PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 152, No. 1, 1992

SUR LA PROJECTION DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES RÉELLES

DANIEL PECKER

In this paper we give the following characterization: A semi-algebraic subset of $\mathbb{R}^n$ is the projection of an irreducible algebraic subset of $\mathbb{R}^{n+1}$ if and only if its Zariski closure is irreducible.

1. Introduction. Dans ce travail nous nous intéressons au problème de trouver un ensemble algébrique, si possible irréductible, se projetant sur un ensemble semi-algébrique donné. Comme le fait remarquer R. Thom, c'est le problème herméneutique que devaient résoudre les habitants enchaînés de la caverne de Platon.

Notre résultat principal est de nature géométrique:

THÉORÈME 2. *Un semi algébrique de $\mathbb{R}^n$ est la projection d'un ensemble algébrique irréductible de $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si son adhérence de Zariski est un ensemble algébrique irréductible.*

On commencera par le résultat algébrique suivant d'élimination relative des inégalités. (On note $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.)

THÉORÈME 1. *Soit S un ensemble semi-algébrique contenu dans V une variété irréductible de $\mathbb{R}^N$ non réduite à un point.*

Il existe un polynôme $P(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$ dont la réduction modulo $I(V)$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}(V)[t]$ tel que:

$$\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \mathbf{x} \in V \text{ et } \exists t \in \mathbb{R}, \qquad P(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Comme un ensemble algébrique réel d'équation irréductible n'est pas forcément irréductible on utilisera, pour déduire le Théorème 2 du Théorème 1, une généralisation du critère de changement de signe (qui permet de déduire sous certaines conditions l'irréductibilité d'un ensemble algébrique réel de l'irréductibilité de ses équations).

Dans le cas où le semi-algébrique est localement fermé d'intérieur non vide, une démonstration plus explicite des Théorèmes 1 et 2 figure dans **[P1]** et **[P2]**. Dans le cas général abordé ici, on utilise un argument de densité déduit du théorème d'irréductibilité de Hilbert qu'on rappelle au paragraphe 2.

Le cas où S est fermé pour la topologie euclidienne est plus simple, toutes les projections peuvent alors être choisies propres, et les équations des ensembles algébriques unitaires (cf. **[P3]**).

En général, ce n'est plus le cas, mais les fibres des projections obtenues dans cet article sont finies.

Enfin, on donne des réponses à la plupart des questions posées dans les premiers travaux sur ce sujet (cf. **[Mot1]**, **[Mot2]**, **[A.G1]**, **[A.G2]**). Pour d'autres détails, on pourra se reporter à **[P2]**.

2. L'élimination relative des inégalités. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ on note $\mathbf{x} \geq 0$ si et seulement si tous les $x_i \geq 0$.

Soit $a_k(\mathbf{x}) = x_{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$ $k = 1, 2, \dots$ et $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots)$. Remarquons que $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \geq 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \geq 0$ ou $-\mathbf{x} \geq 0$.

Définissons les polynômes $P_n(\mathbf{x}, u)$ et $A_n(\mathbf{x})$ par récurrence:

$$P_1(\mathbf{x}, u) = u - x_1, \qquad A_1(\mathbf{x}) = x_1,$$
$$P_{n+1}(\mathbf{x}, u) = P_n(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}), (u - (x_1 + \cdots + x_{n+1}))^2),$$
$$A_{n+1}(\mathbf{x}) = A_n(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})).$$

A_n est une somme positive de monômes. $a_i(\mathbf{x}) = a_i(-\mathbf{x})$, d'où $P_i(\mathbf{x}, u) = P_i(-\mathbf{x}, -u)$ et $A_i(\mathbf{x}) = A_i(-\mathbf{x})$.

PROPOSITION 1. (i) *P_n et A_n sont homogènes de degré* 2^{n-1}.

(ii) *P_n est unitaire en chaque variable.*

(iii) *Si* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \geq 0 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$, $P_n(\mathbf{x}, t^2) = 0$.

(iv) *Si* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \geq 0$ *et* $u \notin]0, 2(x_1 + \cdots + x_n)[$ *alors* $|P_n(\mathbf{x}, u)| \geq A_n(\mathbf{x})$.

(v) *Si* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *et l'un des* $x_i < 0$, *alors* $P_n(\mathbf{x}, t^2) \geq |A_n(\mathbf{x})|$.

Démonstration. (i) et (ii) sont faciles, (iii) est démontré dans **[P2]**. Démontrons (iv) par récurrence.

Le cas $n = 1$ est clair, $|P_1(\mathbf{x}, u)| = |u - x| \geq x$ si $u \notin]0, 2x[$. Supposons la propriété vraie pour n, et montrons la pour $n + 1$.

On a: $P_{n+1}(\mathbf{x}, u) = P_n(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}), (u - (x_1 + \cdots + x_{n+1}))^2)$. Par l'hypothèse sur u on a:

$$(u - (x_1 + \cdots + x_{n+1}))^2 > (x_1 + \cdots + x_{n+1})^2 \geq 2(a_1(\mathbf{x}) + \cdots + a_n(\mathbf{x})).$$

D'où par l'hypothèse de récurrence:

$$|P_{n+1}(\mathbf{x}, u)| \geq A_n(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})) = A_{n+1}(\mathbf{x}).$$

(v) Par récurrence: pour $n = 1$ c'est vrai.

On a: $P_{n+1}(\mathbf{x}, t^2) = P_n(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}), (t^2-(x_1+\cdots+x_{n+1}))^2)$. Si $a(\mathbf{x}) \geq 0$, par la remarque on voit que $-\mathbf{x} \geq 0$.

On a alors en utilisant (iv):

$$\begin{aligned}|P_{n+1}(\mathbf{x}, t^2)| = |P_{n+1}(-\mathbf{x}, -t^2)| &\geq |A_n(a_1(-\mathbf{x}), \dots, a_n(-\mathbf{x}))| \\ &= |A_{n+1}(\mathbf{x})|\end{aligned}$$

ce qui montre l'affirmation dans ce cas, $P_{n+1}(\mathbf{x}, t^2)$ étant unitaire en t et ne pouvant s'annuler, son signe est constamment positif.

Sinon c'est que l'un des $a_i(\mathbf{x}) < 0$, et par récurrence:

$$P_{n+1}(x, t^2) \geq |A_n(a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))| = |A_{n+1}(\mathbf{x})|. \qquad \square$$

Dans la suite de ce travail, on notera V un ensemble algébrique irréductible non réduit à un point contenu dans $\mathbb{R}^N$, $I(V)$ son idéal, $k = \mathbb{R}(V)$ le corps des fractions de $\mathbb{R}[V] = \mathbb{R}[\mathbf{x}]/I(V)$ et $k' = \mathbb{C}(V) = k[i]$.

PROPOSITION 2. *Soit S un sous-ensemble semi-algébrique de V donné par la formule:*

$$S = \{\mathbf{x} \in V | C_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, C_n(\mathbf{x}) \geq 0, B_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, B_m(\mathbf{x}) > 0\}.$$

Alors il existe un polynôme $P(\mathbf{x}, t)$ de $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$, et un polynôme $a(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}[\mathbf{x}] - I(V)$ tel que

(i) *si $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$, $P(\mathbf{x}, t) = 0$,*
(ii) *si $\mathbf{x} \in V$ et $\mathbf{x} \notin S$ $P(\mathbf{x}, t) \geq |a(\mathbf{x})|$,*
(iii) *si $\mathbf{x} \in V$, $P(\mathbf{x}, \infty) \geq 1$.*
(iv) *Si P est constant pour $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, alors $P(\mathbf{x}, t) = 1$.*

Démonstration. On peut supposer qu'aucun des polynômes C_i, B_j n'est dans $I(V)$.

Soit

$$P(\mathbf{x}, t) = (B_1 \cdots B_m)^{2^{m+n-1}} P_{m+n}\left(C_1, \dots, C_n, B_1, \dots, B_{m-1}, \frac{1}{B_1 \cdots B_m}, t^2\right).$$

Par la Proposition 1 $P(\mathbf{x}, t)$ a une racine réelle si et seulement si $C_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, C_n(\mathbf{x}) \geq 0$, $B_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, B_m(\mathbf{x}) > 0$. De plus on a $P(\mathbf{x}, t) \geq |a(\mathbf{x})|$ si l'un des $C_i < 0$ ou l'un des $B_i \leq 0$, avec $a(\mathbf{x})$

donné par:

$$a(\mathbf{x}) = (B_1 \cdots B_m)^{2^{m+n-1}} A_{m+n}\left(C_1\,, \dots\,, C_n\,,\right.$$
$$\left. B_1\,, \dots\,, B_{m-1}\,, \frac{1}{B_1 B_2 \cdots B_m}\right).$$

En effet si l'un des B_i est égal à zéro, A_{n+m} n'étant pas unitaire on a $a(\mathbf{x}) = 0$. Dans le cas où aucun des B_i ne s'annule on utilise directement la Proposition 1.

Quitte à multiplier chacun des B_i, C_j par des nombres positifs, on peut supposer que $a(\mathbf{x}) \notin I(V)$.

Enfin, P ne peut étre constant que si $B_1 \cdots B_m = 0$ et à ce moment-là $P(\mathbf{x}, t) = 1$. □

Dans la démonstration du théorème suivant, on va utiliser le *théorème d'irréductibilité de Hilbert* (cf. **[L1]** p. 225, 236 et 239). Rappelons-le sous la forme qui nous intéresse ici:

Si A est un anneau de type fini sur $\mathbb{R}$, k son corps des fractions qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{R}$, k' une extension algébrique finie de k, et $P(\lambda, t)$ un polynôme irréductible dans $k[\lambda, t]$. Alors il existe $\lambda_0 \in A$, tel que $P(\lambda_0, t)$ soit irréductible dans $k'[t]$.

Théorème 1 (Elimination relative des inégalités). *Soit $V \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble algébrique irréductible non réduit à un point, $I(V)$ son idéal, $k = \mathbb{R}(V)$; $k' = k[i]$, et S un ensemble semi-algébrique contenu dans V. Alors il existe un polynôme $P(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$ tel que:*

(i) *Si $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$, $P(\mathbf{x}, t) = 0$.*

(ii) *La réduction de $P(\mathbf{x}, t)$ modulo $I(V)$ est irréductible dans $k'[t]$.*

(iii) *$P(\mathbf{x}, t)$ n'est identiquement nul pour aucune valeur de $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.*

Démonstration. Soit $S = \bigcup_i^M S_i$, $8\,S_i = \{\mathbf{x} \in V | C_1^i \geq 0, \dots, C_{n_i}^i \geq 0, B_1^i > 0, \dots, B_{m_i}^i > 0\}$. Pour chaque i, soit $P_i(\mathbf{x}, t)$ et $a_i(\mathbf{x})$ des polynômes donnés par la Proposition 2.

Soit $H(\mathbf{x}) = a_1^2(\mathbf{x}) \cdot \cdots \cdot a_M^2(\mathbf{x})$, et $\lambda(\mathbf{x})$ un polynôme quelconque. Définissons P par la formule:

$$P(\mathbf{x}, t) = (1 + H + H \cdot \lambda^2(\mathbf{x})) P_1^2 \cdots P_M^2 - H(\mathbf{x}).$$

Démontrons que le polynôme P a les propriétés voulues:

(i) Si $\mathbf{x} \in \bigcup_i^M S_i$ l'un des P_i s'annule pour une certaine valeur de t, et $P(\mathbf{x}, t)$ prend une valeur négative on nulle. Quand t tend vers l'infini $P(\mathbf{x}, t)$ prend des valeurs strictement positives. P s'annule donc pour une valeur réelle de t. D'autre part si $\mathbf{x} \notin \bigcup_i^M S_i$, $P_i^2(\mathbf{x}, t) \geq a_i^2(x)$, d'où $P_1^2 \cdots P_M^2 \geq H(\mathbf{x})$ et cela implique que $P(\mathbf{x}, t) \geq H^2(\mathbf{x})$ et par suite $P(\mathbf{x}, t) > 0$. Ce polynôme P a donc les bonnes propriétés de projection.

(ii) En vertu du théorème d'irréductibilité de Hilbert, pour montrer qu'il existe un polynôme λ de $\mathbb{R}[V]$ tel que P soit irréductible dans $k[V]$ il suffit de démontrer le lemme suivant:

LEMME. *Soit k un corps, B, H, K des éléments non nuls de k, $A \in k[t]$ un polynôme non constant, alors $P = (K + H\lambda^2)A^2 - B^2$ est irréductible dans $k[\lambda, t]$.*

Démonstration du lemme. P n'a pas de diviseur non constant dans $k[t]$, en effet ce diviseur diviserait A, et par soustraction B ce qui est impossible puisque $B \in k$. Si $P = (\alpha\lambda + \beta)(\gamma\lambda + \delta)$ avec α, β, γ, δ dans $k[t]$ on a $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma\delta \neq 0$, $\alpha\gamma = HA^2$, $\alpha\delta + \gamma\beta = 0$ et $\beta\delta = KA^2 - B^2$. Tout diviseur commun de δ et γ divisant P, on voit donc que δ et γ sont premiers entre eux. Comme δ divise $\gamma \cdot \beta$ (par la troisième relation) on en déduit par le lemme d'Euclide que δ divise β (dans $k[t]$), de même β divise δ. D'où $\beta = r\delta$ avec $r \in k$, en reportant dans la quatrième relation on obtient $B^2 = KA^2 - r\delta^2$ avec K, $r \in k$. Comme B est un polynôme constant de $k[t]$ et que A ne l'est pas, on voit en identifiant que $r = v^2 K$ où $v \in k$, et par suite $B = K(A - \nu\delta)(A + \nu\delta)$, d'où $A + \nu\delta \in k$, $A - \nu\delta \in k$ ce qui implique que $A \in k$, ce qui n'est pas vrai. La démonstration du lemme, et donc de (ii) est achevée.

(iii) Montrons enfin que le polynôme obtenu $P(\mathbf{x}, t)$ ne s'annule identiquement en aucun point $\mathbf{x}$ de $\mathbf{C}^N$. Sinon, si $(1 + H + H\lambda^2) = 0$ en ce point, alors $H = 0$ et par suite $P_1^2 \cdots P_M^2 = 0$ ce qui est impossible, ce polynôme ayant une limite au moins égale à 1 quand t tend vers l'infini. Par suite la seule possibilité c'est que $P_1^2 \cdots P_M^2$ soit de degré 0 en t, c'est-à-dire que chaque polynôme P_i le soit, mais alors c'est que

$$\text{chaque } P_i = 1 \text{ et par suite } P = P_1^2 \cdots P_M^2 = 1 \neq 0. \qquad \square$$

REMARQUES. L'utilisation du théorème de Hilbert, si elle permet un énoncé beaucoup plus général que celui trouvé en **[P2]** ne fournit pas vraiment d'indications sur la manière de trouver le polynôme

$\lambda(\mathbf{x})$. D'autre part les degrés (même en t) des polynômes obtenus sont plus élevés que ceux qu'on obtient en **[P2]** pour des ensembles semi-algébriques localement fermés. Enfin, dans le cas où S est fermé le polynôme P obtenu, contrairement à ceux de **[P2]** n'est pas unitaire. On pourrait en modifiant la définition de P faire en sorte qu'il le soit, mais au prix d'un degré plus élevé.

3. Les projections de variétés algébriques réelles. Dans ce paragraphe nous allons déduire de l'irréductibilité des équations de certains ensembles leur irréductibilité géométrique. Une telle déduction nécessite évidemment quelques précautions: $X^2 + Y^2(Y+1)^2 = 0$ est bien une équation irréductible, mais l'ensemble de ses zéros ne l'est pas. (D'après le Théorème 1 cet ensemble a même une équation $\mathbb{C}$-irréductible). Notre outil sera une généralisation du critère de changement de signe. Commençons par rappeler quelques notations: $V \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble algébrique irréductible, $I(V)$ l'idéal de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N] = \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ formé de tous les polynômes qui s'annulent sur V, $\mathbb{R}[V] = \mathbb{R}[\mathbf{x}]/I(V)$ et $k = \mathbb{R}(V)$ le corps des fractions de $\mathbb{R}[V]$. On suppose que V n'est pas réduit à un point. Un polynôme de $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$ sera dit irréductible modulo $I(V)$, s'il est irréductible, et si sa réduction modulo $I(V)$ est un polynôme irréductible de $k[t]$. On dira enfin qu'un élément de $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$ est un polynôme réel. Si W est un ensemble algébrique réel contenu dans $\mathbb{R}^m$ notons $W_{\mathbb{C}}$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}^m$ où tous les polynômes de $I(W)$ s'annulent: $W_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^m = W$. Si W est irréductible, $W_{\mathbb{C}}$ l'est aussi.

LEMME. *Soit* $\widetilde{W} = \{(\mathbf{x}, t) \in V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} | R(\mathbf{x}, t) = 0\}$ *où* $R(\mathbf{x}, t)$ *est un polynôme ne s'annulant identiquement en aucun point* $\mathbf{x} \in V_{\mathbb{C}}$. *Soit* $W' \subset \mathbb{C}^{N+1}$ *un ensemble algébrique, et* $a(\mathbf{x})$ *un polynôme non identiquement nul sur* V, *alors si* $\widetilde{W} - \{a(\mathbf{x}) = 0\} \subset W'$ *on a aussi* $\widetilde{W} \subset W'$.

Démonstration. D'après le théorème sur la dimension des intersections (cf. **[L2**, page 36**]**, **[Sam]** our **[Sha]**), chacune des composantes irréductibles de $\widetilde{W}$ est de dimension r, et aucune d'elles ne peut être contenue dans $\widetilde{W} \cap \{a(\mathbf{x}) = 0\} = (\{a(\mathbf{x}) = 0\} \cap V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}) \cap \{R(\mathbf{x}, t) = 0\}$ qui est de dimension $r-1$ ($\mathbb{R}(\mathbf{x}, t)$ ne pouvant s'annuler identiquement sur aucune des composantes de $\{a(\mathbf{x}) = 0\} \cap V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ puisque ces composantes sont des cylindres). Soit W_i une composante irréductible de $\widetilde{W}$, comme $W_i \subset W' \cup (\widetilde{W} \cap \{a(\mathbf{x}) = 0\})$ et $W_i \not\subset (\widetilde{W} \cap \{a(\mathbf{x}) = 0\})$, on a donc $W_i \subset W'$ et par suite $\widetilde{W} \subset W'$. □

PROPOSITION 3 (Généralisation du critère de changement de signe). *Soit* $V \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble algébrique irréductible,* $I(V)$ *son idéal,* $R(\mathbf{x}, t)$ *un polynôme réel irréductible modulo* $I(V)$ *qui n'est identiquement nul pour aucune valeur de* $\mathbf{x} \in V_{\mathbb{C}}$. *Alors, si* $W = \{(\mathbf{x}, t) \in V \times \mathbb{R} | R(\mathbf{x}, t) = 0\}$ *se projette verticalement sur un ensemble de même dimension que* V, W *est irréductible.*

Démonstration. Le cas où V est un point étant trivial, on peut donc supposer que V n'est pas réduit à un point. On peut supposer aussi que R est de même degré que sa réduction modulo $I(V)$. Montrons que cette hypothèse implique que R est de degré minimal au sens suivant: soit P un polynôme de $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$ non congru à zéro modulo $I(V)$, nul sur un fermé $W_1 \subset W$ de dimension maximale, et de degré minimal en t parmi tous les polynômes ayant ces propriétés. Le coefficient $b(\mathbf{x})$ du terme de plus haut degré en t de $P(\mathbf{x}, t)$ n'appartient pas à $I(V)$. On a la divison dans $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$:

$$b^M(\mathbf{x})R(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t) + R_1(\mathbf{x}, t).$$

Par la minimalité de P, on voit que R_1 est congru à zéro modulo $I(V)$, et en réduisant modulo $I(V)$ on obtient: $\overline{b^M(\mathbf{x})}\,\overline{R(\mathbf{x}, t)} = \overline{\lambda(\mathbf{x}, t)}\,\overline{P(\mathbf{x}, t)}$. Comme $\overline{R(\mathbf{x}, t)}$ est irréductible dans $\mathbb{R}(V)[t]$ et $\overline{P(\mathbf{x}, t)}$ n'est pas de degré zéro en t, on en déduit que P et R ont même degré en t, c'est-à-dire que R est de degré minimal.

Supposons maintenant que le polynôme Q s'annule sur un fermé $W_1 \subset W$ de dimension maximale. Si $a(\mathbf{x}) \notin I(V)$ est le coefficient du terme de plus haut degré en t de $R(\mathbf{x}, t)$, on a la division (d) dans $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$:

$$\text{(d)} \qquad a^D(\mathbf{x})Q(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}, t)R(\mathbf{x}, t) + R_2(\mathbf{x}, t).$$

Par la minimalité de R, on voit que $R_2 \in I(V)[t]$. Soit $\widetilde{W} - \{(\mathbf{x}, t) \in V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} | R(\mathbf{x}, t) = 0\}$ et $W' = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}^{n+1} | Q(\mathbf{x}, t) = 0'\}$. De l'égalité (d) on déduit que $\widetilde{W} - \{a(\mathbf{x}) = 0\} \subset W'$. Par le lemme, cela implique que $\widetilde{W} \subset W'$, c'est-à-dire que le polynôme Q s'annule sur $\widetilde{W}$ tout entier, donc sur $W \subset \widetilde{W}$. □

REMARQUE. Si $V = \mathbb{R}^N$, la Proposition 3 n'est autre que le critère de changement de signe (voir [**BCR**, page 85] ou [**Mil**, p. 14]).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de ce travail:

THÉORÈME 2. *Un semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ *est la projection d'un ensemble algébrique irréductible de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *si et seulement si son adhérence de Zariski est un ensemble algébrique irréductible.*

Démonstration. Soit S ce semi-algébrique et V son adhérence de Zariski qu'on suppose irréductible. Par le Théorème 1 et le critère de changement de signe généralisé (Proposition 3) on voit que S est projection d'un ensemble algébrique irréductible de $\mathbb{R}^{n+1}$.

La réciproque est facile: si l'adhérence de Zariski de S n'est pas irréductible, on peut trouver deux polynômes P_1 et P_2 non identiquement nuls sur S, tels que leur produit soit identiquement nul sur S. Par suite si $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se projette sur S, ces deux polynômes ne sont pas identiquement nuls sur W, mais leur produit l'est, ce qui montre que W n'est pas irréductible. □

REMARQUE. Les projections obtenues ici sont quasi-finies, c'est-à-dire que leurs fibres sont des ensembles finis.

On peut maintenant se poser d'autres questions:

Quels sont les projections de variétés non singulières, de variétés rationnelles ou paramétrisables par des polynômes?

Cette dernière question semble en rapport avec la question de J. M. Gamboa: Quelles sont les images de $\mathbb{R}^n$ par des applications polynômiales?

REFERENCES

[A.G1] C. Andradas et J. M. Gamboa, *A note on projections of real algebraic varieties*, Pacific J. Math., **115**, no. 1, (1984), 1–11.

[A.G2] ———, *On projections of real algebraic varieties*, Pacific J. Math., **121**, no. 2, (1986), 281–291.

[B.C.R] J. Bochnak, M. Coste and M. F. Roy, *Géométrie Algébrique Réelle*, Ergebnisse der Mathematik, vol. 12, Springer-Verlag, 1987.

[L1] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, 1983.

[L2] ———, *Introduction to Algebraic Geometry*, Interscience, 1958.

[Mi1] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[Mot1] T. S. Motzkin, *Elimination theory of algebraic inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc., **61** (1955), 326.

[Mot2] ———, *The Real Solution Set of a System of Algebraic Inequalities is the Projection of a Hypersurface in One More Dimension*, Inequalities II, Academic Press, 1970, pp. 251–254.

[P1] D. Pecker, *Sur l'équation d'un ensemble algébrique de R^{n+1} dont la projection dans R^n est un ensemble semi-algébrique fermé donné*, C.R. Acad. Sci. Paris, **306**, série I, (1988), 265–268.

[P2] ———, *On the elimination of algebraic inequalities*, Pacific J. Math., **146**, no. 2, (1990), 305–314.

[P3] ———, *Projections propres de variétés algébriques réelles*, C.R. Acad. Sci. Paris, **309**, série I, (1989), 777–779.

[Sam] P. Samuel, *Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[Sha] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

Received August 23, 1990 and in revised form February 18, 1991.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4 PLACE JUSSIEU 75252 PARIS (FRANCE)