4, \ldots\ldots a_n$, c'est à dire les points singuliers de l'équation (3 bis), $Q(x)$ sera déterminé et il nous restera les $2n - 4$ paramètres de $P(x)$. Le nombre des paramètres restés arbitraires est alors précisément le nombre des conditions à remplir. Dans une question où n'entreraient que des fonctions algébriques ou des transcendantes simples, on pourrait conclure de là que l'on peut toujours disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions, et par conséquent qu'*il existe toujours une équation de la forme (3 bis) intégrable par les fonctions fuchsiennes seules et où les points singuliers* $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, a_{n+1}$ *sont donnés à l'avance.* Mais ici nous ne pouvons nous contenter d'un pareil aperçu et ce théorème, fort important, exigera une démonstration spéciale que je donnerai dans un mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n+1}$ ainsi que les coëfficients de $P(x)$ sont réels.

Dans le cas plus particulier encore où $n = 2$, l'équation (3 bis) se ramène aisément à l'équation hypergéométrique de GAUSS. De plus nous avons $2n - 4 = 0$, de telle sorte que le nombre des conditions transcendantes dont il a été question plus haut est nul. Alors pour que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut et il suffit que:

$$P(0) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_1^2}\right)$$

$$P(1) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_2^2}\right)$$

coëfficient de x^2 dans $P(x) = -\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{\beta_3^2}\right)$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant entiers.

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes.

Soit $\theta(z)$ une fonction thétafuchsienne jouissant de la propriété caractéristique

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

Reprenons la fonction fuchsienne $f(z) = x$ et sa dérivée $f'(z)$, il est clair que la fonction

$$\frac{\theta(z)}{[f'(z)]^m}$$

sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle de x. Nous avons donc pour l'expression générale des fonctions $\theta(z)$:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x) \tag{1}$$

F étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Parmi les fonctions thétafuchsiennes, nous avons vu qu'il y en avait de deux espèces; les unes devenant infinies, les autres ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Quelle sera la forme générale de celles de la 2^{de} espèce? L'expression (1) ne doit devenir infinie pour aucune valeur de x. Dans ce cas $F(x)$ ne pourra devenir infini que si $\frac{dx}{dz}$ devient nul, c'est à dire si x vient en l'un des points singuliers $x = a_1$, $x = a_2$, ... $x = a_n$.

Il suit de là que l'on doit avoir:

$$\theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\theta_p(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \ldots (x - a_n)^{\lambda_n}} \tag{2}$$

$\theta_p(x)$ désignant un polynôme d'ordre p. Exprimons maintenant que $\theta(z)$ ne devient infini ni pour $x = a_1$, ni pour $x = a_2$, ... ni pour $x = a_n$, ni pour $x = \infty$; il viendra:

$$\begin{gathered} \lambda_i < m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \\ p < \sum \lambda_i - m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) \end{gathered} \tag{3}$$

Ces $n+1$ inégalités sont compatibles.

Ces inégalités ne permettent pas de donner à p des valeurs aussi grandes que l'on veut, de sorte qu'il existera toujours un nombre q tel que l'on ait constamment $p < q$ et que les inégalités (3) permettent à p d'atteindre la limite $q - 1$.

Supposons le nombre m donné; le nombre q sera alors déterminé et il est clair qu'entre q fonctions thétafuchsiennes de la n^e espèce, il y aura toujours une relation linéaire identique.

Si l'on se reporte à l'expression que nous avons donnée de ces transcendantes dans le § 1, on verra qu'il y entre une fonction rationnelle $H(z)$ renfermant un nombre infini de paramètres arbitraires. Il suit de là qu'il y a une infinité de fonctions rationnelles H, telles que la série thétafuchsienne correspondante soit identiquement nulle.

Il existe donc une infinité de relations identiques linéaires entre ces séries thétafuchsiennes. Nous les étudierons plus loin.

Revenons à l'expression (2). Jusqu'ici nous avons supposé que les nombres $m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots.$ qui y entrent étaient entiers. S'ils ne l'étaient pas, la fonction définie par cette expression ne jouirait plus de la propriété fondamentale des fonctions thétafuchsiennes, mais elle pourrait rester uniforme. Pour cela il suffit que les nombres:

$$m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

et

$$m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i\beta_{n+1}$$

soient entiers.

Il est clair que les $n+1$ équations:

$$(4) \qquad \begin{aligned} m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i &= \varepsilon_i \\ n(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i\beta_{n+1} &= \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

où les ε sont des nombres entiers donnés fourniront toujours des valeurs pour les λ et pour m, car ce sont des équations linéaires dont le déterminant n'est pas nul.

Supposons donc que dans les équations (4) on donne à tous les ε la valeur 0 excepté à ε_k auquel on donne la valeur 1. Portons ensuite dans l'expression (2) les valeurs de m et des λ tirées des équations (4) et remplaçons dans cette même expression θ_p par une constante. Nous aurons défini une fonction X_k qui est holomorphe dans tout le cercle fondamental, et qui n'a d'autres zéros que le point α_k et les points correspondants. Tous ces zéros sont d'ailleurs simples.

Ces fonctions $X_1, X_2, \ldots . X_n, X_{n+1}$, dont le rôle est très important, ont été découvertes par M. Halphen dans le cas particulier de $n = 2$. On peut trouver entre elles et x certaines relations intéressantes. Considérons en effet les séries X_1 et X_{n+1}. Soient m_1 et m_{n+1} les valeurs correspondantes du nombre m. Ces valeurs seront fractionnaires.

Soit en effet Y une fonction uniforme quelconque susceptible d'être mise sous la forme

$$Y = \left(\frac{dx}{dz}\right)^M \frac{K}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots.(x-a_n)^{\lambda_n}} \tag{2 bis}$$

K désignant un facteur numérique. Cette fonction n'a d'autres zéros ou infinis que les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_{n+1}$ et leurs correspondants. Supposons que ces zéros soient respectivement d'ordre $\gamma_1, \gamma_2, \ldots . \gamma_{n+1}$; il va sans dire que si α_i par exemple était un infini γ_i serait négatif. On aura:

$$Y = K_1 X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2} \ldots . . X_{n+1}^{\gamma_{n+1}}$$

K étant un facteur numérique. On aura en particulier:

$$x = K_1 X_1^{\beta_1} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

et

$$x - a_i = K_i X_i^{\beta_i} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

les K étant toujours des facteurs numériques: d'où les relations identiques

$$K_1 X_1^{\beta_1} = K_i X_i^{\beta_i} + a_i X_{n+1}^{\beta_{n+1}}$$

Nous avons exprimé les fonctions thétafuchsiennes de deux manières tout à fait différentes; soit par la série (4) § 1, soit par la formule (1). de ce paragraphe.

Nous savons donc a priori qu'il existe une infinité d'identités de la forme:

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m} = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

où H et F sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles.

Ecrire effectivement ces identités et en particulier reconnaître dans quel cas la fonction F est identiquement nulle, tel est le problème dont il s'agit maintenant de donner une solution aussi complète que possible.

Mais pour y arriver, il est nécessaire d'avoir recours à des considérations d'un ordre un peu différent.

Jusqu'ici nous avons toujours regardé le nombre m comme positif; supposons le maintenant entier, mais négatif. Considérons en particulier la fonction suivante:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{[f(z) - a_1]^{\mu_1} [f(z) - a_2]^{\mu_2} \ldots\ldots [f(z) - a_n]^{\mu_n}}{[f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)] \ldots\ldots [f(z) - f(z_p)]}$$

Je suppose que h est un entier positif ainsi que les exposants μ_1, μ_2, ... μ_n et que ces nombres entiers satisfont ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur aux inégalités suivantes:

$$(5)\qquad \begin{gathered} \mu_i > h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \\ \sum \mu < h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + p. \end{gathered}$$

D'après ces inégalités la fonction $\Lambda(z)$ ne peut devenir infinie que si l'un des facteurs du dénominateur s'annule. Il en résulte que les infinis de cette fonction sont tous simples et qu'ils sont compris dans l'une des formules:

$$(6)\qquad \frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i}, \ldots\ldots \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}$$

où

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

représente une des substitutions du groupe G.

Posons:

$$F(z) = [f(z) - a_1]^{\mu_1} [f(z) - a_2]^{\mu_2} \ldots\ldots [f(z) - a_n]^{\mu_n}$$

et

$$\frac{1}{[f(z) - f(z_1)]\,[f(z) - f(z_2)] \ldots\ldots [f(z) - f(z_p)]} =$$

$$= \frac{A_1}{f(z) - f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z) - f(z_2)} + \ldots\ldots + \frac{A_p}{f(z) - f(z_p)}$$

de telle sorte que:

$$\begin{array}{ll} & A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_p = 0 \\ & A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \ldots\ldots + A_p f(z_p) = 0 \\ (7) \qquad & A_1 f^2(z_1) + A_2 f^2(z_2) + \ldots\ldots + A_p f^2(z_p) = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & A_1 f^{p-2}(z_1) + A_2 f^{p-2}(z_2) + \ldots\ldots + A_p f^{p-2}(z_p) = 0 \\ & A_1 f^{p-1}(z_1) + A_2 f^{p-1}(z_2) + \ldots\ldots + A_p f^{p-1}(z_p) = 1 \end{array}$$

Le résidu correspondant à l'infini:

$$\frac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

s'écrira:

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}$$

Il en résulte que l'on aura identiquement:

$$(8) \qquad \Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \dfrac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z)$$

$G(z)$ désignant une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. Plus généralement, si $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de z n'ayant pas d'infini intérieur au cercle fondamental, on aura:

$$(9) \qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_0^\infty{}_i \sum_1^p{}_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{\varphi\left(\dfrac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}} \frac{1}{z - \dfrac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z)$$

Je dis que dans les formules (8) et (9) la fonction holomorphe $G(z)$ est identiquement nulle.

Première démonstration.

Considérons un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon r; concentrique par conséquent au cercle fondamental.

Envisageons les différents polygones R_i qui sont tout entiers ou en partie à l'intérieur de ce cercle.

L'ensemble de ces polygones formera une figure polygonale S ne dépendant que du rayon r du cercle C. Considérons l'intégrale:

$$\int \frac{A(z)\varphi(z)dz}{z-x}$$

prise le long du contour de cette figure S. Le théorème que j'ai énoncé pourra être regardé comme démontré si j'établis que cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 1, c'est à dire vers le rayon du cercle fondamental.

Pour cela je vais faire voir:

1° que le périmètre de S reste fini, quel que soit r.

2° que le module de la fonction sous le signe $\int$ reste plus petit qu'une certaine quantité M quand la variable reste sur le contour d'intégration.

3° que M tend vers 0 quand r tend vers 1.

En vertu du lemme IV du § 1, le nombre des polygones R_i qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle C est plus petit que:

$$N = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R+\lambda)} + e^{-2(R+\lambda)} - 2)$$

σ et λ étant des quantités constantes et R étant défini par l'égalité:

$$r = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}$$

Donc a fortiori, le nombre des côtés de S sera plus petit que $2nN$. Considérons l'un de ces côtés appartenant à un polygone R_i et soit l_i la longueur de ce côté; l_0 celle du côté correspondant de R_0; soit enfin $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ celle des substitutions de G qui correspond à R_i, on aura:

$$l_i < l_0 . H$$

H étant la plus grand valeur que puisse prendre

$$\text{mod.} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

quand la variable z décrit le côté l_0.

Supposons que le polygone R_0 soit tout entier contenu dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1}.$$

En vertu du lemme V du § 1 on aura;

$$H < \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R} + e^{-2R} + 2}$$

Soit L le plus grand côté de R_0. Le périmètre de S sera plus petit que:

$$2nN . H . L$$

ou a fortiori que:

$$\frac{2n\pi L}{\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)\frac{2e^{2(R+\lambda)}}{e^{2R}}$$

Il sera donc fini. C. Q. F. D.

Nous devons évidemment supposer que x ne se trouve sur aucun des contours d'intégration. La fonction $\frac{\varphi(z)}{z - x}$ est alors une fonction rationnelle bien déterminée et ne devenant infinie pour aucune des valeurs de la variable situées sur les divers contours d'intégration. On peut donc aisément trouver une limite supérieure M_1 que son module ne peut dépasser.

Nous pourrons supposer aussi que la fonction $A(z)$ ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0 et nous pourrons trouver une limite supérieure M_2 que son module ne peut dépasser quand z décrit le contour de R_0. Mais on aura identiquement:

$$A\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = A(z)\frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h}}$$

On en conclut que quand z décrit le contour de S le module de $A(z)$ est plus petit que:

$$M_2 H^{2h}$$

et celui de la fonction sous le signe $\int$ plus petit que:

$$M = M_1 M_2 H^{2h}$$

D'ailleurs quand r tend vers 1, M tend vers 0, puisque M_1 et M_2 sont des constantes et que H tend vers 0.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Deuxième Démonstration.

Posons:

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Si dans cette expression on regarde z comme une constante, $\Phi(z, a)$ sera une fonction thétafuchsienne de a. Supposons d'abord que z et a soient tous deux intérieurs au cercle fondamental; cette fonction thétafuchsienne ne deviendra infinie que pour $a = z$ et pour les points correspondants, c'est à dire pour $f(a) = f(z)$ Le résidu correspondant à l'infini $z = a$ sera égal à $-\varphi(z)$. On aura donc:

$$\Phi(z, a) = \frac{[f'(a)]^{h+1}}{f(z) - f(a)} \frac{\theta_q[f(a)]}{F_1(a)} \frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)][f'(z)]^h} \tag{10}$$

Dans cette expression (10) $F_1(a)$ designe le produit suivant:

$$[f(a) - a_1]^{\lambda_1}[f(a) - a_2]^{\lambda_2} \ldots\ldots\ldots [f(a) - a_n]^{\lambda_n}$$

$\theta_q[f(a)]$ désigne un polynôme entier de degré q en $f(a)$ dont les coëfficients peuvent être des fonctions de z.

Enfin les nombres $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ et q doivent satisfaire aux inégalités (3)

$$\lambda_i < (h+1)\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)$$

(11)

$$q < \sum \lambda - (h+1)\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1$$

On voit aisément en effet que telle doit être la forme de toute fonction thétafuchsienne de a n'admettant aucun infini distinct de l'infini $a = z$.

En comparant les inégalités (3) et (11) on trouve:

$$\lambda_i \leqq \mu_i \qquad\qquad q < p$$

Je me propose maintenant d'établir l'égalité (9) en montrant que $G(z)$ est identiquement nul, c'est à dire de démontrer l'identité:

$$\varphi(z)\Delta(z) = \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k)$$

ou bien:

$$\varphi(z)\Delta(z) = \sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{F(z_k)}{F_1(z_k)} \theta_q[f(z_k)] \frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)]\,[f'(z)]^h}$$

Nous pouvons simplifier le second membre en supposant que l'on a:

$$\lambda_i = \mu_i$$

Si cela n'avait pas lieu, on multiplierait $F_1(a)$ et $\theta_q[f(a)]$ par

$$[f(a) - a_1]^{\mu_1 - \lambda_1}[f(a) - a_2]^{\mu_2 - \lambda_2} \ldots\ldots\ldots [f(a) - a_n]^{\mu_n - \lambda_n}$$

Le degré du polynôme $\theta_q[f(a)]$ serait alors augmenté, mais il resterait inférieur à p.

On peut donc toujours supposer

$$\lambda_i = \mu_i \quad \text{et par conséquent} \quad F(z) = F_1(z)$$

tout en continuant à supposer

$$p > q$$

L'identité à démontrer se simplifie alors et s'écrit:

$$\sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)} \frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h} = \sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)} \frac{\theta_q[f(z_k)]}{\theta_q[f(z)]} \frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h}$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{\theta_q[f(z_k)]-\theta_q[f(z)]}{f(z)-f(z_k)} = P[f(z_k)]$$

P représentera un polynôme en $f(z_k)$ dont le degré sera égal à $q-1$ et ne pourra par conséquent surpasser $p-2$. L'identité à démontrer se réduit alors:

$$\sum A_k P[f(z_k)] = 0$$

et sous cette forme elle est évidente en vertu des relations (7). Le théorème énoncé est donc encore démontré.

Cette seconde démonstration nous conduit tout naturellement à un théorème important relatif aux fonctions thétafuchsiennes de 2$^{\text{de}}$ espèce. Soit

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2(h+1)} \tag{12}$$

une série où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. On a vu que cette série représente une fonction thétafuchsienne sans infini et peut être égalée à une expression de la forme:

$$[f'(z)]^{h+1} \frac{\theta_{q-1}[f(z)]}{F(z)} \tag{13}$$

θ_{q-1} étant un polynôme de degré $q-1$ en $f(z)$ et q étant le plus grand nombre entier satisfaisant aux inégalités (11).

Toute expression telle que (13) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles; donc toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles. Mais on peut faire deux hypothèses.

Ou bien toute expression telle que (13) peutêtre mise sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) ne peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Ou bien il n'est pas possible de mettre toute expression (13) sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Cette deuxième hypothèse doit être rejetée.

Supposons la en effet satisfaite et soient:

$$\Theta_1, \ \Theta_2, \ \ldots\ldots\ \Theta_{q-1}$$

les $q-1$ fonctions telles que (12) à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

Soient maintenant

$$z_1, \ z_2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ z_q$$

q valeurs quelconques de z. On pourra toujours trouver q nombres

$$A_1, \ A_2, \ \ldots\ldots\ldots\ A_q$$

satisfaisant aux conditions:

$$\begin{gathered}
A_1 \Theta_1(z_1) + A_2 \Theta_1(z_2) + \ldots\ldots + A_q \Theta_1(z_q) = 0 \\
A_1 \Theta_2(z_1) + A_2 \Theta_2(z_2) + \ldots\ldots + A_q \Theta_2(z_q) = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
A_1 \Theta_{q-1}(z_1) + A_2 \Theta_{q-1}(z_2) + \ldots\ldots + A_q \Theta_{q-1}(z_q) = 0
\end{gathered}$$

On aura alors quelle que soit la fonction H qui entre dans l'expression (12)

$$\sum_k \sum_i A_k H\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)} = 0 \tag{14}$$

Soit $\left(z, \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G; on démontre aisément l'identité suivante en reprenant la fonction $\Phi(z, z_k)$ définie plus haut et y faisant $\varphi(z) = 1$

$$\Phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, z_k\right) - (\gamma z + \delta)^{-2h} \Phi(z, z_k) = \tag{15}$$

$$= \sum_i (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2h-2} \frac{\left[\dfrac{(\gamma z + \delta)^{2h+1} - \left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right) + \delta\right]^{2h+1}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}\right]}{(\gamma z + \delta)^{2h}\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right) + \delta\right]^{2h+1}} =$$

$$= \sum_i (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2h-2} H\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)$$

$H(z)$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental.

Posons maintenant:

$$A(z) = \sum_k A_k \Phi(z, z_k)$$

Des formules (14) et (15) nous déduisons:

$$A\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) - (\gamma z + \delta)^{-2h} A(z) = 0$$

Comme cela a lieu quelle que soit la substitution $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ que l'on ait choisie dans le groupe G, il faudrait que l'on eût:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$$

$F(x)$ étant rationnel en x.

Mais $A(z)$ n'aurait que q infinis distincts, $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$. Or il est aisé de voir qu'une fonction de la forme $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$ doit toujours avoir plus de q infinis distincts.

Donc l'hypothèse faite au début est absurde.

Donc toute expression de la forme (13) peut toujours être mise sous la forme (12).

Donc toute fonction de la forme (1) peut toujours être exprimée par une série de la forme (4) paragraphe 1 pourvu que $m > 1$.

Comment maintenant, étant donnée une série de la forme (4) § 1, pourrons nous la mettre effectivement sous la forme (1).

On donne une série $\Theta(z)$ de la forme (4) et il s'agit de la mettre sous la forme:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

Nous connaissons d'abord les infinis de $\Theta(z)$ et les résidus correspondants; mais cela ne suffit pas pour déterminer complètement $F(z)$; il reste dans cette fonction rationnelle un certain nombre de coëfficients indéterminés. On peut d'abord calculer un nombre suffisant de valeurs de la série $\theta(z)$ pour avoir des équations qui permettent de déterminer ces coëfficients. Il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Considérons la fonction

$$\theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m} = F(x)$$

Elle devient infinie, non seulement quand $\theta(z)$ est infinie, mais quand $\frac{dx}{dz}$ est nul, c'est à dire pour:

$$z = a_1, \; z = a_2, \; \ldots\ldots\ldots \; z = a_n.$$

On développera alors la série $\theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m}$ suivant les puissances croissantes de $z - \alpha_i$ et on calculera les coëfficients de toutes les puissances négatives. Quand ces coëfficients seront connus, ainsi que les premiers coëfficients du développement de x suivant les puissances de $z - \alpha_i$, la fonction $F(x)$ sera aussi connue.

Mais pour trouver ces coëfficients eux-mêmes, il faut calculer un certain nombre de valeurs de la série $\theta(z)$ et de séries analogues. Il est pourtant des cas où cette difficulté peut être évitée.

Reprenons la fonction

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{F(z)}{[f(z) - f(z_1)]\,[f(z) - f(z_2)] \ldots\ldots [f(z) - f(z_p)]}$$

que nous avons étudiée plus haut; nous avons démontré l'identité suivante:

$$(8) \qquad A(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}$$

Différentions cette identité $2h + 1$ fois par rapport à z; il viendra:

$$(16) \qquad \frac{1}{(2h+1)!} \frac{d^{2h+1}A}{dz^{2h+1}} = -\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}$$

le second membre peut s'écrire:

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z - \alpha_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \dfrac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)^{2(h+1)}}$$

Remarquons que si dans le groupe G, nous avons la substitution $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, nous aurons également la substitution inverse $\left(z, \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)$. C'est à dire que l'expression précédente peut s'écrire:

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}$$

Le second membre de l'identité (16) est donc une série de la forme (4) § 1; il reste à mettre le premier membre sous la forme (1). C'est là un calcul qui ne présente pas de difficultés. J'en indique le résultat dans le cas de $h = 1$ et dans celui de $h = 2$. Soit

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} A_0(x)$$

et soient A_1, A_2, etc. les dérivées successives de A_0 par rapport à x. Reprenons maintenant l'équation:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x) \tag{3 bis}$$

et soient φ_1, φ_2, etc. les dérivées successives de φ par rapport à x. On aura dans le cas de $h = 1$

$$\frac{d^3A}{dz^3} = (A_3 - 2A_0\varphi_1 - 4A_1\varphi)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \tag{17}$$

et dans le cas de $h = 2$

$$\frac{d^5A}{dz^5} = (A_5 - 20A_3\varphi - 30A_2\varphi_1 - 18A_1\varphi_2 - 4A_0\varphi_3 + 64A_1\varphi^2 + 64A_0\varphi\varphi_1)\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 \tag{18}$$

On peut trouver une infinité de relations analogues à la relation (16) par divers procédés; par exemple en différentiant cette relation par rapport aux divers paramètres z_1, z_2, ... z_p.

Je vais maintenant poser un dernier problème que je ne résoudrai que partiellement.

Considérons la série (4) § 1

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

elle dépend de la fonction rationnelle H et je la représenterai pour cette raison par la notation:

$$\Theta[z, H]$$

Comment faut-il choisir la fonction rationnelle H pour que Θ soit identiquement nul?

La solution complète de ce problème serait sans doute très compliquée; mais on peut s'aider dans chaque cas particulier des considérations suivantes:

1° Si l'on a identiquement

$$\Theta(z, H_1) = \Theta(z, H_2) = 0$$

on aura également:

$$\Theta(z, H_1 + H_2) = 0$$

2° Si la fonction rationnelle H peut se développer en une série convergente de la forme suivante:

$$\text{(S)} \qquad k_1 H_1 + k_2 H_2 + \ldots\ldots + k_n H_n + \ldots\ldots$$

où $k_1, k_2, \ldots k_n$ sont des coëfficients constants et où $H_1, H_2, \ldots H_n$ sont des fonctions rationnelles telles que:

$$\Theta(z, H_n) = 0$$

Si la série (S) est convergente toutes les fois que z est intérieur au cercle fondamental, on aura identiquement

$$\Theta(z, H) = 0$$

3° Si l'on a identiquement:

$$\Theta(z, H) = 0$$

et si, $\left(z \quad \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ désignant une des substitutions de G, on pose:

$$H_1(z) = H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

on aura identiquement:

$$\theta(z,\ H_1) = 0$$

En effet posons pour abréger:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z) \qquad \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = f_1(z) \qquad \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} = f_1^{-1}(z)$$

la série (4) pourra s'émettre sous la forme:

$$\theta(z,\ H) = \sum H\left[f_1\left[f_i[f_1^{-1}(z)]\right]\right]\left[\frac{df_1\left[f_i[f_1^{-1}(z)]\right]}{dz}\right]^m$$

Remplaçons maintenant z par $f_1(z)$ dans l'équation identique

$$\theta(z,\ H) = 0$$

il viendra:

$$0 = \sum H\left[f_1[f_i(z)]\right]\left[\frac{df_1[f_i(z)]}{df_i(z)}\right]^m\left[\frac{df_i}{dz}\right]^m\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m = \theta(z,\ H_1)\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m$$

ce qui démontre l'identité annoncée.

4° Soit, pour reprendre les notations employées au début de ce chapitre, α_r l'un des sommets du polygone R_0, α'_r son symétrique par rapport au cercle fondamental. Une des substitutions de G s'écrira:

$$\left(\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r},\ e^{\frac{2i\pi}{\beta_r}}\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}\right)$$

β_r étant un nombre entier connu. Si nous posons:

$$H(z) = \left(\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}\right)^p \frac{1}{(z-\alpha'_r)^{2m}}$$

on aura identiquement:

$$\theta(z,\ H) = 0$$

à moins que:

$$p + m \equiv 0 \qquad \text{mod. } \beta_r$$

En effet considérons les diverses substitutions $(z,\ f_i)$ du groupe G, on peut en choisir une infinité

$$(z,\ \varphi_0),\ (z,\ \varphi_1),\ (z,\ \varphi_2),\ \ldots.\ (z,\ \varphi_n)\ \ldots$$

et de telle sorte que chacune des fonctions $f_i(z)$ puisse être définie d'une manière et d'une seule par une relation de la forme suivante

$$\frac{f_i - a_r}{f_i - a'_r} = e^{\frac{2hi\pi}{\beta_r}} \frac{\varphi_k - a_r}{\varphi_k - a'_r}$$

h étant un entier égal ou inférieur à β_r. On aura alors:

$$\Theta(z, H) = \sum\nolimits_i \frac{(f_i - a_r)^p}{(f_i - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{df_i}{dz}\right)^m$$

ou

$$\Theta(z, H) = \sum_0^\infty\nolimits_k \sum_1^{\beta_r}\nolimits_h \frac{(\varphi_k - a_r)^p}{(\varphi_k - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{d\varphi_k}{dz}\right)^m e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}}$$

Or si l'on n'a pas

$$p + m \equiv 0 \qquad \text{mod. } \beta_r$$

on aura:

$$\sum_1^{\beta_r}\nolimits_h e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}} = 0$$

On aura donc

$$\Theta(z, H) = 0$$

C. Q. F. D.

5° Reprenons l'identité

(9) $$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum\nolimits_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k)$$

ou

$$\Phi(z, z_k) = \sum\nolimits_i \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \dfrac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Faisons y successivement

$$\varphi(z) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z - b}$$

b étant une quantité constante extérieure au cercle fondamental, nous obtiendrons deux identités de la forme (9).

Multiplions la première par $\frac{1}{z-b}$ et retranchons en la seconde; il viendra:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Psi(b, z_k) = 0 \tag{19}$$

en posant:

$$\Psi(b, a) = \sum_i \frac{1}{b - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Posons encore

$$\Theta(b, a) = -\frac{d^{2h+1}\Psi}{db^{2h+1}} \frac{1}{(2h+1)!}$$

il viendra, en différentiant $2h+1$ fois la relation (19) par rapport à b:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta(b, z_k) = 0 \tag{20}$$

Or $\Theta(b, z_k)$ est une fonction thétafuchsienne de b. Le premier membre de l'identité (20) est donc une série de la forme (4) § 1. Nous obtenons donc ainsi une série de cette forme qui est identiquement nulle quand b, qui est ici la variable indépendante, reste *extérieure* au cercle fondamental.

Mais ce que nous cherchons, c'est une série de la forme (4) qui reste identiquement nulle quand la variable indépendante reste *intérieure* au cercle fondamental. Heureusement il est facile de passer d'un cas à l'autre. Posons en effet

$$b = \frac{1}{z}$$

On aura:

$$\frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} = \frac{1}{\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}}$$

α'_i, β'_i, γ'_i, δ'_i désignant les quantités imaginaires conjugées de α_i, β_i, γ_i, δ_i; de sorte que les substitutions $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ forment un groupe G' conjugué de G.

De même en posant:

$$b_i = \frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} \qquad\qquad z_i = \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$$

on aura:

$$\frac{db_i}{db} = \frac{z^2}{z_i^2}\frac{dz_i}{dz}$$

Nous aurons donc:

$$\Theta(b,\ a) = \sum\nolimits_i \frac{1}{(b_i - a)^{2h+2}}\left(\frac{db_i}{db}\right)^{h+1} = \sum\nolimits_i \frac{z^{2h+2}}{(1 - az_i)^{2h+2}}\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}$$

ou enfin

$$\Theta(b,\ a) = z^{2h+2}\Theta'(z,\ a)$$

en posant

$$\Theta'(z,\ a) = \sum\nolimits_i \frac{1}{(1 - az_i)^{2h+2}}\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}$$

Nous arrivons à l'identité suivante:

$$\sum\nolimits_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\,\Theta'(z,\ z_k) = 0$$

Les fonctions Θ' sont des fonctions thétafuchsiennes de z, de sorte que nous avons bien une identité de la forme cherchée. Mais le groupe des fonctions Θ' n'est pas le groupe G, mais le groupe conjugué G'. Passons donc du groupe G' au groupe G en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il viendra:

$$\sum\nolimits_k \left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right]' \Theta'_1(z,\ z'_k) = 0$$

Dans cette formule $\left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right]'$ et z'_k désignent les quantités imaginaires conjuguées de $\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}$ et de z_k et l'on a posé:

$$\Theta'_1(z,\ a) = \sum \frac{1}{\left(1 - a\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2h+2}} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h+2}}$$

de sorte que si nous posons:

$$H(z) = \sum_k \left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right] \frac{1}{(1 - z'_k z)^{2h+2}}$$

nous aurons identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

tant que z restera intérieur au cercle fondamental.

6° Supposons que l'on ait identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

et que H dépende d'un paramètre arbitraire λ; on aura également:

$$\theta\left(z, \frac{dH}{d\lambda}\right) = 0$$

En combinant de diverses manières les six principes qui précèdent on obtiendra une infinité de relations de la forme:

$$\theta(z, H) = 0$$

§ 6. *1ère famille; genre quelconque.*

Nous nous sommes étendus sur les fonctions de la 1ère famille et du genre 0 parce qu'elles sont les plus simples de toutes et parce que les principes généraux, une fois démontrés dans ce cas particulier, s'étendent sans trop de peine aux fonctions de toutes les familles et de tous les genres. Nous insisterons moins sur les autres fonctions fuchsiennes et nous nous bornerons à faire connaître les particularités les plus remarquables qui les concernent.

Lorsque le polygone R_0, tout en restant de la 1ère famille, n'est pas de la forme simple étudiée dans le paragraphe précédent, ou n'est pas susceptible d'y être ramené, les fonctions fuchsiennes correspondantes sont de la 1ère famille et de genre plus grand que 0.

Commençons par un exemple simple. Soit un polygone R_0 de $4n$ côtés et tel que les côtés opposés soient conjugués. Tous les sommets forment alors un seul cycle, de sorte que la somme de tous les angles du polygone R_0 est une partie aliquote de 2π. Supposons d'abord qu'elle soit précisément égale à 2π. On pourra alors exprimer toutes les fonctions fuchsiennes dérivées du polygone R_0 à l'aide de deux d'entre elles que nous appellerons x et y, et entre lesquelles il y a une relation algébrique:

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

qui est de genre n.

Reprenons l'équation (3) du § 4. Elle s'écrit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

et l'on a identiquement:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x'')^2}{(x')^4}$$

en désignant par x', x'', x''', les dérivées successives de x par rapport à z.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(x, y)$? Pour simplifier, je vais supposer que la fonction y de x définie par l'équation (1) ne présente que des points singuliers de la nature la plus simple; c'est à dire que toutes les fois que l'on a:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0$$

on a, ou bien:

$$\frac{d\psi}{dx} \gtrless 0 \qquad\qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

(ce qui correspond pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$ à une tangente parallèle à l'axe de y et n'ayant avec la courbe qu'un contact du 1^er^ ordre) ou bien:

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \qquad \left(\frac{d^2\psi}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0 \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

(ce qui correspond pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$ à un point double ordinaire).

Nous supposerons en outre que si l'équation (1) est d'ordre r, on a pour x infini, r valeurs finies et distinctes du rapport $\frac{y}{x}$ (ce qui correspond pour la courbe $\psi(x, y) = 0$ à r directions asymptotiques distinctes).

Ces hypothèses ne restreignent pas la généralité; en effet on peut, parmi les fonctions fuchsiennes correspondant au groupe G, choisir d'une infinité de manières les fonctions x et y de telle sorte que toutes les autres s'expriment rationnellement en x et y et ce choix peut toujours se faire de façon à satisfaire aux hypothèses précédentes.

Reprenons maintenant notre fonction $\varphi(x, y)$. Il est clair que pour les valeurs infinies de x, elle reste finie; qu'elle est finie également toutes les fois que x' n'est pas nul. Or x' ne peut s'annuler que si l'on a à la fois

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \qquad\qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0$$

Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ sont donc les points singuliers de l'équation (1) en n'y comprenant que les points singuliers ordinaires et non les points doubles de la courbe (1).

Considérons l'un de ces infinis, et soient α, β, γ les valeurs correspondantes de x, de y et de z. On voit aisément que le développement de $x - \alpha$ commence par un terme en $(z - \gamma)^2$, celui de $y - \beta$ par un terme en $z - \gamma$ et on en conclut que l'on a:

$$\lim. (y - \beta)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad\qquad (\text{pour } x = \alpha,\ y = \beta)$$

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer complètement la fonction $\varphi(x, y)$. Celle-ci est assujettie en outre à un certain nombre de conditions transcendantes dont l'étude approfondie fera l'objet d'un mémoire ultérieur. Nous démontrerons de plus, dans un autre mémoire, que si ces conditions ne sont pas remplies, mais si les coëfficients de $\varphi(x, y)$ satisfont à certaines inégalités, x n'est plus, il est vrai, fonction fuchsienne de z, mais en est encore fonction uniforme (Kleinéenne).

De combien de paramètres distincts dépend notre groupe G?

Pour définir un polygone de $4n$ côtés, il faut $8n - 3$ conditions; mais notre polygone R_0 n'est pas arbitraire. Il est assujetti à $2n + 1$

conditions, à savoir que les côtés opposés soient congruents et que la somme des angles soit égale à 2π. Il reste donc $6n - 4$ paramètres arbitraires. Mais on a vu, au § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, qu'un même groupe G pouvait être considéré comme dérivé d'une infinité de polygones différents et, en effet, dans le cas qui nous occupe, on peut remplacer le polygone R_0 par un autre R'_0 ayant ses côtés en même nombre et disposés de la même manière, mais ayant pour sommet un point quelconque du plan; de sorte qu'à un même groupe G correspond une double infinité de polygones R_0 et que le nombre des paramètres de G est de deux unités inférieur à celui des paramètres de R_0. *Le groupe G dépend donc de $6n - 6$ paramètres.*

De combien de paramètres dépend la relation (1)? Bien entendu, je ne considère pas comme distinctes deux relations:

$$\psi(x, y) = 0 \qquad\qquad \psi_1(\xi, \eta) = 0$$

si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation uniforme, c'est à dire en remplaçant ξ et η par des fonctions rationnelles de x et de y. La théorie des fonctions abéliennes nous apprend que ces paramètres sont, pour une relation du genre n, au nombre de $3n - 3$. Mais il s'agit de $3n - 3$ paramètres *complexes* qui correspondent à $6n - 6$ paramètres *réels;* c'est à dire que le nombre des paramètres dont dépend la relation (1) est précisément le même que celui des paramètres du groupe G. S'en suit-il que l'on puisse disposer des paramètres du groupe G de telle sorte que l'on ait entre x et y telle relation algébrique que l'on veut? C'est ce que nous démontrerons dans un mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier de $n = 1$, nous n'avons plus affaire à des fonctions fuchsiennes proprement dites. En effet, dans les polygones curvilignes R_0 dont tous les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental, la somme des angles est toujours plus petite que celle d'un polygone rectiligne d'un même nombre de côtés. Pour un quadrilatère, la somme des angles devrait être plus petite que 2π. Mais ici nous avons supposé que la somme des angles de notre polygone curviligne de $4n$ côtés était précisément 2π. Si l'on veut faire $n = 1$, le polygone R_0 devra devenir rectiligne, le rayon du cercle fondamental deviendra infini et le quadrilatère R_0 se réduira à un simple parallélogramme rectiligne; le groupe G se réduira alors à des substitutions de la forme $(z, z + \alpha)$ et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent se réduiront à des fonctions doublement périodiques. C'est dans ce sens que l'on peut dire que les fonctions elliptiques sont des cas particuliers des fonctions fuchsiennes.

Supposons donc $n > 1$. Le polygone R_0 peut présenter différentes formes de symétrie. Il peut d'abord être symétrique par rapport à un cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental; dans ce cas, les coëfficients des fonctions $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont réels. Supposons maintenant qu'il soit symétrique par rapport à un point, ou qu'il puisse être ramené, soit par un changement convenable de la variable z, soit par l'application de la règle du § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, à être symétrique par rapport à un point: dans ce cas la relation (1) se ramène à la relation hyperelliptique:

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2n})$$

Mais la réciproque n'est pas vraie.

Considérons maintenant une intégrale abélienne de 1ère espèce:

$$\int g(x, y) dx \tag{4}$$

et remplaçons x et y par leurs valeurs en z; il viendra:

$$\int g(x, y) dx = \int g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(z)$$

$g(z)$ désignant une fonction fuchsienne de z et $G(z)$ une fonction uniforme de z, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et cessant d'exister à l'extérieur de ce cercle.

Soit $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ une des substitutions du groupe fuchsien; on aura identiquement:

$$G\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = G(z) + K_i$$

K_i étant l'une des périodes de l'intégrale abélienne. Ainsi à chaque substitution de notre groupe correspond une des périodes de l'intégrale (4).

Mais on peut se placer à un autre point de vue. Soit ab un des côtés du polygone R_0; on aura:

$$\int_a^b g(z)dz = G(b) - G(a)$$

$G(b) - G(a)$ sera alors une des périodes de l'intégrale (4) de sorte qu'à chaque côté de R_0 correspond une de ces périodes.

Si cd est le côté conjugué de ab, on aura évidemment:

$$G(b) - G(a) = G(c) - G(d)$$

Il en résulte qu'à deux côtés conjugués correspond la même période prise en sens contraire et qu'aux $2n$ paires de côtés conjugués de notre polygone, correspondra un système fondamental de $2n$ périodes de l'intégrale (4). Mais ces périodes ne seront pas les périodes normales.

Mais parmi les polygones équivalents à R_0, en vertu de la règle du § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, il en est un qui présente à cet égard une particularité remarquable. Considérons un polygone R'_0 de $4n$ côtés dont les sommets soient en suivant le périmètre dans le sens positif:

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n.$$

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment ce dernier sommet par les lettres d_n et d_0. Je suppose que le côté $d_{i-1}\,a_i$ soit conjugué de $b_i\,c_i$ et que le côté $a_i\,b_i$ soit conjugué de $c_i\,d_i$. En d'autres termes le côté de rang $4p+1$ est conjugué du côté de rang $4p+3$, et le côté de rang $4p+2$ conjugué du côté de rang $4p+4$. On voit sans peine que tous les sommets d'un pareil polygone appartiennent à un même cycle et que le polygone R'_0 appartient au genre n. Je suppose de plus que la somme des angles soit égale à 2π; on voit alors facilement qu'il peut être ramené à un polygone tel que R_0 par l'application de la règle du § 9.

Envisageons maintenant deux intégrales abéliennes de 1ère espèce.

$$\int g(x, y)dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(z) \tag{4}$$

$$\int g_1(x, y)dx = \int g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = G_1(z) \tag{5}$$

Posons:

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{b_i}^{c_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(a_i) - G(d_{i-1}) = A_i$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{c_i}^{d_i} g(z)\frac{dx}{dz}dz = G(b_i) - G(a_i) = B_i$$

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{b_i}^{c_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = G_1(a_i) - G_1(d_{i-1}) = A'_i$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = -\int_{c_i}^{d_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}dz = G_1(b_i) - G_1(a_i) = B'_i$$

Les périodes A_i, B_i, A'_i, B'_i des intégrales (4) et (5) correspondront ainsi aux divers côtés du polygone R'_0.

Si maintenant nous prenons l'intégrale:

$$\int G_1(z)g(z)\frac{dx}{dz}dz$$

le long du périmètre de R'_0, cette intégrale doit être nulle et en développant l'intégrale, on trouve sans peine l'identité bien connue:

$$\sum_i (A_iB'_i - B_iA'_i) = 0$$

ce qui prouve que les périodes A_i, B_i, etc. sont les périodes normales.

Je n'insiste pas sur ces considérations qui montrent quel parti on pourra tirer des fonctions fuchsiennes pour l'étude des intégrales abéliennes.

Je suppose maintenant que la somme des angles de R_0 soit, non plus 2π, mais $\frac{2\pi}{\beta}$, β étant un entier.

Voyons quel changement cette hypothèse apportera dans ce qui précède. La relation (1) sera toujours de genre n. La fonction $\varphi(x, y)$ jouira des mêmes propriétés que dans le cas précédent, avec cette seule différence qu'elle deviendra infinie pour $x = a$, $y = b$; c'est à dire pour les valeurs de x et de y qui correspondent aux sommets du polygone R_0.

On aura alors:

$$\lim. (x - a)^2 \varphi(x, y) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_2}\right) \qquad \text{(pour } x = a,\ y = b)$$

Les points singuliers de l'équation (3) sont alors ceux de la relation (1) et le point a, b.

Considérons maintenant un polygone R_0 de la 1ère famille, mais d'ailleurs tout à fait quelconque; soit $2n$ le nombre des côtés et p le nombre des cycles. Supposons, que si l'on calcule la somme des angles appartenant aux différents cycles, on trouve respectivement $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\ldots \frac{2\pi}{\beta_p}$, pour le 1er, le 2d, ... et le p^e de ces cycles. Les fonctions fuchsiennes dérivées de ce polygone R_0 s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$(1) \qquad \psi(x, y) = 0$$

de genre:

$$P = \frac{n - p + 1}{2}.$$

Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_p, b_p) les valeurs que prennent x et y quand la variable z vient en l'un des sommets du 1er, du 2d, ... ou du p^e cycle.

J'appelle (c_i, d_i) les points analytiques pour lesquels on a:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0$$

J'appelle (e_i, f_i) les points analytiques pour lesquels on a:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = 0$$

Je conserve d'ailleurs pour la fonction $\psi(x, y)$ que je suppose d'ordre r, les hypothèses faites plus haut. Le nombre des points c_i, d_i est alors:

$$r(r - 1) + 2P - (r - 1)(r - 2) = 2r + 2P - 2$$

et celui des points e_i, f_i est

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P$$

L'équation (3) s'écrira:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

La fonction $\varphi(x, y)$, rationnelle en x et en y, devient infinie:
1° pour $x = c_i$, $y = d_i$; on a alors:

$$\lim. (y - d_i)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = c_i,\ y = d_i)$$

2° pour $x = a_i$, $y = b_i$; on a alors:

$$\lim. (x - a_i)^2 \varphi(x, y) = \frac{1-\beta_i^2}{4\beta_i^2} \qquad (\text{pour } x = a_i,\ y = b_i)$$

Les conditions auxquelles on doit assujettir le groupe G pour que l'on ait entre x et y une relation (1) donnée et pour que les quantités (a_i, b_i) et les nombres entiers β_i aient des valeurs données sont au nombre de $6P - 6 + 2p$. Le nombre des paramètres dont dépend le groupe G est aussi de $6P - 6 + 2p$. Il ne s'en suit pas immédiatement que l'on puisse disposer de ces $6P - 6 + 2p$ paramètres de façon à satisfaire à ces $6P - 6 + 2p$ conditions. Mais je démontrerai dans un mémoire ultérieur qu'il en est effectivement ainsi et qu'il existe *toujours* deux fonctions fuchsiennes x et y qui correspondent à un même groupe G, entre lesquelles il y a une relation algébrique *donnée*

$$\psi(x, y) = 0$$

et qui pour p systèmes *donnés* de valeurs $(x = a_1, y = b_1)$, $(x = a_2, y = b_2)$, ... $(x = a_p, y = b_p)$ voient leurs dérivées des $\beta_1 - 1$, $\beta_2 - 1$, ... $\beta_p - 1$ premiers ordres s'annuler, (β_1, β_2, ... β_p étant des nombres entiers *donnés*).

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes. Leur forme générale sera:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x,\ y) \tag{6}$$

F désignant une fonction rationnelle de x et de y.

Quelles sont les conditions pour que cette fonction thétafuchsienne soit de 2^{de} espèce, c'est à dire reste holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $F(x, y)$ pourra toujours s'écrire

$$\frac{P(x,\ y)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^m (x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \ldots\ldots (x - a_p)^{\lambda_p}}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ étant les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités:

$$\lambda_i \leqq m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)$$

On reconnaîtra ensuite aisément quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction (6) soit de 2^{de} espèce:

1° La fonction rationnelle $P(x, y)$ devra se réduire à un polynôme entier.

2° Les $p(r - 1)$ points d'intersection de la courbe $\psi(x, y) = 0$ avec les droites $x = a_1, x = a_2, \ldots x = a_p$ [en exceptant les points singuliers $(x = a_1, y = b_1)$, $(x = a_2, y = b_2)$, $\ldots\ldots (x = a_p, y = b_p)$] devront appartenir à la courbe $P(x, y) = 0$; cette dernière devra avoir un contact d'ordre $\lambda_i - 1$ avec la courbe $\psi(x, y) = 0$ aux points où cette courbe rencontre la droite $x = a_i$ (en exceptant toujours le point singulier $x = a_i$, $y = b_i$).

Cela équivaut pour le polynôme $P(x, y)$ à:

$$(r - 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_p) = (r - 1)\sum\lambda$$

conditions.

3° Le degré du polynôme $P(x, y)$ devra être au plus égal à:

$$\sum\lambda + m(r - 3)$$

4° Considérons maintenant les points $x = e_i$, $y = f_i$, c'est à dire les points doubles de la courbe $\psi(x, y) = 0$; ils devront appartenir à la courbe $P(x, y) = 0$, et même (puisque $m > 1$) être pour cette courbe un point double. Enfin les deux branches de la courbe $P = 0$ devront avoir respectivement avec les deux branches de la courbe $\psi = 0$, un contact d'ordre $m - 2$. Cela équivaut pour le polynôme $P(x, y)$ à $2m - 1$ conditions pour chacun des points doubles $x = e_i$, $y = f_i$, c'est à dire en tout à

$$(2m-1)\left(\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right)$$

conditions.

Un polynôme de degré $\sum\lambda + m(r-3)$ dépend de:

$$\frac{1}{2}\left[\sum\lambda + m(r-3) + 1\right]\left[\sum\lambda + m(r-3) + 2\right]$$

paramètres. Mais si l'on tient compte de la relation (1) et si l'on a:

$$\sum\lambda + m(r-3) \geqq r \tag{7}$$

ce nombre se réduit à:

$$r\sum\lambda + \left(m - \frac{1}{2}\right)r(r-3).$$

Mais notre polynôme est assujetti d'une part à $(r-1)\sum\lambda$, d'autre part à $(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right]$ conditions. Il reste donc dans ce polynôme:

$$\sum\lambda + (2m-1)(P-1) \tag{8}$$

paramètres arbitraires. Mais ce n'est là qu'une limite inférieure du nombre des paramètres arbitraires restant réellement dans notre polynôme. Car il se peut faire:

1° Que la condition (7) ne soit pas remplie. Alors l'expression des paramètres arbitraires restant dans notre polynôme n'est plus

$$\sum\lambda + (2m-1)(P-1)$$

mais:

$$\frac{1}{2}\left(\sum\lambda + m(r-3)+1\right)\left(\sum\lambda + m(r-3)+2\right) - (r-1)\sum\lambda - (2m-1)\left(\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right)$$

Cette seconde expression diffère de la première de:

$$\frac{1}{2}\left(\sum\lambda + m(r-3) - r + 1\right)\left(\sum\lambda + m(r-3) - r + 2\right)$$

Il en résulte que les deux expressions ne diffèrent pas si l'on a:

$$\sum\lambda + (m-3) - r = -1 \text{ ou } -2$$

L'expression (8) ne cesse par conséquent de représenter le nombre des paramètres restés arbitraires que si l'on a:

$$\sum\lambda + (m-1)r - 3m < -2$$

Or cette inégalité jointe à $m \geqq 2$, $r \geqq 3$, entraîne les égalités suivantes:

$$r = 3 \qquad \sum\lambda = 0$$

Mais ce cas où l'on a $r = 3$, $P = 1$, $\sum\lambda = 0$ et où par conséquent tous les λ sont nuls, est précisément celui des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à nous occuper.

2° On peut se demander aussi si les

$$(r-1)\sum\lambda + (2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P\right]$$

conditions auxquelles nous avons assujetti notre polynôme sont toutes distinctes. Voici comment on peut tourner la difficulté. Soit N le nombre des zéros distincts de l'expression (6); le nombre $N+1$ sera évidemment une limite supérieure du nombre des paramètres restés arbitraires dans cette expression. Mais cette limite peut encore être abaissée. En effet l'expression (6) s'annule quand la variable z vient en l'un des sommets de R_0; ce sont là des zéros qui ne sont pas arbitraires. Si donc N' est le nombre des zéros réellement distincts qui coïncident avec les sommets de R_0, nous devons prendre pour notre limite supérieure $N - N' + 1$. Ce n'est pas tout. Si l'on considère une expression rationnelle en x et y, admettant q zéros et q infinis, la théorie des intégrales abéliennes nous apprend qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les q zéros et les q infinis, mais que la connaissance des q infinis et de $q - P$ des zéros suffit pour déterminer les P derniers zéros. Or les $N - N'$ zéros qui restent de notre expression (6) sont ceux de la fonction rationnelle:

$$\frac{P(x, y)}{[F'(y)]^m (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_p)^{\lambda_p}}$$

dont nous connaissons les infinis. Il en résulte que $N - N' - P$ d'entre eux suffisent pour déterminer tous les autres et que nous devons prendre finalement pour notre limite supérieure $N - N' - P + 1$.

Or les principes du § 3 nous donnent:

$$N = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_i}\right)$$

$$N' = \sum \frac{m(\beta_i - 1) - \lambda_i\beta_i}{\beta_i} = mp - m\sum \frac{1}{\beta_i} - \sum \lambda$$

$$N - N' - P + 1 = \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$$

c'est à dire que notre limite supérieure coïncide avec la limite inférieure trouvée plus haut. Il y aurait exception dans le cas $\sum \lambda = 0$, $P = 1$ c'est à dire dans le cas des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à parler.

Il résulte de là que toutes les fonctions thétafuchsiennes de la 2de espèce (aussi bien celles qui peuvent s'exprimer par une série de la forme (4) § 1 que celles qui ne peuvent s'exprimer par une pareille série) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles.

Considérons maintenant une fonction de la forme:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

F désignant une fonction rationnelle en x et en y et cherchons quel est le minimum du nombre des infinis distincts d'une pareille expression.

Nous supposerons que les sommets de R_0 ne sont pas des infinis de notre fonction $A(z)$. Pour que le nombre des infinis soit minimum il faut que celui des zéros le soit aussi, il faut par conséquent que les sommets de R_0 soient des zéros d'un ordre aussi peu élevé que possible. Pour réaliser cela, posons, ce qui est toujours possible:

$$F(x, y) = \frac{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \ldots . (x - a_p)^{\lambda_p} \left(\frac{d\phi}{dy}\right)^{m-1}}{P(x, y)}$$

les λ étant précisément les nombres entiers définis plus haut. Nous reconnaîtrons que pour que le nombre des zéros distincts soit un minimum, il faut et il suffit 1° que $P(x, y)$ soit un polynôme entier de degré $\sum \lambda + (m - 1)(r - 3)$, 2° que la courbe $P = 0$ passe par tous les points d'intersection de la courbe $\phi = 0$ avec les droites $x = a_1$, $x = a_2$, ... $x = a_p$ autres que les points singuliers ($x = a_i$, $y = b_i$) et que les deux courbes aient en ces points un contact d'ordre $\lambda_i - 1$. 3° enfin que la courbe $P = 0$ admette les mêmes points doubles que $\phi = 0$; et de façon que les branches qui se croisent en ces points doubles aient avec celles de $\phi = 0$ des contacts d'ordre $m - 2$.

En effet il est possible de satisfaire à ces conditions, car le polynôme $P(x, y)$ contient comme on l'a vu:

$$r\sum \lambda + \left(m - \frac{3}{2}\right) r(r - 3)$$

paramètres et nous n'avons à remplir que:

$$(r - 1)\sum \lambda + \left(m - \frac{3}{2}\right)[(r - 1)(r - 2) - 2P]$$

conditions.

Il reste donc:

$$\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$$

paramètres arbitraires dans notre polynôme $P(x, y)$. De plus on voit aisément que si nos conditions sont remplies, le nombre des zéros distincts et par conséquent celui des infinis est minimum, car le nombre des zéros distincts qui se confondent avec les sommets de R_0 est aussi petit que possible et il n'y a pas de zéro en dehors de ces sommets. On trouve, en appliquant la règle du § 3 que le nombre minimum des infinis est

$$J = \sum \lambda + (2m - 2)(P - 1)$$

Comme le polynôme $P(x, y)$ ne dépend que de $\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$ paramètres il s'en suit que nos J infinis distincts ne peuvent pas être choisis arbitrairement, mais que la connaissance de $J - P$ d'entre eux suffit pour déterminer les P autres. On ne peut donc en général déterminer la fonction Λ de telle sorte qu'elle ait J infinis donnés et qu'elle n'en ait pas d'autres.

Quel est le plus petit nombre J' tel que l'on puisse toujours déterminer la fonction Λ de telle sorte qu'elle ait J' infinis donnés et n'en ait pas d'autres? La fonction Λ admettra alors $J' - J$ zéros et $J' - J$ infinis distincts de plus que les fonctions de même forme qui n'ont que J infinis, et par conséquent elle contiendra $2J' - 2J$ paramètres de plus qu'elles, ou en tout

$$2J' - 2J + \sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$$

ou, en remplaçant J par sa valeur:

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1)$$

on doit donc avoir

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1) \geqq J' + 1$$

ou

$$J' \geqq \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1) + 1 \tag{9}$$

Voilà donc la limite inférieure cherchée du nombre J'.

Maintenant nous allons pouvoir résoudre une question importante qui se pose tout naturellement. Nous avons vu que toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles. Les séries thétafuchsiennes de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce pouvant toutes se mettre sous la forme (6) pourront donc s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles. Mais nous ne savons pas encore si toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer par une série (4) § 1. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce, s'exprimeraient linéairement à l'aide de $\sum\lambda + (2m - 1)(P - 1) - 1$ d'entre elles. Je vais démontrer que cette hypothèse est impossible.

En effet, nous avons vu dans le paragraphe précédent (pages 244 sq) que si toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2[de] espèce s'expriment linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles on pourrait construire une fonction

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(z)$$

$F(z)$ réprésentant une fonction fuchsienne de z admettant q infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Donc si l'hypothèse faite au début était possible, on pourrait construire une fonction $A(z)$ admettant $J' = \sum\lambda + (2m - 1)(P - 1)$ infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Le nombre J' ne satisferait pas alors à l'inégalité (9) ce qui est contraire à ce qu'on a vu plus haut.

En conséquence, toute expression de la forme (6) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme d'une série (4) § 1 de la 2[de] espèce; donc *toute expression de la forme (6)* avec ou sans infinis, *pourra se mettre sous la forme d'une série (4) § 1* de la 1[ère] ou de la 2[de] espèces.

Passons à une propriété importante des fonctions de la forme $A(z)$. Ces fonctions auront toujours une infinité d'infinis; soient $z_1, z_2, \dots z_i \dots$ ces infinis, que nous supposerons tous simples pour fixer les idées, A_1, $A_2, \dots A_i$, les résidus correspondants. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle n'ayant pas d'infinis à l'intérieur du cercle fondamental. On aura identiquement:

$$A(z)\varphi(z) = \sum_i \frac{A_i\varphi(z_i)}{z - z_i}$$

Cela se démontre de la même manière que dans le paragraphe précédent; la première démonstration peut se répéter sans qu'on y change un mot; la seconde demanderait pour être appliquée quelques modifications légères.

Les divers termes du second membre de l'identité précédente peuvent être groupés d'une manière plus avantageuse. Soient en effet q le nombre des infinis distincts de $\Lambda(z)$; $z_1, z_2, \ldots z_q$ ces infinis; $A_1, A_2, \ldots A_q$ les résidus correspondants, nous pourrons écrire:

$$(10) \qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_k A_k \sum_i \frac{\varphi\left(\dfrac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{\left(z - \dfrac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2m}}$$

Dans cette formule on désigne par la notation $\left(z, \dfrac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ les diverses substitutions du groupe G. En différentiant la relation (10) $2m - 1$ fois par rapport à z, on arrive à une formule tout à fait analogue à la formule (16) du paragraphe précédent. Le premier membre est une expression de la forme (6) et le second membre est une série de la forme (4) § 1.

§ 7. 2^{me} *Famille; genre 0.*

Considérons un polygone R_0 dont les sommets, au nombre de $2n$, sont tous situés sur le cercle fondamental et dont les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental. Tous les angles de notre polygone sont donc formés par deux arcs de cercle tangents l'un à l'autre et par conséquent, il sont tous nuls. Je supposerai que les côtés de rang p et $2n + 1 - p$ sont conjugués; les cycles seront alors au nombre de $n + 1$, dont deux formés d'un seul sommet, le premier du sommet de rang 1; le second du sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles seront formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n + 2 - p$.

J'appelle S_p la substitution qui change le côté de rang p en celui de rang $2n + 1 - p$. Nous aurons ainsi n substitutions $S_1, S_2, \ldots\ldots S_n$ qui seront les substitutions fondamentales de notre groupe G.

Je définis ensuite les substitutions $S'_2 \ldots\ldots S'_n$ par les égalités suivantes:

$$S'_2 = S_2 S_1^{-1},\ S'_3 = S_3 S_2^{-1},\ \ldots\ldots\ S'_n = S_n S_{n-1}^{-1}$$

et je pose pour plus de symétrie dans les notations:

$$S_1 = S'_1,\quad S_{n+1} = S'_{n+1}$$

J'appelle maintenant α_i le sommet de rang i; il est clair que α_i sera l'un des points doubles de S'_i. Je supposerai que *les* $n+1$ *substitutions* $S'_1, S'_2, \ldots\ldots S'_{n+1}$ *sont paraboliques.* Cela ne serait pas possible si les $2n$ points α_i étaient choisis arbitrairement sur le cercle fondamental. Il faut qu'il y ait entre eux la relation:

$$(1)\qquad (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_3)\ldots\ldots(\alpha_{2p} - \alpha_{2p-1})\ldots\ldots(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) =$$
$$= (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_{2p+1} - \alpha_{2p})\ldots\ldots(\alpha_1 - \alpha_{2n})$$

Dans ces conditions notre polygone R_0 est du genre 0 et du 1^er^ ordre de la 2^de^ famille; notre groupe G et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent sont du genre 0 et de la 2^de^ famille. Nous pourrons, comme dans le § 5, choisir parmi ces fonctions fuchsiennes une d'entre elles que j'appellerai $x = f(z)$ et en fonction de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de la définir, je supposerai que l'on a:

$$f(\alpha_1) = 0 \qquad f(\alpha_2) = 1 \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty$$

Je poserai en outre comme dans le § 5

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i})$$

d'où

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = \infty$$

Si l'on pose

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

v satisfait à une équation linéaire:

$$(3\ \text{bis})\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$? On trouve aisément:

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{[Q(x)]^2}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ et $P(x)$ étant un polynôme entier de degré $2n - 2$. Le polynôme $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$P(a_i) = -\frac{1}{4} Q'^2(a_i)$$

et

$$\text{coëfficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\frac{1}{4}$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (3 bis). Il faut en outre assujettir $P(x)$ à $2n - 4$ conditions transcendantes.

Nous démontrerons dans un autre mémoire que l'on peut toujours choisir le groupe G de telle sorte que les nombres $a_2, a_3, \dots a_n$ aient des valeurs données quelconques.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique par rapport au cercle qui joint α_1 à α_{n+1} en coupant orthogonalement le cercle fondamental, les coëfficients de la fonction rationnelle $\varphi(x)$ sont tous réels.

Si de plus $n = 2$; $f(z)$ se réduit à la fonction modulaire k^2.

Voyons comment se comportent les intégrales de l'équation (3 bis) dans le voisinage de l'un des points singuliers $a_1, a_2, \dots a_n$. Les intégrales seront *régulières et logarithmiques,* pour employer les expressions de M. Fuchs et de ses disciples. Les deux racines de l'équation déterminante seront $\frac{1}{2}$; de telle sorte que les intégrales pourront se mettre sous la forme:

$$v_1 = (x - a_i)^{\frac{1}{2}}[P_i + Q_i \log(x - a_i)]$$

et

$$v_2 = (x - a_i)^{\frac{1}{2}} Q_i$$

P_i et Q_i étant des fonctions holomorphes en $x - a_i$ dont la 1ère s'annule et la 2me ne s'annule pas pour $x = a_i$.

Pour $x = \infty$, on a de même:

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}}(P_{n+1} + Q_{n+1} \log x) v_2$$

P_{n+1} et Q_{n+1} étant des fonctions holomorphes en $\frac{1}{x}$, dont la première s'annule et la seconde ne s'annule pas pour $x = \infty$.

Exprimons maintenant dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, z en fonction de x. On devra avoir dans le voisinage de $x = a_i$:

$$z = \frac{\lambda Q_i + \mu[Q_i \log(x - a_i) + P_i]}{\lambda' Q_i + \mu'[Q_i \log(x - a_i) + P_i]}$$

λ, μ, λ', μ' étant des constantes convenablement choisies. Supposons que la substitution S'_i s'écrive

$$\left(\frac{1}{z - a_i}, \frac{1}{z - a_i} + \beta_i\right)$$

et posons:

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-a_i)\beta_i}} = t_i$$

exprimons ensuite que z se réduit à α_i pour $x = a_i$ et subit la substitution S'_i quand $\log(x - a_i)$ se change en $\log(x - a_i) + 2\pi\sqrt{-1}$. Nous verrons que la relation qui précède peut s'écrire:

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z - a_i)\beta_i} = P'_i + \log(x - a_i)$$

P'_i étant une fonction holomorphe en $x - a_i$. On tire de là:

$$t_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-a_i)\beta_i}} = Q'_i$$

Q'_i étant une fonction holomorphe en $(x - a_i)$; le développement de Q'_i suivant les puissances de $(x - a_i)$ commence par un terme en $(x - a_i)$ dont le coëfficient ne peut jamais être nul. On tire de là:

$$x = a_i + \Phi_i(t_i)$$

Φ_i désignant une fonction holomorphe en t_i et dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du 1$^{\text{er}}$

degré dont le coëfficient n'est jamais nul. Telle est la forme de l'expression de x en fonction de z dans le voisinage du point singulier $x = a_i$. De même dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, $x = \infty$, on aura:

$$\frac{1}{x} = \Phi_{n+1}(t_{n+1})$$

Φ_{n+1} désigne une fonction holomorphe en t_{n+1} et son développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du 1er degré qui n'est jamais nul. On peut encore écrire la relation précédente sous la forme:

$$x = \frac{1}{t_{n+1}} \Psi(t_{n+1})$$

Ψ désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable. Quant à la dérivée $\frac{dx}{dz}$, elle pourra se mettre sous une forme analogue. Dans le voisinage de $z = \alpha_i$, on aura:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - a_i)^2} t_i \Phi'_i(t_i)$$

Φ'_i étant une fonction holomorphe de t_i qui ne s'annule pas avec cette variable. De même dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, on aura:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - a_{n+1})^2} \frac{\Psi'(t_{n+1})}{t_{n+1}}$$

Ψ' désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable.

Passons maintenant à l'étude des fonctions thétafuchsiennes.

Toute fonction représentée par une série de la forme (4) § 1 pourra toujours se mettre sous la forme suivante

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x) \tag{2}$$

F désignant une fonction rationnelle de x. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet nous avons vu au § 2 que toute série de la forme (4) § 1, peut dans le voisinage de $z = \alpha_i$ se mettre sous la forme:

$$\frac{1}{(z-\alpha_i)^{2m}}R(t_i)$$

R désignant une fonction holomorphe de t_i qui s'annule avec cette variable. Il en résulte que pour $x = a_i$, la fonction $(x-a_i)^m F(x)$ doit s'annuler et que quand x augmente indéfiniment, $x^m F(x)$ doit tendre vers 0. Telles sont les conditions *nécessaires* auxquelles doit satisfaire l'expression (2) pour pouvoir représenter une série de la forme (4) § 1.

Nous les appellerons les conditions A.

Supposons maintenant que la fonction (2) n'admette pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. $F(x)$ devra être de la forme:

$$\frac{\Pi(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}}$$

$\Pi(x)$ désignant un polynôme entier en x. Mais à cause des conditions A, les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$ sont au plus égaux à $m-1$ et le degré de $\Pi(x)$ au plus égal à $n(m-1)-m-1$. Par conséquent toutes les séries thétafuchsiennes de la forme (4) § 1 et de la 2^de espèce s'expriment linéairement au moyen de $n(m-1)-m$ d'entre elles.

Mais nous ne savons pas encore si toute expression de la forme (2) n'ayant pas d'infini et satisfaisant aux conditions A peut se mettre sous la forme d'une série (4) § 1; ni par conséquent si toutes les séries de cette forme et de la 2^de espèce ne peuvent pas s'exprimer linéairement à l'aide de $n(m-1)-m-1$ d'entre elles.

Pour reconnaître s'il en est ainsi, considérons une fonction de la forme:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x)$$

F désignant une fonction rationnelle et cherchons quel est le minimum du nombre J' de ses infinis distincts, à supposer qu'elle tende vers 0 quand z tend vers α_i.

Nous pourrons écrire:

$$F(x) = \frac{(x-a_1)^{m-1}(x-a_2)^{m-1}\ldots\ldots(x-a_n)^{m-1}\Pi(x)}{\Phi(x)}$$

$\Pi(x)$ et $\Phi(x)$ désignant deux polynômes en x. Pour que $\Lambda(z)$ tende vers 0 quand z tend vers α_i, il faut et il suffit que

$$\Phi(a_1), \quad \Phi(a_2), \quad \ldots\ldots \quad \Phi(a_n)$$

ne soient pas nuls et que le degré du numérateur surpasse au plus de $m-1$ celui du dénominateur. Or le degré de $\Phi(x)$ est le nombre J' des infinis distincts de $\Lambda(z)$. On a donc:

$$J' \geqq n(m-1) - m + 1$$

Je dis alors qu'il est impossible d'exprimer linéairement toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce à l'aide de $n(m-1)-m-1$ d'entre elles; car, si cela avait lieu, on pourrait construire une fonction de la forme $\Lambda(z)$ ayant $n(m-1)-m$ infinis distincts, ce qui ne se peut pas comme nous venons de le voir. On en conclura donc (comme dans les deux paragraphes précédents) que toute expression de la forme (2) satisfaisant aux conditions A peut être exprimée par une série de la forme (4) § 1.

La formule (10) du paragraphe précédent s'applique aussi aux fonctions qui nous occupent. On la démontrerait comme dans les deux paragraphes précédents; la première démonstration demanderait quelques modifications légères, la seconde peut s'appliquer sans qu'on y change rien. Toutes les conséquences que nous avons déduites de cette formule (10) dans les deux paragraphes précédents, et entre autres la formule (16) du § 5, sont encore vraies dans le cas qui nous occupe.

On voit aisément comment on étendrait les principes qui précèdent aux fonctions de la 2^{de} et de la 6^{me} familles et de genre quelconque.

Nous pouvons donc passer à l'étude des fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan.

§ 8. *3^{me} Famille.*

Parmi celles-ci les plus simples sont celles de la 3^{me} famille dont nous allons parler d'abord.

Supposons qu'on nous donne n paires de cercles (c_1 et c'_1), (c_2 et c'_2), ... (c_n et c'_n).

Je suppose que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres, qu'ils coupent orthogonalement le cercle fondamental et soient par conséquent symétriques par rapport à ce cercle. Je suppose que l'on considère n substitutions $S_1, S_2, \ldots . S_n$, telles que S_i tout en conservant le cercle fondamental change c_i en c'_i. Le groupe dérivé des substitutions S_i sera un groupe fuchsien G dont le polygone générateur R_0 se composera de la partie du plan qui est intérieure au cercle fondamental et extérieure aux divers cercles c et c'. Le polygone R_0 aura $2n$ côtés de la $1^{\text{ère}}$ sorte, formés par les arcs des cercles c et c' intérieurs au cercle fondamental et $2n$ côtés de la 2^{de} sorte formés par les arcs du cercle fondamental extérieurs aux différents cercles c et c'. Tous les sommets de R_0 sont de la 3^{me} catégorie. Quant au polygone R'_0, symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental, ce sera la partie du plan qui est extérieure à la fois au cercle fondamental et aux cercles c et c'. Le groupe G et par conséquent les fonctions fuchsiennes qui en dérivent seront de la 3^{me} famille et du genre n.

Toutes ces fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique de genre n:

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

Si l'on pose de plus

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction v satisfera à l'équation (3) du § 4, à savoir:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y) \tag{3}$$

φ étant rationnel en x et en y.

Le groupe G ne dépendant que de $3n - 3$ paramètres réels distincts, on ne peut en disposer de manière que la relation $\psi(x, y) = 0$ soit quelconque. Combien, en effet, reste-t-il de paramètres arbitraires dans une relation algébrique de genre n:

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

lorsqu'on convient de ne pas regarder comme distinctes de cette relation celles que l'on en déduit en y remplaçant x et y par des fonctions rationnelles de x' et de y'. On sait qu'il reste $3n - 3$ paramètres que l'on appelle les *modules* de la relation (1) et qui sont pour ainsi dire des invariants à l'égard de cette relation et des opérations qui consistent à y remplacer x et y par des fonctions rationnelles de x' et y'. En nous proposant d'obtenir entre nos deux fonctions fuchsiennes x et y une relation algébrique *donnée*, nous nous imposons donc $3n - 3$ conditions *complexes* qui équivalent à $6n - 6$ conditions *réelles*. Ce nombre surpasse de $3n - 3$ celui des paramètres dont nous disposons. Ainsi le premier membre de la relation (1) est assujetti à $3n - 3$ conditions réelles, il est aisé de les trouver.

En effet, on peut supposer que l'on fasse une opération qui consiste à changer z en son symétrique par rapport au cercle fondamental. Cela revient à changer $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ et à faire ensuite un changement linéaire de variable. On change ainsi R_0 en R'_0 et réciproquement de sorte que le groupe G et le système des fonctions fuchsiennes qui en dérivent ne changent pas. Les $3n - 3$ modules de la relation (1) ne changent donc pas non plus. Mais quand on a changé $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, ces modules ont dû se changer en leurs imaginaires conjugués; puis, quand on a fait un changement linéaire de variable, ils n'ont pas changé. Par conséquent *les $3n - 3$ modules de la relation (1)* ne diffèrent pas de leurs imaginaires conjugués, *ils sont donc réels.*

Il en résulte qu'on pourra toujours choisir x et y parmi les fonctions fuchsiennes dérivées du groupe G de telle sorte que *tous les coëfficients de la relation (1) soient réels.* Alors les coëfficients de $\varphi(x, y)$ seront aussi tous réels.

Je suppose de plus que l'on ait choisi x et y, ce qui est toujours possible, de façon que la relation (1) satisfasse aux conditions que nous avons imposées à la relation (1) du § 6, au commencement de ce paragraphe (page 255).

Cela posé, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfera aux conditions suivantes:

1° Quand x devient infiniment grand du 1^{er} ordre, elle devient infiniment petite du 4^e ordre.

2° Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ seront les points singuliers de la fonction y de x, définie par la relation (1) en n'y comprenant pas les points doubles de la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$. Si l'un de ces points est $x = a$, $y = b$, on aura:

$$\lim. (y - b)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4}$$

pour $x = a$, $y = b$.

Ces conditions qui, on le remarquera, sont les mêmes que celles que nous avions trouvées dans le premier exemple, examiné au § 6, ne suffisent pas pour déterminer la fonction rationnelle $\varphi(x, y)$. Celle-ci est en outre assujettie à n conditions transcendantes. Voici sous quelle forme on peut présenter ces conditions transcendantes:

La fonction $\varphi(x, y)$ devra être choisie de telle sorte qu'en faisant décrire au point analytique (x, y) n cycles convenablement choisis (correspondant à n périodes convenablement choisies d'une intégrale abélienne de 1[ère] espèce $\int g(x, y)dx$) on voie revenir les intégrales de l'équation (3) à leurs valeurs initiales.

Passons maintenant à l'étude des séries thétafuchsiennes:

$$\Theta(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

c'est à dire à l'étude des séries de la forme (4) § 1, et d'abord cherchons comment il peut arriver que la fonction définie par cette série ne présente aucun infini en dehors des points singuliers essentiels.

En général la série $\Theta(z)$ admet comme infinis, ainsi qu'on l'a vu au § 3: 1° les points correspondants du point ∞, c'est à dire les points

$$z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$$

2° les infinis de la fonction $H(z)$ et les points correspondants.

Supposons pour fixer les idées que la fonction $H(z)$ ne devienne infinie pour aucun des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Quelle est d'abord la condition pour que les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ ne soient pas des infinis de $\Theta(z)$? Pour cela, il faut et il suffit que le degré du dénominateur de la fonction rationnelle $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur.

Considérons maintenant un infini a de la fonction $H(z)$ elle-même. Dans la série $\Theta(z)$, le terme

$$H(z)$$

(correspondant à $\alpha_i = 1$, $\delta_i = 1$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, c'est à dire à la substitution unité) deviendra infini pour $z = a$. Pour que $\theta(z)$ reste fini pour $z = a$, il faut donc qu'un autre terme de cette série devienne infini, de façon que la somme de ces deux termes (qui séparément croissent indéfiniment quand z tend vers a) tende au contraire vers une limite finie. Il faut pour cela que parmi les infinis de $H(z)$ il y en ait un autre $z = b$, tel que:

$$b = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}$$

$\left(z, \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ étant une des substitutions du groupe G. Il est clair alors que le terme:

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

deviendra infini pour $z = a$. Mais il faut que la somme de ce terme et du terme $H(z)$ reste finie pour $z = a$. Soient donc A et B les résidus de $H(z)$ qui correspondent à $z = a$ et $z = b$. On aura:

$$H(z) = \frac{A}{z - a} + H'(z)$$

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m} = \frac{B}{z - a}(\gamma a + \delta)^{2-2m} + H'_1(z)$$

$H'(z)$ et $H'_1(z)$ étant des fonctions rationnelles de z qui restent finies pour $z = a$. On devra donc avoir:

$$A + B(\gamma a + \delta)^{2-2m} = 0$$

Telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $\theta(z)$ reste fini pour $z = a$ et par conséquent aussi pour les points correspondants.

Cela posé, voici comment il faudra s'y prendre pour construire une fonction $\theta(z)$ qui n'admette aucun infini. Prenons une fonction rationnelle $H(z)$ admettant $2p$ infinis a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ... a_p, b_p, et ayant pour résidus correspondants A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ... A_p, B_p.

Je suppose de plus que l'on ait:

$$b_1 = \frac{\alpha_1 a_1 + \beta_1}{\gamma_1 a_1 + \delta_1}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2 a_2 + \beta_2}{\gamma_2 a_2 + \delta_2}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad b_p = \frac{\alpha_p a_p + \beta_p}{\gamma_p a_p + \delta_p}$$

$$\left(z, \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}\right), \quad \left(z, \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(z, \frac{\alpha_p z + \beta_p}{\gamma_p z + \delta_p}\right)$$

étant p substitutions du groupe G. J'assujettis de plus les $2p$ résidus à deux systèmes de conditions. D'abord:

$$A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_p + B_p = 0$$

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \ldots\ldots + A_p a_p + B_p b_p = 0$$

$$A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + \ldots\ldots + A_p a_p^2 + B_p b_p^2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1 a_1^{2m-2} + B_1 b_1^{2m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_p a_p^{2m-2} + B_p b_p^{2m-2} = 0,$$

pour que le degré du dénominateur de $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur. Ensuite:

$$A_k + B_k(\gamma_k a_k + \delta_k)^{2-2m} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots p)$$

pour que a_k et b_k ne soient pas des infinis de $\theta(z)$.

Ces $p + 2m - 1$ conditions seront compatibles pourvu que:

$$p > 2m - 1$$

et si elles sont remplies, la série $\theta(z)$ formée à l'aide de la fonction rationnelle

$$H(z) = \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{A_k}{z - a_k} + \frac{B_k}{z - b_k}\right]$$

n'aura aucun infini. Je dirai alors qu'elle est de la 2^de^ espèce, de sorte que nous avons ici, comme dans les trois paragraphes précédents, la distinction entre les deux espèces de séries thétafuchsiennes.

Toute série de la forme $\theta(z)$, à quelque espèce qu'elle appartienne, peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y) \tag{2}$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle d'x et d'y. Celles des fonctions de la forme (2) qui n'admettent pas d'infinis, s'expriment linéairement, ainsi qu'on l'a vu au § 6, à l'aide de $(2m-1)(n-1)$ d'entre elles. Il résulte de là que toutes les séries $\theta(z)$ de la 2[de] espèce s'expriment linéairement à l'aide de $(2m-1)(n-1)$ d'entre elles. Il nous reste à démontrer, comme dans les trois paragraphes précédents, qu'il est impossible de les exprimer linéairement à l'aide de $(2m-1)(n-1)-1$ d'entre elles.

Posons pour abréger:

$$q = (2m-1)(n-1)$$

Supposons que toutes les séries $\theta(z)$ de la 2[de] espèce puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles que j'appellerai θ_1, θ_2, ... θ_{q-1}; je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

En effet choisissons *au hasard* q points, z_1, z_2, ... z_q; on pourra toujours trouver q nombres A_1, A_2, ... A_q tels que:

$$\begin{gathered}
A_1\theta_1(z_1) + A_2\theta_1(z_2) + \ldots\ldots\ldots + A_q\theta_1(z_q) = 0 \\
A_1\theta_2(z_1) + A_2\theta_2(z_2) + \ldots\ldots\ldots + A_q\theta_2(z_q) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1\theta_{q-1}(z_1) + A_2\theta_{q-1}(z_2) + \ldots\ldots\ldots + A_q\theta_{q-1}(z_q) = 0
\end{gathered}$$

et par conséquent tels que:

$$A_1\theta(z_1) + A_2\theta(z_2) + \ldots\ldots\ldots + A_q\theta(z_q) = 0 \tag{5}$$

$\theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (4) § 1 et de la 2[me] espèce.

Soit p un nombre entier plus petit que $2m$. Je pourrai toujours former une fonction $\theta_p(z)$ qui satisfasse aux conditions suivantes: elle n'admettra d'autre infini que les points $z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; ces infinis seront d'ordre

$2m - p$. Dans ces conditions le point $z = \infty$ n'est pas un infini de notre fonction $\theta_p(z)$, c'est pour elle un zéro d'ordre p.

Je suppose que:

$$\lim. z^p \theta_p(z) = 1 \qquad \text{pour } z = \infty$$

$$\lim. z^{2m-1-p}[z^p\theta_p(z) - 1] = 0 \qquad \text{pour } z = \infty$$

Ces conditions ne suffisent pas pour définir complètement la fonction $\theta(z)$, car si $\Theta(z)$ est une série de la forme (4) § 1 et de la 2^de^ espèce, $\theta_p(z) + \Theta(z)$ y satisfera comme $\theta_p(z)$. Mais nous choisirons pour notre fonction $\theta_p(z)$ une quelconque des séries de la forme (4) § 1, qui satisfont aux conditions énoncées.

Considérons une série quelconque de la forme (4) § 1 et de la 1^ère^ espèce.

$$\Psi(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Supposons que la partie entière de la fonction rationnelle

$$z^{2m} H(z)$$

se réduise à:

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots + B_{2m} z^{2m}$$

on verra aisément que le point $z = \infty$ est pour la fonction thétafuchsienne

$$\psi(z) - B_0\theta_0(z) - B_1\theta_1(z) - B_2\theta_2(z) - \ldots\ldots\ldots - B_{2m}\theta_{2m}(z)$$

un zéro d'ordre $2m$ au moins et par conséquent que cette fonction thétafuchsienne ne devient pas infinie pour $z = -\dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$.

Cela posé, envisageons la fonction suivante

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}}(\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}$$

Considérée comme fonction de z, elle n'a d'autres infinis que les points

$$z = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}$$

c'est à dire les points correspondants de a.

Considérée comme fonction de a, c'est une série thétafuchsienne et elle admet comme infinis:

1° les points $a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, c'est à dire les points correspondants de z.

2° les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, c'est à dire les points correspondants de $a = \infty$. Ces points sont des infinis d'ordre $2m - 1$. Quant au point $a = \infty$ lui-même, c'est pour notre série un zéro du premier ordre.

Cherchons la partie entière de la fonction rationnelle

$$\frac{a^{2m}}{z - a}$$

nous trouverons:

$$-\left(a^{2m-1} + z a^{2m-2} + z^2 a^{2m-3} + \ldots\ldots + z^{2m-2} a + z^{2m-1}\right)$$

On en conclut que la fonction thétafuchsienne:

$$\Omega(z, a) = \Phi(z, a) + z^{2m-1}\theta_0(a) + z^{2m-2}\theta_1(a) + \ldots\ldots + z\theta_{2m-2}(a) + \theta_{2m-1}(a)$$

n'admet pas comme infinis les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$.

En conséquence elle n'aura d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

le résidu correspondant sera:

$$-(\gamma_i z + \delta_i)^{2m-2}$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque de notre groupe G. La fonction;

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right)$$

sera comme $\Omega(z, a)$ une fonction thétafuchsienne de a; elle n'admettra comme elle d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

et avec les mêmes résidus; donc, on pourra écrire:

$$(6) \qquad (\gamma z + \delta)^{2m-2} \Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - \Omega(z, a) = \Theta(a)$$

$\Theta(a)$ désignant une fonction thétafuchsienne de a, susceptible d'être mise sous la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce. Posons maintenant:

$$(7) \qquad \Lambda(z) = A_1 \Omega(z, z_1) + A_2 \Omega(z, z_2) + \ldots\ldots + A_q \Omega(z, z_q)$$

En rapprochant les équations (5), (6) et (7) on trouve aisément l'identité suivante:

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Lambda(z)$$

qui a lieu pour toutes les substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ du groupe G. Il suit de là que $\Lambda(z)$ peut se mettre sous la forme:

$$(8) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et de y. Or la fonction $\Lambda(z)$ admet q infinis distincts $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$, qui ont été choisis au hasard, et n'en admet pas d'autre à distance finie. On pourrait donc construire une fonction de la forme (8) admettant q infinis *donnés* et n'en admettant pas d'autre. Or nous avons vu au § 6 que cela était impossible. Donc l'hypothèse faite au début était absurde.

On en conclut comme dans les trois paragraphes précédents:

1° que toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce ne peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles.

2° que toute expression de la forme (2) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme (4) § 1.

3° que toute expression de la forme (2) peut être exprimée par une série de la forme (4) § 1 (pourvu que $m > 1$).

4° que toute fonction fuchsienne peut être égalée d'une infinité de manières au quotient de deux séries de la forme (4) § 1.

Considérons la fonction:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

Supposons qu'elle admette une infinité d'infinis $z_1, z_2, \ldots\ldots z_k, \ldots\ldots$ avec les résidus $A_1, A_2, \ldots\ldots A_k, \ldots\ldots$ Supposons de plus que l'on ait:

$$A(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots\ldots + B_1 z + A_1(z)$$

$A_1(z)$ tendant vers une limite finie quand z croît indéfiniment. On aura identiquement:

$$A(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots\ldots + B_1 z + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{9}$$

Cette identité se démontre de deux manières comme l'identité correspondante du § 5.

Un cas particulier bien remarquable est celui de $n = 1$.

Dans ce cas les substitutions du groupe G se réduisent à:

$$\left(\frac{az + b}{cz + d}, \; K^p \frac{az + b}{cz + d}\right)$$

a, b, c, d étant des constantes, K étant un nombre réel positif et plus grand que 1, et l'exposant p pouvant prendre dans les diverses substitutions toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Voici comment on peut former les fonctions fuchsiennes dans le cas qui nous occupe. Soit $f(\xi)$ une fonction doublement périodique admettant les périodes $2i\pi$ et $\log K$. La transcendante $f\left[\log\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)\right]$ sera alors une fonction fuchsienne.

Posons par exemple:

$$x = \operatorname{sn}\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right), \quad y = \operatorname{cn}\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right) \operatorname{dn}\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

Les expressions de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y) \tag{2}$$

pourront s'écrire:

$$\frac{f\left(\log \frac{az+b}{cz+d}\right)}{(az+b)^m(cz+d)^m} \tag{10}$$

$f(\xi)$ désignant toujours une fonction doublement périodique.

Les séries $\Theta(z)$ de la forme (4) § 1 deviendront d'autre part:

$$\sum_i \frac{K^{mi}\varphi\left(K^i\frac{az+b}{cz+d}\right)}{(cz+d)^{2m}} \tag{11}$$

φ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Egalons les expressions (10) et (11) et faisons y:

$$\frac{az+b}{cz+d} = e^\xi$$

il viendra:

$$f(\xi) = \sum_i K^{mi} e^{m\xi} \varphi(K^i e^\xi)$$

On obtient ainsi le développement d'une fonction doublement périodique de ξ suivant une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de e^ξ. Si au lieu de ξ, on avait pris pour variable indépendante $\eta = \xi\sqrt{-1}$, le premier membre serait une fonction doublement périodique de η, et dans la série du second membre, tous les termes seraient des fonctions rationnelles de $\sin\eta$ et $\cos\eta$. Nous retrouvons par une voie détournée un résultat auquel Jacobi est parvenu directement et d'où il a tiré tant de belles conséquences.

Voyons maintenant ce que devient la formule (9) dans le cas particulier qui nous occupe.

On a:

$$A(z) = (az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1}f(\xi)$$

$f(\xi)$ étant toujours une fonction doublement périodique.

On a d'autre part dans le second membre:

1° un polynôme du degré h en z; mais il est aisé de voir que dans le cas général, c'est à dire à moins que:

$$f\left(\log \frac{a}{c}\right) = \infty$$

le degré h ne peut dépasser $2m - 2$. On peut donc le regarder comme un polynôme homogène de degré $2m - 2$ en $(az + b)$ et $(cz + d)$. Si on le divise par $(az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1}$, il prendra la forme suivante:

$$P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi})$$

P_{m-1} et P'_{m-1} désignant des polynômes de degré $m - 1$ en e^{ξ} et en $e^{-\xi}$.

2° Un ensemble de termes $\sum \frac{A_k}{z - z_k}$ que l'on peut grouper de la façon suivante; soient $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$ les q infinis distincts de $A(z)$ et supposons qu'il n'y en ait pas d'autre; soient $A_1, A_2, \ldots\ldots A_q$ les résidus correspondants; soient $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_q$ les valeurs correspondantes de ξ. Groupons ensemble tous les termes de la forme $\frac{A_k}{z - z_k}$ qui correspondent à des infinis qui ne sont pas distincts de $z = z_p$. Leur somme sera:

$$A_p \sum_i \frac{ce^{\xi} - a}{(cK^i e^{\xi_p} - a)^{2m-1}} \frac{K^{im}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi_p}} (ce^{\xi_p} - a)^{2m}$$

Comme on a d'autre part:

$$(az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1} = e^{(m-1)\xi}(ce^{\xi} - a)^{2-2m}$$

on trouvera pour la fonction doublement périodique $f(\xi)$ l'expression suivante

$$f(\xi) = P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi}) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=q} \left[A_p(ce^{\xi_p} - a)^{2m} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left(\frac{ce^{\xi} - a}{cK^i e^{\xi_p} - a} \right)^{2m-1} \frac{K^{mi} e^{(1-m)\xi}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi_p}} \right]$$

§ 9. *5^{me} Famille; genre 0.*

Je crois inutile de multiplier davantage les exemples. Ceux que j'ai étudiés jusqu'ici suffisent en effet pour faire voir comment on doit appliquer les principes généraux à chaque cas particulier.

Je veux cependant, sans traiter complètement les questions qui les concernent, dire quelques mots de certaines fonctions remarquables de la 5^{me} famille.

Considérons un polygone R_0 limité de la façon suivante: Il aura $2n$ côtés de la $1^{ère}$ sorte et 1 côté de la 2^{de} sorte; je suppose que ses sommets soient en suivant le périmètre dans le sens positif α_0, α_1, α_2, ... α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, ... α_{2n}. Je suppose que le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ soit de la 2^{de} sorte et les autres de la $1^{ère}$ sorte, de telle facon que les côtés $\alpha_0\alpha_1$ et $\alpha_0\alpha_{2n}$, $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$, $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}$, ... $\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}$ et $\alpha_{2n-p}\alpha_{2n-p-1}$, ... et enfin $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$, soient conjugués et par conséquent congruents. Si on laisse de côté α_n et α_{n+1}, tous les sommets seront de la $1^{ère}$ catégorie et se répartiront en n cycles fermés. L'un des cycles ne comprendra que le sommet α_0; les autres seront formés respectivement des sommets α_1 et α_{2n}, α_2 et α_{2n-1}, α_3 et α_{2n-2}, ... enfin α_{n-1} et α_{n+2}; de sorte que les angles curvilignes α_0, $\alpha_1 + \alpha_{2n}$, $\alpha_2 + \alpha_{2n-1}$, ... $\alpha_{n-1} + \alpha_{n+2}$ devront être des parties aliquotes de 2π. Quant aux angles α_n et α_{n+1}, ils seront forcément droits puisque les côtés de la $1^{ère}$ sorte $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$ coupent orthogonalement le cercle fondamental, dont le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ n'est qu'un arc. Nous construirons ensuite un polygone R_0 symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental. J'appellerai α'_i le sommet de R'_0 qui est symétrique de α_i par rapport au cercle fondamental.

On voit aisément que le polygone R_0 est de la 5^{me} famille et du genre 0, et qu'on peut s'en servir pour définir un groupe fuchsien et une infinité de fonctions fuchsiennes. Celles-ci peuvent toutes s'exprimer rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai:

$$x = f(z)$$

Comme on peut choisir d'une infinité de manières parmi nos fonctions fuchsiennes une d'entre elles à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement, la fonction $x = f(z)$ ne serait pas complètement déterminée si nous n ajoutions quelques conditions de plus.

Soient β et γ deux points du côté de la 2[de] sorte $\alpha_n\alpha_{n+1}$; je supposerai que l'on a:

$$f(a_n) = f(a_{n+1}) = 0 \qquad f(\beta) = 1 \qquad f(\gamma) = \infty.$$

Je poserai ensuite:

$$f(\alpha_i) = a_i \qquad f(\alpha'_i) = a'_i$$

Le polygone $R_0 + R'_0$ étant symétrique par rapport au cercle fondamental, on peut voir par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent que les nombres a_i et a'_i sont imaginaires conjugués.

Posons maintenant

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction v satisfera à une équation différentielle de la forme (3 bis) § 4 puisque le groupe fuchsien correspondant est de genre 0. Cette équation, comme on le voit aisément, peut s'écrire:

$$\text{(3 bis)} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = v\frac{P(x)}{[Q(x)]^2}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_0)(x - a'_0)(x - a_1)(x - a'_1) \ldots\ldots$ $(x - a_{n-1})(x - a'_{n-1})$ et $P(x)$ étant un polynôme de degré $4n - 4$ en x, ayant tous ses coëfficients réels.

§ 10. *Résumé.*

En étudiant les exemples précédents, j'ai rencontré différents résultats qui sont communs à toutes les fonctions fuchsiennes. Je ne crois pas utile d'en donner la démonstration dans le cas le plus général; car elle ne différerait pas de celles que nous avons données dans les divers cas particuliers et je serais entraîné à des redites sans intérêt. Je me bornerai donc à les énoncer ici sous forme de résumé.

Formons avec une fonction rationnelle quelconque $H(z)$ la série thétafuchsienne

$$(1) \qquad \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta[z,\ H(z)]$$

Cette série pourra toujours se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x,\ y)$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de ces deux fonctions fuchsiennes x et y, à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et entre lesquelles il y a une relation algébrique:

$$(3) \qquad \psi(x,\ y) = 0$$

Pour qu'une expression de la forme (2) puisse se mettre sous la forme (1), il faut qu'elle s'annule quand z vient en un des sommets de la 2^{de} catégorie du polygone R_0.

A cette condition, toute expression de la forme (2) peut se mettre sous la forme (1) pourvu que m soit un entier plus grand que 1.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux séries telles que (1).

Les séries de la forme (1) sont de deux espèces: celles qui ont des infinis et celles qui n'en ont pas. Ces dernières peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles. Il y a donc entre les séries thétafuchsiennes de la 2^me^ espèce une infinité de relations linéaires.

Voici une de ces relations qui peut servir de point de départ pour trouver, sinon toutes les autres, au moins un grand nombre d'entre elles.

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G. On aura identiquement:

$$\Theta[z, H(z)] = \Theta\left[z, H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}\right]$$

Considerons maintenant une fonction de la forme suivante:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant toujours une fonction rationnelle et m un entier plus grand que 1. Je suppose de plus que cette fonction s'annule quand z vient en un des sommets de la 2^de^ catégorie de R_0.

Soit q le nombre des infinis distincts de $\Lambda(z)$; soient $z_1, z_2, \ldots\ldots z_q$ ces infinis distincts; $A_1, A_2, \ldots\ldots A_q$ les résidus correspondants; soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental.

On aura identiquement:

$$(4) \qquad \Lambda(z)\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k \varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2m}$$

si les fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et

$$(4 \text{ bis}) \qquad \Lambda(z) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2m} + P(z)$$

($P(z)$ étant un polynôme entier en z) si les fonctions fuchsiennes existent dans tout le plan.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut d'une infinité de manières se mettre sous la forme du quotient de deux séries telles que (4) ou (4 bis).

§ 11. *Historique.*

Si on laisse de côté les fonctions doublement périodiques, les premières fonctions fuchsiennes qui aient été signalées sont les fonctions modulaires. Elles se présentaient pour ainsi dire d'elles-mêmes dans l'étude des transcendantes elliptiques, et leurs propriétés principales, en particulier celles d'être uniformes et d'admettre une ligne singulière essentielle, ont été remarquées depuis longtemps. D'ailleurs les travaux dont elles ont été l'objet et les résultats remarquables obtenus dans ces derniers temps par MM. HERMITE, DEDEKIND, FUCHS et KLEIN sont trop connus pour que j'aie besoin d'insister.

Mais il est une autre catégorie de fonctions fuchsiennes dont l'existence a été signalée dès 1872. Ce sont celles auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de GAUSS; ces fonctions ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons étudiées dans le § 5 et on les obtient quand le polygone R_0 considéré dans ce paragraphe est symétrique et se réduit à un quadrilatère.

Dans un mémoire inséré au Tome 75 du Journal de Borchardt, M. SCHWARZ annonce sans démonstration que ces fonctions sont uniformes et admettent un cercle comme ligne singulière essentielle. C'était du même coup annoncer la discontinuité du groupe correspondant, comme je l'ai déjà fait remarquer dans l'historique du mémoire sur les groupes fuchsiens. Malheureusement, détourné de ce sujet par d'autres études, M. SCHWARZ s'est borné aux quelques lignes qu'il avait consacrées à ces transcendantes et n'a pas poussé plus loin ses recherches.

Dans un autre ordre d'idées, M. SCHWARZ avait obtenu d'autres résultats qui se rapportent indirectement à notre sujet. Dans divers mémoires insérés aux Tomes 70 et 74 du Journal de Borchardt et aux Monatsberichte de l'Académie de Berlin, M. SCHWARZ a démontré d'une manière rigoureuse le principe dit de DIRICHLET et la possibilité de l'*Abbildung* du cercle sur une figure plane quelconque et en particulier sur un polygone limité par des arcs de cercle. S'il avait connu les conditions de discontinuité des groupes, il aurait pu être conduit ainsi à démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas particulier ou le polygone R_0 est symétrique.

J'aurais donc pu me servir de ces résultats, mais j'ai préféré suivre une autre voie:

1° parce que je n'aurais pu démontrer ainsi l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas, où le polygone R_0 n'est pas symétrique.

2° parce que les développements en séries dont j'ai fait usage me donnaient non seulement la démonstration de l'existence de la fonction, mais son expression analytique.

Paris 23 Octobre 1882.