PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 98, No. 1, 1982

UN EXEMPLE D'OUVERT BORNE DE C^3 "TAUT" MAIS NON HYPERBOLIQUE COMPLET

JEAN-PIERRE ROSAY

On note Δ le disque unité de $\boldsymbol{C}$.

Rappelons les définitions. Une variété analytique complexe M est dite "*taut*" si pour toute suite d'applications holomorphes φ_i de Δ dans M:

— ou bien la suite (φ_i) est "compactement divergente" ce qui signifie que pour tout compact $K \subset \Delta$ et tout compact $K' \subset M$ $\varphi_i(K) \cap K' = \emptyset$ pour tout i assez grand.

— ou bien il existe une sous suite de la suite φ_i convergente uniformément sur tout compact de Δ vers une application holomorphe de Δ dans M.

Pour un ouvert Ω borné de $\boldsymbol{C}^n$ le fait d'être "taut" signifie que si φ_i est une suite d'applications de Δ dans Ω convergent uniformément sur tout compact vers une application φ: φ est à valeurs dans Ω ou bien φ est à valeurs dans la frontière de Ω. Il est nécessaire que Ω soit d'holomorphie [6], et suffisant que de plus la frontière de Ω soit de classe C^1 [3].

La définition donnée ci-dessus n'est pas la définition originelle donnée par Wu cf. [6] ou [4] p. 129 (au lieu de Δ on considère toute variété analytique) mais lui est équivalente cf. [1].

Une variété analytique complexe M est dite hyperbolique complète si et seulement si la pseudo distance de Kobayashi est une distance (i.e., sépare les points) et si pour tout $x \in M$ et $\rho > 0$ la boule fermée de centre x et rayon ρ, pour la distance de Kobayashi, est compacte cf [4] page 57 (intuitivement: la frontière de M est à distance infinie).

Il est clair, à partir de la définition adoptée, et de la propriété de décroissance de la distance de Kobayashi, que toute variété hyperbolique complète est "taut".

Voir également [4] page 130 et les références qui y sont données, et [5]. Nous allons donner un exemple d'ouvert borné de $\boldsymbol{C}^3$ "taut" mais non hyperbolique complet, en réponse au problème 1 de [4] page 131.

1. Construction de l'exemple. Par B on désigne la boule unité de $\boldsymbol{C}^3$ et par $\bar{B}$ sa fermeture. Pour tout $n \in \boldsymbol{N}^*$, soit V_n l'ensemble des $(z, v, w) \in \boldsymbol{C}^3$ vérifiant

$$v = z^2 - \left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right) \qquad w = \frac{1}{n}\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right).$$

Et soit V l'ensemble des $(z, o, o) \in C^3$.

Pour tout $n \in N^*$ on prend ψ_n une fonction plurisousharmonique sur la boule de rayon 2 dans C^3, qui hors de V_n ne prenne pas la valeur $-\infty$ et soit continue, et qui vérifie:

$$\begin{cases} \psi_n \text{ est identiquement } -\infty \text{ sur } V_n \\ \psi_n \text{ est constante sur } V \\ \psi_n < 0 \, . \end{cases}$$

On peut par exemple prendre $\psi_n = \operatorname{Max}(\operatorname{Log}|f|, \operatorname{Log}|g|) - A$ où f et g sont deux fonctions holomorphes constantes sur V telles que $f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\}) = V_n$, et A une constante assez grande. Un choix explicite possible pour f et g est le suivant:

$$f(z, v, w) = \alpha(z)\left[v - \frac{(2n+1)z - 1}{n(n+1)}\right] + \beta\left[w - \frac{1}{n}\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

avec $\beta = n(2n+1)^2$ et

$$\alpha(z) = -\frac{1 - (2n+1)^2\left(z - \dfrac{1}{n}\right)\left(z - \dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{(2n+1)z - 1}{n(n+1)}}$$
$$= (2n^3 + 3n^2 + n)z - (3n^2 + 3n + 1)$$

et

$$g(z) = \frac{f(z, v, w) + \dfrac{1}{10}\left[v - \dfrac{(2n+1)z - 1}{n(n-1)}\right]}{1 + \dfrac{1}{10}\left[v - \dfrac{(2n+1)z - 1}{n(n+1)}\right]} \, .$$

Soit $\psi = \sum \alpha_n \psi_n$; la suite α_n étant une suite de nombres > 0 suffisamment petits pour que:

$$\begin{cases} \psi(o) > -\infty \\ (*) \quad \text{La suite } h_N = \sum\limits_N^{+\infty} \alpha_n \psi_n \text{ tend uniformément vers 0 hors} \\ \qquad \text{de tout voisinage de } V, \text{ au voisinage de } \bar{B} \, . \end{cases}$$

ψ est une fonction plurisousharmonique, car limite décroissante d'une suite de fonctions plurisousharmoniques. Soient enfin la fonction plurisousharmonique

$$\rho(z, v, w) = \operatorname{Max}\left[(\psi(z, v, w) - \psi(o)) \, , \quad (|z|^2 + |v|^2 + |w|^2 - 1)\right] ,$$

définie au voisinage de $\bar{B}$, sur et Ω l'ouvert défini par la condition $\rho < 0$. Le fait important est que la frontière de Ω $\rho \equiv 0$. En effet grâce à la condition (*) ρ est continue hors de V, et sur V cela résulte du fait que ψ est constante, donc égale à $\psi(0)$.

La fonction ρ n'est pas une fonction plurisousharmonique bornée d'exhaustion mais la propriété signalée est suffisante pour établir facilement la propriété "taut" (cf [2] et en particulier §3.3 la remarque).

2. **L'ouvert Ω est "taut".** En effet, si φ est une application holomorphe de Δ, le disque unité de $\boldsymbol{C}$, dans $\boldsymbol{C}^3$ à valeurs dans $\bar{\Omega}$, la fermeture de Ω, et s'il existe $\zeta \in \Delta$ tel que $\varphi(\zeta) \notin \Omega$, il résulte du principe du maximum pour la fonction sousharmonique $\rho \circ \varphi$ que cette fonction est identiquement nulle et donc que $\varphi(\Delta) \subset \bar{\Omega} - \Omega$.

3. L'ouvert Ω n'est évidemment pas hyperbolique complet car le chemin γ dans Ω défini ci-dessous est de longueur de Kobayashi finie et a pour point limite $0 \notin \Omega$. On définit γ: $[0(1/2)] \to \Omega$ par:

$$\gamma(t) = \left(t, t^2 - \left(t - \frac{1}{n}\right)\left(t - \frac{1}{n+1}\right), \frac{1}{n}\left(t - \frac{1}{n}\right)\left(t - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

si $1/(n+1) \leqq t \leqq 1/n (n \in \boldsymbol{N}^*)$. Cette définition est bien cohérente et pour tout entier $n \geqq 2$ $\gamma(1/n) = (1/n, 1/n^2, 0)$; si $t \in [1/(n+1)1/n]$ on a $\gamma(t) \in V_n$ et donc $\psi(\gamma(t)) = -\infty$ d'où $\gamma(t) \in \Omega$ puisqu'on vérifie aisément qu'on a $\gamma(t) \in B$. Le chemin γ est de longueur finie car, grâce à l'inclusion de $V_n \cap B$ dans Ω, on majore la longueur de $\gamma[1/(n+1)1/n]$, au moins pour n assez grand, par $2(1/n - 1/(n+1))$.

Remarques. Améliorant la construction présentée, N. Sibony a donné un exemple d'ouvert borné de $\boldsymbol{C}^2$ non hyperbolique complet mais possédant une fonction d'exhaustion plurisousharmonique bornée, donc taut. J. Fornaess a aussi donné un exemple.

Je remercie vivement Th. Barth qui a corrigé un choix explicite incorrect des fonctions f et g.

References

1. T. Barth, *Taut and tight complex manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **24** (1970), 429-431.
2. K. Diederich et J. E. Fornaess, *Pseudo convex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Inventiones Math., **39** (1977), 129-141.
3. N. Kerzman, *Taut manifolds and domains of holomorphy in C^n*, Notices Amer. Math. Soc., **16** (1969), 675-676.
4. S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, N. Y., M. Dekker, 1970.
5. H. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric. Several complex variables II*, Maryland. 1790, Lectures Notes 185.
6. H. WU, *Normal Families of holomorphic mappings*, Acta Math., **119** (1967), 193-233.

7. T. Barth, *Some counterexamples concerning intrinsic distances*, Proc. A.M.S., **66** (1977), 49-53.

Received July 9, 1980.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE ET CNRS LA 225
3, PLACE VICTOR HUGO
13331 MARSEILLE CEDEX 3
FRANCE