Topological **M**ethods in **N**onlinear **A**nalysis
Volume 42, No. 1, 2013, 181–191

HOMOLOGIE DE L'ESPACE DES LACETS DES ESPACES DE CONFIGURATIONS DE TROIS POINTS DANS $\mathbb{R}^n$ ET S^n

Walid Ben Hammouda

Résumé. On étudie en détail les espaces des lacets des espaces de configuration de 3 points dans $\mathbb{R}^n$ et dans la sphère S^n. Notre approche consiste à établir tout d'abord un résultat de *formalité* de ces espaces, et ensuite d'utiliser l'homologie de Hochschild pour calculer l'homologie de l'espace des lacets. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, nous retrouvons facilement et de façon plus conceptuelle un résultat de scindement homologique établi par Fadell et Husseini.

1. Résultat principal

Dans [5], Fadell et Husseini ont donné des estimations sur la croissance des nombres de betti sur le corps $\mathbb{Z}_2$ des espaces des lacets libres sur l'espace des configurations $F(\mathbb{R}^n, k)$, pour tout n et tout k. Nous rappelons que

$$F(X,k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \ si \ i \neq j\}.$$

Ces calculs ont été utilisés par exemple par H. Riahi pour affirmer l'existence d'orbites périodiques d'un système de type Hamiltonien [13]. Dans cette note, nous explicitons complètement le calcul homologique dans le cas de trois points pour $X = \mathbb{R}^n$ ou S^n. Notre résultat principal prend la forme suivante. Nous désignons par LX l'espace des lacets libres sur X.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 55N35, 55P35.
Key words and phrases. Homology of configuratios spaces, loop spaces, cyclic homology.

Théorème 1.1. *On supposera que $n \geq 2$. Nous avons les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants:*

(a) *Avec coefficients dans $\mathbb{Z}_2$,*

$$H^*(LF(\mathbb{R}^n, 3)) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1})). \tag{1.1}$$

(b) *Pour n pair et à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ou pour tout n avec coefficients dans $\mathbb{Z}_2$,*

$$H^*(LF(S^n, 3)) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(LS^n). \tag{1.2}$$

Les nombres de betti sont évalués rapidement à partir de la série de Poincaré bien connue pour les lacets sur une sphère (voir Exemple 2.7)

$$P(LS^n; \mathbb{Z}_2) = 1 + (1+z) \sum_{m \geq 1} z^{m(n-1)}$$

et de la série de Poincaré pour un wedge de sphères (voir Remarque 3.3). Notons que la décomposition (1.1) n'est plus valable pour coefficients autres que $\mathbb{Z}_2$.

La décomposition dans (1.1) est due originellement à Fadell et Husseini. Les méthodes qu'ils utilisent par contre sont assez fastidieuses (voir Section 2). Notre principale motivation est de donner une démonstration conceptuelle bien plus rapide de cette décomposition, développant une approche dans [8]. L'aspect conceptuel se base sur le fait que $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est un *espace formel* sur $\mathbb{Z}$ (voir Section 3). En identifiant la cohomologie de LX avec l'homologie de Hochschild des cochaines singulières $C^*(X)$, on aboutit à une dérivation rapide du scindement (1.1). Les mêmes idées s'appliquent pour la sphère $S^n, n \geq 2$ et nous établissons la décomposition (1.2) dans Section 4. Ce second splitting peut-être déduit également des calculs de Chataur et Leborgne [3] mais notre calcul est tout aussi ancien et la méthode très différente.

Cette note fait partie de ma thèse soutenue à l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je tiens à remercier plus particulièrement Sadok Kallel pour son suivi. Je remercie également l'équipe de topologie de la Faculté des Sciences de Tunis pour son assistance sur le plan moral et financier.

2. Préliminaires

Le théorème suivant est à la base de notre travail et il est dû à plusieurs auteurs (D. Burghelea, J.D.S. Jones ou T. Goodwillie [7]).

Théorème 2.1. *Soit X un espace 1-connexe pointé. Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $H^*(LX; \mathbb{K}) \cong HH_*(C^*(X; \mathbb{K}))$, où $C^*(X; \mathbb{K})$ sont les cochaines singulières de X à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

En fait, l'isomorphisme cité est un isomorphisme d'algèbres comme l'ont montré Ndombol–Thomas, Menichi et Idrissi. Dans cet énoncé HH_* est l'homologie de Hochschild dont nous rappelons brièvement la définition [11].

Soit X un CW-complexe, simplement connexe, à cohomologie de type fini. Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée (ADG); $A = \bigoplus_{k \geq 0} A^k$ ayant une augmentation $\varepsilon \colon A \to \mathbb{K}$ (l'anneau ou le corps de base) et une différentielle d. On note $\overline{A} = \ker(\varepsilon)$ l'idéal associé et on écrira $s\overline{A}$ la suspension de $\overline{A}$ tel que $(s\overline{A})^q = (\overline{A})^{q+1}$.

Definition 2.2. Le complexe de Hochschild $\mathbb{B}_*(A)$ est le complexe

$$\mathbb{B}_*(A) := A \otimes T(s\overline{A})$$

muni de la différentielle $D = d_1 + d_2$, ou d_1 (différentielle interne) et d_2 (différentielle externe) sont données par

$$\begin{aligned}
d_1(a[a_1|\dots|a_k]) &= d(a)[a_1|a_2|\dots|a_k] + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\varepsilon_i} a[a_1|\dots|d(a_i)|\dots|a_k], \\
d_2(a[a_1|\dots|a_k]) &= (-1)^{\deg a} a a_1[a_2|\dots|a_k] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\varepsilon_i} a[a_1|\dots|a_i a_{i+1}|\dots|a_k] \\
&\quad - (-1)^{\deg|a_k|\varepsilon_{k-1}} a_k a[a_1|\dots|a_{k-1}],
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_i = \deg(a) + \deg(sa_1) + \ldots + \deg(sa_i)$.

L'homologie de Hochschild, notée $HH_*(A)$, est l'homologie du complexe $\mathbb{B}_*(A)$. Ce complexe est très explicite et devrait permettre des calculs tout aussi explicites. Mais en général, il est très difficile de travailler avec les cochaines singulières dans ce complexe de Hochschild. Pour simplifier, on cherche à travailler avec les espaces formels et à remplacer les cochaines par l'algèbre de cohomologie qui est commutative graduée et bien sur beaucoup plus petite.

Definition 2.3. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif. Un espace X est dit $\mathbb{A}$-formel s'il existe une algèbre différentielle graduée (A, d) qui est quasi-isomorphe en tant que ADG à la fois à $C^*(X; \mathbb{A})$ avec sa différentielle usuelle δ et à $(H^*(X; \mathbb{A}), 0)$; i.e.

$$(C^*(X), \delta) \xleftarrow{\text{rm quasi-iso}} (A, d) \xrightarrow{\text{quasi-iso}} (H^*(X), 0)$$

C'est un résultat standard qu'un quasi-isomorphisme de ADG $(A, d) \xrightarrow{\cong} (A', d')$ induit un isomorphisme $HH_*(A; \mathbb{A}) \cong HH_*(A'; \mathbb{A})$. La $\mathbb{A}$-formalité de X implique alors immédiatement que

$$H^*(LX; \mathbb{K}) \cong HH_*(H^*(X; \mathbb{K}))$$

en tant qu'espaces vectoriels. Dans ce cas, le calcul dans le complexe de Hochschild se simplifie grandement puisque la différentielle interne d_1 est nulle.

Nous aurons besoin du critère de formalité très utile suivant du a M. El Haouari [4].

THÉORÈME 2.4. *Pour tout espace X, 1-connexe, à cohomologie de type fini dans un corps $\mathbb{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *X est $\mathbb{A}$-formel.*
(b) *Le modèle d'Adams–Hilton $(A(X), d_X)$ admet une différentielle purement quadratique.*

REMARK 2.5. L. Menichi nous indique que ce théorème reste valable pour un anneau commutatif quelconque sous la condition que l'homologie de X soit sans torsion.

Nous rappelons que le modèle d'Adams–Hilton $(A(X), d_X)$ est un modèle pour les chaines sur ΩX, X simplement connexe. Plus precisémment, soit $A(X)$ l'algèbre $Ts^{-1}\widetilde{H}_*(X;\mathbb{A})$, où s est l'opérateur de suspension. Si $\{b_0, b_1, \dots\}$ est une base de $H_*(X;\mathbb{A})$, alors $A(X)$ est l'algèbre associative libre engendrée par les $a_i = s^{-1}b_i$. La différentielle d_X est obtenue comme suit

$$d_X(a_i) = d_c(a_i) + \Omega, \quad \Omega \in T^{\geq 3}(A)$$

où d_c est la différentielle de la cobar construction, et $T^{\geq 3}(A)$ veut dire la filtration des termes s'écrivant comme somme de produits ayant au moins 3 facteurs dans $A(X)$ (voir [4, Lemme 1.4.2]). La partie quadratique est le terme de la différentielle qui s'écrit sous la forme

$$d_q(a_i) = \sum c_{ijl} a_j \otimes a_l.$$

COROLLAIRE 2.6. *Les sphères et les wedges des sphères sont des espaces formels sur tout corps.*

PREUVE. La preuve est évidente pour S^n si $n \geq 2$ en vue du paragraphe qui précède. Par contre et comme le cercle S^1 n'est pas 1-connexe, le Théorème 2.4 ne s'applique pas directement. Mais ce cas peut être traité avec d'autres méthodes et nous renvoyons à [11] par exemple. □

EXEMPLE 2.7. Calculons les nombres de betti, modulo 2, dans le cas de LS^n. Rappelons que $H^*(S^n) = \Lambda(a)$, l'algèbre extérieure sur a. Dans le complexe de Hochschild, nous aurons un produit tensoriel sur une seule classe, et les classes qui apparaissent dans la bar construction sont de la forme:

$$[a|\dots|a] \in A \otimes T(s\overline{A}), \qquad a[a|\dots|a] \in A \otimes T(s\overline{A}).$$

D'autre part, ces classes sont des cycles car

$$\begin{aligned} d_2([a|\dots|a]) &= a[a|\dots|a] + \sum [a|\dots|a^2|\dots|a] + a[a|\dots|a] = 0, \\ d_2(a[a|\dots|a]) &= a^2[a|\dots|a] + \sum [a|\dots|a^2|\dots|a] + a^2[a|\dots|a] = 0. \end{aligned}$$

Ces classes ne peuvent pas être des bords, et donc elles forment des classes d'homologie de Hochschild dont la première est de degré $m(n-1)$ et la seconde de degré $m(n-1)+1$ pour tout m dans $\mathbb{Z}$. D'où la série de Poincaré bien connue

$$P(LS^n; \mathbb{Z}_2) = 1 + (1+z) \sum_{m \geq 1} z^{m(n-1)}.$$

Remark 2.8. Rationnellement, il s'avère que $F(\mathbb{R}^n, k)$ est formel pour tout n et pour tout k. Ceci est un important et difficile résultat de Kontsevich. Ceci implique en particulier que

$$H^*(LF(\mathbb{R}^n, k); \mathbb{Q}) \cong HH_*(H^*(F(\mathbb{R}^n, k); \mathbb{Q}).$$

3. Trois points dans $\mathbb{R}^n$

Nous démontrons Théorème 1.1(a). L'espace de configurations $F(\mathbb{R}^n, 3)$ a été amplement étudié par Massey [10]. Dans le cas où $n = 2$ ou 4, $\mathbb{R}^n$ est une algèbre à division et $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est un groupe. Dans ce cas, nous avons des équivalences

$$F(\mathbb{R}^n, 3) \cong \mathbb{R}^n \times F(\mathbb{R}^n - \{0\}, 2) \cong \mathbb{R}^n - \{0\} \times (\mathbb{R}^n - \{0, 1\}).$$

Chacune de ces équivalences est un cas particulier du fait que, lorsque G est un groupe topologique avec identité $\{e\}$, $F(G, k) \cong G \times F(G - \{e\}, k-1)$ via l'application qui à $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, (x_2 x_1^{-1}, \dots, x_k x_1^{-1}))$. Pour le cas de $\mathbb{R}^n$, nous avons donc l'équivalence

$$F(\mathbb{R}^n, 3) \simeq S^{n-1} \times (S^{n-1} \vee S^{n-1}), \quad n = 2, 4.$$

Pour n général, il existe toujours une fibration du type Fadell-Neuwirth

$$S^{n-1} \vee S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n - Q_2 \longrightarrow F(\mathbb{R}^n, 3) \longrightarrow F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}.$$

Ici Q_2 veut dire un ensemble à deux points. Cette fibration est en général non-triviale. L'approche de Fadell et Husseini [5] dans l'étude de $LF(\mathbb{R}^n, 3)$ était de prendre les lacets sur cette fibration, d'obtenir une nouvelle fibration

$$L(S^{n-1} \vee S^{n-1}) \longrightarrow L(F(\mathbb{R}^n, 3)) \longrightarrow LS^{n-1}$$

et de regarder dans sa suite spectrale de Serre. Ce travail prend quelques pages. Notre approche est totalement différente.

Nous allons montrer tout d'abord que $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est $\mathbb{Z}$-formel.

Proposition 3.1. *$F(\mathbb{R}^n, 3)$ est formel sur tout corps (et sur $\mathbb{Z}$ suivant la Remarque* 2.5*).*

Preuve. Le cas $n = 2$ est immédiat puisque $F(\mathbb{R}^2, 3) \simeq S^1 \times (S^1 \vee S^1)$ comme déjà expliqué, et puisque le produit de deux espaces formels est formel. Nous pouvons donc supposer que $n \geq 3$. Dans ce cas $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est simplement connexe. La cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est donnée par

$$H^*(F(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[a, b, c]_{/(a^2=b^2=c^2=0,\, ab+bc+ca=0)}. \tag{3.1}$$

Le degré des générateurs est $n - 1$, et l'idéal des relations est engendré par les relations de la sphère (carré nul) et la "relation d'Arnold" (voir [2], [5]). Evidemment nous avons également les relations usuelles de commutativité graduée. Nous écrirons additivement cette cohomologie avec ses générateurs sous la forme

$$H^*(F(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\{a_1, a_2, a_3\} & \text{degré } n-1, \\ \mathbb{Z}\{b_1, b_2\} & \text{degré } 2n-2. \end{cases}$$

Le modèle d'Adams–Hilton de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est alors donné par $T(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{b}_1, \overline{b}_2; d)$, $(\deg(\overline{x}) = \deg(x) - 1)$ avec $d(\overline{a}_1) = d(\overline{a}_2) = d(\overline{a}_3) = 0$. D'autre part et pour des raisons évidentes de degré, la différentielle de $\overline{b}_1$ et $\overline{b}_2$ ne peut être que quadratique. L'espace n'ayant pas de torsion dans son homologie, nous invoquons le Théorème 2.4 $\square$

Théorème 3.2. *Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$H^*(LF(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{K}) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1}))$$

valable pour tout n si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ et pour n pair si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Preuve. Nous traitons tout d'abord le cas modulo 2. On commence par construire un isomorphisme entre $H^*(F(\mathbb{R}^n, 3))$ et $H^*(S^{n-1}) \otimes H^*((S^{n-1} \vee S^{n-1}))$. La cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ modulo 2 est donnée par la même expression que dans (3.1). D'autre part, $H^*(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2[a]_{/a^2=0}$ et $H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1}) = \mathbb{Z}_2[a,\ b]_{/a^2=b^2=0}$. On peut alors construire le morphisme:

$$\begin{aligned} H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1}) &\longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^n, 3), \\ \mathbb{Z}_2[c]_{/(c^2)} \otimes \mathbb{Z}_2[a,\ b]_{/(a^2,\ b^2,\ ab)} &\longmapsto \mathbb{Z}_2[a,\ b,\ c]_{/(a^2,\ b^2,\ c^2,\ ab+bc+ca)}, \\ c &\longmapsto c, \\ a &\longmapsto a + c, \\ b &\longmapsto b + c. \end{aligned}$$

Cette flèche est bien définie car $ab = 0$ s'envoie à $(a + c)(b + c)$ qui est également nulle par la relation d'Arnold. Ce morphisme est un morphisme d'algèbre et c'est clairement un isomorphisme. Nous pouvons donc remplacer dans le complexe de Hochschild

$$\begin{aligned} H^*(LF(\mathbb{R}^n,3)) &\cong HH_*(H^*(F(\mathbb{R}^n,3))) \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})) \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1})) \otimes HH_*(H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})) \\ &\cong H^*(L(S^{n-1})) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1})) \end{aligned}$$

en utilisant, pour obtenir le dernier isomorphisme, la formalité de la sphère et du wedge (Corollaire 2.6). En travaillant avec des coefficients rationnels, et pour n pair, on peut vérifier que le morphisme

$$\begin{aligned} \psi : H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1}) &\longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^n,3), \\ c &\longmapsto c, \\ a &\longmapsto a - c, \\ b &\longmapsto b - c, \end{aligned}$$

est bien défini et donne également un isomorphisme d'algèbre. En effet, c est le générateur de $H^*(S^{n-1})$ et a et b sont les générateurs de $H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})$. Nous vérifions que $ab = 0$ dans le wedge s'envoie à $(a-c)(b-c) = ab - ac - bc$, et que ceci est égal à $ab + ca + bc = 0$ car $deg(a) = deg(b) = deg(c) = n-1$ est impair. $\square$

Remark 3.3. Notons que dans le cas où n est impair, la flèche ψ n'est pas bien définie en tant que morphisme d'algèbre, et le théorème dans ce cas n'est plus valable comme le montre d'ailleurs l'exemple suivant. Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et n impair. Pour cela, reprenons le complexe de Hochschild et calculons le nombre de classes en degré $2(2n-1)$. Les classes dans le complexe de Hochschild sont: $[a|a]$, $[a|b]$, $[b|a]$, $[a|c]$, $[c|a]$, $[b|b]$, $[b|c]$, $[c|b]$ et $[c|c]$. Seules $[a|a]$, $[b|b]$ et $[c|c]$ sont des classes d'homologies en plus de la classe qui est la somme de ces trois classes. Donc le nombre total des classes en degré $2(2n-1)$ est 4. D'autre part, la série de Poincaré du wedge de deux sphères de degrés pairs est donnée par exemple dans [9]:

$$\begin{aligned} P(LS^{2n};\mathbb{Q}) &= 1 + (1+z)(z^{2n-1} + z^{3(2n-1)} + \dots), \\ P(L(S^{2n} \vee S^{2n});\mathbb{Q}) &= 1 + (1+z)\Big(\sum_{m\geq 1} a_m z^{m(2n-1)}\Big) \end{aligned}$$

avec $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ ce qui donne que le nombre de classes de degré $2(2n-1)$ est $a_1 + a_2 = 5$. Le nombre de classes de degré $2(n-1)$ dans le produit des séries de Poincaré de LS^{n-1} et $L(S^{n-1} \vee S^{n-1})$ (qui est égal 5) n'est pas égal au nombre de classes de même degré dans le modèle rationnel de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ (qui est égal 4).

Nous n'avons pas un isomorphisme rationnellement entre $H^*(LF(\mathbb{R}^n,3);\mathbb{Q})$ et $H^*(LS^{n-1})\otimes H^*(L(S^{n-1}\vee S^{n-1}))$ pour n impair.

4. Trois Points dans S^n

Dans cette section, nous proposons un calcul de l'homologie des espaces des lacets sur l'espace de configuration de trois points sur une sphère $LF(S^n,3)$. Nous commençons par décrire $F(S^n,3)$. Nous avons un fibré

$$F(\mathbb{R}^n,2)\longrightarrow F(S^n,3)\xrightarrow{p_1} S^n$$

qui est obtenu comme suit: on projette $(x_1,x_2,x_3)\in F(S^n,3)$ sur la première coordonnée x_1. La fibre au dessus d'un point est identifiée à $F(S^n-\{p\},2)\cong F(\mathbb{R}^n,2)\simeq S^{n-1}$. La projection p_1 a une structure de fibré d'après un résultat général de Fadell–Neuwirth.

Definition 4.1. Soient $E\to B$ et $E'\to B$ deux fibrés sur B. On dit que E' est un retracte fiberwise de E s'il existe des flèches sur B

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "r"] \arrow[d] & E' \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

tel que $r\circ i=\mathrm{Id}_{E'}$.

Lemme 4.2. *Soit τS^n le fibré tangent en sphère sur S^n. Il existe une flèche de fibrés*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & F(\mathbb{R}^n,2) \arrow[d] \\ \tau S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F(S^n,3) \arrow[d] \\ S^n \arrow[r, "="'] & S^n \end{tikzcd}$$

qui est un rétracte par déformation fiberwise.

Preuve. Nous identifions $\tau S^n=\{(x,y)\in S^n\times\mathbb{R}^{n+1}\mid x.y=0\}$ avec la variété de Stiefel de deux vecteurs orthogonaux et unitaires dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On peut alors écrire explicitement la flèche $f\colon\tau S^n\to F(S^n,3)$, $(x,y)\mapsto(x,y,-y)$. Cette flèche est au dessus de S^n. Etant donné $(x,y,z)\in F(S^n,3)$, la projection stéréographique st_x de centre x identifie $S^n-\{x\}$ avec un hyperplan $V_x\subset\mathbb{R}^{n+1}$, la paire (y,z) avec $(st_x(y),st_x(z))\in F(V_x,2)$, et la sphère unité du tangent en x avec la sphère (qu'on supposera unitaire) de V_x.

Considérons l'inclusion $S^{n-1} \hookrightarrow F(\mathbb{R}^n, 2)$, $y \mapsto (y, -y)$ qui est un rétracte par déformation. Nous décrivons cette rétraction F_t. Elle est donnée par la composée de deux homotopies

$$f_t(a,b) = \left(a - t\frac{a+b}{2}, b - t\frac{a+b}{2}\right), \quad t \in I,$$

suivie par

$$g_t(x,y) = \left((1-t)x + t\frac{x}{|x|}, (1-t)y + t\frac{y}{|y|}\right), \quad t \in I.$$

L'homotopie f_t translate la paire (a, b) de façon à ce que le milieu de a et b est déplacé à l'origine. L'homotopie g_t est bien définie sur l'image de f_1. Notons qu'à la fin de la déformation nous obtenons $F_1(a, b)$ qui est une paire de points diamétralement opposés dans la sphère S^{n-1}.

Nous pouvons appliquer la construction ci-dessus à tout hyperplan V_x et nous obtenons une rétraction par déformation également notée F_t de $F(V_x, 2)$ dans sa sphère unité. Nous pouvons alors écrire l'homotopie $H\colon F(S^n, 3) \times I \to F(S^n, 3)$;

$$H_t(x, y, z) = (x, F_t(st_x(y), st_x(z)).$$

Cette homotopie est clairement fiberwise. Pour $t = 1$, $(x, F_1(st_x(y), st_x(z))$ s'identifie à un unique point de la forme $(x, a, -a)$ avec a dans la sphère unité de V_x et donc à un élément de τS^n, donnant ainsi un rétracte de l'application f. La démonstration est complète. $\square$

Pour calculer la cohomologie de $F(S^n, 3)$, il suffit donc de calculer $H^*(\tau S^n)$.

Proposition 4.3. *Pour n impair, nous avons un isomorphisme d'anneaux entre $H^*(F(S^n, 3))$ et $H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^n)$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Ce résultat reste valable pour n pair et à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.*

Preuve. Nous avons identifié $F(S^n, 3)$ à homotopie près avec le fibré unitaire en sphères de S^n. Dans la suite spectrale de Serre associée à ce fibré, il existe une différentielle d_n qui envoie la classe d'orientation $[S^n]$ dans la base à la classe $\chi(S^n)[S^{n-1}]$ dans la fibre, avec $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Ceci est une conséquence connue de la suite de Gysin (Mimura–Toda [12, Theorem 3.5, Remarque 3.6, p. 118]). Lorsque n est impair, d_n est nulle et la suite spectrale degénère totalement. Mais cette suite spectrale est une suite spectrale d'algèbres et il n'y a aucune extension possible au terme E_2. Il s'ensuit que ce terme E_2 donne la cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ en tant qu'algèbre. Le même argument s'applique mot pour mot si n est pair, et la caractéristique du corps est divisible par 2. $\square$

Pour les mêmes raisons que pour le cas de $F(\mathbb{R}^n, 3)$, l'espace de configurations sur la sphère $F(S^n, 3)$ est formel et nous aboutissons au résultat suivant.

Théorème 4.4. *$F(S^n,3)$ est $\mathbb{Z}$-formel et on a l'isomorphisme*

$$H^*(LF(S^n,3)) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(LS^n)$$

valable pour n impair et coefficients dans $\mathbb{Z}$, ou pour n pair et coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

Preuve. Le modèle d'Adams–Hilton de $F(S^n,3)$ est une algèbre tensorielle $T(a_{n-1}, b_n, c_{2n-1})$ avec une différentielle d qui est nécessairement quadratique pour des raisons de degré. En appliquant alors le Théorème 2.4, on voit que $F(S^n,3)$ est $\mathbb{Z}$-formel. On peut donc considérer comme précédemment la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} H^*(LF(S^n,3)) &\cong HH_*(H^*(F(S^n,3))), \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^n)) \qquad \text{(voir Proposition 4.3)} \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1})) \otimes HH_*(H^*(S^n)) \\ &\cong H^*(L(S^{n-1})) \otimes H^*(L(S^n)) \end{aligned}$$

et le résultat est démontré. □

Remarque 4.5. Les arguments de la preuve du Théorème 4.4 donnent le résultat plus général suivant: si $F \to E \to B$ est une fibration d'espaces 1-connexes et $\mathbb{A}$-formels, et si $H^*(E) \cong H^*(F) \otimes H^*(B)$, alors toujours avec coefficients dans $\mathbb{A}$

$$H^*(LE) \cong H^*(LF) \otimes H^*(LB).$$

References

[1] A. Bahri and P.H. Rabinowitz, *A Minimax Method for a Class of Hamiltonian Systems with Singular Potentials*, J. Funct. Anal. **82** (1989), 412–428.

[2] F. Cohen, *Homology of C_{n+1}-spaces*, Lecture Notes in Math. **533**.

[3] D. Chataur and J.-F. Le Borgne, *Homology of spaces of regular loops in the sphere*, Algebr. Geom. Topol. **9** (2009), 935–977.

[4] M. El Haouari, *p-formalité des espaces*, J. Pure Appl. Algebra **78** (1992), 27–47.

[5] E.R. Fadell and S.Y. Husseini, *Geometry and Topology of Configuration Spaces*, Springer Monogr. Math., 2000.

[6] ———, *On the growth properties of the homology of free loop spaces on configuration spaces*, World Congress of Nonlinear Analysis 92, (Tampa, FL, 1992), vol. I–IV, de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 2127–2134.

[7] T.G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loop space*, Topology **24** (1985), 187–215.

[8] S. Kallel, *Habilitation à diriger les recherches*, Université de Lille I, 2003.

[9] S. Kallel and D. Sjerve, *On the topology of fibrations with section and free loop spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **83** (2001), 419–442.

[10] W.S. Massey, *The homotopy type of certain configuration spaces*, Papers in honor of Jose Adem, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **37** (1992), 355–365.

[11] L. Menichi, *The cohomology ring of free loop spaces*, Homology, Homotopy Appl. **3** (2001), 193–224.

[12] M. Mimura and H. Toda, *Topology of Lie Groups* I–II, Transl. Math. Monogr., vol. 91, Amer. Math. Soc., 1991.

[13] H. Riahi, *Periodic orbits of n-body type problems: the fix ed period case.*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4663–4685.

Manuscript received December 12, 2011

Walid Ben Hammouda
Université des Sciences et Technologies de Lille
Laboratoire Painlevé
59655 Villeneuve d'Ascq, FRANCE

E-mail address: bh.walid@laposte.net