PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 81, No. 1, 1979

DEUX GENERALISATIONS D'UN THEOREME DE I. NAMIOKA

MICHEL TALAGRAND

Soient X un espace compact, Y un espace topologique, et f une application séparément continue de $X \times Y$ dans un espace métrisable Z. Quand existe-il un G_δ dense de X tel que f soit continue en tout point de $G \times Y$? Le but de ce travail est d'étudier cette question en vue de l'étude de la compacité et de la $\mathscr{K}$-analyticité faibles dans les espaces de Banach. On montre qu'un tel G_δ existe toujours si Y est un fermé de $N^N \times L$ pour un espace compact L. On en déduit en particulier que si $\mathscr{C}(X)$ est faiblement $\mathscr{K}$-analytique, alors X contient un G_δ dense dont tous les points sont des G_δ. On étudie une autre situation, qui englobe aussi le cas ou Y est compact, et l'on retrouve un théorème de I. Namioka (avec une preuve plus simple).

1. **Introduction.** Nous dirons qu'une fonction définie sur un produit $X \times Y$ d'espaces topologiques, à valeurs dans un espace topologique Z est *séparément continue* si toutes les fonctions partielles obtenues en fixant arbitrairement l'une des variables sont continues. L'ensemble type de cette situation est celui ou Y est un sous-ensemble de $\mathscr{C}(X, Z)$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, et où f est l'application évaluation, qui envoie (x, y) sur $y(x)$. Nous dirons, comme c'est l'usage, qu'une fonction f est continue en un point de $X \times Y$ si elle est continue en ce point par rapport à l'ensemble des deux variables.

Dans [8], I. Namioka prouve le théorème suivant:

THEOREME 1.1. (*I. Namioka*). *Soient X un espace compact, et Y un espace topologique localement compact et dénombrable à l'infini. Soit f une application séparément continue de $X \times Y$ dans un espace métrisable Z. Il existe alors un G_δ dense G de X tel que f soit continue en tout point de $G \times Y$.*

Cet énoncé a d'intéressantes conséquences dans la théorie des espaces de Banach. Le but de cet article est d'affaiblir dans deux directions différentes l'hypothèse sur Y, de façon à en tirer des conséquences concernant la théorie des espace de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques. Chacune de nos extensions implique le Théorème 1.1, tout au moins lorsque Z est compact, (avec, pour la seconde une preuve plus simple que la preuve originale) mais aucune n'implique le résultat plus général établi par Namioka (Théorème 1.2, où

X appartient a une classe plus générale que celle des espaces compacts). Nous espérons que le lecteur nous pardonnera notre titre schématique. Les résultats et les applications sont énoncés aux paragraphes 3 et 4. La lecture détaillée des rappels du paragraphe 2 n'est nécessaire que pour celle du paragraphe 5 (démonstration du Theorème 3.1), à condition de supposer dans l'énoncé du Théorème 3.1 que Y est un fermé d'un espace $N^N \times L$, pour un espace compact L.

2. **Notations et rappels.** Tous les espaces topologiques considérés seront séparés. Désignons par Σ l'espace des suites infinies d'entiers (donc $\Sigma = N^N$), muni de la topologie produit, et par S l'espace des suites finies d'entiers. Pour $s \in S$, on désigne par $|s|$ la longueur de s. Pour $a \in S \cup \Sigma$, ayant au moins n termes, notons $a|n$ l'élément de S formé des n premiers termes de a. Pour $s \in S$ et $a \in S \cup \Sigma$, on note $s \prec a$ le fait que a ait au moins $|s|$ termes, et que $s = a||s|$.

Soit X un espace topologique. Une application $\sigma \to X_\sigma$ de Σ dans $\mathfrak{P}(X)$ sera dite semi-continue supérieurement à valeurs compactes (s.c.s.c.) si elle est à valeurs compactes, et si pour tout ouvert U de X, l'ensemble des σ tels que $X_\sigma \subset U$ soit un ouvert de Σ. Si X est l'image de Σ par cette application, c'est à dire si $X = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$, on dira que X est $\mathscr{K}$-analytique. Un espace topologique est $\mathscr{K}$-analytique si et seulement s'il est l'image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact [7]. Tout espace $\mathscr{K}$-analytique est de Lindelöf ([5], 3-4). Tout sous-ensemble $\mathscr{K}$-analytique X d'un espace compact possède la propriété de Baire, c'est à dire est égal à un ouvert modulo un ensemble maigre (en effect X peut s'obtenir à partir des fermés par l'opération de Souslin, et cette opération laisse stable la classe des ensembles possèdant la propriété de Baire).

Etant donnés un espace $\mathscr{K}$-analytique régulier X, et une application s.c.s.c. surjective $\sigma \to X_\sigma$, pour $s \in S$ posons $X_s = \overline{\bigcup_{s \prec \sigma} X_\sigma}$. Si U est un voisinage de X_σ, il existe un n tel que $X_{\sigma|n} \subset U$. Pour le voir, on se ramène au cas où U est fermé, et on utilise le fait que l'application $\sigma \to X_\sigma$ est s.c.s.

DÉFINITION 2.1. Un espace topologique $\mathscr{K}$-analytique X sera dit *spécial* s'il est régulier et si on peut choisir l'application s.c.s.c. surjective $\sigma \to X_\sigma$ de sorte que pour tout $x \in X$, il existe σ tel que pour tout n on ait $x \in \mathring{X}_{\sigma|n}$ (et donc $x \in X_\sigma$).

On voit sans peine qu'une intersection dénombrable d'ouverts F_σ d'un espace compact est spéciale. Il en résulte que tout espace Polonais est spécial, ainsi que tout espace localement compact dénombrable à l'infini. Tout fermé d'un espace spécial étant un espace spécial, tout fermé d'un espace $\Sigma \times L$ (où L est un espace compact) est spécial.

3. Extension au cas où Y est un espace $\mathscr{K}$-analytique spécial. Le résultat suivant est la base de ce paragraphe. Sa démonstration étant longue, est reportée au paragraphe 5.

THEOREME 3.1. *Soient X un espace compact et Y un espace $\mathscr{K}$-analytique spécial. Soit f une application séparément continue de $X \times Y$ dans un espace métrisable Z. Il existe alors un G_δ dense G de X telle que f soit continue en tout point de $G \times Y$.*

REMARQUES. (a) Nous savons même démontrer ce théorème lorsque l'on suppose seulement que X est "Čech-complet" au sens de [8], c'est à dire homéomorphe à un G_δ d'un espace compact. Toutefois, comme la démonstration s'alourdit sensiblement, sans que nous ayons trouver des applications intéressantes, nous contenterons de montrer le Théorème 3.1. Nous ne savons pas si l'énoncé reste valide en supposant seulement que X est "fortement dénombrablement complet" au sens de [8].

(b) Le Théorème 3.1 ne serait pas exact si l'on ne supposait pas Y spécial. En effet prenons $X = [0, 1]$ et $Y = \mathscr{C}([0, 1], [0, 1])$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle. Cet espace est $\mathscr{K}$-analytique (on voit sans peine que c'est un $K_{\sigma\delta}$ de $[0, 1]^{[0,1]}$). Pourtant l'application f de $X \times Y$ dans $[0, 1]$ donnée par $f(x, y) = y(x)$, qui est séparément continue, n'est continue en aucun point de $X \times Y$.

Voici l'application pour laquelle le Théorème 3.1 a été conçu.

THEOREME 3.2. *Soient Y un espace $\mathscr{K}$-analytique (non nécessairement spécial), Z un espace métrisable et X un sous-ensemble de $\mathscr{C}(Y, Z)$, qui soit compact pour la topologie de la convergence ponctuelle. Alors X contient un G_δ dense G tel que tout point de G soit un G_δ de X.*

Démonstration. Prouvons d'abord que tout espace $\mathscr{K}$-analytique Y est image continue d'un espace $\mathscr{K}$-analytique spécial. Il suffit de le prouver si Y est un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact L, soit $Y = \bigcap_n \bigcup_m Y_{n,m}$ pour des compacts $Y_{n,m}$. On remarque alors que Y est la projection sur L du fermé Y' de $\Sigma \times L$ donné par

$$Y' = \bigcap_n \bigcup_{|s|=n} \{\sigma \in \Sigma;\, s \prec \sigma\} \times (Y_{1,s_1} \cap \cdots \cap Y_{n,s_n})$$

et que Y' est spécial.

Il en résulte que X est homéomorphe à un sous-ensemble compact pour la convergence ponctuelle, d'un espace $\mathscr{C}(Y', Z)$, où Y' est un espace $\mathscr{K}$-analytique spécial. On peut donc supposer que Y est spécial.

L'application f de $X \times Y$ dans Z donnée par $f(x, y) = x(y)$ est séparément continue. D'après le Théorème 3-1, il existe un G_δ dense G de X tel que f soit continue en tout point de $\{x\} \times Y$ pour tout $x \in G$. Si $y \in Y$ et $n \in N$, il existe donc des voisinages ouverts V_y^n de x et W_y^n de y tels que si on désigne par d une distance définissant la topologie de Z on ait

$$x' \in V_y^n\ , \quad y' \in W_y^n \Rightarrow d(f(x', y'), f(x, y)) \leqq \frac{1}{n}\ .$$

Puisque Y est de Lindelöf on peut le recouvrir par une suite $W_{y_p}^n$. Posons $A^n = \bigcap_p V_{y_p}^n$. C'est un G_δ de X contenant x. Pour $x' \in A^n$ et $y' \in Y$, si p est tel que $y' \in V_{y_p}^n$, on a

$$d(f(x', y'), f(x, y')) \leqq d(f(x', y'), f(x, y_p)) + d(f(x, y'), f(x, y_p)) \leqq \frac{2}{n}\ .$$

Ceci montre que si $x' \in A = \bigcap_n A^n$, pour tout $y' \in Y$ on a

$$x'(y') = f(x', y') = f(x, y') = x(y')\ .$$

Ainsi on a $A = \{x\}$, ce qui montre que $\{x\}$ est un G_δ.

Le cas particulier suivant mérite mention explicite. Son intérêt réside dans le fait que la classe des espaces compacts K pour lesquels $\mathscr{C}(K)$ est faiblement $(=\sigma(\mathscr{C}(K), \mathscr{C}(K)'))$ $\mathscr{K}$-analytique contient la classe des compacts faibles des espaces de Banach mais est strictement plus général [11].

THEOREME 3.3. *Soit K un espace compact tel que $\mathscr{C}(K)$ soit faiblement $\mathscr{K}$-analytique. Alors K contient un G_δ dense dont les points sont des G_δ.*

Démonstration. On applique le théorème précédent en regardant K comme sous-ensemble de $\mathscr{C}(K)'$.

Problème. Il est connu qu'un compact faible d'un espace de Banach contient un G_δ dense métrisable ([8], Corollary 4.2), ce que nous retrouverons au paragraphe 4. Nous n'avons pu décider s'il en est toujours ainsi sous l'hypothèse plus faible du Théorème 3.3.

4. Un autre type d'extension. Le théorème suivant a pour principal intérêt de fournir une démonstration relativement simple de deux théorèmes de [8]. Il nous a semblé plus clair de ne pas mettre son énoncé sous une forme parallèle à celle du Théorème 3.1, mais la traduction est aisée et laissée au lecteur.

THEOREME 4.1. *Soient (X, τ) un espace compact, et Z un espace compact métrisable. Soit Y un sous-ensemble quelconque de $\mathscr{C}(X, Z)$. Soient $\tilde{Y}$ l'adhérence ponctuelle de Y dans l'ensemble de toutes les fonctions de X dans Z, et τ' la moins fine des topologies sur X qui rendent continues les fonctions de $\tilde{Y}$. Si (X, τ') est $\mathscr{K}$-analytique, il existe un G_δ dense G de (X, τ) en tout point duquel l'ensemble Y soit équicontinu. L'application $x, y \to y(x)$ de $X \times Y$ dans Z est donc continue en tout point de $G \times Y$, lorsque Y est muni de la topologie de la convergence simple.*

Démonstration. Elle va utiliser une idée classique de dichotomie.

1 *ère étape.* Puisque Z est plongeable dans $[0, 1]^N$, qu'une famille d'applications á valeurs dans $[0, 1]^N$ est équicontinue en un point si pour chaque application cordonnée la famille des composées par cette application coordonnée est équicontinue en ce point, et qu'une intersection dénombrable de G_δ denses est un G_δ dense, on peut supposer $Z = [0, 1]$.

2 *ème étape.* Prouvons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert non vide U de X tel que pour $y \in Y$ et $x_1, x_2 \in U$ on ait $|y(x_1) - y(x_2)| \leqq \varepsilon$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout ouvert U non vide de X, il existe $y \in Y$ et $x_1, x_2 \in U$ tels que $|y(x_1) - y(x_2)| > \varepsilon$. Pour chaque suite dyadique (c'est à dire formée de 0 et de 1) finite d, construisons par induction sur la longueur $|d|$ de d un fermé A_d de X et un élément y_d de Y vérifiant les conditions suivantes:

(a) L'intérieur de A_d n'est pas vide

(b) $A_{d,0} \cup A_{d,1} \subset A_d$

(c) $x_0 \in A_{d,0}$; $x_1 \in A_{d,1} \Rightarrow |y_d(x_0) - y_d(x_1)| > \varepsilon$.

Posons $A_\phi = X$, puis supposons les A_d construits pour $|d| \leqq n$ et les y_d construits pour $|d| \leqq n - 1$. Fixons d tel que $|d| = n$. Par l'hypothèse il existe x_0 et x_1 dans A_d et $y_d \in Y$ tels que $|y_d(x_0) - y_d(x_1)| - \varepsilon = 2\alpha > 0$. Il suffit alors de poser, pour $i = 0, 1$

$$A_{d,i} = \left\{x \in A_d;\ |y_d(x) - y_d(x_i)| \leqq \frac{\alpha}{2}\right\},$$

le fait que $A_{d,i}$ soit fermé et d'interieur non vide découlant de la continuité de y_d.

Désignons par H l'adhérence ponctuelle de l'ensemble des y_d dans l'ensemble des fonctions de X dans $[0, 1]$. C'est un compact pour la topologie de la convergence ponctuelle et il est formé de fonctions continues pour τ'. Puisque (X, τ') est $\mathscr{K}$-analytique, il résulte du Théorème 3-7 de [13] que $\mathscr{C}(H)$ est faiblement $\mathscr{K}$-analytique. Puisque H est séparable, il résulte du Théorème 6.2 de [13] que H est métrisable. Il en découle que $\mathscr{C}(H)$ est séparable. Pour chaque suite dyadique infinie δ, soit x_δ un point de $\bigcap_{d<\delta} A_d$ (cet ensemble n'est pas vide puisque c'est une intersection décroissante de compacts). Soient δ et δ' deux suites infinites dyadiques distinctes. Si d est la suite de longueur maximale telle que $d \prec \delta$ et $d \prec \delta'$, on a (pour fixer les idées) $x_\delta \in A_{d,0}$ et $x_{\delta'} \in A_{d,1}$, donc $|y_d(x_\delta) - y_d(x_{\delta'})| > \varepsilon$ d'après la condition c. Ceci montre que les éléments $y \to y(x_\delta)$ et $y \to y(x_{\delta'})$ de $\mathscr{C}(H)$ sont en norme distant de au moins ε. Ceci contredit la séparabilité de $\mathscr{C}(H)$, ce qui termine cette étape.

3 *ème étape*. Pour chaque n soit G_n la réunion des ouverts U de X qui vérifient la condition

$$\forall x_0, x_1 \in U\,, \quad \forall y \in X\,, \quad |y(x_0) - y(x_1)| \leqq n^{-1}\,. \tag{1}$$

Alors G_n est dense. En effet, si V un ouvert non vide de X, on voit sans peine que les hypothèses du théorème sont encore vérifiées après restriction à $\bar{V}$, et la deuxième étape montre que G_n rencontre V. L'ensemble $G = \bigcap_n G_n$ est un G_δ dense de X, en tout point duquel Y est équicontinu.

La seule assertion restant à établir est que l'évaluation est continue en tout point de $G \times Y$. Soient $x \in G$, $y \in Y$, et U un ouvert de G vérifiant (1) et contenant x. Alors pour $x' \in U$ et $y' \in Y$ on a

$$\begin{aligned} |y'(x') - y(x)| &\leqq |y'(x') - y'(x)| + |y'(x) - y(x)| \\ &\leqq n^{-1} + |y'(x) - y(x)| \end{aligned}$$

ce qui prouve sans peine le résultat. La preuve est terminée.

REMARQUES. (a) D'après les résultats de [13], il suffirait en fait avec la même preuve de supposer que l'espace (X, τ') est "*dénombrablement déterminé*". (C'est à dire image d'une partie Σ' *quelconque* de Σ par une application s.c.s.c.)

(b) En mimant une construction de Stegall ([2], Ch. 6, § 6) on pourrait établir ce théorème sous la seule hypothèse que (X, τ') est de Lindelöf. La démonstration serait alors beaucoup plus longue.

(c) Le cas particulier du Théorème 1.1 obtenu en prenant Z compact se déduit du théorème précédent. On se ramène d'abord au cas ou Y est compact. Soit alors φ l'application de Y dans $\mathscr{C}(X, Z)$ donnée par $\varphi(y)(x) = f(x, y)$. Cette application est continue lorsque $\mathscr{C}(X, Z)$ est muni de la topologie de la convergence ponctuelle; $\varphi(Y)$ est donc compact. Le Théorème 4.1 montre qu'il existe un G_δ dense G de X tel que l'évaluation soit continue en tout point de $G \times \varphi(Y)$. On en déduit alors que f est continue en tout point de $G \times Y$.

Puisque un sous-espace d'un espace de Banach contenant un compact faible total est faiblement $\mathscr{K}$-analytique ([13] Théorème 3.6) le théorème suivant est une unification de [8], Corollary 4.2 et Theorem 4.7.

THEOREME 4.2. *Soit E un espace de Banach, X un sous-ensemble de E' qui est $\sigma(E', E)$ compact et $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E', E'')$. Il existe alors un G_δ dense G de X (pour $\sigma(E', E)$) en tout point duquel l'application de $(X, \sigma(E', E))$ dans $(X, \|\cdot\|)$ est continue.*

Démonstration. On peut supposer que X est contenu dans la boule unité de E'. Désignons par Y l'ensemble des restrictions à X des éléments de E de norme $\leqq 1$ (considérés comme éléments de E''), et H l'ensemble des restrictions à X des éléments de la boule unité de E''. L'ensemble H est compact pour la topologie de la convergence ponctuelle sur X, contient Y, et est formé de fonctions continues pour la topologie $\sigma(E', E'')$, qui est $\mathscr{K}$-analytique sur X. On peut donc appliquer le Théorème 4.1 (avec $Z = [0, 1]$). Soit G le G_δ dense de X donné par ce théorème. Pour $x \in G$ et $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de x pour $\sigma(E', E)$ tel que $|x(y) - x'(y)| \leqq \varepsilon$ pour $x' \in U$ et $y \in Y$, c'est à dire que $\|x - x'\| \leqq \varepsilon$.

REMARQUES. (a) Ce résultat est encore valable avec la même méthode si l'on suppose seulement que X est dénombrablement déterminé. (Voir la remarque suivant le Théorème 4.1.)

(b) En fait ce résultat est encore valable si l'on suppose seulement que X est de Lindelöf pour $\sigma(E', E'')$. Pour le voir sans utiliser l'extension du Théorème 4.1 annoncée dans la remarque (b) qui le suit, on remarque d'abord que la méthode du Théorème 4.1 montre qu'il suffit de prouver que pour tout sous-espace séparable F de X l'image de X dans F' est séparable. Si elle ne l'était pas, la méthode de [4], Lemme 4 à 7, montre que l'image de X contient un sous-ensemble non-dénombrable fermé et discret pour $\sigma(F', F'')$, donc n'est pas de Lindelöf pour cette topologie (cette idée est due essentiellement à Edgar [3]).

(c) Lorsque X est *convexe*, le Théorème 4.2 montre que la condition (d) du théorème de [4] est vérifiée, ce qui montre que X possède la propriété de Radon-Nikodym. Une façon beaucoup plus simple de la voir est d'utiliser la méthode que nous avons suggérée dans le Corollaire 13 de [11]: Si F est un sous-espace séparable de E, l'image de X dans F' est faiblement $\mathscr{K}$-analytique. Il en est donc de même de l'espace de Banach H engendré par X, d'après le Théorème 3.6 de [13]. Mais puisque H est séparé par un nombre dénombrable de formes linéaires, il est séparable en norme d'après le Théorème 11 de [11], ce qui montre que la condition (c) du théorème de [4] est vérifiée. Une troisième méthode limpide est due indépendamment à E. Saab [9]. Le résultat est encore exact si l'on suppose seulement X de Lindelöf d'après la remarque précédente.

L'énoncé du Théorème 4.2 et la remarque (b) ci-dessus conduisent naturellement à se demander si l'enveloppe convexe $\sigma(E', E)$-fermée de X est encore faiblement $\mathscr{K}$-analytique. Le résultat suivant a été découvert indépendamment par E. Saab, avec une démonstration différente [10].

THEOREME 4.3. *Soit E un espace de Banach, et K un sous-ensemble convexe $\sigma(E', E)$-compact de E'. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points extrémaux de K. Supposons qu'il existe un sous-ensemble X de E' qui contienne $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E', E'')$. (Ceci équivaut d'ailleurs au fait que l'espace de Banach engendré par $\mathscr{E}$ soit faiblement $\mathscr{K}$-analytique). Alors K est l'enveloppe convexe fermée en norme de X. Il est donc $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E', E'')$.*

Démonstration. Posons $\sigma = \sigma(E', E)$ et $\sigma' = \sigma(E', E'')$. L'ensemble X, que l'on peut supposer contenu dans K, est à fortiori $\mathscr{K}$-analytique pour σ. La théorie de Choquet de la représentation intégrale [1] montre que pour tout $k \in K$ il existe une mesure de Radon μ sur K (pour la topologie σ) qui est portée par X et dont k soit la résultante, c'est à dire que pour tout $a \in E$ on ait

$$k(a) = \int x'(a) d\mu(x') .$$

L'ensemble $Y = X \cup \{k\}$ est $\mathscr{K}$-analytique pour σ'. Si l'on muni Y de σ', l'ensemble des restrictions à Y des éléments de la boule unité de E'' est un compact dans $\mathscr{C}(Y, \boldsymbol{R})$ pour la topologie de la convergence simple, et l'ensemble des restrictions à Y des éléments de E est une partie dense de ce compact. Il résulte donc des Théorèmes 3.7 et 6.4 de [13] que pour tout élément x'' de E'' il existe une suite x_n de E, avec $\|x_n\| \leqq \|x''\|$ et $\lim_n z(x_n) = x''(z)$ pour tout $z \in Y$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que

$$x''(k) = \lim_n k(x_n) = \lim_n \int z(x_n) d\mu(z) = \int x''(z) d\mu(z) .$$

Le théorème de Hahn-Banach et le fait que X porte μ prouvent que k appartient à l'enveloppe convexe σ' fermée de X, qui n'est autre que son enveloppe convexe normiquement fermée. La dernière assertion résulte alors de ce que K est inclus dans l'espace de Banach engendré par $\mathscr{E}$, qui est $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E', E'')$ d'après le Théorème 3-6 de [13].

COROLLAIRE 4.4. *Soit E un espace de Banach, X un sous-ensemble $\sigma(E', E)$-compact de E', qui est aussi $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E', E'')$. Alors l'enveloppe convexe $\sigma(E', E)$ fermée de X est son enveloppe convexe normiquement fermée. (Elle est donc $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E', E'')$).*

Démonstration. Si K désigne l'enveloppe convexe $\sigma(E', E)$ fermée de X, le théorème de Krein-Millman montre que X contient l'ensemble des points extrémaux de K, et le résultat découle alors du Théorème 4.3.

REMARQUES. (a) L'hypothèse du Théorème 4.3 est satisfaite en particulier si $\mathscr{E}$ est séparable en norme, (on prend pour X l'adhérence en norme de $\mathscr{E}$). On retrouve ainsi un résultat de R. Haydon ([6], Theorem 3.3).

(b) Le résultat précédent montre qu'il suffit de prouver le Théorème 4.2 lorsque X est convexe. Puisque il possède alors la propriété de Radon-Nikodym comme nous l'avons remarqué, le Théorème 4.2 peut se déduire du théorème de [4].

Problème 4.5. Si dans le Corollaire 4.4 on suppose seulement que X est de Lindelöf pour $\sigma(E', E'')$, peut-on affirmer que son enveloppe convexe $\sigma(E', E)$-fermée l'est encore?

Le Théorème 4.1 ne doit pas faire croire que si un espace compact (X, τ) admet une topologie τ' plus fine telle que (X, τ') soit $\mathscr{K}$-analytique, alors il existe un G_δ dense de (X, τ) en tout point duquel l'application identique $(X, \tau) \to (X, \tau')$ soit continue. Si par exemple $X = [0, 1]$ et τ est la topologie classique, il suffit de prendre pour τ' la topologie classique en rajoutant l'ensemble des rationnels de $[0, 1]$ comme ouvert-fermé pour que l'application identique n'ait aucun point de continuité.

On a toutefois le résultat suivant.

THEOREME 4.6. *Soit (X, τ) un espace compact, et τ' une topologie* *plus fine que τ telle que (X, τ') soit $\mathscr{K}$-analytique. Alors il existe un G_δ dense G de (X, τ) sur lequel τ et τ' coincident.*

Démonstration. Soit $\sigma \to X_\delta$ une application s.c.s.c. de Σ sur (X, τ'). Pour $s \in S$ posons $X^s = \bigcup_{s \prec \sigma} X_\sigma$. Puisque X^s est $\mathscr{K}$-analytique pour τ', il l'est à fortiori pour τ; donc possède la propriété de Baire pour τ. Il existe donc un G_δ dense G de (X, τ) sur lequel la trace de chaque X^s soit ouverte pour τ. Montrons que sur G les topologies τ et τ' coincident. Soient $x \in G$, V un voisinage ouvert de x pour τ' et σ tel que $x \in X_\sigma$. Puisque τ et τ' coincident sur X_σ (car X_σ est compact pour τ'), $X_\sigma \backslash V$ est compact pour τ, donc il existe un voisinage W de $X_\sigma \backslash V$ pour τ tel que $x \notin \bar{W}$, où l'adhérence est prise pour τ. L'application $\sigma \to X_\delta$ étant s.c.s., il existe $s \prec \sigma$ tel que $X_s \subset V \cup W$. On a donc $x \in X_s \cap (X \backslash \bar{W}) \subset V$, ce qui suffit puisque $X_s \cap G$ est ouvert dans G pour τ.

COROLLAIRE 4.7. *Soit E un espace de Banach, H un sous-espace de E' qui sépare E et X un sous-ensemble de E qui est $\sigma(E, H)$ compact et $\mathscr{K}$-analytique pour $\sigma(E, E')$. Il existe alors un G_δ dense G de $(X, \sigma(E, H))$ sur lequel cette topologie coincide avec celle de la norme. (En particulier G est métrisable.)*

Démonstration. Le Théorème 4.6 montre qu'il existe un G_δ dense G_1 de $(X, \sigma(E, H))$ sur lequel $\sigma(E, H)$ coincide avec $\tau = \sigma(E, E')$. Puisque (G_1, τ) est homéomorphe à un G_δ d'un espace compact, le Théorème 4.1 de [8] montre qu'il existe un G_δ dense G de (G_1, τ) sur lequel l'application identique de (G_1, τ) dans $(E, \| \ \|)$ est continue. Il résulte que $\sigma(E, H)$ et $\| \ \|$ coincident sur G.

5. Preuve du Theoreme 3.1. Il est clair, au vu de la Définition 2.1 que le Théorème 3.1 est un cas particulier du résultat suivant que nous allons établir.

THEOREME 5.1. *Soient X un espace compact, et Y un espace $\mathscr{K}$-analytique. Soit $\sigma \to Y_\delta$ une application s.c.s.c. de Σ sur Y. Pour $s \in S$, on pose $Y_s = \bigcup_{s \prec \sigma} Y_\sigma$.*

Soient Z un espace métrisable et f une application séparément continue de $X \times Y$ dans Z.

Il existe alors un G_δ dense G de X tel que tous $x \in G$, $\sigma \in \Sigma$, $y \in Y_\sigma$, et tout voisinage U de $f(x, y)$, il existe un voisinage V de x, W de Y et $s \prec \sigma$ tels que

$$v \in V, w \in W \cap Y_s \Longrightarrow f(v, w) \in U .$$

Démonstration. Fixons une distance d définissant la topologie de Z. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $s \in S$, désignons par F_s le fermé de $X \times Y_s$ dont le complémentaire est la réunion des ouverts de $X \times Y_s$ dont l'image par f a un diamètre $\leqq \varepsilon$. Puisque Y_s est fermé, il en est de même de F_s.

Pour $t \in S$ posons $F^t = \bigcup_{t<\sigma} \bigcap_{s<\sigma} F_s$. C'est un sous-ensemble $\mathscr{K}$-analytique de $X \times Y$, et on a $F^t \subset F_t \subset X \times Y_t$. Posons $F = F^\phi = \bigcup_\sigma \bigcap_{s<\sigma} F_s$.

Désignons par p la projection de $X \times Y$ sur X. Soient $x \notin p(F)$, $\sigma \in \Sigma$ et $y \in Y_\sigma$. On a alors $(x, y) \notin F$, donc en particulier $(x, y) \notin \bigcap_{s<\sigma} F_s$. Il existe donc $s \prec \sigma$ telle que $(x, y) \notin F_s$. Par définition de F_s il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tel que le diamètre de $f(V \times (W \cap Y_s))$ soit $\leqq \varepsilon$. *Le théorème sera donc établi si l'on prouve que $p(F)$ est maigre dans X.* Nous allons établir ce fait en raisonnant par l'absurde, grâce à une construction très semblable à celle de I. Namioka, quoique les arguments permettant d'effectuer cette construction soient assez différents.

Posons $\delta = \varepsilon/20$. Nous allons construire par induction sur $n \geqq 1$ des suites (s_n) de S, (x_n) de X, (y_n), (z_n) de Y, (H_n) décroissantes d'ouverts non vides de X, telles que si on pose

$$W_n = \{w \in Y; d(f(x_p, w), f(x_p, z_p)) < \delta \quad \forall p \leqq n\}$$

les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $n \geqq 1$:

(a) $|s_n| = n$, $s_{n-1} \prec s_n$

(b) $y_n \in Y_{s_n}$

(c) $y_n, z_n \in W_{n-1}$

(d) $(x_n, z_n) \in F^{s_n}$

(e) $d(f(x_n, y_n), f(x_n, z_n)) \geqq 3\delta$

(f) $v \in H_n$, $p \leqq n \Rightarrow d(f(v, y_p), f(x_p, y_p)) \leqq \delta$

(g) $x_n \in H_n$

(h) $p(F^{s_n} \cap (X \times W_n)) \cap H_n$ n'est pas maigre.

Si l'on pose $s_0 = \phi$, $W_0 = Y$ et $H_0 = X$, le premier pas de la construction est analogue au pas général. Nous supposerons donc celle ci effectuée jusqu'au rang n. La construction va comporter plusieurs étapes.

1 *ère étape.* Puisque $F^{s_n} = \bigcup_{|s|=n+1, s_n<s} F^s$, il existe $s_{n+1} \in S$ vérifiant la condition (a), et telle de plus que $p(F^{s_{n+1}} \cap (X \times W_n)) \cap H_n$ ne soit pas maigre. Puisque Z est métrisable et que f est continue en la seconde variable, W_n est réunion dénombrable de fermés. Il en résulte que $A = F^{s_{n+1}} \cap (X \times W_n)$ est $\mathscr{K}$-analytique, et donc aussi $p(A)$. Ainsi $p(A)$ possède la propriété de Baire. Il existe donc unouvert U de K, non vide et contenu dans H_n tel que $p(A)$ ne soit maigre dans aucun ouvert de U (ou encore que $U \backslash p(A)$ soit maigre).

2 *ème étape.* Désignons par Ω la réunion des ouverts ω de $X \times Y$ tels que $p(A \cap \omega)$ soit maigre. Prouvons que $p(A \backslash \Omega)$ est dense dans U. Si ce n'est pas vrai, il existe un ouvert non vide T de U tel que $p(A \backslash \Omega) \cap \bar{U} = \phi$, c'est à dire $(\bar{T} \times Y) \cap A \subset \Omega$. Puisque $p^{-1}(\bar{T}) \cap A$ est $\mathscr{K}$-analytique, il est de Lindelöf. Il existe donc une famille dénombrable (ω_n) d'ouverts dont la réunion contient $(\bar{T} \times Y) \cap A$ et qui sont tels que $p(A \cap \omega_n)$ soit maigre. On en déduit que $p((\bar{T} \times Y) \cap A)) = p(A) \cap \bar{T}$ est maigre, et donc aussi $p(A) \cap T$, ce qui contredit le choix de U.

3 *ème étape.* Montrons qu'il existe un élément $x \in p(A \backslash \Omega) \cap U$ tel que le diamètre de l'ensemble $\{f(v, y); y \in W_n \cap Y^{s_{n+1}}\}$ soit supérieur à 7δ. Supposons le contraire. Soient $v_0 \in p(A \backslash \Omega) \cap U$ et $w_0 \in W_n \cap Y^{s_{n+1}}$. Puisque f est continue en la première variable, il existe un voisinage U' de v_0, contenu dans U et tel que

$$v \in U' \Longrightarrow d(f(v, w_0), f(v_0, w_0)) \leqq \delta .$$

Soient $x \in U'$, $y \in W_n \cap Y^{s_{n+1}}$ et $v \in p(A \backslash \Omega) \cap U$. On a

$$\begin{aligned} d(f(v_0, w_0), f(x, y)) &\leqq d(f(v_0, w_0), f(v, w_0)) \\ &\quad + d(f(v, w_0), f(v, y)) + d(f(v, y), f(x, y)) \\ &\leqq \delta + 7\delta + d(f(v, y), f(x, y)) . \end{aligned}$$

La continuité de f en la première variable et la densité de $p(A \backslash \Omega)$ dans U' montrent alors que

$$d(f(v_0, w_0), f(x, y)) \leqq 9\delta .$$

Autrement dit, le diamètre de $f(U' \times (W_n \cap Y^{s_{n+1}}))$ est au plus $18\delta < \varepsilon$. Par définition de $F_{s_{n+1}}$ on a $(U' \times W_n) \cap F_{s_{n+1}} = \varnothing$, donc à fortiori $(U' \times W_n) \cap F^{s_{n+1}} = A \cap p^{-1}(U') = \varnothing$, donc $p(A) \cap U' = \varnothing$, ce qui est absurde puisque $p(A)$ n'est pas maigre dans aucun ouvert non vide de U.

4 *ème étape.* On peut donc choisir pour x_{n+1} un élément de $p(A \backslash \Omega) \cap U$ tel que le diamètre de l'ensemble $\{f(x_{n+1}, y); y \in W_n \cap Y^{s_{n+1}}\}$ soit $\geqq 7\varepsilon$. Choisissons z_{n+1} tel que $(x_{n+1}, z_{n+1}) \in A \backslash \Omega$ puis $y_{n+1} \in W_n \cap Y_{s_{n+1}}$ tel que $d(f(x_{n+1}, y_{n+1}), f(x_{n+1}, z_{n+1})) \geqq 3\delta$. Les conditions (a) à (e) sont satisfaites. Puisque $x_{n+1} \in H_n$ et que f est continue en la première variable, il suffit de choisir pour H_{n+1} un voisinage assez petit de x_{n+1} pour que (f) et (g) soient vérifiées. Enfin $p(F^{s_{n+1}} \cap (X \times W_{n+1})) \cap H_{n+1}$ n'est pas maigre puisque $H_{n+1} \times W_{n+1}$ contient (x_{n+1}, z_{n+1}) qui n'appartient pas à Ω. La construction est terminée.

Montrons pour conclure comment obtenir la contradiction cherchée (cette partie de la preuve est identique à celle de I. Namioka). Pour

$m > n$ on a $d(f(x_m, y_n), f(x_n, y_n)) \leqq \delta$ d'après (f) et (g). Puisque $y_m \in W_m$, on a aussi $d(f(x_n, y_m), f(x_n, z_n)) \leqq \delta$. D'après (e) on a donc $d(f(x_m, y_n), f(x_n, y_m)) \geqq \delta$. D'après (a), il existe $\sigma \in \Sigma$ telle que $s_n = \sigma | n$ pour tout n. L'ensemble $Y_\sigma \cup \bigcup_n \{y_n\}$ est compact. En effect Y_σ est compact et d'après (b) tout voisinage V de Y_σ contient les y_n pour n grand. Il s'ensuit que les points (x_m, y_m) de $X \times Y$ possèdent une valeur d'adhérence (a, b). Puisque f est séparément continue on en déduit que pour tout n on a $d(f(a, y_n), f(x_n, b)) \geqq \delta$, puis que $d(f(a, b), f(a, b)) \geqq \delta$. La démonstration est terminée.

REFERENCES

1. G. Choquet, *Lectures on Analysis*, W. A. Benjamin, New York, 1969.
2. J. Distel, *Geometry of Banach Spaces*, Selected topics. Lectures Notes in Math. N° 485.
3. G. A. Edgar, *Measurability on a Banach space*, Indiana J. Math., **26** No. 4 (1977), 663-680.
4. S. Fitzpatricks, *Weak*-compact convex sets with the RNP*, Rainwater Seminar, March 29, 1977.
5. Z. Frolik, *A survey of separable descriptive theory of sets and spaces*, Czechoslovak Math. J., **20** (95) (1970), 406-467.
6. R. Haydon, *An extreme point criterion for separability of a dual Banach space, and a new proof of a theorem of Corson*, Quat. J. Math. Oxford, (2), **27** (1976), 379-385.
7. J. E. Jayne, *Structure of Analytic Hausdorff spaces*, Mathematika, **23** (1976), 208-211.
8. I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math., **51** (1974), 515-531.
9. E. Saab, *Une caractérisation des convexes $\sigma(E', E)$ compacts possèdant la propriété de Radon-Nikodym*, C. R. A. S. t. **286** (1978), 45-48.
10. ———, *Points extremaux, separabilité et $\mathscr{K}$-analyticite faibles*, dans les espaces cle Banach C. R. A. S. t. **285** (1978), 1057-1058.
11. M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, C. R. A. S. t. **284** (1977), 745-748.
12. ———, *Sur les espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, C. R. A. S. t. **285** (1977), 119-122.
13. ———, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, A paraître.

Received March 3, 1978 and in revised form July 10, 1978.

UNIVERSITE PARIS VI
75230 PARIS-CEDEX 05, FRANCE