PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol 116, No. 1, 1985

LE PROBLÈME DE LÉVI POUR LES FIBRÉS GRASSMANNIENS ET LES VARIÉTÉS DRAPEAUX

KENZŌ ADACHI

In this paper we study the Levi problem for domains over the bundle whose fiber is a Grassmann manifold and whose base is a Stein manifold, and for domains over the flag manifold.

Introduction. Oka [**9**] a résolu le problème de Lévi pour des domaines au-dessus de C^n. Docquier-Grauert [**3**] ont résolu ce problème pour des domaines au-dessus d'une variété de Stein. Hirschowitz [**5**], [**6**], [**7**] a étudié le problème de Lévi pour des domaines au-dessus d'une variété infinitésimalement homogène. En particulier, Hirschowitz a démontré que tout ouvert non compact localement pseudoconvexe d'une variété grassmannienne est de Stein. Ueda [**10**] a démontré qu'un domaine localement pseudoconvexe au-dessus d'une variété grassmannienne X qui n'est pas appliqué homéomorphiquement sur X est une variété de Stein. D'autre part, Brun [**1**] a étudié le problème de Lévi pour des ouverts d'un fibré analytique localement trivial à base une variété de Stein et à fibre une variété homogène compacte. Dans ce papier, on étudié le problème de Lévi pour des domaines au-dessus d'un fibré à base une variété de Stein et à fibre une variété grassmannienne, et pour des domaines au-dessus d'une variété drapeau.

1.

DEFINITION 1. Soient X une variété complexe, E un espace Hausdorff connexe, et Φ une application localement homéomorphe de E dans X. Alors on dit que $\varepsilon = (E, \Phi, X)$ est un domaine étalé au-dessus de X, ou simplement un domaine.

Pour la définition du point frontière d'un domaine, nous référons à Grauert-Remmert [**4**] (Definition 4).

DEFINITION 2. On dit qu'un domaine $\varepsilon = (E, \Phi, X)$ est localement pseudoconvexe si pour chaque point frontière q il existe un voisinage U de q tel que $U \cap E$ soit une variété de Stein.

Soit $\varepsilon = (E, \Phi, X)$ un domaine. On désigne l'ensemble des points frontières de ε par ∂E. Alors on peut définir une structure de l'espace Hausdorff dans $\tilde{E} = E \cup \partial E$ et l'application continue $\tilde{\Phi}$ de $\tilde{E}$ dans X telles que $\tilde{\Phi} | E = \Phi$.

Soient S un ensemble analytique de positive codimension dans une variété complexe X et $\varepsilon = (E, \Phi, X)$ un domaine. On dit qu'un point frontière q est remuable le long de S s'il existe un voisinage U de q tel que $(U, \tilde{\Phi}|U, X)$ soit un domaine univalent et que $\partial E \cap U$ soit contenu dans $\tilde{\Phi}^{-1}(S)$. Alors on obtient le lemme suivant.

LEMME 1. *Soit S un sous-ensemble analytique complexe de positive codimension dans une variété X. Soient $\varepsilon = (E, \Phi, X)$ un domaine et $q \in \partial E$ un point frontière remuable le long de S. Alors il existe un voisinage V de $\Phi(q)$ et une section σ de ε sur $V - S$.*

On désigne par R l'ensemble des points frontières remuables le long de S. On pose $E^* = E \cup R$ et $\Phi^* = \tilde{\Phi}|E^*$. On dit qu'un domaine $\varepsilon^* = (E^*, \Phi^*, X)$ est l'extension de ε.

On a la proposition suivante due à Grauert-Remmert [**4**].

PROPOSITION 1. *Soient S un ensemble analytique complexe de positive codimension dans une variété X et $\varepsilon = (E, \Phi, X)$ un domaine. Supposons que ε soit localement pseudoconvexe à tous les points au-dessus de $X - S$. Alors*

(1) *S'il n'existe pas de point frontière remuable le long de S, alors ε est un domaine localement pseudoconvexe.*

(2) *Soit $\varepsilon^* = (E^*, \Phi^*, X)$ l'extension de ε le long de S. Alors ε^* est un domaine localement pseudoconvexe.*

De plus (2) $\Rightarrow$ (1).

2. Soit $V_{n,r}$ $(n \geq r)$ l'ensemble des (n, r)-matrices dont les rangs sont r. Soit $G_{n,r}$ la variété grassmannienne. On va démontrer le théorème suivant.

THEOREME 1. *Soit (X, S, π) un fibré localement trivial à fibre une variété grassmannienne $G_{n,r}$ et à base une variété de Stein S. Soit (D, Φ, X) un domaine localement pseudoconvexe. S'il n'existe aucun ouvert U de D tel que U soit appliqué homéomorphiquement sur un ouvert $\pi^{-1}(W)$, W un ouvert de S, alors D est de Stein.*

Démonstration. D'abord on a que $\mathrm{iso}(G_{n,r}) = \mathrm{PGL}(n)$ si $2r \neq n$ et $\mathrm{iso}(G_{n,r})/\mathrm{PGL}(n) = Z/2Z$ si $2r = n$ (voir par exemple J. Dieudonne [**2**]). Soit $\tilde{S} = \{(s, g)\colon s \in S, g \in \mathrm{iso}(G_{n,r}, \pi^{-1}(s))\}$. Soit $\nu_1\colon \tilde{S} \to S$ la projection canonique. Si $2r \neq n$, $(\tilde{S}, S, \nu_1)$ est un fibré principal holomorphe à groupe structural $\mathrm{PGL}(n)$. Si $2r = n$, la factorisation de Stein de $\tilde{S} \to S$ s'écrit $\tilde{S} \xrightarrow{u} \overline{S} \xrightarrow{v} S$ où v est un revêtement non ramifié à deux feuillets et u est un fibré principal à groupe structural $\mathrm{PGL}(n)$. Donc pour que D soit de Stein, il faut et il suffit que v^*D soit de Stein. Donc sans perte de généralité, on peut supposer que le groupe structural est $\mathrm{PGL}(n)$. On pose $\tilde{X} = \{((s, g), x)\colon (s, g) \in \tilde{S}, x \in \pi^{-1}(s)\}$. Alors on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\nu} & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\nu_1} & S \end{array}$$

et $(\tilde{X}, X, \nu)$ est un espace fibré principal holomorphe à groupe structural $\mathrm{PGL}(n)$. Soit $\mathrm{U}(n)$ le groupe unitaire. Soient $\mathrm{gl}(n)$ et $\mathrm{u}(n)$ les algèbres de Lie de $\mathrm{GL}(n, C)$ et de $\mathrm{U}(n)$, respectivement. Alors

$$\mathrm{gl}(n)/C = \mathrm{u}(n)/\sqrt{-1}R + \sqrt{-1}\,\mathrm{u}(n)/\sqrt{-1}R$$

et

$$\mathrm{u}(n)/\sqrt{-1}R \cap \sqrt{-1}\left(\mathrm{u}(n)/\sqrt{-1}R\right) = (0).$$

Donc $\mathrm{PGL}(n)$ est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal $\mathrm{u}(n)/\mathrm{u}(1)$ de $\mathrm{PGL}(n)$. En particulier, $\mathrm{PGL}(n)$ est une variété de Stein. On définit une application $\theta\colon \tilde{S} \times G_{n,r} \to \tilde{X}$ par $\theta((s, g), t) = ((s, g), g(t))$. Alors θ est l'application biholomorphe de $\tilde{S} \times G_{n,r}$ sur $\tilde{X}$. Soit $\tau_1\colon V_{n,r} \to G_{n,r}$ l'application canonique. On définit une application $\tau\colon \tilde{S} \times V_{n,r} \to \tilde{S} \times G_{n,r}$ par $\tau(x, y) = (x, \tau_1(y))$. On pose

$$D_1 = \tilde{X} \times_X D, \qquad D_2 = (\tilde{S} \times G_{n,r}) \times_{\tilde{X}} D_1,$$
$$D_3 = (\tilde{S} \times V_{n,r}) \times_{(\tilde{S} \times G_{n,r})} D_2.$$

Alors on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} D_3 & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & D_2 & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & D_1 & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & D \\ \downarrow \Phi_3 & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi \\ \tilde{S} \times V_{n,r} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{S} \times G_{n,r} & \xrightarrow{\theta} & \tilde{X} & \xrightarrow{\nu} & X \end{array}$$

Alors $(D_3, \Phi_3, \tilde{S} \times V_{n,r})$ est un domaine localement pseudoconvexe. D'après le raisonnement de Ueda [**10**], $(D_3, \Phi_3, \tilde{S} \times C^{nr})$ est un domaine localement pseudoconvexe. Grâce au théorème de Docquier-Grauert [**3**], D_3 est de Stein. Grâce au théorème de Matsushima-Morimoto [**8**], D est de Stein. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

3. Soit

$$F=\left\{(g_1,\dots,g_p)\in G_{n,r_1}\times G_{n,r_2}\times\cdots\times G_{n,r_p}: g_1\subset g_2\subset\cdots\subset g_p\right\}$$

$(0<r_1<\cdots<r_p<n)$ une variété drapeau. Soient

$$p_i\colon F\to G_{n,r_1}\times\cdots\times G_{n,r_{i-1}}\times G_{n,r_{i+1}}\times\cdots\times G_{n,r_p}$$

les projections canoniques. Alors on obtient le théorème suivant:

THEOREME 2. *Soit (D,Φ,F) un domaine localement pseudoconvexe. Alors D est de Stein ou pour quelque i, $1\le i\le p$, il existe une section de Φ au-dessus de $p_i^{-1}(U_i)$, où U_i est un ouvert de*

$$G_{n,r_1}\times\cdots\times G_{n,r_{i-1}}\times G_{n,r_{i+1}}\times\cdots\times G_{n,r_p}.$$

Démonstration. Supposons qu'il n'existe aucune section de $p_i^{-1}(U_i)$ pour tout ouvert U_i de

$$G_{n,r_1}\times\cdots\times G_{n,r_{i-1}}\times G_{n,r_{i+1}}\times\cdots\times G_{n,r_p}$$

et tout i, $1\le i\le p$. Soit $s\in V_{n,k}$. Alors on peut considérer la matrice s comme une application de C^k dans C^n et l'image $\operatorname{Im}s$ comme un sous-espace vectoriel complexe de dimension k dans C^n. On définit une application

$$\pi\colon V_{n,r_p}\times V_{r_p,r_{p-1}}\times\cdots\times V_{r_2,r_1}\to F$$

par

$$\pi(t_p,t_{p-1},\dots,t_1)=\left(\operatorname{Im}(t_pt_{p-1}\cdots t_1),\dots,\operatorname{Im}(t_pt_{p-1}),\operatorname{Im}t_p\right).$$

Alors $(V_{n,r_p}\times V_{r_p,r_{p-1}}\times\cdots\times V_{r_2,r_1},F,\pi)$ est un espace fibré principal holomorphe à groupe structural $\mathrm{GL}(r_p)\times\mathrm{GL}(r_{p-1})\times\cdots\times\mathrm{GL}(r_1)$. Soit $\tilde D$ un produit fibré de $V_{n,r_p}\times\cdots\times V_{r_2,r_1}$ et D sur F. Alors on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}\tilde D & \xrightarrow{\tilde\pi} & D\\ \downarrow{\scriptstyle\tilde\Phi} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi}\\ V_{n,r_p}\times\cdots\times V_{r_2,r_1} & \xrightarrow{\pi} & F\end{array}$$

Alors $(\tilde{D}, \tilde{\Phi}, V_{n,r_p} \times \cdots \times V_{r_2,r_1})$ est un domaine localement pseudoconvexe. On va démontrer que $(\tilde{D}, \tilde{\Phi}, C^{nr_p} \times V_{r_p,r_{p-1}} \times \cdots \times V_{r_2,r_1})$ est un domaine localement pseudoconvexe. Soit

$$T = \left(C^{nr_p} - V_{n,r_p}\right) \times V_{r_p,r_{p-1}} \times \cdots \times V_{r_2,r_1}.$$

Soit R l'ensemble des points frontières remuables le long de T. Supposons que R ne soit pas vide. D'après la méthode de Ueda, il existe un point $q_0 \in R$, un voisinage U de q_0, et un voisinage V de $(0, t_0)$ où $0 \in C^{nr_p}$, $t_0 \in V_{r_p,r_{p-1}} \times \cdots \times V_{r_2,r_1}$ tels que U soit appliqué homéomorphiquement sur V par $\tilde{\Phi}$. Il existe un ouvert B de $G_{n,r_1} \times \cdots \times G_{n,r_{p-1}}$ tel que

$$\pi\tilde{\Phi}(U \cap \tilde{D}) = \left\{(g_1,\ldots,g_p) \in B \times G_{n,r_p} : g_1 \subset \cdots \subset g_p\right\}.$$

Alors

$$\pi\tilde{\Phi}(U \cap \tilde{D}) = P_p^{-1}(B).$$

Donc $\tilde{\pi}(U \cap \tilde{D})$ est appliqué homéomorphiquement par Φ sur $P_p^{-1}(B)$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc R est vide. $(\tilde{D}, \tilde{\Phi}, C^{nr_p} \times V_{r_p,r_{p-1}} \times \cdots \times V_{r_2,r_1})$ est par suite un domaine localement pseudoconvexe. Grâce au théorème de Oka, $\tilde{D}$ est de Stein. Grâce au théorème de Matsushima-Morimoto, D est de Stein. Ceci achève la démonstration du Théorème 2.

C'est naturel d'étendre les deux théorème au problème de Lévi pour des domaines au-dessus d'un fibré à base une variété de Stein et à fibré une variété drapeau. Mais, pour résoudre ce problème, il me semble qu'il faut savoir les isomorphismes des variétés drapeaux. Donc les résultats ne peuvent pas être donnés ici.

REFERENCES

[1] J. Brun, *Sur le problème de Lévi dans certains fibrés*, Manuscripta Math., **14** (1974), 217–222.

[2] J. Dieudonné, *La Géométrie des Groupes Classiques*, Springer-Verlag (1963).

[3] F. Docquier and H. Grauert, *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **140** (1960), 94–123.

[4] H. Grauert and R. Remmert, *Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungestheorie*, Com. Math. Helv., (1956/57), 152–183.

[5] A. Hirschowitz, *Sur la géométrie analytique au-dessus des grassmannienne*, C. R. A., **271** (1970), 1167–1170.

[6] ______, *Pseudoconvexité au-dessus d'espace plus ou moins homogènes*, Invent. Math., **26** (1974), 303–322.

[7] ______, *Le problème de Lévi pour les espaces homogènes*, Bull. Soc. Math. France, **103** (1975), 191–201.

[8] Y. Matsushima and A. Morimoto, *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein*, Bull. Soc. Math. France, **88** (1960), 137–155.

[9] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.

[10] T. Ueda, *Pseudoconvex domains over Grassmann manifolds*, J. Math. Kyoto Univ., **20-2** (1980), 391–394.

Received February 16, 1982 and in revised form September 9, 1983.

Université de Nagasaki
Nagasaki 852 Japon