Rev. Mat. Iberoamericana **26** (2010), no. 3, 825–859

Le Théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique

Zoghman Mebkhout et Luis Narváez Macarro

Résumé

Let $\mathcal{X}^\dagger$ be a smooth †-scheme (in the sense of Meredith) over a complete discrete valuation ring $(V,\mathfrak{m})$ of unequal characteristics $(0,p)$ and let $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ be the sheaf of V-linear endomorphisms of $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}$ whose reduction modulo $\mathfrak{m}^s$ is a linear differential operator of order bounded by an affine function in s. In this paper we prove that locally there is an $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger}$-isomorphism between the sections of $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ and the overconvergent total symbols, and we deduce a cohomological triviality property.

1. Introduction

Cet article complète l'article [13] sur les propriétés de finitude de l'anneau des opérateurs différentiels p-adiques sur un schéma †-adique [15]. Les résultats ont été pour la plupart obtenus à la fin des années quatre vingt mais n'avaient pas été publiés. Entre temps la théorie des équations différentielles p-adiques a connu un grand développement. Il s'agit d'une théorie non triviale sans laquelle on pourra difficilement obtenir des résultats significatifs, comme par exemple le théorème de finitude des nombres de Betti p-adique d'une variété affine non singulière [11]. Cependant ce point de vue s'est avéré être le point de vue juste de la cohomologie de de Rham p-adique. Les résultats de cet article jouent un rôle central dans les opérations cohomologiques pour la cohomologie de de Rham p-adique en dimensions supérieures et leur publication devient maintenant nécessaire.

2000 Mathematics Subject Classification : 14F30, 14F10.
Keywords : affinoid algebra, Dwork-Monsky-Washnitzer algebra, †-scheme, †-adic differential operator.

Le résultat central de ce premier article est le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique dont on déduit la trivialité cohomologique du faisceau des opérateurs différentiels p-adiques au-dessus d'un ouvert affine assez petit :

Théorème. *Soient V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$ et $A^\dagger$ une V-algèbre faiblement complète lisse munie de fonctions $x_1,\dots,x_n$ telles que leurs différentielles forment une base du $A^\dagger$-module des formes différentielles séparées. Soit P un opérateur différentiel de l'anneau $D^\dagger_{A^\dagger/V}$ et la suite $a_\alpha, \alpha\in\mathbb{N}^n$, d'éléments de $A^\dagger$ définis par*

$$a_\alpha = \sum_{0\le\beta\le\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}(-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta}).$$

Alors l'opérateur P est égal à la série

$$P(a,\Delta_x) := \sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha.$$

De plus l'application symbole total qui à un opérateur différentiel P associe son symbole total

$$\sigma_P(x,\xi) := \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$$

est un **isomorphisme de $A^\dagger$-modules à gauche** *entre l'anneau des opérateurs différentiels $D^\dagger_{A^\dagger/V}$ et l'algèbre $A^\dagger[\xi_1,\dots,\xi_n]^\dagger$ complété $\dagger$-adique de l'algèbre $A^\dagger[\xi_1,\dots,\xi_n]$.*

Le théorème précédent est démontré en deux parties. Le théorème 5.1 montre la convergence du symbole total et l'injectivité de l'application symbole total

$$\sigma_* : P\in D^\dagger_{A^\dagger/V} \mapsto \sigma_P(x,\xi)\in A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger.$$

Le théorème 6.1 montre que l'application symbole total σ_* est surjective. Les démonstrations des deux parties sont de nature différente.

Ce théorème produit beaucoup d'exemples d'opérateurs différentiels p-adiques. Nous l'utilisons de façon essentielle pour définir la cohomologie de De Rham p-adique d'une variété algébrique lisse admettant un relèvement comme schéma faiblement complet comme défini dans l'article [15] et $\dagger$-adique lisse. Chemin faisant nous démontrons un théorème de division pour les algèbres ultramétriques et une majoration du quotient et du reste qui joue un rôle essentiel dans la définition du morphisme symbole total.

Dans le deuxième article [12] on utilise ce théorème pour montrer le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique d'échelon $h\ge 0$ et la noethérianité de l'anneau de ses sections globales au dessus d'un ouvert affine assez petit.

Voici le contenu des différents paragraphes. Dans le deuxième paragraphe on démontre le théorème de division par un idéal de l'algèbre $K[x_1, \ldots, x_n]^\dagger$ sur un corps ultramétrique complet K et une majoration du quotient et du reste. Nous en déduisons que tout idéal de cette algèbre est de type fini et fermé pour la topologie naturelle limite inductive d'espaces métriques complets et donc la topologie quotient sur toute algèbre quotient est séparée et limite inductive d'espaces métriques complets. Dans le troisième paragraphe nous rappelons deux théorèmes de la théorie de Grothendieck des espaces vectoriels topologiques limites inductives dénombrables d'espaces métriques complets sur un corps valué complet, le théorème du graphe fermé et le théorème de factorisation et nous déduisons quelques conséquences topologiques pour les algèbres quotient précédentes. Dans le paragraphe quatre nous rappelons la définition du faisceau des opérateurs différentiels p-adiques sur un schéma †-adique. Dans le paragraphe cinq nous démontrons le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique. Dans le paragraphe six nous démontrons la réciproque, le théorème de l'opérateur différentiel p-adique d'un symbole total. Dans le paragraphe sept nous en déduisons l'acyclicité du faisceau des opérateurs différentiels p-adiques au-dessus d'un ouvert affine assez petit.

Notations et conventions

Nous utiliserons les notations suivantes :

1) R anneau commutatif unitaire noethérien, I idéal de R, $R_s := R/I^s$, $s \geq 1$; en particulier $R_1 := R/I$.
2) $(V, \mathfrak{m}, k, K, e)$ anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel k, de corps de fractions K et d'indice de ramification $e := v_{\mathfrak{m}}(p)$.
3) X/R schéma sur R.
4) De façon générale si X/R est un espace annelé sur R nous notons $\mathcal{D}_{X/R}$ le faisceau des opérateurs différentiels défini par récurrence sur l'ordre dans ([7, § 16]) et noté $\mathcal{D}iff_R(\mathcal{O}_{X/R})$. La notation $\mathcal{D}_{X/R}$ et ses variantes sont aujourd'hui universelles.
4) Si X/R est un schéma lisse sur R, un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ est constitué de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{X/R}$ telles que leurs différentielles forment une base locale du fibré des R-formes différentielles ([7, § 16]).
5) $\alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\binom{\alpha}{\beta} := \alpha!/\beta!(\alpha - \beta)!$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

6) $\Delta := \Delta_x^\alpha := \Delta_{x_1}^{\alpha_1} \dots \Delta_{x_n}^{\alpha_n}$ la famille des opérateurs différentiels associés à $x = (x_1, \dots, x_n)$ et à $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ([7, Th. 16.11.2]). Ils sont determinés par les conditions

$$\Delta_x^\alpha(x^\beta) = \tbinom{\beta}{\alpha}\, x^{\beta-\alpha}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

7) Si A est une R-algèbre on note $A^\wedge$ son complété séparé pour la topologie I-adique et $A^\dagger \subset A^\wedge$ son complété †-adique [16] pour la topologie I-adique.

2. Théorèmes de division dans les algèbres ultramétriques

2.1. Anneaux des séries ultramétriques

Soit K un corps valué complet ultramétrique et k son corps résiduel. L'algèbre de Tate à n variables sur K, notée T_{nK}, ou $K\langle \underline{x} \rangle = K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, est par définition la sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles dont les éléments sont les séries *restreintes*,

$$T_{nK} = K\langle \underline{x} \rangle = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underline{x}^\alpha \in K[[\underline{x}]] \;\middle|\; \lim_{|\alpha| \to +\infty} |f_\alpha| = 0 \right\}.$$

C'est une K-algèbre de Banach pour la norme de Gauss [3, 5.1.1, prop. 1] :

$$\left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underline{X}^\alpha \right\| = \max_\alpha |f_\alpha|.$$

C'est une algèbre topologiquement dénombrable (cf. [3, 2.7]) parce que l'anneau des polynômes $K[\underline{x}]$ est une sous-algèbre dense. De plus, si l'on note $T_n^\circ(k) = \{f \in T_{nK} \mid \|f\| \leq 1\}$ et $T_n^\wedge(k) = \{f \in T_{nK} \mid \|f\| < 1\}$, on a un isomorphisme canonique

$$T_n^\circ(k)/T_n^\wedge(k) \simeq k[\underline{x}],$$

d'où on déduit que la norme de Gauss est multiplicative.

Si $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ est un poly-rayon, on note

$$T_{nK,\rho} = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underline{x}^\alpha \in K[[\underline{x}]] \;\middle|\; \lim_{|\alpha| \to +\infty} |f_\alpha| \rho^\alpha = 0 \right\}.$$

C'est une sous-algèbre de $K[[\underline{x}]]$. Pour $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underline{x}^\alpha \in T_{nK,\rho}$ on définit la ρ-norme

$$\|f\|_\rho = \max_\alpha |f_\alpha| \rho^\alpha.$$

La K-algèbre normée $(T_{nK,\rho}, \| \|_\rho)$ est aussi une K-algèbre de Banach dans laquelle $K[\underline{x}]$ est une sous-algèbre dense et la norme $\| \|_\rho$ est multiplicative (cf. [3, 6.1.5]). De plus, la topologie de $T_{nK,\rho}$ est plus fine que la topologie induite par la topologie produit dans $K[[\underline{x}]] = K^{\mathbb{N}^n}$. Si $\rho \geq \rho'$ l'injection $T_{nK,\rho} \subseteq T_{nK,\rho'}$ est continue. Par définition $T_{nK,(1,\ldots,1)} = T_{nK}$.

Notons $\mathcal{P}_n = \{\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid \rho_i > 1\}$ avec l'ordre partiel usuel inversé. L'algèbre DMW de Dwork-Monsky-Washnitzer à n variables sur K, notée $K[\underline{x}]^\dagger$, est par définition la sous-algèbre de l'algèbre de Tate

$$K[\underline{x}]^\dagger = \bigcup_{\rho \in \mathcal{P}_n} T_{nK,\rho} = \varinjlim_{\rho \in \mathcal{P}_n} T_{nK,\rho}.$$

Les éléments de $K[\underline{x}]^\dagger$ sont appelés *séries surconvergentes*.

L'algèbre $K[\underline{x}]^\dagger$ est donc naturellement munie d'une topologie localement convexe limite inductive dénombrable (car l'ensemble des poly-rayons ρ admet de sous-ensembles dénombrables cofinaux) et l'injection dans l'algèbre normée T_{nK} est continue, la topologie limite est donc séparée. Comme pour tout $\rho \geq 1$ la K-algèbre normée $T_{nK,\rho}$ est de Banach, la topologie limite inductive sur l'algèbre $K[\underline{x}]^\dagger$ est une topologie de type $\mathcal{LF}$ au sens de Grothendieck [8]. Nous utilisons aussi la notation $A_{nK}^\dagger$ pour la K-algèbre $K[\underline{x}]^\dagger$.

2.2. Division dans les anneaux de polynômes à coefficients dans un corps

Soit k un corps et $F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} F_\alpha \underline{x}^\alpha$ une série à coefficients dans k. Le *support* de F est l'ensemble

$$\mathcal{N}(F) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid F_\alpha \neq 0\} \subseteq \mathbb{N}^n.$$

Si F est un polynôme son support est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^n$.

Plus généralement si $F = (F_1, \ldots, F_m)$ est un vecteur de séries à coefficients dans k, on a une écriture unique

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} F_{j,\alpha} \underline{x}^{j,\alpha}$$

où les $F_{j,\alpha}$ sont dans k et $\underline{x}^{j,\alpha}$ dénote le vecteur $(0, \ldots, \underline{x}^\alpha, \ldots, 0)$, le monôme étant à la j-ème place. Autrement dit, on a $F_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} F_{j,\alpha} \underline{x}^\alpha$ pour chaque $j = 1, \ldots, m$. Le support de F est l'ensemble

$$\mathcal{N}(F) = \{(j, \alpha) \in \{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n \mid F_{\alpha,j} \neq 0\} \subseteq \{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n.$$

Si F est un vecteur de polynômes, alors $\mathcal{N}(F)$ est aussi un sous-ensemble fini de $\{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^n$, nous considérons les deux relations de bon ordre total suivantes :

Ordre lexicographique inverse : $\alpha <_{lexinv} \beta$ s'il existe un indice j compris entre 1 et n tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour $i > j$ et $\alpha_j < \beta_j$.

L-ordre : $\alpha <_L \beta$ si ou bien $L(\alpha) < L(\beta)$ ou bien $L(\alpha) = L(\beta)$ et $\alpha <_{lexinv} \beta$, où $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire à coefficients positifs ou nuls.

Si la forme linéaire L a ses coefficients linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, alors $\alpha <_L \beta$ si et seulement si $L(\alpha) < L(\beta)$.

Si maintenant (i, α) et (j, β) sont deux éléments de $\{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n$, on dispose aussi des relations de bon ordre total suivantes :

L-ordre semi-lexicographique pour les vecteurs : $(i, \alpha) <_L (j, \beta)$ si ou bien $L(\alpha) < L(\beta)$ ou bien $L(\alpha) = L(\beta)$ et soit $i < j$ soit $i = j$ et $\alpha <_{lexinv} \beta$, où $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire à coefficients positifs ou nuls.

$\widetilde{L}$-ordre pour les vecteurs : $(i, \alpha) <_{\widetilde{L}} (j, \beta)$ si $\widetilde{L}(i-1, \alpha) < \widetilde{L}(j-1, \beta)$, où $\widetilde{L} \colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire à coefficients positifs linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

Notons "ord" une des relations d'ordre précédentes sur $\{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n$, ou plus généralement, une relation de bon ordre sur $\{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n$ compatible avec l'action de $\mathbb{N}^n$ (le monoïde $\mathbb{N}^n$ opère sur $\{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n$ par addition sur la seconde composante).

Si $F \in k[\underline{x}]^m := k[x_1, \ldots, x_n]^m$ est un vecteur de polynômes non nul, posons

$$\exp(F) := \max_{\text{ord}}(\mathcal{N}(F)).$$

Si $Q \in k[\underline{x}]$ et $F, F' \in k[\underline{x}]^m$ sont non nuls, alors

$$\exp(QF) = \exp(Q) + \exp(F),$$

et si $\exp(F) <_{\text{ord}} \exp(F')$ alors

$$\exp(F+F') = \exp(F').$$

Rappelons le théorème de division des vecteurs de polynômes (cf. [1]) :

Théorème 2.2.1. *Soient $F^1, \ldots, F^p \in k[\underline{x}]^m$ des vecteurs non nuls. Notons*

$$\Delta_1 := \mathbb{N}^n + \exp(F^1)$$

$$\Delta_i := (\mathbb{N}^n + \exp(F^i)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j, \quad i = 2, \ldots, p$$

$$\overline{\Delta} := \{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i = \{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{p} (\mathbb{N}^n + \exp(F^i)).$$

Alors, pour chaque $\underline{G} \in k[\underline{x}]^m$ *il existe des polynômes* $Q_1, \ldots, Q_p \in k[\underline{x}]$ *et un vecteur* $\underline{R} \in k[\underline{x}]^m$ *uniques tels que*

1. $\underline{G} = \sum_{i=1}^{p} Q_i F^i + \underline{R}$,
2. $\mathcal{N}(Q_i) + \exp(F^i) \subseteq \Delta_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$,
3. $\mathcal{N}(\underline{R}) \subseteq \overline{\Delta}$.

Remarque 2.2.2. Si dans le théorème précédent k est un anneau et les coefficients des monômes principaux des diviseurs F^i sont des unités, on a encore un algorithme de division et le théorème 2.2.1 a lieu.

2.3. Division dans les algèbres ultramétriques

Soit K un corps valué complet ultramétrique de corps résiduel k et "ord" est une relation de bon ordre total sur $\{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n$ compatible avec l'action de $\mathbb{N}^n$.

Soit $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underline{x}^\alpha \in K\langle \underline{x} \rangle$ une série restreinte non nulle. Nous définissons

$$\exp(f) := \max_{\text{ord}} \{\alpha \in \mathcal{N}(f) \mid |f_\alpha| = \|f\|\},$$

où $\|f\|$ est la norme de Gauss. Plus généralement, si $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_{j,\alpha} \underline{x}^{j,\alpha} \in K\langle \underline{x} \rangle^m$ est un vecteur non nul, nous définissons

$$\exp(\underline{f}) := \max_{\text{ord}} \{(j, \alpha) \in \mathcal{N}(f) \mid |f_{j,\alpha}| = \|\underline{f}\|\},$$

où $\|\underline{f}\| = \max \|f_j\|$.

Il est évident que :

1. Si $\|\underline{f}\| = 1$, alors $\exp(\underline{f}) = \exp(\overline{\underline{f}})$, où $\overline{\underline{f}}$ désigne l'image canonique dans $k[\underline{x}]^m$.
2. $\exp(\underline{f}) = \exp(c\underline{f})$, pour tout $c \in K, c \neq 0$.

Lemme 2.3.1. *Soient* $q \in K\langle \underline{x} \rangle$, $\underline{f}, \underline{f}' \in K\langle \underline{x} \rangle^m$ *non nuls. On a les propriétés suivantes :*

1. $\exp(q\underline{f}) = \exp(q) + \exp(\underline{f})$.
2. *Si* $\exp(\underline{f}) \neq \exp(\underline{f}')$, *alors* $\exp(\underline{f} + \underline{f}')$ *est égal ou bien à* $\exp(\underline{f})$ *ou bien à* $\exp(\underline{f}')$.

Théorème 2.3.2. *Soient* $\underline{f}^1, \ldots, \underline{f}^p \in K\langle\underline{x}\rangle^m$ *des vecteurs non nuls. Notons*

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \mathbb{N}^n + \exp(\underline{f}^1)\\
\Delta_i &:= (\mathbb{N}^n + \exp(\underline{f}^i)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j, \quad i = 2, \ldots, p\\
\overline{\Delta} &:= \{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i = \{1, \ldots, m\} \times \mathbb{N}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{p} (\mathbb{N}^n + \exp(\underline{f}^i)).
\end{aligned}$$

Alors, pour chaque $\underline{g} \in K\langle\underline{x}\rangle^m$ *il existe des séries* $q_1, \ldots, q_p \in K\langle\underline{x}\rangle$ *et un vecteur* $\underline{r} \in K\langle\underline{x}\rangle^m$ *uniques tels que*

1. $\underline{g} = \sum_{i=1}^{p} q_i \underline{f}^i + \underline{r}$ *,*
2. $\mathcal{N}(q_i) + \exp(\underline{f}^i) \subseteq \Delta_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$*,*
3. $\mathcal{N}(\underline{r}) \subseteq \overline{\Delta}$*.*

De plus, $\|\underline{g}\| = \max\{\|q_i\| \cdot \|\underline{f}^i\|, \|\underline{r}\|\}$*.*

Démonstration. L'unicité est une conséquence standard du lemme 2.3.1. Pour l'existence il suffit de considérer le cas où les diviseurs $\underline{f}^i$ ont une norme égale à 1 et la norme de $\underline{g}$ est plus petite ou égale à 1. On écrit $f^i = f^i_0 + f^i_1$ où $||f^i_0|| = 1, ||f^i_1|| < 1$ et on choisit un nombre $r, 0 < r < 1$ tel que $||f^i_1|| \leq r$ pour tout i. On considère l'anneau quotient

$$k_r := \{(a \in K, |a| \leq 1)/(a \in K, |a| \leq r)\}$$

et la réduction $K\langle\underline{x}\rangle^m \to k_r[\underline{x}]^m$. Les coefficients principaux des images des diviseurs f^i sont des unités et on peut effectuer la division de l'image de $\underline{g}$ par les images des $\underline{f}^i$ dans $k_r[\underline{x}]^m$ et on remonte les quotients et le reste en respectant les supports. Il est facile de voir que l'itération de ce processus converge et donne les quotients et le reste cherchés. ∎

Soit $\widetilde{L}\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire à coefficients positifs $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{1+n}_+$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme linéaire $L(\alpha) = \widetilde{L}(0, \alpha)$. Notons “ord” la relation de bon ordre total $<_{\widetilde{L}}$ définie dans 2.2.

Notons pour simplifier $R = K[\underline{x}]^\dagger, S = K\langle\underline{x}\rangle$, et pour chaque $s > 1$

$$R_s = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underline{x}^\alpha \in K[[\underline{x}]] \;\middle|\; \lim_{|\alpha| \to +\infty} |f_\alpha| s^{L(\alpha)} = 0 \right\}.$$

On a donc $R_s = T_{nK,\rho_s}$ avec $\rho_s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_n})$, et $R = \cup_{s>1} R_s$. Notons aussi pour simplifier, pour $f \in R_s$,

$$\|f\|_s := \|f\|_{\rho_s} = \max_{\alpha} |f_\alpha| s^{L(\alpha)}.$$

Si $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} f_{j,\alpha} \underline{x}^{j,\alpha}$ est un vecteur de R_s^m, notons en suivant [9],

$$\|\underline{f}\|_s := \max_{(j,\alpha)} |f_{j,\alpha}| s^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)}.$$

Il est clair que cette norme sur R_s^m est équivalente à la norme de Banach $\|\underline{f}\|'_s := \max\limits_j \|f_j\|_s$.

Si $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} f_{j,\alpha} \underline{x}^{j,\alpha} \in R^m$, notons

$$\mathrm{in}(\underline{f}) := f_{j_0,\alpha_0} \underline{x}^{j_0,\alpha_0},$$

où $(j_0, \alpha_0) = \exp(\underline{f}) = \max_{\mathrm{ord}}\{(j,\alpha) \in \mathcal{N}(f) \ \ |f_{j,\alpha}| = \|\underline{f}\|_1\}$.

Lemme 2.3.3. *Si $\underline{f} \in R^m$, il existe un $s_0 > 1$ tel que pour tout $s \in]1, s_0]$ on a la majoration*

$$\|\underline{f} - \mathrm{in}(\underline{f})\|_s < \nu(s) \|\mathrm{in}(\underline{f})\|_s,$$

où $\nu(s) < 1$.

Démonstration. Posons $\underline{f} = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} f_{j,\alpha} \underline{x}^{j,\alpha}$ et $\exp(\underline{f}) = (j_0, \alpha_0)$. On peut supposer que $\|\underline{f}\| = \max_{j,\alpha} |f_{j,\alpha}| = 1$. On a donc $|f_{j,\alpha}| < 1$ si $(j_0, \alpha_0) <_{\mathrm{ord}} (j,\alpha)$. Comme $\underline{f}$ appartient à R^m, il existe un $s_1 > 1$ tel que $|f_{j,\alpha}| s_1^{L(\alpha)} \to 0$ si $|\alpha| \to +\infty$ pour tout $j = 1, \dots, m$. Prenons des constantes $c, C > 0$ telles que $c|\alpha| \le L(\alpha) \le C|\alpha|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et soit N un entier positif tel que si $|\alpha| \ge N$ on a $|f_{j,\alpha}| s_1^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} < \frac{1}{2}$. On peut supposer que $CN > \widetilde{L}(j_0-1, \alpha_0)$.

Comme il y a un nombre fini de (j,α) tels que $(j,\alpha) <_{\mathrm{ord}} (j_0,\alpha_0)$, pour tout $s > 1$ il existe une constante $r_s \in]0,1[$ telle que $|f_{j,\alpha}| s^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} \le s^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} < r_s s^{\widetilde{L}(j_0-1,\alpha_0)}$ pour tout $(j,\alpha) <_{\mathrm{ord}} (j_0,\alpha_0)$.

Comme $|f_{j,\alpha}| \to 0$ si $|\alpha| \to +\infty$ pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe une constante $r' \in]0,1[$ telle que $|f_{j,\alpha}| < r'$ pour tout $(j,\alpha) >_{\mathrm{ord}} (j_0,\alpha_0)$.

Prenons un r'' avec $r' < r'' < 1$. Si $(j,\alpha) >_{\mathrm{ord}} (j_0,\alpha_0)$ et $|\alpha| < N$ alors on a les inégalités :

$$|f_{j,\alpha}| s^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} < r' s^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} \le r' s^{\lambda_0(j-1)+C|\alpha|} < r' s^{\lambda_0(m-1)+CN} < r'' s^{\widetilde{L}(j_0-1,\alpha_0)}$$

si

$$1 < s < s_2 = \left(\frac{r''}{r'}\right)^{\frac{1}{\lambda_0(m-1)+CN-\widetilde{L}(j_0-1,\alpha_0)}}.$$

Si $(j,\alpha) >_{\mathrm{ord}} (j_0,\alpha_0)$ et $|\alpha| \geq N$ alors on a les majorations

$$|f_{j,\alpha}|s^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} = |f_{j,\alpha}|s_1^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} < \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\widetilde{L}(j-1,\alpha)} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}s^{\widetilde{L}(j_0-1,\alpha_0)},$$

pour tout s avec $1 < s < s_1$.

Par conséquent, il suffit de prendre $s_0 = \min\{s_1, s_2\} > 1$, et pour chaque $s \in]1, s_0]$, $\nu(s) = \max\{r_s, r'', \frac{1}{2}\}$. ∎

Nous allons transposer à partir du lemme précédent la démonstration du théorème de division pour les séries convergentes à coefficients complexes de Hauser-Müller [9] au cas des séries ultramétriques. Le cas où le corps des coefficients a une valuation discrète a été traité dans [17].

Gardons les notations du théorème de division 2.3.2.

Théorème 2.3.4. *Soient* $\underline{f}^1, \ldots, \underline{f}^p \in R^m \subset S^m$ *des vecteurs non nuls. Alors, il existe* $s_0 > 1$ *tel que pour tout* $s \in]1, s_0]$ *il existe une constante* $C_s > 0$ *telle que pour chaque* $\underline{g} \in R_s^m \subset S^m$ *les séries* $q_1, \ldots, q_p \in S$ *et le vecteur* $\underline{r} \in S^m$ *uniques tels que*

a) $\underline{g} = \sum_{i=1}^{p} q_i \underline{f}^i + \underline{r}$,

b) $\mathcal{N}(q_i) + \exp(\underline{f}^i) \subseteq \Delta_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, p$,

c) $\mathcal{N}(\underline{r}) \subseteq \overline{\Delta}$,

donnés par le théorème 2.3.2, *vérifient*

1. $q_1, \ldots, q_p \in R_s$ *et* $\underline{r} \in R_s^m$,
2. $\max\{\max_{1\leq i\leq p} \|q_i\|_s \|\underline{f}^i\|_s, \|\underline{r}\|_s\} \leq C_s \|\underline{g}\|_s$.

Démonstration. Posons suivant [9] $\underline{\mu}^i = \mathrm{in}(\underline{f}^i)$, $i = 1, \ldots, p$. Notons

$$\Delta(\underline{f}) = \{\underline{r} \in S^m \mid \mathcal{N}(\underline{r}) \subseteq \overline{\Delta}\},$$

$$\nabla(\underline{f}) = \{\underline{q} \in S^p \mid \mathcal{N}(q_i) + \exp(\underline{f}^i) \subseteq \Delta_i, \forall i = 1, \ldots, p\},$$

et pour chaque $s > 1$,

$$\Delta_s(\underline{f}) = \Delta(\underline{f}) \cap R_s^m, \quad \nabla_s(\underline{f}) = \nabla(\underline{f}) \cap R_s^p.$$

Ce sont des sous-espaces fermés et donc de Banach des espaces de Banach R_s^m et R_s^p respectivement.

Notons $u : \nabla(\underline{f}) \oplus \Delta(\underline{f}) \to S^m$ l'application linéaire continue définie par

$$u(\underline{q}, \underline{r}) = \sum_{i=1}^{p} q_i \underline{f}^i + \underline{r}$$

et $v : \nabla(\underline{f}) \oplus \Delta(\underline{f}) \to S^m$ l'application linéaire continue définie par

$$v(\underline{q}, \underline{r}) = \sum_{i=1}^{p} q_i \underline{\mu}^i + \underline{r}.$$

D'après le théorème 2.3.2, les applications u et v sont bijectives et en vertu du théorème des homomorphismes de Banach ce sont des isomorphismes bicontinus.

Notons pour chaque $s > 1$ suffisamment proche à 1 (tel que $\underline{f}^i \in R_s$ pour tout $i = 1, \ldots, p$) $u_s : \nabla_s(\underline{f}) \oplus \Delta_s(\underline{f}) \to R_s^m$ et $v_s : \nabla_s(\underline{f}) \oplus \Delta_s(\underline{f}) \to R_s^m$ les applications linéaires continues induites par u et v respectivement.

Il est clair par division par des vecteurs monomiaux que les applications v_s sont bijectives et

$$\|v_s(\underline{q}, \underline{r})\|_s = \max\{\|q_i\|_s \cdot \|\underline{\mu}^i\|_s, \|\underline{r}\|_s\},$$

pour $s > 1$ suffisamment proche à 1.

Considérons donc sur l'espace de Banach $\nabla_s(\underline{f}) \oplus \Delta_s(\underline{f})$ la norme équivalente

$$\|(\underline{q}, \underline{r})\|'_s := \max\{\|q_i\|_s \cdot \|\underline{\mu}^i\|_s, \|\underline{r}\|_s\},$$

dans laquelle l'isomorphisme v_s a une norme égale à 1.

Considérons aussi les applications linéaires continues $w_s : \nabla_s(\underline{f}) \oplus \Delta_s(\underline{f}) \to R_s^m$ définies par

$$w_s(\underline{q}, \underline{r}) = \sum_{i=1}^{p} q_i(\underline{f}^i - \underline{\mu}^i).$$

On a $u_s = v_s + w_s$.

Or, d'après le lemme 2.3.3, il existe un $s_0 > 1$ tel que pour tout $s \in]1, s_0]$ et pour tout $i = 1, \ldots, p$ on a $\|\underline{f}^i - \underline{\mu}^i\|_s < \nu(s)\|\underline{\mu}^i\|_s$, avec $\nu(s) < 1$. Ceci entraîne que la norme de l'application w_s est plus petite ou égale à $\nu(s) < 1$, et l'application $u_s = v_s + w_s$ est un isomorphisme topologique, d'où le théorème. ∎

Corollaire 2.3.5. *Les applications quotient et reste :*

$$\mathrm{Quot}_{\underline{f}} : K[x]^{\dagger m} \to (K[x]^{\dagger m})^p, \mathrm{Rest}_{\underline{f}} : K[x]^{\dagger m} \to K[x]^{\dagger m}$$

sont continues pour les topologies $\mathcal{LF}$.

Démonstration. En effet l'ensemble $\{\rho_s, s \in]1, s_0]\}$ est cofinal dans l'ensemble de poly-rayons $\mathcal{P}_n$ et les restrictions

$$\mathrm{Quot}_{\underline{f}}; R_s^m \to (R_s^m)^p, \quad \mathrm{Rest}_{\underline{f}} : R_s^m \to R_s^m$$

sont continues en vertu du théorème 2.3.4. ∎

2.4. Bases de division

Nous allons en déduire de nombreuses conséquences du théorème de continuité de la division précédent. Nous supposons que le corps K est valué complet et ultramétrique. Soit J un sous-module de $A^{\dagger m}_{nK}$ resp. de $(T_{nK})^m$, posons $\exp(J) := \{\exp(f), f \in J, f \neq 0\}$ pour un ordre monomial de $\mathbb{N}^n$. L'ensemble $\exp(J)$ est un idéal (stable par l'action de $\mathbb{N}^n$) de $\mathbb{N}^n \times \{1, \ldots, m\}$. Il existe donc en vertu du lemme de Dickson une base finie $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^d\}$ de $\exp(J)$

$$\exp(J) = \sum_{i=1,\ldots,d} (\alpha^i + \mathbb{N}^n).$$

Définition 2.4.1. *On appelle base de division d'un sous-module J de $A^{\dagger m}_{nK}$ resp. de $(T_{nK})^m$ une famille d'éléments $f^1, ..., f^d$ de J telle que* $\exp(f^i) = \alpha^i$.

Corollaire 2.4.2. *La K-algèbre $A^{\dagger}_{nK}$, resp. T_{nK}, est noethérienne.*

Démonstration. Soit J un idéal de $A^{\dagger}_{nK}$ et $f = (f^1, \ldots, f^d)$ une base de division de J. En vertu du théorème 2.3.4 on peut effectuer la division d'une série g par la base f. Si g est un élément de l'idéal J le reste de la division est nul par construction de la base de division. Donc la base de division f est un système de générateurs. De façon analogue on traite le cas de T_{nK} à partir du théorème 2.3.2. ■

Remarque 2.4.3. La noethérianité de l'algèbre T_{nK} est démontrée par la méthode de Weierstrass dans [3]. La noethérianité de l'algèbre $A^{\dagger}_{nK}$ était connue tout d'abord dans le cas de valuation discrète [5] (voir aussi [19, Prop. (2.2)]) et le cas général a été démontré dans [6] par la méthode de Weierstrass.

Proposition 2.4.4. *Soit J un sous-module de $K[x]^{\dagger m}$, resp. de $(T_{nK})^m$, et $f := (f^1, \ldots, f^d)$ un système de générateurs, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le reste* $\mathrm{Rest}_f(g)$ *de la division de tout élément g de J est nul.*
2) *Le système f est une base de division de J.*
3) *Le reste* $\mathrm{Rest}_f(x^\alpha f^i)$ *de la division pour tout couple α, i est nul.*

Démonstration. Seule l'implication 3) $\Longrightarrow$ 1) pose problème. Soit $g = \sum h_i f^i$ un élément de J. Alors si on pose $h_i = \sum h_{i,\alpha} x^\alpha$ en vertu de la continuité de l'application reste on a :

$$\mathrm{Rest}_f(g) = \lim_{d\to\infty} \left(\sum_{|\alpha|\leq d} \sum_i h_{i,\alpha} \mathrm{Rest}_f(x^\alpha f^i) \right) = 0.$$

■

Corollaire 2.4.5. *Soit J un sous-module de $K[x]^{\dagger m}$ et J^e sont étendu à $(T_{nK})^m$, alors toute base de division de J est une base division de J^e.*

Démonstration. En effet si f est une base de division de J les restes $\mathrm{Rest}_f(x^\alpha f^i)$ de la division dans $K[x]^{\dagger m}$ et dans $(T_{nK})^m$ sont les mêmes et donc tous les deux nuls. En vertu de la partie 3) de la proposition précédente, f est une base de division de l'étendu. ∎

Corollaire 2.4.6. *Pour tout sous-module J de $K[x]^{\dagger m}$ l'application naturelle de $K[x]^{\dagger m}/J$ dans $(T_{nK})^m/J^e$ est injective, autrement dit $K[x]^{\dagger m} \cap J^e = J$.*

Démonstration. En effet un élément g de $K[x]^{\dagger m}$ appartient à J, resp. à son étendu si et seulement si le reste de sa division par une base de division est nul. En vertu du théorème 2.3.4 l'algorithme de division dans $K[x]^{\dagger m}$ est la restriction de l'algorithme de division dans $(T_{nK})^m$ et une base de division de J est aussi une base de division de son étendu. Ceci montre que $J = K[x]^{\dagger m} \cap J^e$. ∎

Remarque 2.4.7. En récopiant les techniques de division dans le cas des anneaux de polynômes on obtient une description d'un système de générateurs des syzygies d'une base de division d'un idéal de $K[x]^\dagger$ ou de T_{nK}, ce qui donne en particulier une preuve de la platitude de l'extension $K[x]^\dagger \subset T_{nK}$. Ceci, joint au corollaire précédent, donne une nouvelle preuve de la fidèle platitude de cette extension (voir [6, prop. 1.5]).

Théorème 2.4.8. *Tout sous-module J de $K[x]^{\dagger m}$, resp. de $(T_{nK})^m$, est fermé pour la topologie $\mathcal{L}F$, resp. pour la norme de Gauss.*

Démonstration. Traitons le cas DMW. Soit $f := (f^1, \ldots, f^d)$ une base de division de J et soit $\sigma : K[x]^{\dagger m} \to J$ définie par $\sigma(g) = \sum_{i=1}^d q_i f^i$, avec $\mathrm{Quot}_f(g) = (q_1, \ldots, q_d)$. On a donc $g = \sigma(g) + \mathrm{Rest}_f(g)$ pour tout $g \in K[x]^{\dagger m}$. D'après le théorème 2.3.4, l'application σ est continue pour la topologie $\mathcal{L}F$, et comme f est une base de division de J on a $J = \{g \in K[x]^{\dagger m} \mid \sigma(g) = g\}$, d'où le résultat. Le cas de l'algèbre de Tate se fait de façon tout à fait analogue a partir du théorème 2.3.2 (voir aussi [3, 5.2.7, cor. 2]). ∎

La topologie quotient d'un espace $\mathcal{LF}$ par un sous-espace fermé est une topologie $\mathcal{LF}$ ([8, chap. IV]). La proposition suivante donne une preuve directe de ce résultat dans le cas d'un sous-module de $K[x]^{\dagger m}$.

Proposition 2.4.9. *Soit J un sous-module de $K[x]^{\dagger m}$ et posons $J_\rho := J \cap (T_{nK,\rho})^m$. Alors l'application naturelle*

$$\varinjlim_{\rho} ((T_{nK,\rho})^m / J_\rho) \to K[x]^{\dagger m}/J$$

est un isomorphisme bicontinu.

Démonstration. On peut remarquer que l'on a les applications continues inverse l'une de l'autre

$$K[x]^{\dagger m}/J = \Big(\varinjlim_{\rho} (T_{nK,\rho})^m\Big)/J \to \varinjlim_{\rho} \Big((T_{nK,\rho})^m/J_\rho\Big) \to K[x]^{\dagger m}/J.$$

■

Remarque 2.4.10. Si dans la proposition précédante $f^1, \ldots, f^d$ est une base de division de J, le théorème 2.3.4 nous permet de conclure l'existence d'un système cofinal de poly-rayons ρ pour lesquels $J_\rho = T_{nK,\rho}(f^1, \ldots, f^d)$.

Définition 2.4.11. *Une algèbre †-adique (de type fini) sur K est un quotient d'une algèbre $K[x_1, \ldots, x_n]^\dagger$, pour un entier $n \geq 0$.*

Définition 2.4.12. *Étant donnée une algèbre †-adique $A^\dagger$ munie d'une présentation $A^\dagger = K[x_1, \ldots, x_n]^\dagger/J$, notons $A^\dagger_\rho = T_{nK,\rho}/J_\rho$, et notons aussi $\|-\|_\rho$ la norme quotient sur $A^\dagger_\rho$. Notons $\|-\|_1$ la norme quotient sur T_{nK}/J^e (ou sur $A^\dagger \subset T_{nK}/J^e$) de la norme de Gauss. La topologie $\mathcal{L}F$ sur $A^\dagger$ est par définition la topologie quotient sur $K[x]^\dagger/J$ de la topologie $\mathcal{L}F$ de $K[x]^\dagger$, qui coïncide avec la topologie limite inductive des $(A^\dagger_\rho, \|-\|_\rho)$, en vertu de la proposition* 2.4.9. *Cette topologie est plus fine que la topologie induite par $\|-\|_1$.*

La topologie induite par $\|-\|_1$ sur une algèbre †-adique (munie d'une présentation) a été étudiée de façon détaillée dans [6, § 1], où on démontre en particulier qu'elle est indépendante de la présentation. La topologie $\mathcal{L}F$ a été aussi considérée dans *loc. cit.*, 4.2 (direct limit topology) et dans [10, 2.3] (fringe topology). Nous donnerons plus tard une nouvelle preuve de l'indépendance de la présentation de la topologie $\mathcal{L}F$ (voir cor. 3.2.4).

3. Propriétés topologiques des algèbres †-adiques de type fini

3.1. Rappels de quelques résultats de la théorie des espaces $\mathcal{L}F$

Nous allons utiliser la théorie de Grothendieck des espaces vectoriels topologiques de type $\mathcal{LF}$ sur un corps valué complet [8] pour étudier la topologie quotient d'une algèbre †-adique de type fini. Nous rappelons deux résultats essentiels de la théorie des espaces vectoriels topologiques de type $\mathcal{LF}$ sur un corps valué complet, le théorème du graphe fermé et le théorème de factorisation. Nous utiliserons ces deux théorèmes de façon essentielle au paragraphe suivant pour démontrer le théorème de symbole total d'un opérateur différentiel p-adique.

Théorème 3.1.1. *Soient un corps valué complet K et F, E deux espaces vectoriels topologiques de type $\mathcal{LF}$ sur K, alors une application K-linéaire entre F et E est* continue si et seulement si son graphe est fermé.

Théorème 3.1.2. *Soit u une application K-linéaire* continue *entre un espace de type $\mathcal{F}$, F et un espace de type $\mathcal{LF}$, E défini par une suite E_i de sous-espaces de type $\mathcal{F}$, alors l'application u se factorise par une application linéaire continue de F sur un espace E_{i_0} pour un certain indice i_0.*

Ces deux théorèmes sont démontrés dans un contexte plus général par Grothendieck dans son cours sur les espaces vectoriels topologiques [8]. Le théorème de factorisation est démontré dans le chapitre (IV, §1, 5.1.2) et le théorème du graphe fermé est démontré dans le chapitre (IV, §1, 5.2). On rappelle qu'un espace topologique de type $\mathcal{F}$ est un espace localement convexe métrique complet.

Remarque 3.1.3. Remarquons que nous n'aurons besoin des deux théorèmes précédents que dans le cas particulier où les espaces en jeu sont des limites inductives d'espaces de Banach ($\mathcal{L}B$). Dans ce cas la preuve du théorème du graphe fermé est plus simple que dans le cas général.

3.2. Propriétés de continuité des morphismes

Nous allons déduire des théorèmes précédents quelques conséquences sur la continuité des morphismes linéaires entre algèbres †-adiques.

Corollaire 3.2.1. *Soit K un corps ultramétrique complet et $u : A^\dagger \to B^\dagger$ une application K-linéaire entre deux algèbres †-adiques de type fini munies de présentations $A^\dagger = K[x_1, \dots, x_m]^\dagger / I$, $B^\dagger = K[y_1, \dots, y_n]^\dagger / J$, qui est continue pour la norme $\|-\|_1$. Alors elle est continue pour la topologie $\mathcal{LF}$ et pour tout $\rho \in \mathcal{P}_m$ il existe un $\rho' = \rho'(\rho) \in \mathcal{P}_n$ tel que $u(A^\dagger_\rho) \subset B^\dagger_{\rho'}$ et il existe une constante $C(\rho)$ telle que*

$$\|u(a)\|_{\rho'} \leq C(\rho)\|a\|_\rho$$

pour tout $a \in A^\dagger_\rho$.

Démonstration. Le graphe de u étant fermé pour les topologies de la norme $\|-\|_1$, il est donc fermé pour les topologies $\mathcal{LF}$. En vertu du théorème du graphe fermé 3.1.1, l'application u est continue pour les topologies $\mathcal{LF}$ et en vertu du théorème de factorisation 3.1.2, l'application continue $A^\dagger_\rho \to A^\dagger \xrightarrow{u} B^\dagger$ se factorise par une application continue $A^\dagger_\rho \xrightarrow{u} B^\dagger_{\rho'}$ et la majoration du corollaire s'en déduit. ■

Les résultats qui suivent traitent les morphismes d'algèbres entre algèbres †-adiques et ne seront pas utilisés dans les paragraphes suivants, où les morphismes concernés seront des opérateurs différentiels.

Une K-algèbre affinoïde est une K-algèbre quotient d'une algèbre de Tate T_{nK}, pour $n \geq 0$. Toute K-algèbre affinoïde munie d'une présentation a une norme quotient $\|-\|_1$, pour laquelle est une K-algèbre de Banach. On rappelle le théorème suivant, qui nous dit en particulier que cette structure de K-algèbre de Banach est indépendante de la présentation ([3, 6.1.3, Thm. 1]) :

Théorème 3.2.2. *Tout morphisme de K-algèbres entre deux K-algèbres affinoïdes munies de présentations est automatiquement continu pour les topologies induites.*

Rappelons aussi ([3, 6.1.5, Thm. 4]) que la K-algèbre $T_{nK,\rho}$, $\rho \in \mathcal{P}_n$, est affinoïde si et seulement si $\rho \in \mathcal{P}'_n$, où

$$\mathcal{P}'_n = \{\rho \in \mathcal{P}_n \mid \rho_i \in |\overline{k}^*|, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Comme $\mathcal{P}'_n$ est un sous-ensemble cofinal de $\mathcal{P}_n$, on déduit que pour tout K-agèbre †-adique de type fini $A^\dagger$, sa topologie $\mathcal{L}F$ est limite inductive de K-algèbres affinoïdes

$$A^\dagger = \varinjlim_{\rho \in \mathcal{P}'_n} A^\dagger_\rho.$$

Corollaire 3.2.3. *Soient deux idéaux $I \subset K[y_1, \dots, y_m]^\dagger$ et $J \subset K[z_1, \dots, z_n]^\dagger$, et $A^\dagger = K[y]^\dagger/I$ et $B^\dagger = K[z]^\dagger/J$ les algèbres quotient. Alors tout morphisme de K-algèbres $u : A^\dagger \to B^\dagger$ est continu pour les topologies $\mathcal{LF}$.*

Démonstration. Notons $B^\wedge = T_{nK}/J^e$, qui est une algèbre affinoïde contenant $B^\dagger$ (voir cor. 2.4.6). Il s'agit de l'algèbre complétée de $B^\dagger$ pour la norme $\|-\|_1$. Le morphisme u induit, pour chaque poly-rayon $\rho \in \mathcal{P}_m$, un morphisme de K-algèbres $A^\dagger_\rho \hookrightarrow A^\dagger \xrightarrow{u} B^\dagger \hookrightarrow B^\wedge$. Pour chaque $\rho \in \mathcal{P}'_m$ l'algèbre $A^\dagger_\rho$ est affinoïde et en vertu du théorème 3.2.2, le morphisme $A^\dagger_\rho \to B^\wedge$ est continu, d'où la continuité de la restriction $u : A^\dagger_\rho \to B^\dagger$ pour la norme $\|-\|_1$ sur $B^\dagger$. En passant à la limite inductive pour $\rho \in \mathcal{P}'_m$ on déduit que u est continue pour la topologie $\mathcal{L}F$ sur $A^\dagger$ et pour la topologie de la norme $\|-\|_1$ sur $B^\dagger$. Son graphe est donc fermé pour ces topologies, et donc il est fermé pour les topologies $\mathcal{L}F$ sur $A^\dagger$ et sur $B^\dagger$. En vertu du théorème du graphe fermé 3.1.1 le morphisme u est continu pour les topologies $\mathcal{LF}$. ■

Corollaire 3.2.4. *Soit $A^\dagger$ une algèbre †-adique de type fini. Alors la topologie $\mathcal{L}F$ induite par une présentation est indépendante de la présentation.*

Démonstration. On applique le corollaire précédent au morphisme identité. ■

Corollaire 3.2.5. *Tout morphisme d'algèbres entre deux algèbres †-adiques de type fini est automatiquement continu pour les topologies $\mathcal{LF}$.*

3.3. Séries surconvergentes à coefficients dans une algèbre †-adique

Dans cette section, K est un corps valué complet ultramétrique et $A^\dagger$ est une K-algèbre †-adique, muni d'une présentation $A^\dagger = K[x_1, \dots, x_m]^\dagger / J$.

Définition 3.3.1. *Une série formelle $a = \sum_\alpha a_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in A^\dagger[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$ est appelée surconvergente s'il existe un poly-rayon $\rho \in \mathcal{P}_m$ et des constantes $C > 0, 0 < \lambda < 1$ tels que $a_\alpha \in A^\dagger_\rho$ et $\|a_\alpha\|_\rho \leq C\lambda^{|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Le sous-ensemble de $A^\dagger[[\underline{\xi}]]$ formé par les séries surconvergentes est noté $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$.*

Dire que la série a est surconvergente est équivalent à dire qu'il existe des poly-rayons $\rho \in \mathcal{P}_m$, $\rho' \in \mathcal{P}_n$, tels que $a_\alpha \in A^\dagger_\rho$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et

$$\lim_{|\alpha| \to +\infty} \|a_\alpha\|_\rho \rho'^\alpha = 0.$$

Il est clair que $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ est une sous-algèbre de $A^\dagger[[\underline{\xi}]]$, et en vertu du théorème de factorisation 3.1.2 on déduit que $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ est indépendante de la présentation choisie de $A^\dagger$.

Lemme 3.3.2. *Dans le cas $A^\dagger = K[\underline{x}]^\dagger$, on a*

$$\left(K[\underline{x}]^\dagger\right)[\underline{\xi}]^\dagger = K[\underline{x}, \underline{\xi}]^\dagger.$$

Démonstration. Soit

$$P = \sum\nolimits_\alpha a^0_\alpha(\underline{x})\, \underline{\xi}^\alpha \in K[[\underline{x}, \underline{\xi}]] \quad \text{et posons} \quad a^0_\alpha = \sum\nolimits_\beta a^0_{\alpha,\beta} \underline{x}^\beta.$$

Si $P \in K[\underline{x}, \underline{\xi}]^\dagger$, il existe deux poly-rayons $\rho \in \mathcal{P}_m, \sigma \in \mathcal{P}_n$ tels que $|a^0_{\alpha,\beta}|\rho^\beta\sigma^\alpha \to 0$ quand $|\alpha|+|\beta| \to \infty$, et donc $a^0_\alpha \in T_{mK,\rho}$ pour tout α. D'autre part, il existe une constante $C > 0$ telle que $|a^0_{\alpha,\beta}|\rho^\beta\sigma^\alpha \leq C$ pour tout α, β. En prenant $\lambda = \max\{\sigma_i^{-1}\}$, on a $\|a^0_\alpha\|_\rho = \max_\beta |a^0_{\alpha,\beta}|\rho^\beta \leq C\lambda^{|\alpha|}$ pour tout α, et $P \in \left(K[\underline{x}]^\dagger\right)[\underline{\xi}]^\dagger$. Réciproquement, supposons que $\|a^0_\alpha\|_\rho \leq C\lambda^{|\alpha|}$. Si l'on note $\tau = (\rho_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \rho_m^{\frac{1}{2}})$, on a $|a^0_{\alpha,\beta}|\tau^\beta\lambda^{-\frac{|\alpha|}{2}} \leq C\tau^{-\beta}\lambda^{\frac{|\alpha|}{2}}$ et donc $P \in K[\underline{x}, \underline{\xi}]^\dagger$. ■

Théorème 3.3.3. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme de K-algèbres $K[\underline{x}, \underline{\xi}]^\dagger / J^e \simeq A[\underline{\xi}]^\dagger$, et donc $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ est aussi une algèbre †-adique.*

Démonstration. Notons π les projections naturelles $K[\underline{x}]^\dagger \to A^\dagger$ et $K[\underline{x}]^\dagger[[\underline{\xi}]] \to A^\dagger[[\underline{\xi}]]$. Si $P = \sum_\alpha a^0_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger$, d'après le lemme 3.3.2 il existe un poly-rayon $\rho \in \mathcal{P}_m$ et deux constantes $C > 0$, $\lambda \in]0,1[$ telles que $a^0_\alpha \in T_{mK,\rho}$ et $\|a^0_\alpha\|_\rho \le C\lambda^{|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Par conséquent $\pi(a^0_\alpha) \in A^\dagger_\rho$ et $\|\pi(a^0_\alpha)\|_\rho \le \|a^0_\alpha\|_\rho \le C\lambda^{|\alpha|}$, d'où $\pi(P) = \sum_\alpha \pi(a^0_\alpha)\underline{\xi}^\alpha$ est un élément de $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$.

On a donc $\pi\left(K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger\right) \subset A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$. Il est clair que la restriction $\pi : K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger \to A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ s'annule sur les éléments de J^e et donc elle induit un homomorphisme de K-algèbres $\overline{\pi} : K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger/J^e \to A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$. Nous allons voir que $\overline{\pi}$ est un isomorphisme.

Avec les notations précédentes, si $\pi(P) = 0$ alors $\pi(a^0_\alpha) = 0$ pour tout α, i.e. $a^0_\alpha \in J$ pour tout α. Prenons une base de division $f = (f^1,\dots,f^d)$ de J. D'après le théorème 2.3.4, il existe un poly-rayon $\varrho \in \mathcal{P}_m$, avec $\rho_i \ge \varrho_i > 1$, et une constante $M > 0$ tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe $q_{j,\alpha} \in T_{mK,\varrho}$, $j = 1,\dots,d$, avec $a^0_\alpha = \sum_j q_{j,\alpha} f^j$ et $\|q_{j,\alpha}\|_\varrho \le M\|a^0_\alpha\|_\varrho$.

On a $P = \sum_\alpha a^0_\alpha \underline{\xi}^\alpha = \sum_j q_j f^j$ avec $q_j = \sum_\alpha q_{j,\alpha}\underline{\xi}^\alpha$. Or, $\|q_{j,\alpha}\|_\varrho \le CM\lambda^{|\alpha|}$ et d'après le lemme 3.3.2 les q_j appartiennent à $K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger$ et donc P est un élément de J. Ceci démontre l'injectivité de $\overline{\pi}$.

Soit maintenant $a = \sum_\alpha a_\alpha \underline{\xi}^\alpha$ un élément de $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$, avec $\|a_\alpha\|_\rho \le C\lambda^{|\alpha|}$ pour tout α. Comme $\|a_\alpha\|_\rho$ est par définition l'inf des $\|a^0_\alpha\|_\rho$ avec $a^0_\alpha \in T_{mK,\rho}$ et $\pi(a^0_\alpha) = a_\alpha$, pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on peut trouver $a^0_\alpha \in T_{nK,\rho}$ avec $\pi(a^0_\alpha) = a_\alpha$ et $\|a^0_\alpha\|_\rho \le \|a_\alpha\|_\rho \lambda^{-\frac{|\alpha|}{2}}$. D'après le lemme 3.3.2 on déduit que $P = \sum_\alpha a^0_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger$ et donc $a = \pi(P) = \overline{\pi}(\overline{P})$, et $\overline{\pi}$ es surjectif. ∎

Remarque 3.3.4. L'algèbre $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ est le coproduit de $A^\dagger$ est de $K[\underline{\xi}]^\dagger$ dans la catégorie des K-algèbres †-adiques de type fini (cf. [10]).

Nous allons considérer maintenant le cas où K est un corps valué discret complet. Notons $V \subset K$ son anneau de valuation discrète, $\mathfrak{m} = (\pi) \subset V$ son idéal maximal et soit $A^\dagger$ une V-algèbre faiblement complète et topologiquement de type fini [16], i.e. $A^\dagger$ est un quotient du complété faible $V[x_1,\dots,x_m]^\dagger$ de l'anneau de polynômes $V[\underline{x}]$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Il est clair que $K[\underline{x}]^\dagger = K \otimes_V V[\underline{x}]^\dagger$ et $V[\underline{x}]^\dagger = K[\underline{x}]^\dagger \cap V[[\underline{x}]]$.

L'algèbre $A^\dagger_K := K \otimes_V A^\dagger = A^\dagger_\pi$ est clairement une K-algèbre †-adique de type fini : à partir d'une présentation $A^\dagger = V[\underline{x}]^\dagger/J$ de $A^\dagger$ on obtient une présentation $A^\dagger_K = K[\underline{x}]^\dagger/J_K$ de $A^\dagger_K$, où $J_K = K \otimes_V J = J_\pi$ est l'idéal étendu.

Supposons l'algèbre $A^\dagger$ munie d'une présentation $A^\dagger = V[\underline{x}]^\dagger/J$ et supposons aussi que $A^\dagger$ n'a pas de V-torsion, ou de façon équivalente, $A^\dagger$ est V-plate. On a donc $A^\dagger \subset A^\dagger_K$ et $J : \pi = \{F \in V[\underline{x}]^\dagger \mid \pi F \in J\} = J$.

Nous pouvons considérer les sous-V-algèbres $A^\dagger_\rho := A^\dagger \cap \left(A^\dagger_K\right)_\rho$ munies des restrictions des normes $\|-\|_\rho$, qui évidemment dépendent de la présentation choisie.

Proposition 3.3.5. *Sous les hypothèses précédentes, une série* $b = \sum_\alpha b_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in A^\dagger[[\underline{\xi}]]$ *appartient au complété faible* $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ *(dans le sens de* [16]*) si et seulement s'il existe un poly-rayon* $\rho \in \mathcal{P}_m$ *et des constantes* $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ *tels que* $b_\alpha \in A^\dagger_\rho$ *et* $\|a_\alpha\|_\rho \leq C\lambda^{|\alpha|}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*. Autrement dit, on a*

$$A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger = A^\dagger_K[\underline{\xi}]^\dagger \cap A^\dagger[[\underline{\xi}]].$$

Démonstration. L'inclusion $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger \subset A^\dagger_K[\underline{\xi}]^\dagger \cap A^\dagger[[\underline{\xi}]]$ est évidente.

Le complété faible $A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$ est le quotient de $V[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger$ par l'idéal étendu J^e, et donc

$$\left(A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger\right)_K \simeq K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger/(J^e)_K = K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger/(J_K)^e \simeq A^\dagger_K[\underline{\xi}]^\dagger$$

en vertu du théorème 3.3.3. Soit $f = (f^1,\dots,f^d)$ une base de division de J_K, dont nous pouvons supposer $f^i \in V[\underline{x}]^\dagger$. Notons $\mathrm{Retr}_f : A^\dagger_K \to K[\underline{x}]^\dagger$ la rétraction de la projection naturelle $K[\underline{x}]^\dagger \to A^\dagger_K$ donnée par $\mathrm{Retr}_f(\overline{g}) = \mathrm{Rest}_f(g)$. Comme $J : \pi = J$ nous déduissons que $J_K \cap V[\underline{x}]^\dagger = J$ et les f^i appartiennent à J. Or, le reste et les quotients d'un élément de $V[\underline{x}]^\dagger$ par des éléments de cet anneau appartiennent aussi à cet anneau, donc un $g \in V[\underline{x}]^\dagger$ appartient à J si et seulement si $\mathrm{Rest}_f(g) = 0$, d'où $\mathrm{Retr}_f(A^\dagger) \subset V[\underline{x}]^\dagger$.

Il est facile à voir que le reste et les quotients d'une série $a = \sum_\alpha a_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger$ par le système $f = (f^1,\dots,f^d)$ s'obtient à partir du reste et des quotients des coefficients, i.e.

$$\mathrm{Rest}_f(a) = \sum_\alpha \mathrm{Rest}_f(a_\alpha)\underline{\xi}^\alpha, \quad \mathrm{Quot}_f(a) = \sum_\alpha \mathrm{Quot}_f(a_\alpha)\underline{\xi}^\alpha.$$

Par conséquent, en vertu de la proposition 2.4.4, f est aussi une base de division de $(J_K)^e$ et pour chaque $b = \sum_\alpha b_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in A^\dagger_K[\underline{\xi}]^\dagger \equiv \left(A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger\right)_K$, on a $\mathrm{Retr}_f(b) = \sum_\alpha \mathrm{Retr}_f(b_\alpha)\underline{\xi}^\alpha \in \left(K[\underline{x}]^\dagger\right)[\underline{\xi}]^\dagger = K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger$.

Si $b = \sum_\alpha b_\alpha \underline{\xi}^\alpha \in A^\dagger_K[\underline{\xi}]^\dagger \cap A^\dagger[[\underline{\xi}]]$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Retr}_f(b) = \sum_\alpha \mathrm{Retr}_f(b_\alpha)\underline{\xi}^\alpha &\in K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger \cap \left(V[\underline{x}]^\dagger\right)[[\underline{\xi}]] \\ &\subset K[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger \cap V[[\underline{x},\xi]] = V[\underline{x},\underline{\xi}]^\dagger\end{aligned}$$

et donc $b \in A^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$. ∎

4. Le faisceau des opérateurs différentiels †-adiques $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$

4.1. Schémas †-adiques

Soient R un anneau commutatif noethérien, I un idéal de R et $\mathcal{X}^{\dagger} := (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R})$ un R-schéma †-adique [15]. On rappelle que $\mathcal{X}^{\dagger} := (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R})$ est un espace annelé tel que tout point admet un voisinage sur lequel l'espace induit est isomorphe à un schéma †-adique affine. Un schéma †-adique affine se construit à partir d'une algèbre $A^{\dagger}$ faiblement complète pour la topologie I-adique de R et topologiquement de type fini [15]. La réduction modulo I^s d'un schéma †-adique $\mathcal{X}^{\dagger} := (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R})$ est un schéma algébrique $X_s := (X, R_s \otimes_R \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R})$ localement de type fini sur $R_s = R/I^s$.

Définition 4.1.1. 1) *On dit que $\mathcal{X}^{\dagger}$ est plat si le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ est un faisceau de R-algèbres plates.*

2) *On dit que $\mathcal{X}^{\dagger}$ est lisse s'il est plat et que le schéma algébrique $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}/I)$ est lisse sur R_1.*

3) *On dit qu'un ouvert affine U de X est un ouvert †-affine si l'espace annelé induit $\mathcal{U}^{\dagger} := (U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}^{\dagger}/R})$ qui est un schéma †-adique est un schéma †-adique affine.*

Il n'est pas du tout évident qu'un ouvert affine est un ouvert †-affine.

4.2. Le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$

Définition 4.2.1. *On définit le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{m}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ d'ordre $m \geq 0$ de l'espace annelé $\mathcal{X}^{\dagger}$ par récurrence sur m comme le sous-faisceau du faisceau des R-endomorphismes $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R})$ du faisceau structural en posant $\mathcal{D}^{0}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R} := \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ et en définissant le faisceau des opérateurs d'ordre $\leq m$, pour $m \geq 1$, comme le sous-faisceau des endomorphismes dont le commutateur avec une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq m-1$. Le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ est le faisceau filtré $\cup_{m \geq 0} \mathcal{D}^{m}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$.*

On rappelle le théorème suivant ([14, théorème A. 16, prop. 4.4.2]) qui est l'analogue †-adique du cas schématique ([7, § 16, 16.11.2]) mais dont la transposition n'est pas immédiate :

Théorème 4.2.2. *Supposant que $\mathcal{X}^{\dagger}$ est lisse sur R. Alors pour tout $m \geq 0$ le faisceau $\mathcal{D}^{m}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$-modules est localement libre de type fini. Plus précisément si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de sections locales du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\dagger}/R}$ au-dessus d'un ouvert affine †-adique et telles que leurs* *différentielles* $(dx_1, \dots, dx_n)$ *forment une base du* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R}$*-module des formes différentielles séparées* $\tilde{\Omega}_{\mathcal{X}^\dagger/R}$*, alors il existe une unique famille d'opérateurs* Δ^α*,* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *caractérisée par les relations* $\Delta^\alpha(x^\beta) = \binom{\beta}{\alpha} x^{\beta-\alpha}$ *et tels que les opérateurs différentiels* $\Delta^\alpha, |\alpha| \leq m$ *forment une base locale du* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R}$*-module (à gauche ou à droite)* $\mathcal{D}^m_{\mathcal{X}^\dagger/R}$*.*

Par construction les ouverts affines ayant la propriété du théorème précédent forment une base de la topologie de X.

4.3. Le faisceau des opérateurs différentiels †-adiques $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/R}$

Rappelons la définition du faisceau des opérateurs différentiels †-adiques d'ordre infini introduit dans les articles ([13], [14]) :

Définition 4.3.1. *On définit le faisceau des opérateurs différentiels* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/R}$ *d'ordre infini de l'espace annelé* $\mathcal{X}^\dagger$ *comme le sous-faisceau du faisceau des* R*-endomorphismes* $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R})$ *du faisceau structural dont la réduction modulo l'idéal* I^s *est un opérateur différentiel sur le* R_s*-schéma algébrique* $X_s := (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R}/I^s)$*,* $R_s := R/I^s$ *et dont l'ordre est localement borné par une fonction linéaire en* s*.*

Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/R}$ est donc par construction un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R}$-algèbres du faisceau des endomorphismes $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R})$ qui contient comme sous faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/R}$-algèbres le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre localement fini $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/R}$.

5. Le Théorème du symbole total d'un opérateur différentiel d'ordre infini

Le théorème fondamental suivant a été obtenu en 1990 mais dont la démonstration n'a pas été publiée :

Théorème 5.1. *Supposant que l'anneau* R *est un anneau de valuation discrète complet* V *d'inégales caractéristiques* $(0, p)$*,* I *est l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *et que* $\mathcal{X}^\dagger$ *est* V*-lisse. Alors si* $(x_1, \dots, x_n)$ *est une famille de sections locales du faisceau* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ *au-dessus d'un ouvert affine* U *au-dessus duquel le †-schéma induit est affine d'algèbre* $A^\dagger := \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ *telles que leurs différentielles* $(dx_1, \dots, dx_n)$ *forment une base locale du* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$*-module des formes différentielles séparées* $\Omega_{\mathcal{X}^\dagger/V}$*, alors tout opérateur différentiel* $P \in D^\dagger_{A^\dagger/V} = \Gamma(U, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ *au-dessus de* U *s'écrit de manière unique*

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^\alpha,$$

où a_α est une suite d'éléments de l'algèbre $A^\dagger$ telle que la série symbole total

$$\sigma_P(a,\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{\xi}^\alpha$$

est un élément de l'algèbre $A^\dagger[\xi_1,\dots,\xi_n]^\dagger$ et les opérateurs différentiels Δ^α sont associés aux coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ par le théorème précédent. De plus les coefficients a_α sont donnés par les égalités :

$$a_\alpha=\sum_{0\le\beta\le\alpha}\tbinom{\alpha}{\beta}(-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta}).$$

Par définition d'un opérateur différentiel $P(x^{\alpha-\beta})$ est un élément de l'algèbre $A^\dagger$ pour tout $\alpha-\beta\ge 0$ et les coefficients $a_\alpha := \sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta})$ qui sont des éléments de l'algèbre $A^\dagger$ pour tout α sont donc déterminés uniquement par l'opérateur P. Il suffit donc de montrer que la série $\sigma_P(x,\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ est un élément de l'algèbre $A^\dagger[\xi_1,\dots,\xi_n]^\dagger$.

Fixons un nombre réel $\varepsilon\in]0,1[$ et la valeur absolue $|-|$ sur le corps K des fractions de l'anneau V donnée par $|c|=\varepsilon^{v_{\mathfrak{m}}(c)}$ (i.e. $\varepsilon=|\pi|$).

Fixons une présentation $A^\dagger = V[Y_1,\dots,Y_m]^\dagger/J$, qui nous fournit une présentation $A_K^\dagger = K[Y_1,\dots,Y_m]^\dagger/J_K$ et une famille exhaustive de K-algèbres normées $\big((A_K^\dagger)_\rho,\|-\|_\rho\big)$, $\rho\in\mathcal{P}_m$. Par l'hypothèse de lissité, $A^\dagger$ est plate sur V et donc $A^\dagger\subset A_K^\dagger$. Notons $A_\rho^\dagger = A^\dagger\cap\big(A_K^\dagger\big)_\rho$.

L'algèbre $A_K^\dagger$ est aussi munie de la norme $\|-\|_{(1,\dots,1)}$ quotient de la norme de Gauss. Par construction les éléments de $A^\dagger$ sont de norme majorée par 1 et en particulier $\|a_\alpha\|_{(1,\dots,1)}\le 1$ pour tout α. Plus généralement, si $a\in\mathfrak{m}^s A^\dagger$, alors $\|a\|_{(1,\dots,1)}\le\varepsilon^s$.

Nous allons d'abord montrer la majoration :

Lemme 5.2. *Sous les hypothèses du thórème 5.1, il existe deux constantes $C_1>0, 0<\lambda_1<1$ telles que l'on ait la majoration pour tout α*

$$\|a_\alpha\|_{(1,\dots,1)}\le C_1\lambda_1^{|\alpha|}.$$

Démonstration. Supposons pour simplifier que $\mathcal{X}^\dagger=U$ est affine et que $(x_1,\dots,x_n)$ est un système global de coordonnées telles que $(dx_1,\dots,dx_n)$ est une base du $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\tilde{\Omega}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$. Alors pour tout $s\ge 1$ leurs réductions modulo $\mathfrak{m}^s$ forment un système de coordonnées $(x_{1,s},\dots,x_{n,s})$ du schéma X_s telles que leurs différentielles $(dx_{1,s},\dots,dx_{n,s})$ sont une base du $\mathcal{O}_{X_s}$-module des formes différentielles Ω_{X_s/V_s}. Les opérateurs Δ^α respectent l'idéal $\mathfrak{m}^s$ et définissent des opérateurs différentiels Δ_s^α sur le schéma X_s et l'on a les égalités $\Delta_s^\alpha(x_s^\beta)=\binom{\alpha}{\beta}x_s^{\alpha-\beta}$. En vertu de [7, § 16, 16.11.2], les opérateurs Δ_s^α forment une base de l'anneau des opérateurs différentiels sur le schéma X_s. En particulier la réduction P_s modulo $\mathfrak{m}^s$ de l'opérateur P est un opérateur d'ordre borné par $C(s+1)$, avec $C > 0$, et on a

$$P_s = \sum_{|\alpha| \leq C(s+1)} a_{\alpha,s} \Delta_s^\alpha$$

où les coefficients $a_{\alpha,s}$ sont données par les égalités :

$$a_{\alpha,s} = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-x_s)^\beta P_s(x_s^{\alpha-\beta}).$$

On trouve que les coefficients $a_{\alpha,s}$ sont les réductions modulo $\mathfrak{m}^s$ des coefficients a_α. Par hypothèse les coefficients a_α appartiennent donc à l'idéal $\mathfrak{m}^s A^\dagger$ pour $|\alpha| > C(s+1)$ et donc $\|a_\alpha\|_{(1,\dots,1)} \leq \varepsilon^s$ pour $|\alpha| > C(s+1)$, ce qui donne l'inégalité $\|a_\alpha\|_{(1,\dots,1)} \leq \varepsilon^{-2+|\alpha|/C}$ pour tout α. Il suffit de prendre $C_1 = \varepsilon^{-2}$ et $\lambda_1 = \varepsilon^{1/C}$. ∎

En vertu du lemme précédent la série $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \xi^\alpha$ appartient au complété $\mathfrak{m}$-adique $A^\wedge\langle\xi\rangle$.

Remarque 5.3. Dans le lemme précédent on peut remplacer le couple $V, \mathfrak{m}$ par un couple R, I et l'on obtient la majoration $v_I(a_\alpha) \geq C(|\alpha|)$ pour une constante $C > 0$ (voir Remarque 7.4).

En vertu de la proposition 3.3.5 le théorème 5.1 est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5.4. *Sous les conditions précédentes, la série* $\sum_\alpha a_\alpha \underline{\xi}^\alpha$ *appartient à* $A_K^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$.

Démonstration. Nous procédons comme dans la preuve de la proposition 3.3.5. Soit $B = (f^1, \dots, f^d)$ une base de division de J_K avec $f^i \in V[\underline{Y}]^\dagger$. Nous savons que B est un système de générateurs de J et que la rétraction $\mathrm{Retr}_B : A_K^\dagger \to K[\underline{Y}]^\dagger$ de la projection naturelle $K[\underline{Y}]^\dagger \to A_K^\dagger$ se restreint à $\mathrm{Retr}_B : A^\dagger \to V[\underline{Y}]^\dagger$. De plus, en vertu du théorème 2.3.2 on a pour tout $g \in A_K^\dagger$ l'égalité des normes [1]

$$\|g\|_{(1,\dots,1)} = \|\,\mathrm{Retr}_B(g)\|_{(1,\dots,1)}$$

et donc $\|g\|_{(1,\dots,1)}$ est égale à la valeur absolue d'un nombre c de K, et il existe $f \in A^\dagger$ avec $g = cf$. L'opérateur P étant V-linéaire, il induit une

1. Autrement dit, tout idéal d'une algèbre de Tate ou de Dwork-Monsky-Washnitzer est strictement fermé pour la norme de Gauss (cf. [3, 1.1.5]).

application $A_K^\dagger \to A_K^\dagger$ que nous notons encore P. Comme P opère sur la V-algèbre $A^\dagger$ l'on a les inégalités

$$\|P(g)\|_{(1,\dots,1)} = |c|.\|P(f)\|_{(1,\dots,1)} \leq |c| = \|g\|_{(1,\dots,1)}$$

et donc l'opérateur P est continu pour la 1-norme.

On peut appliquer le corollaire 3.2.1 à $P : A_K^\dagger \to A_K^\dagger$. La restriction de l'opérateur P à chaque espace $\left(A_K^\dagger\right)_\rho$, $\rho \in \mathcal{P}_m$, se factorise à travers d'applications linéaires continues $\left(A_K^\dagger\right)_\rho \to \left(A_K^\dagger\right)_{\rho'}$ pour des poly-rayons $\rho' \in \mathcal{P}_m$ assez petits, qu'on peut toujours supposer majorés par ρ. En particulier il existe une constante $C(\rho) > 0$ telle que l'on ait la majoration $\|P(f)\|_{\rho'} \leq C(\rho)\|f\|_\rho$ pour tout élément f de $\left(A_K^\dagger\right)_\rho$ et pour tout $\rho' \in \mathcal{P}_m$ assez petit.

En vertu du lemme 5.5, il existe un poly-rayon $\rho_0 \in \mathcal{P}_m$ et un entier $l > 0$ tels que pour tout $\rho \in \mathcal{P}_m$ avec $\rho \leq \rho_0$ on a $\|x_i\|_\rho \leq \rho^l, \quad i = 1, \dots, n$. Par conséquent $\|x^\alpha\|_\rho \leq \rho^{l|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $\rho \in \mathcal{P}_m$, $\rho \leq \rho_0$.

Les coefficients a_α sont définis par les égalités :

$$a_\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}(-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta})$$

qui montrent que pour tout $\rho \in \mathcal{P}_m$, $\rho \leq \rho_0$, et pour tout ρ' assez petit et majoré par ρ on a

$$(*) \quad \|a_\alpha\|_{\rho'} \leq \max_\beta \|(-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta})\|_{\rho'} \leq \max_\beta \rho^{l|\beta|} C(\rho) \|x^{\alpha-\beta}\|_\rho \leq C(\rho)\rho^{l|\alpha|}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

En vertu du lemme 5.2 il existe deux constantes $C_1 > 0, 0 < \lambda_1 < 1$ telles que l'on ait la majoration $\|a_\alpha\|_{(1,\dots,1)} \leq C_1 \lambda_1^{|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Prenons un $\rho \leq \rho_0$ tel que $\lambda_1 \rho^l < 1$. La majoration $(*)$ est donc satisfaite pour tout ρ' assez petit et majoré par ρ.

D'après le théorème 2.3.4, il existe un sous-ensemble cofinal $\Sigma \subset \mathcal{P}_m$ tel que la rétraction $\mathrm{Retr}_B : A_K^\dagger \to K[\underline{Y}]^\dagger$ induit des applications continues

$$\mathrm{Retr}_B : \left(A_K^\dagger\right)_{\rho'} \to T_{mK,\rho'},$$

avec $\|a\|_{\rho'} \leq \|\mathrm{Retr}_B(a)\|_{\rho'} \leq C'(\rho')\|a\|_{\rho'}$, $C'(\rho') > 0$, pour tout $a \in \left(A_K^\dagger\right)_{\rho'}$ et pour tout $\rho' \in \Sigma$. D'après le théorème 2.3.2 on a aussi $\|a\|_{(1,\dots,1)} = \|\mathrm{Retr}_B(a)\|_{(1,\dots,1)}$ pour tout $a \in A_K^\dagger$.

Par conséquent,

$$(**) \qquad \|\mathrm{Retr}_B(a_\alpha)\|_{(1,\dots,1)} \leq C_1 \lambda_1^{|\alpha|}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour un $\rho' \in \Sigma$ assez petit et majoré par ρ, on a en vertu de la majoration $(*)$

$$(***) \qquad \| \operatorname{Retr}_B(a_\alpha)\|_{\rho'} \leq C_2 \rho^{l|\alpha|}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, avec $C_2 = C(\rho)C'(\rho')$.

Si on écrit

$$\operatorname{Retr}_B(a_\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,\beta} \underline{Y}^\beta,$$

les majorations (**) donnent les majorations $|a_{\alpha,\beta}| \leq C_1 \lambda_1^{|\alpha|}$ pour tous α, β et les majorations (***) donnent les majorations $|a_{\alpha,\beta}| \leq C_2 \rho'^{-\beta} \rho^{l|\alpha|}$ pour tous α, β. En faisant le produit des deux majorations précédentes on trouve les majorations :

$$(****) \qquad |a_{\alpha,\beta}| \leq C_1^{1/2} C_2^{1/2} \rho'^{-\beta/2} \lambda_1^{|\alpha|/2} \rho^{l|\alpha|/2}$$

pour tous α, β, et comme $\lambda_1 \rho^l < 1$, on déduit que la série $\sum a_{\alpha,\beta} \underline{Y}^\beta \underline{\xi}^\alpha$ est un élément de l'algèbre $K[Y_1, \ldots, Y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n]^\dagger$ dont la réduction modulo $(J_K)^e$ est la série $\sigma_P(a, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{\xi}^\alpha$, qui est donc bien un élément de l'algèbre $A_K^\dagger[\underline{\xi}]^\dagger$. D'où le lemme 5.4. ■

Lemme 5.5. *Étant donnée une série*

$$h = \sum_\beta h_\beta \underline{Y}^\beta \in V[Y_1, \ldots, Y_m]^\dagger \cap T_{mK,\rho_0},$$

il existe un entier $l > 0$ tel que pour tout ρ avec $\rho \leq \rho_0$, on a $\|h\|_\rho \leq \rho^l$ (où $\rho^l := \prod_i \rho_i^l$).

Démonstration. Comme la limite de $|h_\beta| \rho_0^\beta$ s'annule pour $|\beta| \to \infty$, il existe un entier $l > 0$ tel que $|h_\beta| \rho_0^\beta \leq 1$ pour $|\beta| > l$. Il est clair que pour tout $\rho \in \mathcal{P}_m$ avec $\rho \leq \rho_0$ on a

$$\|h\|_\rho \leq \max\{1, \max_{|\beta| \leq l} \rho^\beta\} \leq \rho^l.$$

■

Remarque 5.6. Considérons le morphisme $V[X_1, \ldots, X_n]^\dagger \to A^\dagger$ qui envoie $X_i \mapsto x_i$ et le morphisme induit $K[X_1, \ldots, X_n]^\dagger \to A_K^\dagger$ qui est continu, d'où en utilisant le théorème de factorisation 3.1.2 on trouve les majorations

$$||x^\alpha||_{\rho'} \leq C'(\rho) \rho^\alpha$$

pour tout $\rho \in \mathcal{P}_n$ et pour tout ρ' assez proche de $(1, \ldots, 1)$. Ceci peut être utilisé dans la preuve du lemme 5.4 au lieu de la majoration $||x^\alpha||_\rho \leq \rho^{l|\alpha|}$, dont la démonstration est plus élémentaire.

6. Le Théorème de l'opérateur différentiel d'un symbole total

En vertu du théorème 5.1 un opérateur différentiel P d'ordre infini est égal à la série

$$P(a,\Delta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^\alpha$$

puisque que

$$P(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^\alpha(f)$$

modulo $\mathfrak{m}^s$ pour tout $s \geq 1$ et pour toute section locale f de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ sur un ouvert $U' \subset U$. Réciproquement :

Théorème 6.1. *Supposons que l'anneau $R = V$ est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $p > 0$, $I = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal et que le $\dagger$-schéma $\mathcal{X}^\dagger$ est V-lisse. Alors si $(x_1,\ldots,x_n)$ est une famille de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ au-dessus d'un ouvert $\dagger$-affine U d'algèbre $A^\dagger := \Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ telles que leurs différentielles $(dx_1,\ldots,dx_n)$ forment une base locale du $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\Omega_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ et a_α est une suite d'élément de l'algèbre $A^\dagger$ telle la série*

$$P(a,\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \xi^\alpha$$

est un élément de l'algèbre $A^\dagger[\xi_1,\ldots,\xi_n]^\dagger$, alors la série

$$P(a,\Delta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^\alpha$$

est un opérateur différentiel d'ordre infini, en particulier opère sur l'algèbre $A^\dagger$.

Il est évident que si f est un élément de l'algèbre $A^\dagger$ la série $P(a,\Delta)(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^\alpha(f)$ converge formellement vers un élément de $A^\wedge$. Il faut montrer alors que la série formelle $P(f)$ est un élément de l'algèbre $A^\dagger$ et c'est là le problème.

Notation 6.2. Pour un entier $j \geq 0$ et $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ un multi-indice notons $\left(\Delta^{p^j}\right)^\gamma$ l'opérateur différentiel :

$$\left(\Delta^{p^j}\right)^\gamma := \left(\Delta_1^{p^j}\right)^{\gamma_1} \cdots \left(\Delta_n^{p^j}\right)^{\gamma_n},$$

où $\Delta_i^m = \Delta^{(0,\ldots,\overset{i}{m},\ldots,0)}$.

Si $V[Y_1,\ldots,Y_m]^\dagger \xrightarrow{q} A^\dagger = V[\underline{Y}]^\dagger/J \to 0$ est une présentation notons $y_1,\ldots,y_m$ les générateurs faibles de l'algèbre $A^\dagger$, images des Y_i. Notons aussi $K[\underline{Y}]^\dagger \xrightarrow{q} A_K^\dagger \to 0$ la présentation iduite de $A_K^\dagger = K\otimes_V A^\dagger$. Si on procède comme dans la preuve du lemme 5.4, on trouve une base de division B de J_K, avec $B\subset J$, et un sous-ensemble cofinal $\Sigma\subset\mathcal{P}_m$ tels que la rétraction $\operatorname{Retr}_B : A_K \to K[\underline{Y}]^\dagger$ de q induit $\operatorname{Retr}_B : (A_K)_\rho \to T_{mK,\rho}$ et $\operatorname{Retr}_B : A_\rho \to V[\underline{Y}]^\dagger\cap T_{mK,\rho}$ pour $\rho\in\Sigma$, avec $\|a\|_\rho \le \|\operatorname{Retr}_B(a)\|_\rho \le C(\rho)\|a\|_\rho$, $C(\rho)>0$, pour tout $a\in (A_K)_\rho$ et pour tout $\rho\in\Sigma$, et en vertu du lemme 5.5, pour chaque $f\in A_{\rho_0}$ il existe un entier $l>0$ tel que

$$\|f\|_\rho \le \|\operatorname{Retr}_B(f)\|_\rho \le \rho^l \tag{6.1}$$

pour tout $\rho\in\Sigma$, $\rho\le\rho_0$.

Lemme 6.3. *La présentation de l'algèbre $A^\dagger$ étant donnée, soit $\rho''\in\mathcal{P}_m$ tel que les éléments $\partial_i(y_l), 1\le l\le m, 1\le i\le n$ appartiennent à $A^\dagger_{\rho''}$. Alors pour tout $\rho\in\mathcal{P}_m$ avec $\rho\le\rho''$, l'algèbre $A^\dagger_\rho$ est stable par les opérateurs ∂_i et donc par tous les opérateurs $\Delta^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\alpha!}$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$.*

Démonstration. En effet, soit $\rho\in\mathcal{P}_m$ avec $\rho\le\rho''$ et soit $f\in A^\dagger_{K,\rho}$. Prenons un $F\in T_{mK,\rho}$ avec $f=q(F)$. On a $\partial_i(f)=\sum_{l=1}^m q\left(F'_{Y_l}\right)\partial_i(y_l)$ et donc $\partial_i(f)\in A^\dagger_{K,\rho}$ car $T_{mK,\rho}$ est stable par les dérivées partielles par rapport aux Y_l. L'algèbre $A^\dagger_{K,\rho}$ est alors stable par tous les opérateurs $\Delta^\alpha=\frac{\partial^\alpha}{\alpha!}$, mais $\Delta^\alpha(A^\dagger)\subset A^\dagger$ et donc l'algèbre $A^\dagger_\rho = A^\dagger\cap A^\dagger_{K,\rho}$ est aussi stable par les Δ^α. ■

Prenons une fois pour toutes un $\rho''\in\mathcal{P}_m$ comme dans le lemme précédent. Nous pouvons supposer $\rho''\in\Sigma$ et que les poly-rayons de Σ sont tous majorés par ρ'' et donc $\Delta^\alpha(A^\dagger_\rho)\subset A^\dagger_\rho$ pour tout $\rho\in\Sigma$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$.

Théorème 6.4. *La présentation de l'algèbre $A^\dagger$ étant donnée, il existe une suite croissante d'entiers $D(h)\ge 0$, pour $h\ge 0$, tel que pour tout $h\ge 0$, pour tout poly-rayon $\rho'\in\Sigma$, pour tout élément $F\in T_{mK,\rho'}\cap V[\underline{Y}]^\dagger$ et pour toute famille des multi-indices $\gamma^0,\ldots,\gamma^h\in\mathbb{N}^n$, il existe $F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h}\in T_{mK,\rho'}\cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que*

$$\left(\Delta^{p^0}\right)^{\gamma^0}\ldots\left(\Delta^{p^h}\right)^{\gamma^h}(q(F)) = q(F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h}) \quad \textit{et}$$
$$\|F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h}\|_\rho \le \|F\|_\rho \rho^{D(h)(\sum_{0\le j\le h}|\gamma^j|p^j)}$$

pour tout $\rho\in\Sigma$, $\rho\le\rho'$.

Démonstration. D'après (6.1), pour chaque entier $h\ge 0$, il existe un entier $D(h)>0$ tel que l'on ait la majoration $\|\operatorname{Retr}_B(\Delta_i^{p^j}(y_\ell))\|_\rho \le \rho^{D(h)}$ pour tout $\rho\in\Sigma$, $1\le\ell\le m, 1\le i\le n, 0\le j\le h$. On a de façon évidente $D(0)\le\ D(1)\le\cdots$. Pour démontrer le théorème nous allons raisonner par récurrence sur l'entier $h\ge 0$.

Si $h=0$, $\left(\Delta^{p^0}\right)^{\gamma^0}=\left(\Delta^1_1\right)^{\gamma^0_1}\dots\left(\Delta^1_n\right)^{\gamma^0_n}$ et les opérateurs Δ^1_i sont des dérivations. Pour $\gamma^0=0$ le résultat est trivialement vrai. Si le résultat est vrai pour un γ^0 il est aussi vrai pour $'\gamma^0=\gamma^0+(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)$ car

$$\left(\Delta^{p^0}\right)^{'\gamma^0}(q(F))=\Delta^1_i(q(F_{\gamma^0}))=\sum_{\ell=1}^{m} q\left((F_{\gamma^0})'_{Y_\ell}\right)\Delta^1_i(y_\ell)$$

et il suffit de prendre $F_{'\gamma^0}=\sum_{\ell=1}^{m}(F_{\gamma^0})'_{Y_\ell}\operatorname{Retr}_B(\Delta^1_i(y_\ell))$ avec

$$\|F_{'\gamma^0}\|_\rho\le\max_\ell\left\|(F_{\gamma^0})'_{Y_\ell}\right\|_\rho\rho^{D(0)}\le\|F_{\gamma^0}\|_\rho\rho^{D(0)}\le\|F\|_\rho\rho^{D(0)|'\gamma^0|}.$$

Supposons la majoration du théorème vérifiée pour $h-1\ge 0$.

On commence par démontrer que pour chaque $i=1,\dots,n$ et pour chaque $\beta\in\mathbb{N}^m$ il existe $H_{i,\beta}\in T_{mK,\rho''}\cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que $\Delta^{p^h}_i(y^\beta)=q(H_{i,\beta})$ et $\|H_{i,\beta}\|_\rho\le\rho^\beta\rho^{D(h)p^h}$ pour tout $\rho\in\Sigma$. On procède par récurrence sur la longueur $|\beta|$. Si cette longueur est nulle, le résultat est clair.

Supposons le résultat vrai pour un β' et prenons $\beta=\beta'+(0,\dots,\overset{j}{1},\dots,0)$. On a alors en vertu de la formule de Leibniz

$$\Delta^{p^h}_i(y^\beta)=\Delta^{p^h}_i(y_jy^{\beta'})=\sum_{0\le k\le p^h}\Delta^{p^h-k}_i(y_j)\Delta^k_i(y^{\beta'}).$$

Pour $1\le k\le p^h-1$, on écrit $k=a_0+\dots+a_{h-1}p^{h-1}$ avec $0\le a_r\le p-1$, $0\le r\le h-1$. On a l'égalité d'opérateurs différentiels :

$$\Delta^k_i=u_k\left(\Delta^{p^0}_i\right)^{a_0}\dots\left(\Delta^{p^{h-1}}_i\right)^{a_{h-1}}$$

où u_k est un nombre rationnel qui est une unité p-adique.

L'hypothèse de récurrence sur la majoration du théorème appliquée à $h-1$ montre que pour $1\le k\le p^h-1$ il existe $G_k\in T_{mK,\rho''}\cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que

$$\Delta^{p^h-k}_i(y_j)\Delta^k_i(y^{\beta'})=q(G_k)\quad\text{et}\quad\|G_k\|_\rho\le\rho^\beta\rho^{D(h-1)p^h}\ \forall\rho\in\Sigma.$$

L'hypothèse de récurrence sur la longueur appliquée à $|\beta'|$ montre qu'il existe $H_{i,\beta'}\in T_{mK,\rho''}\cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que $\Delta^{p^h}_i(y^{\beta'})=q(H_{i,\beta'})$ et $\|H_{i,\beta'}\|_\rho\le\rho^{\beta'}\rho^{D(h)p^h}$ pour tout $\rho\in\Sigma$. Par conséquent, $y_j\Delta^{p^h}_i(y^{\beta'})=q(Y_jH_{i,\beta'})$ et l'on a la majoration $\|Y_jH_{i,\beta'}\|_\rho\le\rho^\beta\rho^{D(h)p^h}$ pour tout $\rho\in\Sigma$.

Pour conclure, il suffit de prendre

$$H_{i,\beta}=\operatorname{Retr}_B(\Delta^{p^h}_i(y_j))\underline{Y}^{\beta'}+\left(\sum_{k=1}^{p^h-1}G_k\right)+Y_jH_{i,\beta'}.$$

On a $q(H_{i,\beta}) = \Delta_i^{p^h}(y^\beta)$ et

$$\|H_{i,\beta}\|_\rho \leq \max\{\rho^{D(h)}\rho^{\beta'}, \rho^\beta\rho^{D(h-1)p^h}, \rho^\beta\rho^{D(h)p^h}\} = \rho^\beta\rho^{D(h)p^h}$$

pour tout $\rho \in \Sigma$.

Par suite si $F = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m} b_\beta \underline{Y}^\beta \in T_{mK,\rho'} \cap V[\underline{Y}]^\dagger$, en posant $F_i = \sum_\beta b_\beta H_{i,\beta}$ on trouve

$$\Delta_i^{p^h}(F) = q(F_i), \quad \|F_i\|_\rho \leq \|F\|_\rho \rho^{D(h)p^h} \ \forall \rho \in \Sigma, \rho \leq \rho'.$$

Si on repète l'argument précédent, on trouve que pour chaque multi-indice $\gamma^h \in \mathbb{N}^n$ il existe $F_{\gamma^h} \in T_{mK,\rho'} \cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que

$$\left(\Delta^{p^h}\right)^{\gamma^h}(q(F)) = q(F_{\gamma^h}), \quad \|F_{\gamma^h}\|_\rho \leq \|F\|_\rho \rho^{D(h)|\gamma^h|p^h} \ \forall \rho \in \Sigma, \rho \leq \rho'.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence sur la majoration du théorème à $h-1$ on trouve pour tous multi-indices $\gamma^0, \ldots, \gamma^{h-1}$, l'existence d'un $(F_{\gamma^h})_{\gamma^0,\ldots,\gamma^{h-1}} \in T_{mK,\rho'} \cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que

$$\left(\Delta^{p^0}\right)^{\gamma^0} \ldots \left(\Delta^{p^{h-1}}\right)^{\gamma^{h-1}} \left(q(F_{\gamma^h})\right) = q((F_{\gamma^h})_{\gamma^0,\ldots,\gamma^{h-1}}) \quad \text{et}$$

$$\|(F_{\gamma^h})_{\gamma^0,\ldots,\gamma^{h-1}}\|_\rho \leq \|F_{\gamma^h}\|_\rho \rho^{D(h-1)(\sum_{0\leq j\leq h-1}|\gamma^j|p^j)}$$

pour tout $\rho \in \Sigma$, $\rho \leq \rho'$. On conclut en prenant $F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h} = (F_{\gamma^h})_{\gamma^0,\ldots,\gamma^{h-1}}$. ■

Corollaire 6.5. *La présentation de l'algèbre $A^\dagger$ étant donnée, il existe une suite croissante d'entiers $D(h) \geq 0$, pour $h \geq 0$, tel que pour tout poly-rayon $\rho \in \Sigma$, pour tout $h \geq 0$, pour tous les multi-indices $\gamma^0, \ldots, \gamma^h \in \mathbb{N}^n$ et pour tout élément $f \in A_\rho^\dagger$ on a la majoration*

$$\|(\Delta^{p^0})^{\gamma^0} \ldots (\Delta^{p^h})^{\gamma^h}(f)\|_\rho \leq C(\rho)\|f\|_\rho \rho^{D(h)(|\gamma^0|+\cdots+|\gamma^h|p^h)}.$$

Démonstration. Prenons les $D(h)$ du théorème 6.4 et soit $F = \mathrm{Retr}_B(f) \in T_{mK,\rho} \cap V[\underline{Y}]^\dagger$. Nous savons qu'il existe $F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h} \in T_{mK,\rho} \cap V[\underline{Y}]^\dagger$ tel que

$$\left(\Delta^{p^0}\right)^{\gamma^0} \ldots \left(\Delta^{p^h}\right)^{\gamma^h}(f) = q(F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h}) \quad \text{et}$$

$$\|F_{\gamma^0,\ldots,\gamma^h}\|_\rho \leq \|F\|_\rho \rho^{D(h)(\sum_{0\leq j\leq h}|\gamma^j|p^j)}.$$

Comme $\|\mathrm{Retr}_B(f)\|\rho \leq C(\rho)\|f\|_\rho$, on trouve la majoration cherchée. ■

Démonstration du théorème 6.1. Il résulte de l'hypothèse sur la suite a_α que la réduction modulo l'idéal $\mathfrak{m}^s$ de la série P est un opérateur différentiel dont l'ordre est borné par une fonction linéaire en s. D'autre part la série P opère de façon évidente sur l'algèbre $\hat{A}$ complétée $\mathfrak{m}$-adique de l'algèbre $A^\dagger$. Reste à montrer que $P(f)$ est un élément de l'algèbre $A^\dagger$ si f est un élément de l'algèbre $A^\dagger$.

Comme la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \xi^\alpha$ est un élément de l'algèbre $A^\dagger[\xi_1,\ldots,\xi_n]^\dagger$, il existe un poly-rayon ρ^0 et deux constantes $C'>0, 0<\lambda<1$ tels que les éléments a_α appartiennent à l'algèbre $A^\dagger_{\rho 0}$ et l'on a la majoration :

$$\|a_\alpha\|_{\rho^0} \le C'\lambda^{|\alpha|}.$$

Choisissons un entier $h\ge 0$ tel que $\lambda < p^{-1/p^h(p-1)} < 1$. Quitte à faire une extension finie de V, ce qui est loisible, on peut supposer que V contient $\pi_h := \pi^{1/p^h}$ où $\pi^{p-1}+p=0$. Pour un multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ définissons les multi-indices $\beta^0,\ldots,\beta^h$ en posant

$$\alpha_i = \beta_i^0 + \beta_i^1 p + \ldots \beta_i^h p^h$$

où β_i^h est le quotient de la division de α_i par p^h et les β_i^j sont bornés par $p-1$ pour $0\le j\le h-1$.

Lemme 6.6. *Pour tout multi-indice α on a la majoration*

$$|\pi_h|^{|\alpha|}|p!|^{|\beta^1|}\ldots|p^h!|^{|\beta^h|}/|\alpha!| \le 1.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la valuation p-adique de

$$\frac{(p!)^{|\beta^1|}\ldots(p^h!)^{|\beta^h|}}{\alpha!}$$

est minorée par $-|\alpha|/p^h(p-1)$ et ceci est une conséquence directe de la définition des multi-indices β à partir des multi-indices α. ∎

Pour montrer que la série $P(a,\Delta)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\Delta^\alpha$ opère sur l'algèbre $A^\dagger$ il suffit de montrer que la série

$$P(a,\Delta,\ldots,\Delta^{p^h}) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \frac{(p!)^{|\beta^1|}\ldots(p^h!)^{|\beta^h|}}{\alpha!}(\Delta)^{\beta^0}\ldots(\Delta^{p^h})^{\beta^h}$$

opère sur l'algèbre $A^\dagger$. Rappelons qu'on a posé pour un multi-indice $\beta^j = (\beta_1^j,\ldots,\beta_n^j)$

$$(\Delta^{p^j})^{\beta^j} := (\Delta_1^{p^j})^{\beta_1^j}\ldots(\Delta_n^{p^j})^{\beta_n^j}.$$

Étant donné un $f\in A^\dagger$, prenons un poly-rayon ρ^1 tel que $f\in A^\dagger_{\rho^1}$, que nous pouvons supposer majoré par ρ^0. Mais l'entier $h\ge 0$ étant fixé il existe en vertu du corollaire 6.5 un entier $D(h)\ge 0$ tel que pour tout $\rho\in\Sigma$, $\rho\le\rho^1$, on ait la majoration

$$\begin{aligned}\|a_\alpha\Delta^\alpha(f)\|_\rho &= \left\| a_\alpha \frac{(p!)^{|\beta^1|}\ldots(p^h!)^{|\beta^h|}}{\alpha!}(\Delta^{p^0})^{\beta^0}\ldots(\Delta^{p^h})^{\beta^h}(f)\right\|_\rho \\ &\le C(\rho)|\pi_h|^{-|\alpha|}\|a_\alpha\|_\rho \rho^{D(h)(|\beta^0|+\cdots+|\beta^h|p^h)}\|f\|_\rho \\ &\le C(\rho)C'\left(\frac{\lambda}{p^{-1/p^h(p-1)}}\right)^{|\alpha|}\rho^{D(h)|\alpha|}\|f\|_\rho\end{aligned}$$

qui montre que la série $P(a,\Delta)(f)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \Delta^\alpha(f)$ converge dans l'algèbre $(A_K^\dagger)_\rho$ pour $\rho\in\Sigma$ assez petit et donc dans $A_K^\dagger$. ■

En fait on a montré le résultat suivant que nous utiliserons dans l'article [12] :

Théorème 6.7. *Sous les conditions du théorème* 6.1 *pour tout élement f de $A^\dagger$ il existe un poly-rayon $\rho\in\mathcal{P}_m$ assez petit tel que*

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \|a_\alpha \Delta^\alpha(f)\|_\rho = 0.$$

Remarque 6.8. 1) Nous ignorons si l'on peut montrer que pour toute algèbre $A^\dagger$ il existe une majoration du type

$$\|\Delta^\alpha(f)\|_{(\rho',\dots,\rho')} \leq C_{\rho',\rho}\rho^{l|\alpha|}||f||_{(\rho,\dots,\rho)}$$

pour $\rho>1$ assez près de 1, $1<\rho'\leq\rho$ et une constante $l\geq 1$ pour tout α, ou même si pour tout $\mu>1$ et tout $\rho\in\mathcal{P}_m$ il existe un $\rho'\in\mathcal{P}_m$ et une constante $M>0$ tels que

$$\|\Delta^\alpha(f)\|_{\rho'} \leq M\mu^{|\alpha|}\|f\|_\rho \quad \forall f\in A_\rho^\dagger.$$

2) Ce problème est lié au suivant. Soit A une R-algèbre de type fini lisse munie de coordonnées globales $x_1,\dots,x_n$ et $R[Y_1,\dots,Y_m]\to A\to 0$ une présentation de A. Si f est un élément de A, est-ce qu'on peut donner une borne du degré d'un représentant de $\Delta_x^\alpha(f)$, par exemple le reste de la division par une base de division quand la division est possible, en fonction de $|\alpha|$ et du degré d'un représentant de f. C'est le cas du localisé d'une algèbre de polynômes par un polynôme. Il faut donc étudier de ce point de vue l'extension étale du localisé d'une algèbre de polynômes à une algèbre lisse.

7. Trivialité cohomologique du faisceau des opérateurs différentiels p-adiques

Nous allons en déduire l'acyclicité du faisceau des opérateurs différentiels au-dessus d'un ouvert affine assez petit.

Corollaire 7.1. *Supposons que l'anneau R est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $p>0$, V, I est l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que $\mathcal{X}^\dagger$ est V-lisse. Alors si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ au-dessus d'un ouvert $\dagger$-affine U d'algèbre $A^\dagger:=\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ telles que leurs différentielles $(dx_1,\dots,dx_n)$ forment une* *base locale du $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\Omega_{\mathcal{X}^\dagger/V}$, l'application symbole total qui à un opérateur différentiel $P(a,\Delta)$ associe son symbole total*

$$\sigma_P(a,\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \xi^\alpha$$

est un isomorphisme de $A^\dagger$-modules à gauche entre $\Gamma(U,\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ et $A^\dagger[\xi_1...\xi_n]^\dagger$.

Démonstration. C'est une conséquence des théorèmes 5.1 et 6.1. ∎

Corollaire 7.2. *Sous les hypothèses du corollaire précédent, si q désigne la projection du fibré cotangent $T^*U := \operatorname{Spec} A_1[\xi_1,\dots,\xi_n]$ sur U, où A_1 est la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de $A^\dagger$, l'isomorphisme du corollaire précédent se localise en un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V}$-modules sur U :*

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V} \simeq q_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}^*\mathcal{U}^\dagger}.$$

Démonstration. Soit $W = U_{\overline{f}}$ ($\overline{f} \in A_1$) un ouvert principal de U. C'est encore un ouvert †-affine d'algèbre $(A^\dagger_f)^\dagger$, où $f \in A^\dagger$ est un rélèvement de $\overline{f}$ [15]. Alors en vertu de [14], appendice corollaire A.12, les différentielles $(dx_1,\dots,dx_n)$ forment encore une base au-dessus de W du $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\tilde{\Omega}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$. D'où en vertu du corollaire précédent on a un isomorphisme

$$\Gamma(W,\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\dagger/V}) \simeq \left(A^\dagger_f\right)^\dagger[\xi_1,\dots,\xi_n]^\dagger$$

qui est compatible aux restrictions. D'où le corollaire. ∎

Théorème 7.3. *Supposons que l'anneau R est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $p > 0$, V, I est l'idéal maximal. Supposons que $\mathcal{X}^\dagger$ est V-lisse. Alors si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille de sections locales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$ au-dessus d'un ouvert †-affine U d'algèbre $A^\dagger := \Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ telles que leurs différentielles $(dx_1,\dots,dx_n)$ forment une base locale du $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$-module des formes différentielles séparées $\tilde{\Omega}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$, le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}$ est acyclique au-dessus de U :*

$$\mathrm{H^i(U},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/\mathrm{V}}) = 0$$

pour $i \geq 1$.

Démonstration. Considérons le fibré cotangent $q : T^*U \to U$, si W est un ouvert affine principal de U son image inverse $q^{-1}W$ est un ouverte affine principal de T^*U. En vertu du théorème d'acyclicité [15] la cohomologie

$\mathrm{H}^{\mathrm{i}}(\mathrm{q}^{-1}\mathrm{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}^*\mathcal{U}^\dagger/\mathrm{V}})$ est nulle pour $i \geq 1$ et donc les faisceaux images directes supérieures $R^i q_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}^*\mathcal{U}^\dagger/V}$ sont nuls pour $i \geq 1$. On a alors les isomorphismes :

$$\mathbf{R}\Gamma(T^*U, \mathcal{O}_{\mathcal{T}^*\mathcal{U}^\dagger/V}) \simeq \mathbf{R}\Gamma(U, q_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}^*\mathcal{U}^\dagger/V}) \simeq \mathbf{R}\Gamma(U, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}^\dagger/V}).$$

On est réduit à la trivialité cohomologique du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{T}^*\mathcal{U}^\dagger/V}$ au dessus du schéma $\dagger$-adique affine T^*U [15]. ■

Remarque 7.4. 1) Dans cet article on aurait pu partir d'un schéma formel $\mathcal{X}^\wedge = (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\wedge/R})$ pour la topologie I-adique d'un anneau noetherien R et définir le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\wedge/R}$ comme le sous-faisceau du faisceau $\mathcal{E}nd_R(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\wedge/R})$ des endomorphismes dont la réduction modulo I^s est un opérateur différentiel sur le schéma X_s pour tout $s \geq 1$ dont l'ordre est localement borné par une fonction linéaire en s.

2) Si le schéma $\mathcal{X}^\wedge$ est formellement lisse sur R le théorème du symbole total a lieu sur R, à savoir que si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de coordonnées locales au-dessus d'un ouvert affine U et si P un opérateur différentiel de l'anneau $D^\dagger_{A^\wedge/R}$ et la suite $a_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$, d'éléments de $A^\wedge$ définis par

$$a_\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}(-x)^\beta P(x^{\alpha-\beta}),$$

alors l'opérateur P est égal à la série

$$P(a, \Delta_x) := \sum_\alpha a_\alpha \Delta_x^\alpha.$$

De plus l'application symbole total qui à un opérateur différentiel P associe son symbole total

$$\sigma_P(x, \xi) := \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$$

est un **isomorphisme de $A^\wedge$-modules à gauche** entre l'anneau des opérateurs différentiels $D^\dagger_{A^\wedge/R}$ et l'algèbre $A^\wedge[\xi_1, \ldots, \xi_n]^\dagger$ complété $\dagger$-adique de l'algèbre $A^\wedge[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ pour la topologie I-adique de $A^\wedge$. On a la trivialité cohomologique du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}^\wedge/R}$ sur des ouverts affines assez petits. La démonstration est élémentaire et est algébrique.

3) Cela pose la question fort intéressante de trouver des démonstrations algébriques des résultats de cet article pour un couple $(V, \mathfrak{m})$ qui restent valables pour un couple (R, I).

Références

[1] Bayer, D. A. : *The division algorithm and the Hilbert scheme.* PhD thesis, Univ. Harvard, 1982.

[2] Berthelot, P. : Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules. In *p-adic analysis (Trento, 1989)*, 80–124. Lecture Notes in Math. **1454**. Springer, Berlin, 1990.

[3] Bosch, S., Güntzer, U. and Remmert, R. : *Non archimedean analysis.* Grunderlehren des Mathematischen Wissenschaften **261**. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] Chase, S. U. : On the homological dimension of algebras of differential operators. *Comm. Algebra* **1** (1974), 351–363.

[5] Fulton, W. : A note on weakly complete algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 591–593.

[6] Grosse-Klönne, E. : Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. Reine Angew. Math.* **519** (2000), 73–95

[7] Grothendieck, A. and Dieudonné, J. : Eléments de Géométrie Algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **32**, 1967.

[8] Grothendieck, A. : *Espaces Vectoriels Topologiques.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1954.

[9] Hauser, H. and Müller, M. : A rank theorem for analytic maps between power series spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **80** (1994), 96–115.

[10] Kedlaya, K. S. : Finiteness of rigid cohomology with coefficients. *Duke Math. J.* **134** (2006), no. 1, 15–97.

[11] Mebkhout, Z. : Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1027–1081.

[12] Mebkhout, Z. : Le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel p-adique d'échelon $h \geq 0$. À paraître dans *Rev. Mat. Iberoam.*

[13] Mebkhout, Z. and Narváez Macarro, L. : Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques. In *p-adic analysis (Trento, 1989)*, 267–309. Lecture Notes in Math. **1454**. Springer, Berlin, 1990.

[14] Mebkhout, Z. and Narváez Macarro, L. : La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algébres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **24** (1991), 227–256.

[15] Meredith, D. : Weak formal schemes. *Nagoya Math. J.* **45** (1972), 1–38.

[16] Monsky, P. and Washnitzer, G. : Formal Cohomology. I. *Ann. of Math. (2)* **88** (1968), 181–217.

[17] Narváez Macarro, L. : Division theorem over the Dwork-Monsky-Washnitzer completion of polynomial rings and Weyl algebras. In *Rings, Hopf algebras, and Brauer groups (Antwerp/Brussels, 1996)*, 175–191. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **197**. Dekker, New York, 1998.

[18] Smith, S. P. : The global homological dimension of the ring of differential operators on a nonsingular variety over a field of positive characteristic. *J. Algebra* **107** (1987), 98–105.

[19] Van der Put, M. : The cohomology of Monsky and Washnitzer. In *Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984). Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **23** (1986), 33–59.

Recibido: 29 de octubre de 2008
Revisado: 21 de agosto de 2009

Zoghman Mebkhout
UFR de Mathématiques
Université de Paris 7
175, rue de Chevaleret, F-75013, Paris
mebkhout@math.jussieu.fr

Luis Narváez Macarro
Departamento de Álgebra &
Instituto de Matemáticas (IMUS)
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
Avda. Reina Mercedes s/n, 41012-Sevilla, Spain
narvaez@algebra.us.es

The second author is partially supported by MTM2007-66929 and FEDER.