PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 159, No. 2, 1993

MESURES DE PATTERSON-SULLIVAN SUR LE BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE AU SENS DE GROMOV

MICHEL COORNAERT

Patterson et Sullivan ont mis en relation la croissance des orbites d'un groupe discret d'isométries de H^n et certaines propriétés géométriques et ergodiques de son ensemble limite. On étend quelques-uns de leurs résultats à des groupes d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov.

0. Introduction. Considérons l'espace hyperbolique usuel H^n, équipé d'un point base x_0. Munissons le bord ∂H^n de H^n de la *métrique visuelle* obtenue en regardant ∂H^n à partir de x_0 (la distance entre deux points de ∂H^n est l'angle que font entre eux les rayons géodésiques issus de x_0 et allant vers les deux points). ∂H^n est ainsi muni d'une structure de variété riemannienne isomorphe à celle de la sphère standard S^{n-1}. On sait que toute isométrie γ de H^n s'étend en un homéomorphisme conforme de ∂H^n. Soit $|\gamma'(\xi)|$ la *dilatation infinitésimale* de γ en $\xi \in \partial H^n$ (c'est-à-dire le rapport de similitude de $\gamma': T_\xi \partial H^n \to T_{\gamma\xi} \partial H^n$).

Soit maintenant Γ un groupe discret non élémentaire d'isométries de H^n. Etant donné un réel $D \geq 0$, une mesure μ sur ∂H^n, de masse totale finie et non nulle, est dite *Γ-conforme de dimension D* si

$$\gamma^* \mu = |\gamma'|^D \mu \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

où $\gamma^*\mu$ est la mesure définie par $\gamma^*\mu(A) = \mu(\gamma A)$ pour tout $A \subset \partial H^n$.

Notons $n_Y(R)$ le nombre de points d'une orbite $Y \subset H^n$ de Γ situés à une distance $\leq R$ de x_0. *L'exposant critique* $e(\Gamma)$ du groupe Γ est

$$e(\Gamma) = \limsup_{R \to \infty} 1/R \operatorname{Log} n_Y(R).$$

L'inégalité triangulaire montre que $e(\Gamma)$ ne dépend ni du choix du point base x_0 ni de celui de l'orbite Y. Une minoration du volume de la boule de centre x_0 et de rayon R (volume en const$\cdot e^{(n-1)R}$ pour R grand) montre facilement $e(\Gamma) \leq n-1$. Cette minoration s'obtient en considérant des boules $B(y, r)$ ayant pour centres les $y \in Y$ et pour rayon un $r > 0$ assez petit pour que les boules $B(y, r)$ soient disjointes.

Patterson ($n = 2$, **[Pat-1]**) puis Sullivan (n quelconque, **[Sul-1]**) ont montré l'existence d'une mesure Γ-conforme de dimension $D = e(\Gamma)$ dont le support est l'ensemble limite $\Lambda \subset \partial H^n$ de Γ. Une telle mesure permet (sous certaines hypothèses sur Γ) d'obtenir des informations très intéressantes sur la croissance des orbites de Γ dans H^n, la mesure de Hausdorff sur Λ, les propriétés ergodiques de l'action de Γ sur Λ et les propriétés spectrales du laplacien de H^n/Γ. (voir **[Pat-1]**, **[Pat-2]**, **[Sul-1]**, **[Sul-2]**, **[Sul-3]**).

On se propose ici de généraliser la construction de Patterson-Sullivan à des groupes d'isométries d'un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov (**[Gro]**). On étend aussi quelques-uns des résultats de **[Sul-1]**, en suivant pas à pas les arguments qui y sont donnés.

Les résultats obtenus s'appliquent et particulier à l'étude de groupes proprement discontinus d'isométries d'arbres ou de variétés riemanniennes simplement connexes dont la courbure sectionnelle est majorée par une constante strictement négative. Ils s'appliquent aussi à l'étude des sous-groupes d'un groupe *hyperbolique* au sens de **[Gro]**.

Le plan de cet article est le suivant.

Le §1 est fait de rappels sur les espaces hyperboliques au sens de Gromov (**[Gro]**). Soit X un espace métrique hyperbolique complet, géodésique et localement compact. Gromov attache à X son *bord hyperbolique* ∂X. Le choix d'un point base $x_0 \in X$ et d'une constante $a > 1$ (à prendre suffisamment proche de 1) permet de définir une métrique "visuelle" sur ∂X (**[Gro]**, 7.2).

Dans le §2 on rappelle la définition de la *fonction de Busemann* éssociée à un rayon géodésique de X et on en donne quelques propriétés élémentaires qui serviront par la suite.

Toute isométrie γ de X s'étend en un homéomorphisme de $X \cup \partial X$. Dans le §3, on étudie la dilatation de γ pour la métrique visuelle sur ∂X. Plus précisément, si ξ est un point de ∂X et si h est la fonction de Busemann attachée à un rayon géodésique quelconque d'extrémité ξ, on montre que cette dilatation est, au voisinage de ξ, *proportionnelle* à $a^{\Delta(\xi)}$, en posant $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$. (Le "proportionnelle à" signifie ici que le rapport des deux quantités reste entre deux constantes strictement positives ne dépendant ni de ξ ni de γ.)

Les §§4, 5, 6 et 7 sont une copie quasi-conforme des §§1, 2 et 3 de **[Sul-1]**. Prenons un groupe Γ proprement discontinu d'isométries de X. Dans le §4 on définit la notion de mesure Γ-*quasi-conforme de dimension* D sur ∂X (pour D réel ≥ 0).

Définissons *l'exposant critique de base* a de Γ par

$$e_a(\Gamma) = e(\Gamma)/\mathrm{Log}\, a = \limsup_{R\to\infty} 1/R \log_a n_Y(R).$$

(Où $\log_a$ désigne le logarithme de base a et où $n_Y(R)$ est le nombre de points d'une orbite $Y \subset X$ de Γ situés à une distance $\leq R$ du point base x_0.)

Le groupe Γ est dit *élémentaire* si son ensemble limite $\Lambda \subset \partial X$ est de cardinal ≤ 2. On supposera toujours Γ non élémentaire.

Si Γ est d'exposant critique fini, on montre dans le §5, en suivant la construction de Patterson-Sullivan, l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ dont le support est Λ. Cela permet par exemple de montrer que l'exposant critique de Γ est toujours strictement positif.

Dans le §6 on généralise le *lemme de l'ombre de Sullivan* (**[Sul-1]**, §2). Ce lemme permet de montrer que toute mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X doit vérifier $D \geq e_a(\Gamma)$. Le lemme de l'ombre permet aussi de montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R)$ pour tout R.

Soit $Q(\Lambda)$ *l'enveloppe de Gromov* de Λ, c'est-à-dire la réunion des géodésiques $\subset X$ dont les extrémités sont dans Λ. $Q(\Lambda)$ est un fermé Γ-invariant. Le groupe Γ est dit *quasi-convexe-cocompact* si $Q(\Lambda)/\Gamma$ est un compact. Dans le §7 on établit les résultats suivants pour Γ quasi-convexe-cocompact et d'exposant critique fini:

(i) la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}$ de dimension $e_a(\Gamma)$ sur Λ a une masse totale finie et non nulle. En particulier la dimension de Hausdorff de Λ est égale à $e_a(\Gamma)$.

(ii) $\mathscr{H}$ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$, dont le support est Λ. Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D, dont le support est contenu dans Λ, alors $D = e_a(\Gamma)$ et les mesures $\mathscr{H}$ et μ sont *équivalentes*, c'est-à-dire absolument continues l'une par rapport à l'autre. En fait, les seules mesures Γ-quasi-conformes, dont le support est contenu dans Λ, sont les mesures de la forme $\psi \cdot \mathscr{H}$ pour ψ une fonction sur Λ $\mathscr{H}$-mesurable et $\mathscr{H}$-presque-partout comprise entre deux constantes strictement positives.

(iii) L'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$ est ergodique (i.e. pour tout borélien Γ-invariant $B \subset \Lambda$, on a $\mathscr{H}(B) = 0$ ou $\mathscr{H}(\Lambda - B) = 0$).

(iv) Il existe un réel $C \geq 1$ tel que

$$C^{-1} \exp(e(\Gamma)R) \leq n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R) \quad \text{pour tout } R.$$

(v) La *série de Poincaré* $g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}$ (où $|y|$ est la distance de y au point base) diverge en $s = e_a(\Gamma)$.

Dans le §8, X est un arbre. On définit la notion de *mesure* Γ-*conforme* sur ∂X, notion plus restrictive que celle de mesure Γ-quasi-conforme. La construction du §5 donne, pour Γ d'exposant critique fini, une mesure Γ-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ dont le support est Λ. Sous l'hypothèse Γ *convexe-cocompact* et d'exposant critique fini, on montre l'existence d'une unique mesure Γ-conforme supportée par Λ (à un facteur constant près). Cette mesure Γ-conforme canonique est la mesure de Hausdorff de dimension $e_a(\Gamma)$ sur Λ. On a donc, dans les arbres, une analogie encore plus grande avec le cas $X = H^n$ (cf. **[Sul-1]**, §3).

Une version arboriséee du *théorème géométrique des valeurs intermédiaires* (**[Sul-1]**, §4) montre (§9) que toute mesure μ Γ-conforme de dimension D sur le bord d'un arbre X permet de définir une mesure Γ-invariante m sur l'espace $\partial^2 X \subset \partial X \times \partial X$ des couples de points distincts de ∂X, si l'on pose

$$m = \mu \times \mu / |\xi - \eta|_a^{2D}$$

(où $|\xi - \eta|_a$ est la distance visuelle entre les points ξ et η de ∂X).

Pour X hyperbolique au sens de Gromov et μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X, la construction précédente donne une mesure m Γ-*quasi-invariante* sur $\partial^2 X$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $C \geq 1$ tel que $C^{-1} m(A) \leq m(\gamma A) \leq C m(A)$ pour tout $A \subset \partial^2 X$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Je remercie Athanase Papadopoulos pour son aide et pour ses nombreuses suggestions.

1. Rappels et notations. On rappelle quelques définitions et résultats de **[Gro]**. (Pour ces résultats, le lecteur trouvera des détails de démonstrations dans **[CDP]** et dans **[GH]**.)

Soit X un espace métrique et x_0 un point base de X. On note $|x - y|$ la distance entre les points x et y de X et $|x|$ la distance de x au point base x_0. Le *produit de Gromov* des points x et y est $(x \cdot y) = (|x| + |y| - |x - y|)/2$. Etant donné un réel $\delta \geq 0$, on dit que X est δ-*hyperbolique* si

$$(x \cdot y) \geq \min((x \cdot z), (y \cdot z)) - \delta \tag{1.1}$$

pour tous les $x, y, z \in X$ et pour tout choix du point base x_0.

L'espace X est dit *hyperbolique* s'il existe un $\delta \geq 0$ tel que X soit δ-hyperbolique.

Tout arbre (réel) est 0-hyperbolique. Toute variété riemannienne complète simplement connexe dont la courbure sectionnelle est partout majorée par une constant $-a^2 < 0$ est δ-hyperbolique pour $\delta = a^{-1}\log 3$. Un groupe de type fini G est dit *hyperbolique* si son graphe de Cayley, relativement à un système générateur fini S, est hyperbolique pour la métrique du mot (on montre que cette définition ne dépend pas du choix de S).

Une *géodésique* de X est une application g d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans X telle que $|g(t_1)-g(t_2)| = |t_1-t_2|$ pour tous les $t_1, t_2 \in I$. Un *segment* (resp. *rayon*) *géodésique* est une géodésique $g: I \to \mathbb{R}$ avec $I = [a, b]$ (resp. $I = [0, \infty[$). On se permettra parfois d'identifier une géodésique à son image.

L'espace métrique X est dit *géodésique* si deux points de X peuvent toujours être reliés par un segment géodésique.

Si X est géodésique et δ-hyperbolique, on a (voir par exemple **[CDP]**, Ch. 3, Lemme 2.7):

$$\text{dist}(x_0, [x, y]) - 4\delta \leq (x \cdot y) \leq \text{dist}(x_0, [x, y]) \tag{1.2}$$

pour tout segment géodésique $[x, y] \subset X$.

Dans tout ce qui suit, X est un espace *métrique géodésique, complet, localement compact et δ-hyperbolique.* Rappelons que, dans un espace géodésique, complet et localement compact, toutes les boules fermées sont compactes.

Gromov attache à X son *bord hyperbolique* ∂X. La topologie de X s'étend de manière naturelle à $X \cup \partial X$. L'espace $X \cup \partial X$ est un compact dans lequel X est un ouvert dense. Deux points distincts de $X \cup \partial X$ peuvent toujours être reliés par une géodésique. Toute isométrie de X s'étend en un homéomorphisme de $X \cup \partial X$ de manière unique.

Gromov définit (**[Gro]**, 7.2; **[CDP]**, Chapitre 11) une classe de métriques sur ∂X de la manière suivante. Fixons un réel $a > 1$ et définissons la a-longueur d'un chemin continu dans X comme étant l'intégrale le long du chemin de la fonction $f(x) = a^{-|x|}$. Définissons la a-distance $|x-y|_a$ entre deux points x et y de X comme étant la borne inférieure des a-longueurs des chemins continus reliant x et y. On montre qu'il existe une constante $a_0 > 1$ (qui ne dépend que de δ) telle que pour $1 < a < a_0$ les propriétés suivantes soient vérifiées:

(P1) L'application identique de X s'étend en un homéomorphisme de $X \cup \partial X$ sur le complété de X pour la métrique $|\ |_a$. En particulier, la métriqe $|\ |_a$ définit une métrique sur ∂X.

(P2) Il existe une constante $\lambda \geq 1$ (qui ne dépend que de δ et a) telle que, ξ et η étant des points de ∂X,

$$\lambda^{-1} a^{-(x \cdot y)} \leq |\xi - \eta|_a \leq \lambda a^{-(x \cdot y)} \tag{1.3}$$

pour tous les $x, y \in X$ situés dans des voisinages convenables respectivement de ξ et de η.

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$) et $\xi \in \partial X$, il y a un unique rayon géodésique r tel que $r(0) = x_0$ et $r(\infty) = \xi$. On peut prendre $a_0 = \infty$ et, si ξ et η sont deux points de ∂X, on a $|\xi - \eta|_a = (2/\operatorname{Log} a) a^{-|p|}$ où $p \in X$ est le point à partir duquel les deux rayons géodésiques d'origine x_0 et d'extrémités respectives ξ et η se séparent. On notera que $|\ |_a$ définit une distance ultramétrique sur le bord de l'arbre, c'est-à-dire vérifie $|\xi - \eta|_a \leq \max(|\xi - \upsilon|_a, |\upsilon - \eta|_a)$ pour tous les $\xi, \eta, \upsilon \in \partial X$.

Il résulte immédiatement de (1.3) que si l'on change de point base (a fixé) la nouvelle métrique est Lipschitz-équivalente à l'ancienne. (Deux métriques d et d' sont dites *Lipschitz-équivalentes* s'il existe une constante $L \geq 1$ telle que $L^{-1} d \leq d' \leq L d$.) De même, si l'on fait varier a, la métrique obtenue est Hölder-équivalente à la métrique initiale. (Les métriques d et d' sont dites Hölder-équivalentes s'il existe des constantes $L \geq 1$ et $\alpha > 0$ telles que $L^{-1} d^{\alpha} \leq d' \leq L d^{\alpha}$.) En fait, pour $a, a' \in]1, a_0[$, on déduit de (1.3):

$$L^{-1} |\xi - \eta|_a^{\alpha} \leq |\xi - \eta|_{a'} \leq L |\xi - \eta|_a^{\alpha}$$

pour une certaine constant $L \geq 1$ et pour $\alpha = \operatorname{Log} a' / \operatorname{Log} a$.

Dans tout ce qui suit on se *fixe* $a \in]1, a_0[$.

Comme on l'a dit dans l'introduction, les démonstrations se feront tout d'abord dans les arbres $(\delta = 0)$. On passera au cas général en utilisant le théorème de Gromov *d'approximation par les arbres*:

THÉORÈME 1.1 (*Gromov*, **[Gro]** 6.1). *Soit* $g_1, \ldots, g_n$ *des géodésiques définies sur des intervalles du type* $[0, T]$ *ou* $[0, \infty[$ *et telles que* $g_i(0) = x_0$ *pour tout* i. *Posons* $Z = \operatorname{Im} g_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Im} g_n$. *Alors il existe un arbre réel pointé* $(T, *)$ *et une application* $f: (Z, x_0) \to (T, *)$ *tels que*:

(1) $|z - z'| - C \leq |f(z) - f(z')| \leq |z - z'|$ *pour tous les* $z, z' \in Z$ *et pour une certaine constante* $C = C(\delta, n)$.

(2) *la restriction de* f *à* $\operatorname{Im} g_i$ *préserve les distances pour tout* i.

(3) *Si les géodésiques* g_i *et* g_j *sont définies sur* $[0, \infty[$ *et si l'on pose* $\xi_i = g_i(\infty)$ *et* $\xi_j = g_j(\infty)$ *alors*

$$K^{-1}|\xi_i - \xi_j|_a \leq |f(\xi_i) - f(\xi_j)|_a \leq K|\xi_i - \xi_j|_a,$$

pour une certaine constante $K = K(\delta, n, a) \geq 1$.

En fait on peut prendre $C = 2(1 + \log_2 n)\delta$ (**[Gro]**, **[CDP]**, **[GH]**). On notera que (3) est une conséquence immédiate de (1) et de (1.3).

2. Fonctions de Busemann. Soit $\xi \in \partial X$ et r un rayon géodésique tel que $r(\infty) = \xi$. La *fonction de Busemann* associée au rayon géodésique r est la fonction $h: X \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \lim_{t \to \infty} (|x - r(t)| - t) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

(La limite existe et est finie d'après l'inégalité triangulaire. On a aussi $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$; en particulier h est continue.)

On utilisera les lemmes élémentaires suivants (cf. **[Gro]**, 7.5.D).

LEMME 2.1. *Soit* r *et* r' *des rayons géodésiques de même extrémité* $\xi \in \partial X$. *Soit* h *et* h' *les fonctions de Busemann associées respectivement à* r *et* r'. *Alors pour tous les* $x_1, x_2 \in X$:

$$|(h(x_1) - h(x_2)) - (h'(x_1) - h'(x_2))| \leq C$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* δ.

Démonstration. On peut prendre $C = 20\delta$. Pour le détail voir **[Coo]** (Proposition 6). La démonstration utilise le théorème d'approximation par les arbres. □

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$), la fonction $h - h'$ est constante sur X.

LEMME 2.2. *Soit* ξ *un point de* ∂X, r *un rayon géodésique d'extrémité* ξ *et* h *la fonction de Busemann associée à* r. *Soit* x_1, x_2 *des points de* X. *Alors il existe un voisinage* $V \subset X \cup \partial X$ *de* ξ *tel que pour tout* $y \in V \cap X$:

$$|(h(x_1) - h(x_2)) - (|y - x_1| - |y - x_2|)| \leq C,$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* δ.

Démonstration. Supposons tout d'abord $r(0) = x_1$. Prenons x_1 comme point base de X. Appliquons le théorème d'approximation

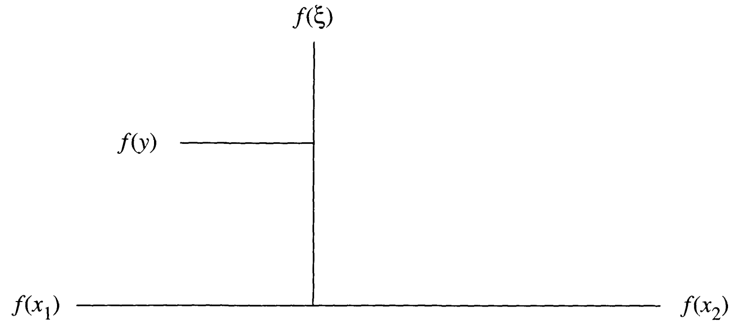


FIGURE 1

par les arbres (Th. 1.1) pour $n = 3$, $g_1 = r$, $g_2 =$ un segment géodésique $[x_1, x_2]$ et $g_3 =$ un segment géodésique $[x_1, y]$. On obtient, en posant $Z = \operatorname{Im} g_1 \cup \operatorname{Im} g_2 \cup \operatorname{Im} g_3$, un arbre réel pointé $(T, *)$ et une application $f: (Z, x_1) \to (T, *)$ qui préserve les distances le long des géodésiques g_1, g_2, g_3 et telle que

$$|z - z'| - C_1 \leq |f(z) - f(z')| \leq |z - z'|. \tag{2.1}$$

pour tous les $z, z' \in Z$ et pour une certaine constante $C_1 = C_1(\delta)$.

Soit z un point sur le rayon géodésique r. En prenant y et z dans un voisinage convenable de ξ, on peut rendre arbitrairement grand le produit de Gromov $(y \cdot z)$, et donc aussi le produit $(f(y) \cdot f(z))$ d'après (2.1). Or, pour $(f(y) \cdot f(z))$ assez grand, $f(y)$ et $f(\xi)$ ont même projection sur le segment $[f(x_1), f(x_2)]$ (Fig. 1). Par conséquent, il existe un voisinage V de ξ tel que pour $y \in V$ les points $f(y)$ et $f(\xi)$ ont même projection sur $[f(x_1), f(x_2)]$, ce qui implique

$$h_T(f(x_1)) - h_T(f(x_2)) = |f(y) - f(x_1)| - |f(y) - f(x_2)|,$$

où l'on a noté h_T la fonction de Busemann associée au rayon géodésique image de r par f.

Or $h_T(f(x_1)) = h(x_1) = 0$. D'autre part, d'après (2.1), $h_T(f(x_2))$ est égal à $h(x_2)$ à moins de C_1 près; de même, $|f(y) - f(x_i)|$ est égal à $|y - x_i|$ $(i = 1, 2)$ à moins de C_1 près. On a donc l'inégalité cherchée avec $C = 3C_1$, quand $r(0) = x_1$, et avec $C = 3C_1 + C_2$, où $C_2 = C_2(\delta)$ est la constante donnée par le Lemme 2.1, dans le cas général. □

LEMME 2.3. *Soit $\xi \in \partial X$ et h la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique r d'extrémité ξ. Il existe un voisinage $V \subset \partial X$*

de ξ tel que pour tout rayon géodésique r' d'extrémité $\xi' \in V$:

$$|(h(x_1) - h(x_2)) - (h'(x_1) - h'(x_2))| \leq C,$$

où h' est la fonction de Busemann associée à r' et où C est une constante qui ne dépend que de δ.

Démonstration. D'après le Lemme 2.1 on peut supposer $r(0) = r'(0) = x_1$. On applique de nouveau le théorème d'approximation par les arbres en prenant x_1 comme point base, $n = 3$, $g_1 =$ un segment géodésique $[x_1, x_2]$, $g_2 = r$ et $g_3 = r'$. D'où un arbre réel pointé $(T, *)$ et une application $f: (Z, x_1) \to (T, *)$, pour $Z = \operatorname{Im} g_1 \cup \operatorname{Im} g_2 \cup \operatorname{Im} g_3$, préservant les distances le long des g_i et vérifiant (2.1). Pour ξ' suffisament proche de ξ, les points $f(\xi')$ et $f(\xi)$ se projettent sur le même point du segment géodésique $[f(x_1), f(x_2)]$. Les fonctions de Busemann associées respectivement aux rayons géodésiques $f(r)$ et $f(r')$ prennent donc les mêmes valeurs en $f(x_1)$ et en $f(x_2)$. D'où, en utilisant (2.1), l'inégalité cherchée pour une constante $C = C(\delta)$. □

3. Dilatation au bord d'une isométrie. Soit γ une isométrie de X. Notons

$$\operatorname{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) = |\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|_a / |\eta_1 - \eta_2|_a$$

la dilatation de γ en un couple (η_1, η_2) de points distincts de ∂X.

Soit ξ un point de ∂X. Choisissons arbitrairement un rayon géodésique r d'extrémité ξ et soit h la fonction de Busemann associée à r. Posons

$$j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)} \quad \text{où } \Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0).$$

PROPOSITION 3.1. *Il existe une constante $C \geq 1$ (qui ne dépend que de δ et de a) et un voisinage V de ξ dans ∂X tels que*

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) \leq \operatorname{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) \leq C j_\gamma(\xi)$$

pour tous les points η_1, η_2 distincts de V.

Démonstration. On sait (propriété (P2) du §1) qu'il existe une constante $\lambda = \lambda(\delta, a) \geq 1$ telle que

$$\lambda^{-1} a^{-p} \leq |\eta_1 - \eta_2|_a \leq \lambda a^{-p} \quad \text{et}$$
$$\lambda^{-1} a^{-q} \leq |\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|_a \leq \lambda a^{-q}$$

où l'on a posé $p = (x_1 \cdot x_2)$, $q = (\gamma x_1 \cdot \gamma x_2)$, et où x_1 et x_2 sont des points de X suffisamment proches respectivement de η_1 et de η_2. On a donc

$$\lambda^{-2} a^{p-q} \leq \mathrm{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) \leq \lambda^2 a^{p-q}. \tag{3.1}$$

Si l'on pose $d(x) = |x| - |\gamma x| = |x - x_0| - |x - \gamma^{-1} x_0|$, on a

$$\begin{aligned} p - q &= (|x_1| + |x_2| - |\gamma x_1| - |\gamma x_2|)/2 \\ &= (d(x_1) + d(x_2))/2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

D'après le Lemme 2.2, on peut trouver une constante $C' = C'(\delta)$ et un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tels que pour $\eta_i \in V$ et pour $x_i \in X$ assez proche de η_i, on ait

$$|\Delta(\xi) - d(x_i)| \leq C' \qquad (i = 1, 2). \tag{3.3}$$

En utilisant (3.1), (3.2) et (3.3) il vient pour $\eta_i \in V$:

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) \leq \mathrm{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) \leq C j_\gamma(\xi)$$

pour $C = \lambda^2 a^{C'}$. □

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$), $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1} x_0)$ ne dépend pas du choix du rayon géodésique r d'extrémité ξ servant à définir la fonction de Busemann h. On notera aussi que $\Delta(\xi)$ (et donc $j_\gamma(\xi)$) est alors une fonction localement constante, et donc continue, de ξ. En fait si ξ est un point du bord de l'arbre, on a $\Delta(\xi) = |p - x_0| - |p - \gamma^{-1} x_0| = |p| - |\gamma p|$, p étant la projection de ξ sur $[x_0, \gamma^{-1} x_0]$.

4. Mesures Γ-quasi-conformes. Toutes les mesures considérées sont *boréliennes et régulières.* (Rappelons (voir [**F**], Ch. 2) qu'une *mesure* sur un ensemble E est une application μ de l'ensemble des parties de E dans $[0, \infty]$ qui vérifie, pour tout $A \subset E$ et pour toute famille dénombrable (A_i) de parties de E telle que $A \subset \bigcup A_i$, $\mu(A) \leq \sum \mu(A_i)$. Si E est un espace métrique, la mesure μ est dite *borélienne* si tout borélien $B \subset E$ est μ-mesurable, c'est-à-dire vérifie $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap (E - B))$ pour tout $A \subset E$. La mesure borélienne μ est dite *régulière* si, pour tout $A \subset E$, $\mu(A)$ est la borne inférieure des $\mu(B)$ pour B borélien tel que $A \subset B$.)

Soit γ une isométrie de X. Etant donné une mesure μ sur ∂X, on notera $\gamma^* \mu$ la mesure définie par $\gamma^* \mu(A) - \mu(\gamma A)$ pour tout $A \subset \partial X$. Rappelons aussi que la mesure μ' est *absolument continue* par rapport à la mesure μ si $\mu(A) = 0$ implique $\mu'(A) = 0$. La dérivée de Radon-Nikodym $d\mu'/d\mu \in L^1(\mu)$ est alors définie par $\mu'(f) = \mu(f\, d\mu'/d\mu)$ pour tout $f \in L^1(\mu')$.

Choisissons pour tout $\xi \in \partial X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. Cela permet de définir (§3) une application $j_\gamma\colon \partial X \to]0, \infty[$ par $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$ où $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$ et où h est la fonction de Busemann associée au rayon géodésique d'extrémité ξ que l'on a choisi.

Soit Γ un groupe d'isométries de X.

DÉFINITION 4.1. Soit D un réel ≥ 0 et μ une mesure sur ∂X de masse totale finie et non nulle. La mesure μ est dite Γ-*quasi-conforme de dimension* D si les mesures $\gamma^*\mu$ $(\gamma \in \Gamma)$ sont absolument continues les unes par rapport aux autres et s'il existe un réel $C \geq 1$ tel que

$$C^{-1} j_\gamma^D \leq d(\gamma^*\mu)/d\mu \leq C j_\gamma^D \qquad (\mu\text{-presque-partout})$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Cette définition ne dépend pas, d'après le Lemme 2.1, des choix de rayons géodésiques à faire pour définir la fonction j_γ. La caractérisation suivante des mesures Γ-quasi-conformes résulte immédiatement du Lemme 2.3.

PROPOSITION 4.2. *Soit μ une mesure sur ∂X de masse totale finie et non nulle. La mesure μ est Γ-quasi-conforme de dimension D si et seulement si il existe un réel $C \geq 1$ tel que, pour tout point $\xi \in \partial X$ et pour tout rayon géodésique r d'extrémité ξ, on puisse trouver un voisinage V de ξ dans ∂X tel que*

$$C^{-1} j_\gamma(\xi)^D \mu(A) \leq \mu(\gamma A) \leq C j_\gamma(\xi)^D \mu(A)$$

pour tout $A \subset V$, où $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$ avec $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$ (h étant la fonction de Busemann associée au rayon r).

Rappelons la définition de la D-mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^D$ sur un espace métrique $(E, |\ |)$. Notons $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ le *diamètre* de $U \subset E$. Soit $A \subset E$. Etant donné un réel $\varepsilon \geq 0$, on dit qu'une famille (U_i) de parties de E est un ε-recouvrement de A si $A \subset \bigcup U_i$ et si $|U_i| \leq \varepsilon$ pour tout i. On pose

$$\mathscr{H}_\varepsilon^D(A) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^D : (U_i) \text{ est un } \varepsilon\text{-recouvrement de } A\right\}$$

et

$$\mathscr{H}^D(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{H}_\varepsilon^D(A).$$

L'application $\mathscr{H}^D$ ainsi définie est une mesure borélienne et régulière sur E ([**F**], 2.10).

PROPOSITION 4.3. *Soit $E \subset \partial X$ un borélien Γ-invariant dont la D-mesure de Hausdorff est de masse totale finie et non nulle. Alors la D-mesure de Hausdorff sur E définit une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X.*

Démonstration. Si $\xi \in \partial X$, on peut trouver, d'après la Proposition 3.1, un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tel que $C^{-1} j_\gamma(\xi)|U|_a \leq |\gamma U|_a \leq C j_\gamma(\xi)|U|_a$ (où C est une constante ≥ 1) pour tout $U \subset V$. □

5. Existence d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$. Rappelons que Γ agit de manière *proprement discontinue* sur X si, pour tout compact $K \subset X$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments γ de Γ tels que γK rencontre K. Soit Λ l'ensemble limite de Γ, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation dans ∂X d'une orbite (quelconque) $Y \subset X$ de Γ. L'ensemble limite est un compact Γ-invariant. Le groupe Γ est dit *élémentaire* si $\operatorname{card}(\Lambda) \leq 2$.

Dans tout ce qui suit, Γ est un groupe *non élémentaire* d'isométries de X agissant de manière proprement discontinue sur X.

On aura besoin de l'énoncé suivant:

THÉORÈME 5.1 (*Gromov*). *Λ est l'unique ensemble minimal de l'action de Γ sur ∂X.*

Démonstration (esquisse). On doit montrer que tout fermé Γ-invariant non vide $A \subset \partial X$ contient Λ. Si $\operatorname{card}(A) \geq 2$ cela se montre ([**Gro**], 8.2.A) en considérant *l'enveloppe de Gromov* $Q(A) \subset X$ de A, c'est-à-dire la réunion des (images des) géodésiques $g\colon \mathbb{R} \to X$ dont les extrémités $g(-\infty)$ et $g(\infty)$ sont dans A. (On notera que le fait que Γ agisse de manière proprement discontinue sur X n'est pas utilisé jusqu'à présent.) Supposons maintenant que Γ fixe un point ξ de ∂X (i.e. Γ quasi-parabolique suivant la terminologie de [**Gro**]). On sait qu'il existe alors un élément γ de Γ de type hyperbolique et de point fixe attractif $\gamma^+ = \xi$ ([**Gro**], 8.1). Considérons un élément quelconque $\gamma' \in \Gamma$ et un point $x \in X$. La suite $\gamma^n x$ ($n \geq 0$) est une quasi-géodésique tendant vers ξ. Il en est de même de la suite $\gamma'\gamma^n x$, puisque γ' est une isométrie fixant ξ. D'après le théorème de stabilité des quasi-géodésiques ([**Gro**], 7.2; [**CDP**], Ch. 3; [**GH**], Ch. 5), il existe un réel C et une suite $\alpha(n)$ tels que $|\gamma'\gamma^n x - \gamma^{\alpha(n)} x| \leq C$. Puisque $|\gamma'\gamma^n x - \gamma^{\alpha(n)} x| = |\gamma^{-\alpha(n)}\gamma'\gamma^n x - x|$ et que le groupe Γ agit de manière proprement discontinue sur X, il existe deux entiers distincts n et m tels que $\gamma^{-\alpha(n)}\gamma'\gamma^n = \gamma^{-\alpha(m)}\gamma'\gamma^m$. Cela donne $\gamma'\gamma^{n-m}\gamma'^{-1} = \gamma^{\alpha(n)-\alpha(m)}$. On a donc, et notant $\operatorname{Fix}(\gamma) \subset$

∂X l'ensemble des points fixes de γ, $\gamma'\mathrm{Fix}(\gamma) = \mathrm{Fix}(\gamma^{\alpha(n)-\alpha(m)})$. D'où $\gamma'\mathrm{Fix}(\gamma) = \mathrm{Fix}(\gamma)$ puisque $\mathrm{Fix}(\gamma^{\alpha(n)-\alpha(m)}) \subset \mathrm{Fix}(\gamma)$. Cela montre que γ' fixe aussi le point fixe répulsif γ^- de γ. On en déduit $\Lambda \subset \{\gamma^+, \gamma^-\}$, puisque l'on a vu que tout fermé Γ-invariant de cardinal ≥ 2 doit contenir Λ. Mais cela imposerait à Γ d'être élémentaire. □

COROLLAIRE 5.2. *Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme sur ∂X telle que* support$(\mu) \subset \Lambda$, *alors* support$(\mu) = \Lambda$.

Démonstration. La Γ-quasi-conformité de μ montre que support(μ) est Γ-invariant. □

On va montrer l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme sur Λ de dimension $e_a(\Gamma)$. Introduisons tout d'abord quelques notations.

Soit Y une orbite de Γ dans X. Pour $R \geq 0$, notons $n_Y(R)$ le nombre de points de l'orbite Y situés à une distance $\leq R$ du point base x_0. *L'exposant critique de base* a de Γ est

$$e_a(\Gamma) = \limsup_{R\to\infty} 1/R \log_a n_Y(R)$$

($\log_a$ désigne le logarithme de base a). On a donc $e_a(\Gamma) = e(\Gamma)/\mathrm{Log}\, a$ en notant $e(\Gamma)$ l'exposant critique de base e de Γ. L'inégalité triangulaire montre que $e_a(\Gamma)$ ne dépend ni du point base x_0 ni de l'orbite $Y \subset X$. Si $y \in Y$ et si $N_y(R)$ est le nombre de $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\gamma y| \leq R$, on a

$$N_y(R) = \mathrm{card}(\Gamma_y) n_Y(R)$$

où $\Gamma_y \subset \Gamma$ est le stabilisateur de y. D'où aussi

$$e_a(\Gamma) = \limsup_{R\to\infty} 1/R \log_a N_y(R).$$

REMARQUE. Soit G un groupe hyperbolique et S un système générateur fini de G avec $\mathrm{card}(S) = n$. Soit X le graphe de Cayley de G relativement à S. Si Γ est un sous-groupe de G, le groupe Γ agit, par translation à gauche, de manière isométrique et proprement discontinue sur X. Notons que $e_a(\Gamma) \leq \log_a(2n-1)$. Si G est le groupe libre de base S et si $\Gamma = G$, on a $e_a(\Gamma) = \log_a(2n-1)$.

La *fonction de croissance* de l'orbite Y (relativement au point base x_0) est la série formelle

$$f_Y(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} n_k t^k$$

où $n_k = n_Y(k)$ est le nombre de points de Y situés à une distance $\leq k$ de x_0. Notons que si ρ est le rayon de convergence de $f_Y(t)$, on a $\log_a \rho = -e_a(\Gamma)$.

Considérons maintenant pour $s \geq 0$ la *série de Poincaré*

$$g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}.$$

Soit $d_k = n_k - n_{k-1}$ le nombre de points de Y à une distance $\in]k-1, k]$ de x_0. La série $g_Y(s)$ est de même nature que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_k a^{-sk} \tag{5.1}$$

(puisque le rapport des deux séries reste entre deux constantes strictement positives). La série (5.1) est de même nature que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} n_k a^{-sk} = f_Y(a^{-s}) \tag{5.2}$$

(puisque $n_k = d_0 + d_1 + \cdots + d_k$). Par conséquent, on a la

PROPOSITION 5.3. *La série de Poincaré* $g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}$ *converge pour* $s > e_a(\Gamma)$ *et diverge pour* $s < e_a(\Gamma)$.

On montre maintenant, en suivant la construction de Patterson-Sullivan, l'existence d'une mesure de probabilité Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ supporté par Λ (pour Γ d'exposant critique fini).

THÉORÈME 5.4. *Si* $e_a(\Gamma)$ *est fini, alors il existe une mesure* Γ*-quasi-conforme de dimension* $e_a(\Gamma)$ *dont le support est l'ensemble limite* Λ *de* Γ.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $g_Y(s)$ diverge en $s = e_a(\Gamma)$. Pour $s > e_a(\Gamma)$ considérons la mesure de probabilité définie sur X par

$$\mu_s = \frac{1}{g_Y(s)} \sum_{y \in Y} a^{-s|y|} \mathrm{dirac}(y)$$

où $\mathrm{dirac}(y)$ *est* la mesure de Dirac au point y.

L'espace $X \cup \partial X$ étant compact, on peut trouver une suite $s(i) >$ $e_a(\Gamma)$ qui tend vers $e_a(\Gamma)$ et telle que $\mu_{s(i)}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ sur $X \cup \partial X$.

On a $\mathrm{support}(\mu) \subset \Lambda$. En effet, soit une fonction continue $f: X \cup \partial X \to \mathbb{R}$ dont le support ne rencontre pas Λ. Il n'y a donc qu'un nombre fini de points de l'orbite Y dans support(f). D'autre part, d'après l'hypothèse de divergence faite en début de démonstration, $g_Y(s(i)) \to \infty$. D'où $\mu(f) = \lim \mu_{(i)}(f) = 0$.

Montrons maintenant que μ est Γ-quasi-conforme de dimension $D = e_a(\Gamma)$. Soit $\xi \in \partial X$, h la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique d'extrémité ξ, et $\gamma \in \Gamma$. Posons $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$ et $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$. D'après le Lemme 2.2, il existe un voisinage $V \subset X \cup \partial X$ de ξ et une constante $C = C(\delta) \geq 1$ telle que:

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) \leq a^{|x|-|\gamma x|} \leq C j_\gamma(\xi) \text{ pour tout } x \in V \cap X. \tag{5.3}$$

Prenons $f: X \cup \partial X \to \mathbb{R}$ continue de support $\subset V$. On a

$$\begin{aligned}
\mu_s(f) &= (1/g_Y(s)) \sum_{y \in V \cap Y} a^{-s|y|} f(y) \quad \text{et} \\
\gamma^* \mu_s(f) &= \mu_s(f \circ \gamma^{-1}) \\
&= (1/g_Y(s)) \sum_{\gamma^{-1} y \in V \cap Y} a^{-s|y|} f(\gamma^{-1} y) \\
&= (1/g_Y(s)) \sum_{y \in V \cap Y} a^{-s|\gamma y|} f(y) \\
&= (1/g_Y(s)) \sum_{y \in V \cap Y} a^{s(|y|-|\gamma y|)} a^{-s|y|} f(y),
\end{aligned}$$

d'où en utilisant (5.3):

$$C^{-s} j_\gamma(\xi)^s \mu_s(f) \leq \gamma^* \mu_s(f) \leq C^s j_\gamma(\xi)^s \mu_s(f)$$

qui montre, en passant à la limite pour $s = s(i)$, que la mesure μ est Γ-quasi-conforme de dimension $D = e_a(\Gamma)$.

Le Corollaire 5.2 donne alors support$(\mu) = \Lambda$ ce qui termine la démonstration du Théorème 5.4 dans le cas où la série de Poincaré $g_Y(s)$ diverge en $s = e_a(\Gamma)$.

Supposons maintenant que la série $g_Y(s)$ converge en $e_a(\Gamma)$. On modifie alors la construction précédente de la manière suivante. D'après un lemme de Patterson (**[Pat-1]**, Lemme 3.1), portant sur les séries de Dirichlet qui convergent en leur exposant critique, il existe une fonction croissante $H: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que:

(1) La série $g_{H,Y}(s) = \sum_{y \in Y} H(a^{|y|}) a^{-s|y|}$ diverge pour $s = e_a(\Gamma)$ et converge pour $s > e_a(\Gamma)$.

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\beta_0 \geq 0$ tel que $H(\alpha\beta) \leq \alpha^\varepsilon \beta$ pour tout $\alpha \geq 1$ et pour tout $\beta \geq \beta_0$.

On remplace alors μ_s par

$$\mu_{H,s} = \frac{1}{g_{H,Y}(s)} \sum_{y\in Y} H(a^{|y|})a^{-s|y|}\mathrm{dirac}(y).$$

Les $\mu_{H,s}$ sont des mesures de probabilité sur X pour $s > e_a(\Gamma)$. On peut donc trouver une suite $s(i) > e_a(\Gamma)$ qui converge vers $e_a(\Gamma)$ et telle que la suite $\mu_{H,s(i)}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ sur $X \cup \partial X$. Le fait que support$(\mu) \subset \Lambda$ se démontre comme plus haut.

Montrons la Γ-quasi-conformité de μ. Soit $\varepsilon > 0$ et β_0 donné par la propriété (2) de la fonction H. Prenons un point $\xi \in \partial X$ et un voisinage $V \subset X \cup \partial X$ de ξ tel que tout point $x \in V \cap X$ vérifie (5.3), $a^{|x|} \geq \beta_0$ et $a^{|\gamma x|} \geq \beta_0$. On a cette fois pour toute fonction continue $f: X \cup \partial X \to \mathbb{R}$ dont le support est inclus dans V:

$$\mu_{H,s}(f) = (1/g_{H,Y}(s)) \sum_{y\in V\cap Y} H(a^{|y|})a^{-s|y|}f(y),$$

$$\begin{aligned}\gamma^*\mu_{H,s}(f) &= \mu_{H,s}(f\circ\gamma^{-1})\\ &= (1/g_{H,Y}(s)) \sum_{\gamma^{-1}y\in V\cap Y} H(a^{|y|})a^{-s|y|}f(\gamma^{-1}y),\end{aligned}$$

i.e.

$$\gamma^*\mu_{H,s}(f) = (1/g_{H,Y}(s)) \sum_{y\in V\cap Y} H(a^{|\gamma y|})a^{-s|\gamma y|}f(y). \tag{5.4}$$

Soit y un point de $Y \cap V$. On a, comme plus haut, d'après (5.3),

$$C^{-1}j_\gamma(\xi)a^{-|y|} \leq a^{-|\gamma y|} \leq C j_\gamma(\xi)a^{-|y|}. \tag{5.5}$$

Si $|\gamma y| \leq |y|$, alors $H(a^{|\gamma y|}) \leq H(a^{|y|})$, puisque la fonction H est croissante. Si $|\gamma y| > |y|$, on a

$$\begin{aligned}H(a^{|\gamma y|}) &= H(a^{|\gamma y|-|y|}a^{|y|})\\ &\leq a^{\varepsilon(|\gamma y|-|y|)}H(a^{|y|}) \quad \text{(d'après la propriété (2) de } H\text{)},\\ &\leq C^\varepsilon j_\gamma(\xi)^{-\varepsilon}H(a^{|y|}) \quad \text{(d'après (5.3))}.\end{aligned}$$

On a donc pour tout $y \in V \cap Y$,

$$H(a^{|\gamma y|}) \leq \max(1, C^\varepsilon j_\gamma(\xi)^{-\varepsilon})H(a^{|y|}). \tag{5.6}$$

De même, $H(a^{|y|}) \leq H(a^{|\gamma y|})$ si $|y| \leq |\gamma y|$. Si $|y| > |\gamma y|$, on a

$$\begin{aligned}H(a^{|y|}) &= H(a^{|y|-|\gamma y|}a^{|\gamma y|}) \leq a^{\varepsilon(|y|-|\gamma y|)}H(a^{|\gamma y|})\\ &\leq C^\varepsilon J_\gamma(\xi)^\varepsilon H(a^{|\gamma y|}).\end{aligned}$$

On a donc pour tout $y \in V \cap Y$,

(5.7) $$H(a^{|y|}) \leq \max(1, C^{\varepsilon} j_{\gamma}(\xi)^{\varepsilon}) H(a^{|\gamma y|}).$$

Si l'on pose

$$m(\varepsilon) = \min(1, C^{-\varepsilon} j_{\gamma}(\xi)^{-\varepsilon}) \quad \text{et} \quad M(\varepsilon) = \max(1, C^{\varepsilon} j_{\gamma}(\xi)^{-\varepsilon}),$$

les inégalités (5.6) et (5.7) donnent l'encadrement:

(5.8) $$m(\varepsilon) H(a^{|y|}) \leq H(a^{|\gamma y|}) \leq M(\varepsilon) H(a^{|y|}),$$

pour tout $y \in Y \cap V$.

En appliquant (5.5) et (5.8) à (5.4), il vient

$$m(\varepsilon) C^{-s} j_{\gamma}(\xi)^{s} \mu_s(f) \leq \gamma^* \mu_s(f) \leq M(\varepsilon) C^{s} j_{\gamma}(\xi)^{s} \mu_s(f),$$

qui montre en faisant tendre $s = s(i)$ vers $e_a(\Gamma)$ et en faisant tendre ensuite ε vers 0 que la mesure μ est Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$. On montre enfin $\text{support}(\mu) = \Lambda$ comme plus haut. □

COROLLAIRE 5.5. *L'exposant critique $e_a(\Gamma)$ est strictement positif.*

Démonstration. Supposons $e_a(\Gamma) = 0$. Soit $\gamma \in \Gamma$ de type hyperbolique ([**Gro**], 8.2) et γ^+ le point attractif de γ. Quitte à remplacer γ par un de ses itérés, on peut supposer que γ est $1/2$-Lipschitz sur un voisinage V de γ^+ ([**Gro**], 8.1.G). La Γ-quasi-conformité de dimension $D = 0$ de la mesure μ, construite dans le théorème précédent, donne une constante $C \geq 1$ telle que $d(\gamma'^* \mu)/d\mu \geq C^{-1}$ pour tout $\gamma' \in \Gamma$. On a donc $\mu(\gamma^n V) \geq C^{-1} \mu(V)$ pour tout entier $n \geq 0$. On en déduit que γ^+ est de masse $\geq C^{-1} \mu(V)$. Il en résulte que tout point de l'orbite de γ^+ est de masse $\geq C^{-2} \mu(V)$. Or cette orbite est infinie. D'autre part $\mu(V)$ est strictement positif puisque $\gamma^+ \in \Lambda = \text{support}(\mu)$. Cela imposerait une masse infinie à Λ, d'où une contradiction. □

6. Le lemme de l'ombre de Sullivan. Pour $x \in X$ et $d \geq 0$, on notera $O(x, d)$ *l'ombre* sur ∂X de la boule centrée en x et de rayon d, c'est-à-dire l'ensemble des $\xi \in \partial X$ tels que tout rayon géodésique d'origine x_0 et d'extrémité ξ passe à une distance $\leq d$ de x.

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$), $O(x, d)$ est la boule fermée $\subset \partial X$ de centre ξ et de rayon $r = (2/\log a) a^{d-|x|}$ pour tout $\xi \in O(x, d)$.

La proposition suivante est une généralisation du *lemme de l'ombre* de Sullivan ([**Sul-1**], §2).

Proposition 6.1. *Soit μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X. Alors il existe des constantes $C \geq 1$ et $d_0 \geq 0$ telles que, pour tout $d \geq d_0$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

$$C^{-1} r^D \leq \mu(O(x, d)) \leq C r^D a^{2Dd},$$

où l'on a posé $x = \gamma^{-1} x_0$ et $r = a^{-|x|}$.

Les deux lemmes qui vont suivre nous seront utiles dans la démonstration de la Proposition 6.1.

(Rappelons les notations du §3. Soit r un rayon géodésique d'extrémité $\xi \in \partial X$ et h la fonction de Busemann associée à r. Etant donné une isométrie γ de X, on a posé $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$ avec $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1} x_0)$.)

Lemme 6.2. *Il existe une constante $C = C(\delta, a) \geq 1$ telle que, si l'on pose $x = \gamma^{-1} x_0$,*

$$C^{-1} a^{|x| - 2d} \leq j_\gamma(\xi) \leq C a^{|x|}$$

pour tout $\xi \in O(x, d)$ et pour tout rayon géodésique r d'extrémité ξ.

Démonstration. Si X est un arbre, on a vu que $\Delta(\xi) = |p| - |p - x|$ où p est la projection de ξ sur le segment $[x_0, x]$. Pour $\xi \in O(x, d)$, on a $|p - x| \leq d$ et donc $|x| - 2d \leq \Delta(\xi) \leq |x|$. D'où l'inégalité du lemme, avec $C = 1$, dans les arbres. Ici encore, on passe facilement au cas général en utilisant le théorème d'approximation par les arbres. □

Lemme 6.3. *Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $d_0 \geq 0$ tel que, pour tout $d \geq d_0$, le complémentaire de l'image de $O(\gamma^{-1} x_0, d)$ par γ soit de diamètre $\leq \varepsilon$ pour toute isométrie γ de X.*

Démonstration. Soit ξ et η des points de $\partial X - \gamma O(\gamma^{-1} x_0, d)$. Il existe donc des rayons géodésiques $[\gamma x_0, \xi[$ et $[\gamma x_0, \eta[$, issus de γx_0 et allant respectivement vers ξ et η, qui ne recontrent pas la boule centrée en x_0 et de rayon d. Pour $u \in [\gamma x_0, \xi[$ proche de ξ et $v \in [\gamma x_0, \eta[$ proche de η, on a, d'après la propriété (P2) du §1,

$$|\xi - \eta|_a \leq K a^{-(u \cdot v)},$$

pour une certaine constante $K = K(\delta, a)$ En utilisant la δ-hyperbolicité de X, il vient:

$$\begin{aligned} (u \cdot v) &\geq \min((u \cdot \gamma x_0), (v \cdot \gamma x_0)) - \delta \qquad \text{(d'après (1.1))} \\ &\geq d - 5\delta \qquad \text{(d'après (1.2))}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$|\xi - \eta|_a \leq K a^{5\delta} a^{-d} \quad \text{qui permet de conclure.} \qquad \square$$

Démonstration de la Proposition 6.1. La mesure μ n'est pas réduite à un atome d'après la Γ-quasi-conformité de μ et le fait que Γ ne fixe aucun point de ∂X. Par conséquent, la masse totale M de μ est strictement plus grande que la borne supérieure m_0 des $\mu(\{\xi\})$ $(\xi \in \partial X)$. Fixons un réel m tel que $m_0 < m < M$. D'après la définition de m_0 et la compacité de ∂X, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que toute partie de ∂X de diamètre $\leq \varepsilon$ soit de mesure $\leq m$. Il existe donc, d'après le Lemme 6.3, une constante d_0 indépendante de γ telle que la mesure de $\gamma(\partial X - O(x, d))$ soit $\leq m$ pour tout $d \geq d_0$. On aura pour un tel d :

$$M - m \leq \mu(\gamma O(x, d)) \leq M. \tag{6.1}$$

Choisissons pour chaque point $\xi \in \partial X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. Cela permet de définir j_γ sur ∂X. D'après le Lemme 6.2, on a pour tout $\xi \in O(x, d)$:

$$C_1^{-1} a^{|x|-2d} \leq j_\gamma(\xi) \leq C_1 a^{|x|} \tag{6.2}$$

pour une certaine constante $C_1 = C_1(\delta, a) \geq 1$. La mesure μ étant Γ-quasi-conforme de dimension D on a en utilisant (6.2):

$$C_1^{-1} a^{-D|x|} \leq \mu(O(x, d))/\mu(\gamma O(x, d)) \leq C_1 a^{-D|x|} a^{2Dd}. \tag{6.3}$$

On obtient l'encadrement voulu en multipliant (6.1) et (6.3) membre à membre. $\square$

L'énoncé suivant montre que l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme impose une certaine majoration de la croissance des orbites de Γ dans X.

PROPOSITION 6.4. *Soit μ une mesure Γ-quasi conforme de dimension D sur ∂X et $Y \subset X$ une orbite de Γ. Soit $n_Y(R)$ le nombre de points de Y situés à une distance $\leq R$ du point base. Alors il existe un réel C tel que $n_Y(R) \leq C a^{DR}$ pour tout R.*

Dans la démonstration de la Proposition 6.4 on utilisera le lemme suivant.

LEMME 6.5. *Soit d un réel ≥ 0. Il existe un entier N tel que, pour tout $\xi \in \partial X$ et pour tout entier k, le nombre de $y \in Y$ tels que $\xi \in O(y, d)$ et $|y| \in]k-1, k]$ soit $\leq N$.*

Démonstration du Lemme 6.5. Soit y et y' des points de Y tels que $\xi \in O(y, d) \cap O(y', d)$ et tels que $|y|, |y'| \in]k-1, k]$. Montrons que $|y-y'| \leq 4d+1$. Choisissons un rayon géodésique $[x_0, \xi[$ allant de x_0 à ξ. Par définition de $O(y, d)$, il existe un point p sur $[x_0, \xi[$ tel que $|y-p| \leq d$. L'inégalité triangulaire donne $|y|-|y-p| \leq |p| \leq |y|+|y-p|$. On a donc $|p| \in]k-1-d, k+d]$. De même on pourra trouver un point p' sur $[x_0, \xi[$ tel que $|y'-p'| \leq d$ et $|p'| \in]k-1-d, k+d]$. Les points p et p' étant situés sur un même rayon géodésique issu de x_0, on en déduit $|p-p'| \leq (k+d)-(k-1-d) = 2d+1$. D'où $|y-y'| \leq |y-p| + |p-p'| + |p'-y'| \leq 4d+1$.

Mais, puisque le groupe Γ agit de manière proprement discontinue sur X, la boule fermée de centre y et de rayon $4d+1$ ne contient qu'un nombre fini N (indépendant de $y \in Y$) de points de Y. □

Démonstration de la Proposition 6.4. Soit E_k l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\gamma^{-1}x_0| \in]k-1, k]$ et $\nu_k = \mathrm{card}(E_k)$. D'après la Proposition 6.1, on peut trouver des réels $C_1 \geq 1$ et $d \geq 0$ tels que pour tout k et pour tout $\gamma \in E_k$:

$$a^{-Dk} \leq C_1 \mu(O(\gamma^{-1}x_0, d)). \tag{6.4}$$

On a d'autre part,

$$\sum_{\gamma \in E_k} \mu(O(\gamma^{-1}x_0, d)) \leq C_2 \mu \left(\bigcup_{\gamma \in E_k} O(\gamma^{-1}x_0, d) \right), \tag{6.5}$$

puisque, d'après le Lemme 6.5, le nombre de $\gamma \in E_k$ tels que $\xi \in O(\gamma^{-1}x_0, d)$ est majoré par une constante ne dépendant ni de $\xi \in \partial X$ ni de k. De (6.4) et (6.5) on déduit

$$\nu_k \leq C_1 C_2 \mu(\partial X) a^{Dk} = C_3 a^{Dk},$$

D'où, en notant N_k le nombre de $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\gamma x_0| \leq k$, $N_k = \varphi_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_k \leq C_4 a^{Dk}$ et donc $n_Y(R) \leq C_5 a^{DR}$. □

Par définition, $e_a(\Gamma) = \limsup 1/R \log_a n_Y(R)$. On a donc le

COROLLAIRE 6.6. *Toute mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X doit vérifier $D \geq e_a(\Gamma)$.*

Le corollaire précédent et la Proposition 4.3 donnent le

COROLLAIRE 6.7. *S'il existe un borélien Γ-invariant $B \subset \partial X$ et un réel $D \geq 0$ tel que la D-mesure de Hausdorff de B soit de masse totale* *finie et non nulle, alors* $D \geq e_a(\Gamma)$ *(en particulier* Γ *est d'exposant critique fini).*

D'après le Théorème 5.4, il existe, pour Γ d'exposant critique fini, une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma) = e(\Gamma)/\mathrm{Log}(a)$. On a donc le

COROLLAIRE 6.8. *Il existe un réel* C *tel que* $n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R)$ *pour tout* R.

7. Groupes quasi-convexes-cocompacts. Soit toujours Γ un groupe non élémentaire d'isométries de X d'ensemble limite Λ. Notons $Q(\Lambda)$ *l'enveloppe de Gromov* de Λ, c'est-à-dire *la* réunion des (images des) géodésiques $g: \mathbb{R} \to X$ dont les extrémités $g(-\infty)$ et $g(\infty)$ sont dans Λ. Il est clair que $Q(\Lambda)$ est Γ-invariant. Le théorème d'Ascoli montre facilement que $Q(\Lambda)$ est fermé dans X (rappelons que les boules fermées de X sont compactes). Le groupe Γ est dit *quasi-convexe-cocompact* si $Q(\Lambda)/\Gamma$ est un compact. Si l'on se fixe une orbite $Y \subset X$ de Γ, cela revient à dire qu'il existe une constante C tel que tout point de $Q(\Lambda)$ soit à une distance $\leq C$ de Y.

REMARQUE. Un groupe discret Γ d'isométries de H^n est dit *convexe-cocompact* (voir **[Sul-1]**, §3) si $H(\Lambda)/\Gamma$ est compact, où $H(\Lambda) \subset H^n$ est l'enveloppe convexe de Λ. On notera que Γ est convexe-cocompact si et seulement si Γ est quasi-convexe-cocompact (la nécessité est évidente; pour montrer la suffisance, on utilise le fait qu'il existe une constante $C = C(n)$ telle que tout point situé à l'intérieur d'un simplexe de H^n soit à une distance $\leq C$ de la réunion des arêtes du simplexe (par récurrence, pour $n = 2$ ce n'est rien d'autre que la δ-hyperbolicité de H^2)).

La caractérisation suivante des groupes quasi-convexe-cocompacts est intéressante en soi.

PROPOSITION 7.1. *Soit* $Y \subset X$ *une orbite de* Γ. *Alors* Γ *est quasi-convexe cocompact si et seulement si il existe un réel* C *tel que tout rayon géodésique issu de* x_0 *et allant vers un point de* Λ *reste à une distance* $\leq C$ *de* Y.

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, soit ξ et η des points de Λ et $]\xi, \eta[$ une géodésique qui les relie. Menons des rayons géodésique $[x_0, \xi[$ et $[x_0, \eta[$. La *finesse* du triangle géodésique $[x_0, \xi, \eta]$ montre que tout point de $[\xi, \eta[$ est à une distance $\leq C_1$ de

$[x_0, \xi[\, \cup [x_0, \eta[$, où C_1 est une constante qui ne dépend que de δ (voir par exemple **[CDP]**, Ch. 2, Prop. 2.2). Par conséquent, si $[x_0, \xi[$ et $[x_0, \eta[$ restent à une distance $\leq C$ de Y, alors $]\xi, \eta[$ reste à une distance $\leq C + C_1$ de Y.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons Γ quasi-convexe-cocompact. Il existe donc une constante C telle que tout point de $Q(\Lambda)$ reste à une distance $\leq C$ de Y. L'ensemble Λ n'étant pas réduit à un point, on peut trouver une constante $A > 0$ telle que, pout tout $\xi \in \Lambda$, il existe $\eta \in \Lambda$ tel que $|\xi - \eta|_a \geq A$. Soit $[x_0, \xi[$ un rayon géodésique allant de x_0 à $\xi \in \Lambda$. Menons des géodésiques $]\xi, \eta[$ et $]x_0, \eta[$ pour un η dans Λ tel que $|\xi - \eta|_a \geq A$. Soit p un point sur $]\xi, \eta[$ avec $|p|$ minimal. Pour u et v des points sur $]\xi, \eta[$ proches respectivement de ξ et η, on aura, d'après la propriété (P2) du §1, $(u \cdot v) \leq B$ pour une certaine constante B qui se calcule en fonction de A, a et δ. En prenant soin de prendre u et v de part et d'autre de p, on a $(u \cdot v) \geq \operatorname{dist}(x_0, [u, v]) - 4\delta$, d'après (1.2). On a donc $|p| = \operatorname{dist}(x_0, [u, v]) \leq B + 4\delta$. Tout point de $[x_0, \xi[$ est à une distance $\leq C_1 = C_1(\delta)$ de $[x_0, p[\, \cup [p, \xi[$ (en se servant de la finesse du triangle $[x_0, \xi, p])$. Par conséquent, si x est un point de $[x_0, \xi[$ tel que $|x| > C_2 = C_1 + B + 4\delta$, alors x est à une distance $\leq C_1$ de $]\xi, p]$ et donc à une distance $\leq C + C_1$ d'un point de l'orbite Y. D'autre part, il existe une constante C_3 telle que tout point de la boule fermée centrée en x_0 et de rayon C_2 soit à une distance $\leq C_3$ de Y. On en déduit que tout point de $[x_0, \xi[$ reste à une distance $\leq C_4 = \max(C_3, C + C_1)$ de Y. □

On suppose, dans la suite de cette section, Γ *quasi-convexe-cocompact et d'exposant critique fini.*

Soit Y une orbite de Γ dans X. Rappelons que l'on a noté $n_Y(R)$ le nombre de points de Y à une distance $\leq R$ du point base x_0. On a le

THÉORÈME 7.2. *Il existe un réel* $C \geq 1$ *tel que*

$$C^{-1} \exp(e(\Gamma)R) \leq n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R)$$

pour tout R.

Démonstration. D'après le Corollaire 6.8, il suffit de démontrer la première inégalité. Il est clair que l'on peut supposer que x_0 appartient à Y. D'après la Proposition 7.1, il existe un réel C_1 tel que tout point situé sur un rayon géodésique allant de x_0 à un point quelconque de Λ soit à une distance $\leq C_1$ de l'orbite Y. Par conséquent, si ξ est un point de Λ et si u est le point situé sur un rayon géodésique $[x_0, \xi[$ à la distance R de x_0, il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $|u - \gamma^{-1}x_0| \leq C_1$. Il en résulte que ξ appartient à l'ombre $O(\gamma^{-1}x_0, C_1)$. D'autre part, l'inégalité triangulaire donne $R - C_1 \leq |\gamma^{-1}x_0| \leq R + C_1$. Notons $E(R)$ l'ensemble des points x de l'orbite de x_0 tels que $R - C_1 \leq |x| \leq R + C_1$. Ce qui précède montre que Λ est contenu dans la réunion des $O(x, C_1)$ pour $x \in E(R)$. On a donc, μ désignant une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $D = e_a(\Gamma)$ et de support Λ (rappelons que l'existence d'une telle mesure résulte du Théorème 5.4),

$$\sum_{x \in E(R)} \mu(O(x, C_1)) \geq \mu(\Lambda).$$

D'où, si d_0 est la constante fournie par la Proposition 6.1 et si l'on prend $d = \max(d_0, C_1)$:

$$\sum_{x \in E(R)} \mu(O(x, d)) \geq \mu(\Lambda).$$

Or, d'après la Proposition 6.1, on a $\mu((O(x, d)) \leq C_2 a^{-DR}$ (où C_2 est un réel strictement positif qui ne dépend ni de x ni de R). On en déduit

$$\operatorname{card}(E(R)) \geq \text{const} \cdot a^{DR},$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 7.3. *La série de Poincaré* $g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}$ *diverge en* $s = e_a(\Gamma)$.

Démonstration. Posons $n_k = n_Y(k)$. On a pour $s > e_a(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} g_Y(s) &\geq C_1 \sum_{k \in \mathbb{N}} n_k a^{-ks} \\ &\geq C_2 \sum_{k \in \mathbb{N}} a^{-k(s - e_a(\Gamma))} \qquad \text{(d'après le Théorème 7.2)} \\ &\geq C_3 / (1 - a^{-(s - e_a(\Gamma))}). \end{aligned}$$

D'où $g_Y(s) \to \infty$ quand $s \to e_a(\Gamma)$. □

Pour $\xi \in \partial X$ et $r \geq 0$, notons $B(\xi, r)$ la boule $\subset \partial X$ de centre ξ et de rayon r.

Proposition 7.4. *Soit μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ. Alors il existe un réel $C \geq 1$ tel que*

$$C^{-1} r^D \leq \mu(B(\xi, r)) \leq C r^D$$

pour tout $\xi \in \Lambda$ et pour tout $r \geq 0$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que X soit un arbre. D'après la Proposition 7.1, il existe un réel C_1 tel que tout point situé sur un rayon géodésique allant de x_0 à un point quelconque de Λ soit à une distance $\leq C_1$ de l'orbite de x_0. Soit d_0 comme dans la Proposition 6.1. Considérons un point ξ de Λ. Soit u le point sur le rayon géodésique $[x_0, \xi[$ tel que $r = (2/\operatorname{Log} a) a^{-|u|}$. On notera que $B(\xi, r)$ est l'ensemble des points de ∂X dont la projection sur $[x_0, \xi[$ appartient à $[u, \xi[$. Soit v le point situé sur $[u, \xi[$ tel que $|u - v| = d_0 + C_1$ et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $|\gamma^{-1} x_0 - v| \leq C_1$ (Fig. 2). Si l'on pose $d = |u - \gamma^{-1} x_0|$, on remarque que $B(\xi, r) = O(\gamma^{-1} x_0, d)$. L'inégalité triangulaire donne $d \geq |u - v| - |v - \gamma^{-1} x_0| \geq d_0$. La Proposition 6.1 nous donne donc

$$C_2^{-1} r'^D \leq \mu(B(\xi, r)) \leq C_2 r'^D a^{2Dd} \tag{7.1}$$

où $C_2 \geq 1$ est une constante qui ne dépend ni de ξ ni de r et où l'on a posé $r' = a^{-|\gamma^{-1} x_0|}$.

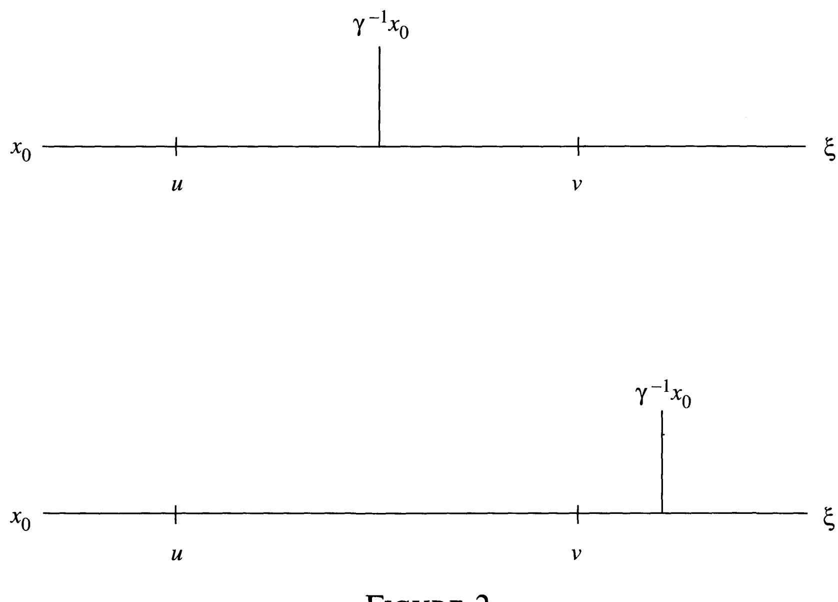


FIGURE 2

Comme $|u| \leq |\gamma^{-1}x_0| \leq |u| + d_0 + 2C_1$, le rapport r/r' reste donc entre deux constantes strictement positives qui ne dépendent ni de ξ ni de r. Comme d'autre part $d \leq d_0+2C_1$, (7.1) donne l'encadrement cherché.

Ici encore, l'approximation par les arbres permet d'étendre la démonstration au cas général. □

COROLLAIRE 7.5. *Soit μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ et soit $\mathscr{H}^D$ la D-mesure de Hausdorff sur Λ. Alors il existe une constante $C \geq 1$ telle que*

$$C^{-1}\mathscr{H}^D(A) \leq \mu(A) \leq C\mathscr{H}^D(A)$$

pour tout $A \subset \Lambda$.

Démonstration (**[Sul-1]**, §3). Soit (U_i) un ε-recouvrement de A (avec $U_i \subset \Lambda$). La proposition précédente nous donne une constante C_1 telle que $\mu(U) \leq C_1|U|^D$ pour tout $U \subset \Lambda$. On a alors $\mu(A) \leq \mu(\bigcup U_i) \leq \sum \mu(U_i) \leq C_1 \sum |U_i|^D$. D'où $\mu(A) \leq C_1\mathscr{H}_\varepsilon^D(A)$ et donc $\mu(A) \leq C_1\mathscr{H}^D(A)$, en faisant tendre ε vers 0.

L'inégalité de gauche est moins immédiate. Pour la démonstration voir **[Sul-1]**, §3; le lecteur vérifiera que les arguments qui y sont donnés restent valables dans notre contexte. □

Soit E un espace métrique et $\mathscr{H}^d$ la D-mesure de Hausdorff sur E (pour D réel ≥ 0). Rappelons que

$$\dim_H(E) = \sup\{D: \mathscr{H}^D(E) = \infty\} = \inf\{D: \mathscr{H}^D(E) = 0\}$$

s'appelle la *dimension de Hausdorff* de E. On a $0 \leq \dim_H(E) \leq \infty$.

Le Corollaire 7.5 et l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ supportée par Λ (Théorème 5.4) donnent le

COROLLAIRE 7.6. *La $e_a(\Gamma)$-mesure de Hausdorff de Λ est finie et non nulle. En particulier Λ est de dimension de Hausdorff $e_a(\Gamma)$.*

Le théorème suivant montre les propriétés remarquables dont jouit la mesure de Hausdorff de dimension $e_a(\Gamma)$ sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe-cocompact. Dans cet énoncé, $L_0^\infty(\mathscr{H})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathscr{H}$-mesurables sur Λ et $\mathscr{H}$-presque-partout encardrées entre deux constantes strictement positives.

THÉORÈME 7.7. *La $e_a(\Gamma)$-mesure de Hausdorff $\mathscr{H}$ sur Λ possède les propriétés suivantes:*

(1) $\mathscr{H}$ *est une mesure* Γ*-quasi-conforme de dimension* $e_a(\Gamma)$.

(2) *L'action de* Γ *sur* $(\Lambda, \mathscr{H})$ *est ergodique.*

(3) *Si* μ *est une mesure* Γ*-quasi-conforme de dimension* D *dont le support est contenu dans* Λ, *alors* $D = e_a(\Gamma)$ *et les mesures* μ *et* $\mathscr{H}$ *sont absolument continues l'une par rapport à l'autre. En fait, les mesures* $\psi \cdot \mathscr{H}$, *pour* $\psi \in L_0^\infty(\mathscr{H})$, *sont toutes* Γ*-quasi-conformes et de support* Λ *et ce sont les seules mesures* Γ*-quasi-conformes dont le support est contenu dans* Λ.

Démonstration. . L'assertion (1) résulte de la Proposition 4.3.

Pour montrer (2), donnons-nous un borélien Γ-invariant $B \subset \Lambda$ dont la $\mathscr{H}$-mesure est non nulle. La restriction de $\mathscr{H}$ à B définit alors une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$. On a donc, d'après le Corollaire 7.5, une constante C telle que $\mathscr{H}(A) \leq C\mathscr{H}(A \cap B)$ pour tout $A \subset \Lambda$. D'où $\mathscr{H}(\Lambda - B) = 0$, ce qui montre l'ergodicité de l'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$.

Soit maintenant μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ. Le Corollaire 7.5 montre que $\mathscr{H}^D(\Lambda)$ est fini et non nul. On a donc $D = \dim_H(\Lambda) = e_a(\Gamma)$. Ce même Corollaire 7.5 montre que les mesures $\mathscr{H}$ et μ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre. Il montre aussi que la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à $\mathscr{H}$ reste presque-partout entre deux constantes strictement positives. Inversement, $\mathscr{H}$ étant Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$, il est clair que toute mesure de la forme $\psi \cdot \mathscr{H}$, pour $\psi \in L_0^\infty(\mathscr{H})$, l'est aussi. □

8. Mesures Γ-conformes dans les arbres. Dans cette section X est un arbre réel $(\delta = 0)$, toujours supposé localement compact. Rappelons les faits suivants (§3). Soit γ une isométrie de X. On a posé, pour $\xi \in \partial X$, $\Delta(\xi) = |p - x_0| - |p - \gamma^{-1}x_0|$ où p est la projection de ξ sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. Si h est la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique quelconque d'extrémité ξ, on a vu que l'on a aussi $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$. Soit $j_\gamma : \partial X \to]0, \infty[$ définie par $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$. La fonction j_γ est localement constante et il existe, pour tout $\xi \in \partial X$, un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tel que $|\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|_a / |\eta_1 - \eta_2|_a = j_\gamma(\xi)$ pour tous les $\eta_1 \neq \eta_2$ dans V.

DÉFINITION 8.1. Soit Γ un groupe d'isométries de X, D un réel ≥ 0 et μ une mesure sur ∂X de masse totale finie et non nulle. La mesure μ est dite Γ*-conforme de dimension* D si $\gamma^*\mu = j_\gamma^D \mu$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Toute mesure Γ-conforme est, bien entendu, Γ-quasi-conforme.

Soit maintenant Γ une groupe proprement discontinu et non élémentaire d'isométries de X d'ensemble limite Λ. On remarque que la construction d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$, faite dans la démonstration du Théorème 5.4, donne, pour les arbres, une mesure Γ-conforme (car on peut prendre $C = 1$ dans (5.3)). On a donc le

THÉORÈME 8.2. *Si* Γ *est d'exposant critique fini, il existe une mesure* Γ*-conforme de dimesnion* $e_a(\Gamma)$ *dont le support est* Λ.

Notons que, dans un arbre, $Q(\Lambda)$ est l'enveloppe convexe (même définition que dans le cas $X = H^n$) de Λ. On qualifiera donc le groupe Γ de *convexe-cocompact* plutôt que de quasi-convexe-cocompact si $Q(\Lambda)/\Gamma$ est compact. Pour Γ convexe-cocompact et d'exposant critique fini, on a les résultats suivants en notant toujours $\mathscr{H}$ la $e_a(\Gamma)$-mesure de Hausdorff sur Λ.

THÉORÈME 8.3. (1) $\mathscr{H}$ *est* Γ*-conforme de dimension* $e_a(\Gamma)$.

(2) *Si* μ *est une mesure* Γ*-conforme de dimension* D *dont le support est contenu dans* Λ, *alors* $D = e_a(\Gamma)$ *et* $\mu = \lambda\mathscr{H}$ *pour une certaine constante* $\lambda > 0$.

(3) $\mathscr{H}$ (*normalisée par* $\mathscr{H}(\Lambda) = 1$) *est la limite faible pour* s *tendant vers* $e_a(\Gamma)$ *par valeurs supérieures des mesures*

$$\mu_s = \left(1/\sum_{y\in Y} a^{-s|y|}\right)\sum_{y\in Y} a^{-s|y|}\operatorname{dirac}(y)$$

pour $Y \subset X$ *une orbite quelconque de* Γ.

Démonstration. On a déjà vu que $\mathscr{H}$ est de masse totale finie et non nulle (Corollaire 7.4). La Γ-conformité de dimension $e_a(\Gamma)$ de $\mathscr{H}$ est immédiate. En effet pour tout $\xi \in \partial X$, on peut trouver un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tel que $|\gamma U|_a = j_\gamma(\xi)|U|_a$ pour tout $U \subset V$.

Soit μ une mesure Γ-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ. D'après la partie 3 du Théorème 7.7, on a $D = e_a(\Gamma)$ et la mesure μ est absolument continue par rapport à $\mathscr{H}$. Il en résulte que la dérivée de Radon-Nikodym $d\mu/d\mathscr{H}$ est Γ-invariante. L'ergodicité de l'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$ (partie 2 du Théorème 7.7) montre que $d\mu/d\mathscr{H}$ est $\mathscr{H}$-presque constante. Cela établit (2).

D'après le Corollaire 7.3, la série de Poincaré

$$g_Y(s) = \sum_{y\in Y} a^{-s|y|}$$

diverge en $s = e_a(\Gamma)$. La démonstration du Théorème 5.4 montre que pour toute suite $s(i)$ de réels $> e_a(\Gamma)$ telle que la suite $\mu_{s(i)}$ converge faiblement vers une mesure μ sur $X \cup \partial X$, alors μ est Γ-conforme et supportée par Λ. On aura donc $\mu = \mathscr{H}$ d'après (2). On en déduit (3) par compacité de l'espace des mesures de probabilité sur $X \cup \partial X$ (pour la topologie de la convergence faible). □

9. Construction de mesures Γ-quasi-invariantes sur $\partial^2 X$. Soit, H^n étant toujours équipé d'un point base, $\|\xi - \eta\|$ la distance *euclidienne* entre deux points $\xi, \eta \in \partial H^n = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Pour toute isométrie γ de H^n, on a

$$\|\gamma\xi - \gamma\eta\|^2 = |\gamma'(\xi)| \cdot |\gamma'(\eta)| \cdot \|\xi - \eta\|^2$$

(*théorème géométrique des valeurs intermédiaires*; voir **[Sul-1]**, §4). L'énoncé suivant donne une version arborisée de cette formule.

Proposition 9.1. *Soit X un arbre et γ une isométrie de X. On a*

$$|\gamma\xi - \gamma\eta|_a^2 = j_\gamma(\xi) \cdot j_\gamma(\eta) \cdot |\xi - \eta|_a^2 \tag{9.1}$$

pour tous les $\xi, \eta \in \partial X$.

Démonstration. Quitte à échanger ξ et η, il n'y a que deux cas de figure à considérer (Fig. 3).

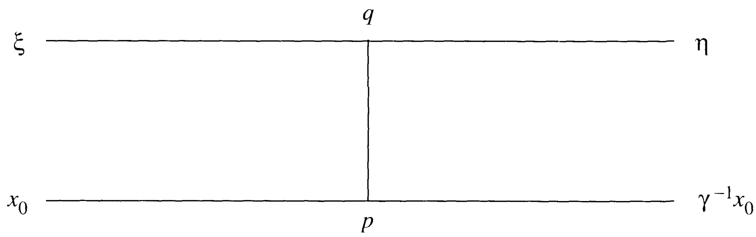
Dans le cas (a), les points ξ et η ont même projection p sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. Soit q la projection de ξ su $[p, \eta]$. On a

$$\begin{aligned} j_\gamma(\xi) = j_\gamma(\eta) &= a^{|p|-|\gamma p|}, \\ |\xi - \eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|p|-|p-q}, \quad \text{et} \\ |\gamma\xi - \gamma\eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|\gamma p|-|\gamma p-\gamma q|}, \\ &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|\gamma p|-|p-q|}, \end{aligned}$$

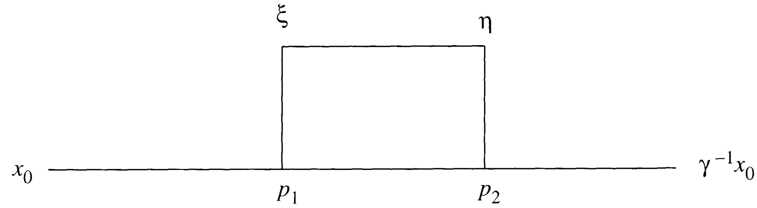
ce qui montre (9.1).

Dans le cas b), les points ξ et η se projettent respectivement en p_1 et p_2 sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$ avec $x_0, p_1, p_2, \gamma^{-1}x_0$ se suivant dans cet ordre sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. On a alors

$$\begin{aligned} j_\gamma(\xi) &= a^{|p_1|-|\gamma p_1|}, \\ j_\gamma(\eta) &= a^{|p_2|-|\gamma p_2|}, \\ |\xi - \eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|p_1|}, \quad \text{et} \\ |\gamma\xi - \gamma\eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|\gamma p_2|}, \end{aligned}$$



3.a



3.b

FIGURE 3

d'où (9.1) en utilisant

$$|p_1| - |\gamma p_1| + |p_2| - |\gamma p_2| = 2(|p_1| - |\gamma p_2|). \qquad \square$$

Soit $\partial^2 X = \partial X \times \partial X$*-diagonale* l'ensemble des couples de points distincts du bord de X. Le groupe Γ agit sur $\partial^2 X$ par $\gamma(\xi, \eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $(\xi, \eta) \in \partial^2 X$.

COROLLAIRE 9.2. *Si X est un arbre et si μ est une mesure Γ-conforme de dimension D sur ∂X, alors $m = \mu \times \mu / |\xi - \eta|_a^{2D}$ est une mesure Γ-invariante sur $\partial^2 X$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \gamma^* m &= \gamma^*\mu \times \gamma^*\mu / |\gamma\xi - \gamma\eta|_a^{2D} \\ &= j_\gamma(\xi)^D j_\gamma(\eta)^D \mu \times \mu / |\gamma\xi - \gamma\eta|_a^{2D} \\ &\qquad\qquad \text{(d'après la } \Gamma\text{-conformité de } \mu) \\ &= m \qquad \text{(d'après la proposition précédente).} \qquad \square \end{aligned}$$

Supposons maintenant X δ-hyperbolique. Soit γ une isométrie de X. La Proposition 9.1 et le théorème d'approximation par les arbres donnent la

PROPOSITION 9.3. *Il existe une constante $C = C(\delta, a) \geq 1$ telle que*

$$C^{-1} \leq |\gamma\xi - \gamma\eta|_a^2/(j_\gamma(\xi) \cdot j_\gamma(\eta) \cdot |\xi - \eta|_a^2) \leq C$$

quels que soient les ξ, η distincts $\in \partial X$ et les rayons géodésiques d'extrémités respectives ξ et η qui servent à définir $j_\gamma(\xi)$ et $j_\gamma(\eta)$.

COROLLAIRE 9.4. *Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X, alors $m = \mu \times \mu/|\xi - \eta|_a^{2D}$ est une mesure Γ-quasi-invariante sur $\partial^2 X$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $C \geq 1$ tel que*

$$C^{-1} m(A) \leq m(\gamma A) \leq C m(A)$$

pour tout $A \subset \partial^2 X$. □

RÉFÉRENCES

[Coo] M. Coornaert, *Sur le domaine de discontinuité d'un groupe discret d'isométries d'un espace métrique hyperbolique*, Rend. Sem. Mate. Univ. Cagliari, **59** (1989), 185–195.

[CDP] M. Coornaert, T. Delzant et A. Papadopoulos, *Géométrie et Théorie des Groupes, les Groupes Hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Math., *n*° 1441, Springer, 1990.

[F] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1969.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe, (éds.), *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, Vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in *Essays in Group Theory*, (S. M. Gersten éd.), Springer, 1987.

[Pat-1] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math., **136** (1976), 241–273.

[Pat-2] ——, *Lectures on measures on limit sets of Kleinian groups*, in *Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space*, pp. 291–323, Cambridge Unviersity Press, 1987.

[Sul-1] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. Math. I.H.E.S., **50** (1979), 171–202.

[Sul-2] ——, *Entropy, Hausdorff measures old and new and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math., **153** (1984), 259–277.

[Sul-3] ——, *Discrete conformal groups and measurable dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., **6** (1982), 57–73.

Received November 21, 1990.

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
7 RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG (FRANCE)