

FONCTIONS RATIONNELLES DE TYPE (0, 1) SUR LE PLAN PROJECTIF COMPLEXE

HIROKO KASHIWARA

(Received March 22, 1984)

(Revised October 27, 1986)

Introduction

Dans les articles précédents [9] [10], nous avons étudié le problème de déterminer les formes explicites des polynômes de type (0, 2) ou de type (0, 3) sur l'espace \mathbf{C}^2 . Nous considérons dans le présent article le problème analogue pour les fonctions rationnelles sur le plan projectif complexe \mathbf{P}^2 .

Soit R une fonction rationnelle non constante sur \mathbf{P}^2 . Pour toute valeur complexe α et aussi pour $\alpha = \infty$, nous désignons par S_α la courbe constante définie par $R = \alpha$, et nous appelons *courbe première de R à valeur α* chaque composante irréductible de S_α . Une courbe première de R à valeur α sera dite *d'ordre élevé* si la fonction $R - \alpha$ (ou $1/R$ si $\alpha = \infty$) a un zéro multiple. Une courbe première de R sera dite *de type (g, n)* si la normalisation de la partie de cette courbe obtenue par l'exclusion de tous les points d'indétermination de R est une surface de Riemann ouverte du genre g ayant n points frontières. On peut facilement démontrer que toutes les courbes premières de R , sauf un nombre fini, sont d'un même type (g, n) ; dans ce cas on dit que R est *de type (g, n)* . Une fonction R de type (0, n) est dite *de type rationnel*. Une fonction rationnelle non constante sur \mathbf{P}^2 sera dite *primitive* si toutes ses courbes constantes sont irréductibles sauf un nombre fini.

Le but du présent article est de donner les formes explicites des fonctions rationnelles de type (0, 1). Toute fonction rationnelle R sur \mathbf{P}^2 s'exprime comme la composée $\pi \circ R_0$ d'une fonction rationnelle primitive R_0 et d'une fonction rationnelle π d'une variable complexe. Ainsi il suffit de considérer le cas où les fonctions sont primitives. Désignons par \mathcal{F} la famille des fonctions rationnelles primitives de type (0, 1). Une fonction R appartenant à \mathcal{F} admet un et un seul point d'indétermination, et toutes les courbes constantes de R sont irréductibles, de type (0, 1) et elles n'ont pas de point singulier sauf le point d'indétermination de R . Puisque le nombre des courbes premières d'ordre élevé de R est 0, 1 ou 2, on peut classer \mathcal{F} selon ce nombre en trois sous-familles qu'on désignera par \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_{II} . Alors \mathcal{F}_0 consiste en toutes les fonctions

rationnelles linéaires sur \mathbf{P}^2 , et la seule courbe première d'ordre élevé associée à une fonction R appartenant à \mathcal{F}_I est une droite de \mathbf{P}^2 .

Or, comme on le verra, toute fonction rationnelle primitive de type rationnel se réduit, par une transformation birationnelle convenable de \mathbf{P}^2 sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, à une des coordonnées de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Plus précisément, en éclatant successivement les points d'indétermination de R , on peut trouver une variété M et une application $\rho: M \rightarrow \mathbf{P}^2$ telles que $R \circ \rho$ n'admette plus de point d'indétermination. On obtient alors une application $\eta: M \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ en contractant successivement des courbes exceptionnelles de première espèce convenables de chaque fibre singulière de $R \circ \rho: M \rightarrow \mathbf{P}^2$. Inversement, on peut construire toutes les fonctions rationnelles primitives de type rationnel par le procédé réciproque à partir de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

En général, ce procédé est compliqué, mais on pourra le décrire en détail dans le cas où R est de type $(0, 1)$. Pour cela, désignons par Σ l'ensemble des composantes irréductibles de l'image inverse par ρ du point d'indétermination de R . Nous allons déterminer tous les graphes de Σ , ce qui nous conduira à une solution de notre problème. Les résultats principaux ont été annoncés dans l'article [11].

Au moyen du graphe de Σ , on peut effectuer une partition de \mathcal{F}_I en sous-ensembles $\{I^\varepsilon(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)\}_{(N=0,1,2,\dots)}$ où $\varepsilon \in \{+, -\}$, $I^\varepsilon(0) = I(0)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des entiers > 0 . De même, on peut effectuer une partition de \mathcal{F}_{II} en sous-ensembles $\{II(l)\}_{(l=0,1,2,\dots)}$ et $\{II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)\}_{(l=0,1,2,\dots, N=1,2,\dots)}$ où $\varepsilon \in \{+, -\}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des entiers > 0 si $l=0$ et ≥ 0 si $l \neq 0$. Les théorèmes 10.1, 10.2, 11.1, 11.2, 11.3 et 11.4 donneront les formes explicites des fonctions appartenant aux sous-familles de \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_{II} .

Comme T. Kizuka [4] l'a déjà indiqué, le problème se rattache à l'existence d'automorphismes analytiques transcendants de l'ouvert $\mathbf{P}^2 \setminus D$ où D est une courbe algébrique de \mathbf{P}^2 . Notons aussi que M. Miyanishi et T. Sugie [6] ont démontré que, pour que $\mathbf{P}^2 \setminus D$ soit de dimension logarithmique de Kadaira $-\infty$, il faut et il suffit que D soit une réunion de courbes premières d'une fonction rationnelle de type $(0, 1)$.

L'auteur tient à remercier M. Kashiwara pour d'utiles suggestions et conversations, M. Waldschmidt et le référé pour avoir corrigé le français.

PARTIE I. GÉNÉRALITÉS

1. Définitions, notations

1° Soit R une fonction rationnelle non constante primitive sur \mathbf{P}^2 . On suppose que R est de type (g, n) ¹⁾. Soit S une courbe première de R à valeur

1) Voir l'introduction.

α ; on note $\nu = \text{ord}_S(R)$ l'ordre du zéro de la fonction $R - \alpha$ (ou $1/R$ si $a = \infty$) sur S , et on dit que S est d'ordre ν . Si $\nu \geq 2$, on dit que S est d'ordre élevé. Une courbe constante de R est dite générale si elle est irréductible, d'ordre un et de type (g, n) ; la valeur de R sur cette courbe est alors appelée valeur générale. Sinon, elle est dite singulière et la valeur est dite valeur singulière.

2° Soit V une variété analytique complexe de dimension 2. Pour un point p de V , on désigne par $Q_p(V)$ l'éclatement de V en p . Soit \mathcal{C} une famille de courbes irréductibles dans V . On désigne par $|\mathcal{C}|$ la réunion des courbes dans \mathcal{C} . On identifie souvent \mathcal{C} et $|\mathcal{C}|$. On dit que \mathcal{C} est connexe si $|\mathcal{C}|$ est connexe. On dit que \mathcal{C} est linéaire si elle est connexe et qu'elle ne possède aucun membre coupant au moins trois autres membres. Dans la notation $\circ \text{---} \underset{a_1}{\circ} \text{---} \underset{a_2}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{a_n}{\circ}$, un cercle \circ représente une courbe rationnelle non singulière, le nombre attaché à chaque \circ est $(-1) \times$ (le nombre de self-intersection) et chaque ligne signifie que les courbes se coupent transversalement en un point. On dit que \mathcal{C} se contracte en un point (resp. se réduit à $\circ \text{---} \underset{a_1}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{a_n}{\circ}$) s'il existe une application analytique propre μ de V sur une variété non singulière W telle que $\mu(|\mathcal{C}|)$ consiste en un point (resp. que le graphe de $\mu(|\mathcal{C}|)$ soit $\circ \text{---} \underset{a_1}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{a_n}{\circ}$) et que $\mu: V \setminus |\mathcal{C}| \rightarrow W \setminus \mu(|\mathcal{C}|)$ soit un isomorphisme. On dit aussi que \mathcal{C} ou $|\mathcal{C}|$ est exceptionnelle si toute composante connexe de $|\mathcal{C}|$ se contracte en un point, et on désigne l'application μ par $\text{cont}_{\mathcal{C}}$ ou $\text{cont}_{|\mathcal{C}|}$. Comme il est bien connu, une famille exceptionnelle \mathcal{C} possède les propriétés suivantes (E):

(E.1) Toute courbe C appartenant à \mathcal{C} est une courbe rationnelle non singulière telle que $(C^2) \leq -1$;

(E.2) Deux courbes différentes C et C' de \mathcal{C} telles que $C \cap C' \neq \emptyset$ se coupent transversalement en un seul point;

(E.3) Pour trois courbes différentes C, C' et C'' de \mathcal{C} , on a $C \cap C' \cap C'' = \emptyset$;

(E.4) Il n'y a aucune suite C_1, \dots, C_m ($m \geq 3$) d'éléments de \mathcal{C} telle que $C_i \neq C_{i+1}$ et $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq m$) où on a posé $C_{m+1} = C_1$;

(E.5) Il existe au moins une courbe exceptionnelle²⁾ C dans \mathcal{C} (i.e. $(C^2) = -1$);

(E.6) Si C est une courbe exceptionnelle de \mathcal{C} , elle coupe au plus deux courbes de $\mathcal{C} \setminus \{C\}$;

(E.7) $\text{cont}_{\mathcal{C}}$ est un produit de contractions successives de courbes exceptionnelles.

On dit qu'une famille exceptionnelle \mathcal{C} est minimale si \mathcal{C} ne contient qu'une seule courbe exceptionnelle. Alors, pour une sous-famille exceptionnelle quelconque

2) Par une courbe exceptionnelle, on entend toujours une courbe exceptionnelle de première espèce.

C' de C , $\text{cont}_{C'}(|C|)$ est aussi minimale. Elle se contracte donc en un point par une unique suite de contractions.

Soit C une famille exceptionnelle minimale et non linéaire et soit A l'unique membre exceptionnel de C . On a alors les propriétés suivantes (B):

(B.1) *Si la famille $C \setminus \{A\}$ est divisée en deux familles connexes, une d'elles est linéaire.*

En effet, sinon, il existe une famille exceptionnelle C' telle que $\text{cont}_{C'}(|C|)$ ne satisfasse pas à la propriété (E.6), ce qui est une contradiction.

(B.2) *Un membre quelconque de C coupe au plus 3 autres.*

En effet, ceci se démontre par le même raisonnement que pour (B.1).

Soit $\mathcal{B}_2(C)$ la famille des membres de C qui coupent exactement 3 autres. Le nombre de $\mathcal{B}_2(C)$ est appelé *nombre des embranchements de C* . Pour tout $B \in \mathcal{B}_2(C)$, la famille $C \setminus \{B\}$ se décompose en trois familles connexes. On note $\mathcal{E}(B)$ celle qui contient A . Alors:

(B.3) *Pour tout $B \in \mathcal{B}_2(C)$, la famille $\mathcal{E}(B)$ est exceptionnelle, et $\mathcal{E}^*(B) = \mathcal{E}(B) \cup \{B\}$ se réduit à \circ par $\text{cont}_{\mathcal{E}(B)}$. Par suite, $\text{cont}_{\mathcal{E}(B)}(|C|)$ est aussi minimale.*

Compte tenu de la propriété (B.1),

(B.4) *Pour tout $B \in \mathcal{B}_2(C)$, sauf un seul B , disons B_1 , une des familles connexes de $C \setminus \mathcal{E}^*(B)$ est linéaire et l'autre est non linéaire. On désigne la famille linéaire par $\mathcal{L}(B)$ et l'autre par $\mathcal{I}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}_2$ avec $B \neq B_1$.*

Cela posé, soit N le nombre des embranchements de C et soient B_k ($k=1, \dots, N$) les membres de $\mathcal{B}_2(C)$. On peut ordonner les $\{B_k\}$ de telle sorte que

(B.5) $\mathcal{E}(B_k) \subset \mathcal{E}(B_{k-1})$ pour tout $1 < k \leq N$.

Alors

(B.6) $\mathcal{E}(B_N)$ est linéaire et toutes les autres $\mathcal{E}(B_k)$ ($1 \leq k < N$) sont non linéaires.

(B.7) $\mathcal{E}^*(B_k) \cup \mathcal{L}(B_k) \subset \mathcal{E}(B_{k-1})$ pour tout $1 < k \leq N$.

(B.8) $\text{cont}_{\mathcal{E}(B_1)}(C)$ est linéaire.

3° Comme toujours, R est une fonction rationnelle primitive non constante de type (g, n) . Soit $e(R)$ l'ensemble des points d'indétermination de R . Alors on a $\#e(R) \geq 1$, et on voit que toute courbe première de R passe par au moins un point de $e(R)$ puisque deux courbes algébriques quelconques sur \mathbf{P}^2 se coupent toujours, et elle n'a pas de point singulier sauf tous les points de $e(R)$. En éclatant successivement chaque point de $e(R)$, on peut construire une variété M et une application $\rho: M \rightarrow \mathbf{P}^2$ telles que $R \circ \rho$ n'admette plus de point d'indétermina-

tion. Soit Σ la famille des composantes irréductibles de $\rho^{-1}(e(R))$. Le triplet $[M, \Sigma, \rho]$ s'appelle *résolution des points d'indétermination de R*. Soit $\{\Gamma_i; 1 \leq i \leq d\}$ la famille des membres de Σ pour lesquels la restriction de $R \circ \rho$ est non constante. La résolution $[M, \Sigma, \rho]$ est dite *minimale* si l'on a $(C^2) \leq -2$ pour tout $C \in \Sigma \setminus \{\Gamma_i; 1 \leq i \leq d\}$. Toute R possède une et une seule résolution minimale. On suppose dorénavant que $[M, \Sigma, \rho]$ est minimale. Décomposons $\Sigma = \bigcup_{P \in e(R)} \Sigma(P)$ avec $\Sigma(P) = \{C \in \Sigma; \rho(C) = P\}$; les composantes $\Sigma(P)$ sont exceptionnelles et possèdent donc les propriétés (E.1)~(E.7). Pour $P \in e(R)$, désignons par $d(P)$ (qu'on appelle *degré de P*) le nombre des Γ_i tels que $\Gamma_i \in \Sigma(P)$. Posons $(e(R)) = \sum_{P \in e(R)} d(P)P$ et $d = \sum_{P \in e(R)} d(P)$; d est appelé *degré de (e(R))*. Cela posé, on a

$$(1.1) \quad 1 \leq \#e(R) \leq d \leq n.$$

En effet, toute courbe constante générale C de R est irréductible. Donc le transformé propre de C par ρ^{-1} coupe tous les Γ_i .

4° Soit V une variété analytique complexe compacte avec une application analytique de V sur P^1 . Elle est dite *surface réglée rationnelle* si une fibre générale est une courbe rationnelle irréductible et non singulière. Elle sera dite *minimale* si elle n'a pas de fibre singulière. Soit V une surface réglée rationnelle. On désigne une fibre singulière sur un point $\alpha_i \in P^1$ par $F(i)$. Comme il est bien connu dans le cadre de la géométrie algébrique³⁾, $F(i)$ possède alors les propriétés suivantes (RF):

(RF.1) $F(i)$ est réductible.

$$(RF.2) \quad 0 = (C_j \cdot F(i)) = n_j(C_j^2) + \sum_{k \neq j} n_k(C_j \cdot C_k), \quad \text{où} \quad F(i) = \sum_{k=1}^a n_k C_k.$$

(RF.3) $\{C_k\}_{1 \leq k \leq a}$ possèdent les propriétés (E.1), (E.2), (E.3), (E.4), (E.5) et (E.6). En particulier, si $a=2, C_1$ et C_2 sont toutes les deux exceptionnelles.

On obtient donc une surface réglée rationnelle minimale en contractant successivement des composantes de chaque fibre singulière. Autrement dit,

(RF.4) Pour $F(i)$, il existe au moins une composante C_{k_0} telle que $n_{k_0}=1$, que la famille $\{C_k\}_{k \neq k_0} (=C')$ soit exceptionnelle, et que $F(i)$ se réduise à \circ par $\text{cont}_{C'}$.

De plus

(RF.5) Toute composante C_{k_0} pour laquelle $n_{k_0}=1$ admet la propriété (RF.4).

(RF.6) Pour une composante quelconque C_{k_1} telle que $n_{k_1}=1$, il existe une

3) Voir, par exemple [5].

autre composante C_{k_2} telle que $n_{k_2}=1$, que $\{C_k\}_{k \neq k_1, k_2} (=C'')$ soit exceptionnelle et que $F(i)$ se réduise à $\begin{matrix} \circ & - & \circ \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{matrix}$ par $\text{cont}_{C''}$.

2. Fonctions rationnelles de type rationnel

1° Avant d'aborder notre problème, on va traiter généralement les fonctions rationnelles primitives de type rationnel. Soit R une telle fonction. Tout d'abord, nous allons démontrer l'énoncé qui a été donné dans l'introduction:

Toute fonction rationnelle primitive de type rationnel se réduit à une des coordonnées de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ par une transformation birationnelle convenable de \mathbf{P}^2 sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

En effet, on prend une résolution $[M, \Sigma, \rho]$ des points d'indétermination de R . Alors $R \circ \rho: M \rightarrow \mathbf{P}^1$ est une surface réglée rationnelle. On peut donc obtenir une surface réglée rationnelle minimale V_0 en contractant successivement des composantes de chaque fibre singulière. Soient η le morphisme de M sur V_0 et π la projection de V_0 sur \mathbf{P}^1 . D'après Nagata [7], il existe une transformation birationnelle θ de V_0 sur $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ telle que $\pi' \circ \theta = \pi$, où π' est la projection de F_0 sur \mathbf{P}^1 . En choisissant des coordonnées (z, w) de F_0 telles que $\pi: (z, w) \rightarrow z$, on obtient

$$R \circ \rho = z \circ \theta \circ \eta,$$

ce qui achève la démonstration.

2° Dans la situation et avec les notations de 1°, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les valeurs singulières de R . On désigne par S (resp. S_i) la courbe constante avec une valeur générale (resp. α_i). Soit $[M, \Sigma, \rho]$ la résolution minimale de R . Considérons l'espace fibré $\hat{R}: M \rightarrow \mathbf{P}^1$. Soient \hat{S} et \hat{S}_i les transformés propres de S et de S_i par ρ^{-1} respectivement. Alors:

Le transformé propre \hat{S} de S est toujours une fibre générale de \hat{R} . Le transformé propre \hat{S}_i de S_i est une fibre générale si et seulement si S_i est irréductible et d'ordre un.

Désignons par $F(i)$ la fibre sur α_i . Alors, entre le degré d de $(e(R))$ et les nombres $a_i = b_2(S_i) - 1$, on a la même relation que celle qu'on avait pour les polynômes primitifs de type $(0, n)^4$. Ici $b_2(S_i)$ est le deuxième nombre de Betti de S_i .

Lemme 2.1. On a la relation

4) Un polynôme sur \mathbf{C}^2 est dit *polynôme primitif de type (g, n)* s'il l'est en tant que fonction rationnelle sur \mathbf{P}^2 .

$$d = 1 + \sum_{i=1}^k a_i .$$

En effet, comme la variété M est obtenue par éclatements successifs de \mathbf{P}^2 , on a $b_2(M) = b_2(\mathbf{P}^2) + \sum_{i=1}^k \{b_2(F(i)) - b_2(S_i)\} + d$. D'autre part, du fait qu'on obtient une surface réglée rationnelle minimale V_0 par contractions successives pour chaque fibre singulière de M , on a $b_2(M) = b_2(V_0) + \sum_{i=1}^k \{b_2(F(i)) - 1\}$. D'après Nagata [7], on a $b_2(V_0) = 2$. Donc on a le lemme puisque $b_2(\mathbf{P}^2) = 1$.

3° Notons qu'on peut obtenir directement une surface réglée minimale qui est isomorphe à $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ seulement par contractions successives de M si on prend une résolution convenable $[M, \Sigma, \rho]$ de R . Considérons l'espace produit $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Soit (z, w) un système de coordonnées de F_0 et soit π la projection $(z, w) \rightarrow z$. On prend des courbes rationnelles convenables $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_d$ sur F_0 telles que $\pi(\Gamma'_i) = \mathbf{P}^1$ pour tout i et des points quelconques $O_1, \dots, O_{k'}$ sur F_0 . Faisons des éclatements successifs convenables en chaque point O_i . Soit M la variété obtenue par ces éclatements et soit η la projection canonique de M sur F_0 . On désigne le transformé propre de Γ'_i par Γ_i pour $i = 1, \dots, d$. Soit k le nombre des valeurs distinctes parmi des valeurs $\pi(O_i)$ $i = 1, \dots, k'$, et on désigne par $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ces valeurs distinctes. Pour l'espace fibré $\pi \circ \eta: M \rightarrow \mathbf{P}^1$, on désigne par $F(i)$ la famille des courbes irréductibles de $\pi^{-1}(\alpha_i)$. Pour chaque i ($1 \leq i \leq k$), on prend une sous-famille convenable $\Omega(i)$ de $F(i)$ telle que $\Omega(i) \subseteq F(i)$, et on pose $\Sigma = \{\Gamma_j; 1 \leq j \leq d\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq k} \Omega(i)$. D'après Nagata [7], une surface projective rationnelle non singulière est régulièrement isomorphe à \mathbf{P}^2 si son deuxième nombre de Betti est égal à 1. Donc on obtient le

Théorème 2.1. *Supposons que Σ satisfasse aux conditions suivantes (R_a):*

- (1) Σ est exceptionnelle;
- (2) $\sum_{i=1}^k (b_2(F(i)) - b_2(\Omega(i)) - 1) = d - 1$.

Alors la variété $\text{cont}_\Sigma(M)$ est régulièrement isomorphe à \mathbf{P}^2 . De plus, la fonction rationnelle R définie par

$$R \circ \text{cont}_\Sigma = z \circ \eta$$

est primitive de type rationnel.

REMARQUE 2.1. *Si n est le nombre des feuilles de $\bigcup_{i=1}^d \Gamma'_i$ vue comme surface de Riemann sur \mathbf{P}^1 , alors R est de type $(0, n)$.*

PARTIE II. LE GRAPHE DE Σ — CLASSIFICATION DES FONCTIONS RATIONNELLES PRIMITIVES DE TYPE (0, 1) —

3. Courbes premières singulières. Soit R une fonction rationnelle appartenant à \mathcal{F} . Soit $[M, \Sigma, \rho]$ sa résolution minimale du point d'indétermination; on désigne par \hat{R} la fonction $R \circ \rho$. On peut facilement voir que la fonction R possède les propriétés suivantes (A):

- 1) Elle admet un et un seul point d'indétermination, qu'on désigne par p .
- 2) Toute courbe première passe toujours par le point p , elle est de type $(0, 1)$ et n'a pas de point singulier sauf le point p .
- 3) La famille Σ est minimale; autrement dit, on obtient $[M, \Sigma, \rho]$ par une unique suite d'éclatements en p .
- 4) Soit Γ la courbe insérée par l'éclatement final. La restriction de \hat{R} à Γ est univalente, et la restriction de \hat{R} à une courbe quelconque de $\Sigma \setminus \{\Gamma\}$ est constante.

On peut d'abord constater le fait suivant:

Proposition 3.1. *Pour toute valeur complexe α et aussi pour $\alpha = \infty$, la courbe constante S_α de R est irréductible. En outre, toute courbe première est d'ordre un à l'exclusion d'au plus deux α .*

En effet, si R n'admet pas de valeurs singulières, toute S_α est, d'après la définition, irréductible et d'ordre un. Sinon, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les valeurs singulières de R où $k \geq 1$. D'après le lemme 2.1, on déduit

$$\sum_{i=1}^k \{b_2(S_{\alpha_i}) - 1\} = 0$$

puisque on a $d=1$. D'où $b_2(S_{\alpha_i})=1$ pour tout i . Il s'ensuit que toute courbe constante de R est irréductible. Par suite, toute courbe constante singulière S_{α_i} est d'ordre élevé puisqu'elle est de type $(0, 1)$. On en déduit que les fibres singulières de $\hat{R}: M \rightarrow \mathbf{P}^1$ sont $\hat{R}^{-1}(\alpha_i)$ où $i=1, 2, \dots, k$.

Or, si $\Sigma = \{\Gamma\}$, alors pour toute $\alpha \in \mathbf{P}^1$, la fibre $\hat{R}^{-1}(\alpha)$ est irréductible et donc générale. Ceci est le cas quand R n'admet pas de valeur singulière. Donc, supposons $\Sigma \neq \{\Gamma\}$. D'après la propriété (E.6), Γ coupe alors un ou deux membres de $\Sigma \setminus \{\Gamma\}$. Le nombre des familles connexes de $\Sigma \setminus \{\Gamma\}$ est aussi un ou deux respectivement puisque la restriction de \hat{R} à Γ est univalente. D'où on peut conclure qu'on a $k=1$ ou $k=2$ respectivement. La proposition est donc démontrée.

D'après cette proposition, la famille \mathcal{F} des fonctions rationnelles primitives de type $(0, 1)$ se divise en trois classes \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_{II} suivant que le nombre des courbes premières d'ordre élevé est 0, 1 ou 2. D'après ce qu'on vient de voir, \mathcal{F}_0 consiste en toutes les fonctions linéaires rationnelles sur \mathbf{P}^2 . Pour $R \in \mathcal{F}_I$, on peut supposer que la valeur singulière est ∞ . On écrit son diviseur

$$(3.1) \quad (R) = S_0 - nS_\infty \quad \text{où } n = \text{ord}_{S_\infty}(R) > 1 .$$

Pour $R \in \mathcal{F}_{II}$, on peut supposer que deux valeurs singulières sont 0 et ∞ . On écrit son diviseur

$$(3.2) \quad (R) = mS_0 - nS_\infty$$

où $m = \text{ord}_{S_0}(R) > 1$, $\text{ord}_{S_\infty}(R) > 1$ et les entiers m et n sont relativement premiers puisque R est primitive.

De plus, en remplaçant R par R^{-1} est nécessaire, on peut supposer que

$$(3.3) \quad \text{La fonction } R \circ Q_p^{-1} \text{ a un pôle en la courbe } Q_p(p).$$

Cette condition est équivalente à

$$(3.4) \quad m < n .$$

Ceci sera démontré dans les sections 7 et 11.

4. La structure de Σ . Soit R une fonction rationnelle appartenant à \mathcal{F} . Soit $[M, \Sigma, \rho]$ sa résolution minimale du point d'indétermination. Conservons les notations \hat{R} , Γ , S_β et \hat{S}_β ($\beta=0$ ou ∞) introduites dans la section précédente. Soit Σ^* la réunion de Σ , \hat{S}_0 et \hat{S}_∞ . Comme on a vu dans la section précédente, R appartient à une des classes \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_{II} . Si $R \in \mathcal{F}_0$, on a $\Sigma = \{\Gamma\}$; $(\Gamma^2) = -1$ et donc $\Sigma = \Sigma^*$. Sinon, on a $\Sigma \neq \{\Gamma\}$. On va donc étudier la structure de Σ pour R appartenant à \mathcal{F}_I ou \mathcal{F}_{II} .

1° Familles $F(\beta)$ ($\beta=0$ ou ∞). On considère l'espace fibré $\hat{R}: M \rightarrow P^1$. Soit $F(\beta)$ la famille des courbes irréductibles d'une fibre singulière $\hat{R}^{-1}(\beta)$. On désigne par Σ_β la famille $F(\beta) \setminus \{\hat{S}_\beta\}$. Alors $|F(\beta)|$ possède les propriétés (RF). Dans notre cas, en outre, on a

$$(RF^*.1) \quad (\hat{S}_\beta^2) = -1 \text{ et } (C^2) \leq -2 \text{ pour tout membre } C \text{ de } F(\beta) \text{ sauf } \hat{S}_\beta.$$

Ceci est facile à voir, car on a $F(\beta) = \{\hat{S}_\beta\} \cup \Sigma_\beta$ et \hat{S}_β est irréductible.

On déduit de (RF.5) le lemme suivant:

Lemme 4.1. *Soit C un membre de Σ_β sur lequel \hat{R} prend la valeur β d'ordre un. Alors C est une extrémité de Σ_β . (i.e. il ne coupe qu'un autre membre.)*

En effet, supposons que C ne soit pas une extrémité. Alors $F(\beta) \setminus \{C\}$ se décompose au moins en deux familles connexes. Chacune doit contenir au moins une courbe exceptionnelle puisque $F(\beta) \setminus \{C\}$ est exceptionnelle. C'est en contradiction avec la propriété (RF*.1).

Lemme 4.2. *Soit C_Γ^β le membre de $F(\beta)$ qui coupe Γ . Alors l'ordre de*

\hat{R} en C^β est un.

Car la restriction de \hat{R} à Γ est univalente.

D'après la propriété (RF.6), il existe un autre membre de $F(\beta)$ en lequel \hat{R} prend la valeur β d'ordre un. On en désigne un par C_T^β . Posons $\mathcal{D}_*^\beta = F(\beta) \setminus \{C_*^\beta\}$ ($*$ = Γ, T) et $\mathcal{D}^\beta = F(\beta) \setminus \{C_\Gamma^\beta, C_T^\beta\}$. Les familles \mathcal{D}_*^β ($*$ = Γ, T) et \mathcal{D}^β sont exceptionnelles et minimales. La famille $F(\beta)$ se réduit à $\circ \text{---} \circ$ par $\text{cont}_{\mathcal{D}^\beta}$ et à \circ par $\text{cont}_{\mathcal{D}_*^\beta}$ ($*$ = Γ, T). Soit \tilde{C}_* le transformé propre de $1 \text{---} 1$ par $\text{cont}_{\mathcal{D}_*^\beta}$. Alors on a $\text{cont}_{\mathcal{D}^\beta}(F(\beta)) = \tilde{C}_\Gamma^\beta \cup \tilde{C}_T^\beta$ et $\text{cont}_{\mathcal{D}^\beta}(\mathcal{D}^\beta) = \tilde{C}_\Gamma^\beta \cap \tilde{C}_T^\beta$, car \mathcal{D}^β est connexe d'après la propriété (RF*.1). D'où :

Lemme 4.3. *Pour tout membre C de $F(\beta)$ sauf C_Γ^β et C_T^β , on a*

$$\text{ord}_C(\hat{R}) \geq 2.$$

On en déduit :

(4.1) *Les C_T^β se déterminent uniquement. Elles sont les extrémités de Σ si Σ est linéaire.*

2° Familles Σ et Σ^* . La famille Σ est exceptionnelle et minimale. On suppose maintenant que Σ est non linéaire. En combinant les propriétés (B.1), (B.5), (B.6) et l'hypothèse (3.3), on a alors le

Lemme 4.4. *Si $R \in \mathcal{F}_{II}$, alors Σ_0 est linéaire.*

Soit N le nombre d'embranchements de Σ . D'après ce lemme, N est aussi celui de Σ_∞ . Nous continuons d'utiliser les notations introduites dans le 2° de la section 1; $\mathcal{B}_i(\Sigma) = \{B_i\}$, \mathcal{E}_i et \mathcal{E}_i^* pour $i=1, \dots, N$, \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_i pour $i=2, \dots, N$. On a alors $B_i \in \Sigma_\infty$ pour tout i . Toutes les \mathcal{E}_i et \mathcal{E}_i^* sont exceptionnelles. Pour tout $2 \leq i \leq N$, \mathcal{L}_i sont linéaires et \mathcal{L}_i sont non linéaires. Alors, en remarquant que $|\Sigma_0| \cap \Gamma \neq \emptyset$, on a

$$(B^*.1) \quad \Sigma_0 \subset \mathcal{E}_N.$$

De plus, on a

$$(B^*.2) \quad \hat{S}_\infty \cap |\mathcal{E}_1^*| = \emptyset.$$

En effet, supposons $\hat{S}_\infty \cap |\mathcal{E}_1^*| \neq \emptyset$. Il est clair que $\hat{S}_\infty \cap B_1 = \emptyset$. Regardons la famille $\mathcal{D}_\Gamma^\infty$. Elle est exceptionnelle et minimale, et on a $\hat{S}_\infty \subset \mathcal{D}_\Gamma^\infty$. D'après la propriété (B.3), la famille $(\mathcal{D}_\Gamma^\infty \cap \mathcal{E}_1) \cup \{\hat{S}_\infty\} = \mathcal{D}$ est exceptionnelle et le transformé de B_1 par $\text{cont}_{\mathcal{D}}$ est aussi exceptionnel. Alors, dans $\text{cont}_{\mathcal{D}}(F(\infty))$, le transformé de B_1 coupe le transformé de C_Γ^∞ et deux autres membres de $\text{cont}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_\Gamma^\infty)$. Ceci est en contradiction avec la propriété (E.6) de (RF.3).

En vertu de (B*.2), \hat{S}_∞ coupe $|\Sigma \setminus \mathcal{E}_1^*|$. Soit \mathcal{I}_1 la famille connexe de $\Sigma \setminus \mathcal{E}_1^*$ coupant \hat{S}_∞ et soit \mathcal{L}_1 l'autre. Posons $\hat{\mathcal{I}}_i = \mathcal{I}_i \cup \{\hat{S}_\infty\}$, $\mathcal{I}_i^* = \mathcal{I}_i \cup \{B_i\}$ et $\hat{\mathcal{I}}_i^* = \mathcal{I}_i \cup \{\hat{S}_\infty, B_i\}$. On peut voir aussi que

(B*.3) $\hat{\mathcal{I}}_i$ est exceptionnelle et d'ailleurs $\hat{\mathcal{I}}_i^*$ se réduit à \circ par $\text{cont}_{\hat{\mathcal{I}}_i}$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

(B*.4) $\text{cont}_{\hat{\mathcal{I}}_N}(F(\infty))$ est linéaire. Ses extrémités sont le transformé de C_Γ^∞ et celui de C_T^∞ . Si $R \in \mathcal{F}_{II}$, alors C_Γ^0 et C_T^0 sont les extrémités de Σ_0 .

3° Applications η_i ($i=0, 1, 2$). Nous allons étudier des surfaces réglées minimale obtenues par contractions successives des fibres singulières de la surface réglée $\hat{R}: M \rightarrow \mathbf{P}^1$.

a) Supposons $R \in \mathcal{F}_I$. D'après ce qu'on vient de voir dans le 1°, la famille Σ^* se réduit à $\begin{matrix} \bullet & \circ & \circ & \circ \\ | & | & | & | \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$ par $\text{cont}_{\mathcal{D}^\infty}$ et par suite à $\begin{matrix} \bullet & \circ \\ | & | \\ 0 & 0 \end{matrix}$ par $\text{cont}_{\mathcal{D}_T^\infty}$, où le point

noir \bullet représente le transformé propre de Γ . On pose $\eta_0 = \text{cont}_{\mathcal{D}_T^\infty}$. Alors, d'après Nagata [7], une surface projective rationnelle non singulière est birégulière à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ si son deuxième nombre de Betti est égal à 2 et qu'elle contienne deux courbe courbes rationnelles C_i ($i=1, 2$) telles que $(C_i \cdot C_i) = 0$ et $(C_1 \cdot C_2) = 1$. On en déduit:

Lemme 4.5. Si $R \in \mathcal{F}_I$, alors $\eta_0(M)$ est birégulière à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

On peut choisir les coordonnées (z, w) de $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_0)$ telles que le transformé de Γ soit donné par $w = \infty$ et qu'on ait

$$(4.1) \quad R \circ \rho = z \circ \eta_0.$$

Le point $\eta_0(\mathcal{D}_T^\infty)$ est donc donné par (∞, ∞) . La coordonnée w se détermine uniquement à une constante additive et un facteur constant près. Notons $\eta_0(M) = (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_0)$.

Lemme 4.6. Le domaine $\mathbf{P}^2 \setminus S_\infty$ est isomorphe à l'espace produit $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ par $\eta_0 \circ \rho^{-1}$.

Soit R' la fonction rationnelle sur \mathbf{P}^2 définie par

$$(4.2) \quad R' \circ \rho = w \circ \eta_0.$$

La fonction R' sera dite fonction adjointe distinguée associée à R . Une telle fonction se détermine uniquement pour R à une constante additive et un facteur constant près.

b) Supposons $R \in \mathcal{F}_{II}$. Dans ce cas, le domaine $\mathbf{P}^2 \setminus (S_0 \cup S_\infty)$ est isomorphe au domaine $M \setminus |\Sigma^*|$ par ρ^{-1} ; la famille Σ^* se réduit à $\begin{matrix} \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ \\ | & | & | & | & | \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

par $\text{cont}_{\mathcal{D}^0 \cup \mathcal{D}^\infty}$ et par suite, à $\begin{matrix} \circ & \bullet & \circ \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ par $\text{cont}_{\mathcal{D}_T^0 \cup \mathcal{D}_T^\infty}$ ou par $\text{cont}_{\mathcal{D}_T^0 \cup \mathcal{D}_T^\infty}$, où le point noir \bullet représente le transformé propre de Γ . On désigne $\text{cont}_{\mathcal{D}_T^0 \cup \mathcal{D}_T^\infty}$ (resp. $\text{cont}_{\mathcal{D}_T^0 \cup \mathcal{D}_T^\infty}$) par η_1 (resp. η_2). Alors, d'après le même argument que pour le cas a), on a le

Lemme 4.7. *Si $R \in \mathcal{F}_{II}$, $\eta_i(M)$ est birégulière à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.*

On pose $\eta_i(M) = (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_i)$. Considérons $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_1)$. Soient O_0 et O_∞ les points $\eta_1(\mathcal{D}_T^0)$ et $\eta_1(\mathcal{D}_T^\infty)$ respectivement. On prend les coordonnées (z, w) de $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_1)$ telles que

$$(4.3) \quad R \circ \rho = z \circ \eta_1,$$

que le transformé de Γ soit donné par $w = \infty$, et que le point O_0 (resp. O_∞) soit donné par $(0, 0)$ (resp. (∞, ∞)). La coordonnée w se détermine uniquement à un facteur constant près. On a une situation analogue pour η_2 . On peut choisir les coordonnées (z, u) de $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_2)$ telles que

$$(4.4) \quad u \circ \eta_2 = (w/z) \circ \eta_1,$$

que le transformé propre de Γ soit donné par $u = \infty$, et que le point $\eta_2(\mathcal{D}_T^0)$ (resp. $\eta_2(\mathcal{D}_T^\infty)$) soit donné par le point $(0, \infty)$ (resp. $(\infty, 0)$). On en conclut:

Lemme 4.8. *Le domaine $\mathbf{P}^2 \setminus (S_0 \cup S_\infty)$ est isomorphe à l'espace produit $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ par $\eta_i \circ \rho^{-1}$ où $i=1, 2$.*

On définit deux fonctions rationnelles φ et ψ sur \mathbf{P}^2 par

$$(4.5) \quad \varphi \circ \rho = w \circ \eta_1$$

$$(4.6) \quad \psi \circ \rho = u \circ \eta_2.$$

Elles seront dites *fonctions adjointes distinguées associées à R*.

4° Degrés des courbes premières singulières. Envisageons le diviseur $(R) = mS_0 - nS_\infty$ où $(m, n) = 1$. Si $R \in \mathcal{F}_I$ (resp. $R \in \mathcal{F}_{II}$), on a $m=1$ (resp. $m, n > 1$). On a alors le

Lemme 4.9. *Les degrés de S_0 et S_∞ sont n et m respectivement.*

En effet, on prend des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 de façon que la droite à l'infini L ne contienne pas p . En désignant par n' et m' les degrés de S_0 et S_∞ respectivement, on a $m'n = n'm$.

Supposons d'abord $R \in \mathcal{F}_I$. Soit Q un polynôme irréductible en x et y qui prend la valeur zéro seulement en S_∞ . La restriction Q^* de $1/Q$ sur $\mathbf{P}^2 \setminus S_\infty$ est une fonction holomorphe qui prend la valeur zéro d'ordre m' seulement sur L .

Comme $\mathbf{P}^2 \setminus S_\infty$ est rationnellement isomorphe à \mathbf{C}^2 d'après le lemme 4.6, on peut trouver une fonction rationnelle ξ telle que Q^* soit donnée par $\xi^{m'}$. Il s'ensuit que $m'=1$. D'où $n'=n$.

Supposons ensuite $R \in \mathcal{F}_{II}$. On prend $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_1)$ et ses coordonnées (z, w) données dans le b) de 3°. Soit Ψ un polynôme irréductible en z et w qui s'annule seulement sur le transformé propre de L . Soit Ψ^* la fonction rationnelle sur \mathbf{P}^2 définie par $\Psi^* \circ \rho = \Psi \circ \eta$ où $\rho: M \rightarrow \mathbf{P}^2$ est la résolution minimale du point d'indétermination de R . Alors Ψ^* prend la valeur zéro d'ordre un en L et n'a de pôle qu'en S_∞ . Posons $b = \text{ord}_{S_\infty}(\Psi^*)$. De plus, Ψ^* s'annule sur S_0 parce que $m' > 1$. En posant $a = \text{ord}_{S_0}(\Psi^*)$, on a $1 + n'a - m'b = 0$ puisque $(\Psi^*) = L + aS_0 - bS_\infty$. D'où $(n', m') = 1$. Il en résulte immédiatement que $n' = n$ et $m' = m$.

D'après ce lemme, S_∞ pour $R \in \mathcal{F}_I$ est toujours une droite de \mathbf{P}^2 . On prend donc des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 de telle sorte que S_∞ soit la droite à l'infini. Alors R est un polynôme primitif de type (0, 1) par rapport à x et y . Un polynôme sur \mathbf{C}^2 est dit *polynôme primitif de type (0, 1)* s'il est de type (0, 1) quand on le considère comme fonction rationnelle sur \mathbf{P}^2 . Soit \mathcal{P}_I la famille des polynômes primitifs de type (0, 1) dans l'espace (x, y) . On peut en conclure la

Proposition 4.1. *La famille \mathcal{F}_I (resp. \mathcal{F}_0) est équivalente à celle des polynômes dans \mathcal{P}_I tels que leur degré soit ≥ 2 (resp. $= 1$).*

Pour $R \in \mathcal{F}_{II}$, on prend des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 . Soient P et Q deux polynômes de x et y qui s'annulent à l'ordre un seulement en S_0 et en S_∞ respectivement. Alors on dira que P et Q sont *les polynômes définis par R* si $R = P^m / Q^n$.

5. Construction des fonctions appartenant à \mathcal{F}_I ou \mathcal{F}_{II} . Dans la section précédente, on a construit une application birationnelle de \mathbf{P}^2 à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ à partir de R . Dans cette section, on construira des fonctions, dont on a besoin, à partir de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Soit V l'espace produit $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On prend des coordonnées (z, w) de V . Soit π la première projection; on désigne par $\Gamma^{(0)}$ la courbe $w = \infty$ sur V et par O_∞ le point (α, α) où $\alpha = 0, \infty$.

1° On fait $\nu (\geq 3)$ éclatements successifs satisfaisant aux conditions (Q) en O_∞ :

- (1) 1^{ème} étape: On éclate le point O_∞ . Posons $V^{(1)} = Q_{O_\infty}(V)$ et $A_1 = Q_{O_\infty}(O_\infty)$. On désigne par q_1 l'intersection de A_1 et du transformé propre de $\pi^{-1}(\infty)$.
- (2) 2^{ème} étape: On éclate le point q_1 . Posons $V^{(2)} = Q_{q_1}(V^{(1)})$ et $A_2 = Q_{q_1}(q_1)$.
- (3) Pour $\nu \geq k \geq 3$, on prend un point quelconque q_{k-1} sur A_{k-1} et on éclate le point q_{k-1} .

Posons $V^{(k)} = Q_{q_{k-1}}(V^{(k-1)})$, $A_k = Q_{q_{k-1}}(q_{k-1})$, $M = V^{(\nu)}$ et $\eta_0 = (Q_{q_{\nu-1}} \circ \dots \circ Q_{q_1} \circ Q_{O_\infty})^{-1}$. Désignons par C_T^∞ le transformé propre dans M de $\pi^{-1}(\infty)$, par Γ celui de $\Gamma^{(0)}$, par la même lettre celui de A_i ($1 \leq i \leq \nu - 1$) et par \hat{S}_∞ celui de A_ν . On a alors $(\Gamma^2) = -1$, $(\hat{S}_\infty^2) = -1$, $(A_i^2) \leq -2$ pour tout $(1 \leq i \leq \nu - 1)$ et $(C_T^{\infty 2}) \leq -2$. Posons $\Sigma = \Gamma \cup \{C_T^\infty\} \cup \{A_i\}_{1 \leq i \leq \nu - 1}$. Évidemment, la famille Σ vérifie la propriété (2) des conditions $(R_a)^5$. On suppose maintenant que Σ est exceptionnelle. D'après le théorème 2.1, $\text{cont}_\Sigma(M)$ est alors birégulière à \mathbf{P}^2 . Compte tenu de la remarque 2.1, la fonction R définie par $R \circ \rho = z \circ \eta_0$ où $\rho = \text{cont}_\Sigma$ appartient à \mathcal{F}_I . Soit S_∞ le transformé propre de \hat{S}_∞ par ρ ; la fonction R a un pôle d'ordre élevé en S_∞ . Le triplet $[M, \Sigma, \rho]$ est sa résolution minimale du point d'indétermination. D'après le théorème 2.1 et ce qu'on a vu dans la section 4, on peut en conclure la

Proposition 5.1. *La famille \mathcal{F}_I coïncide avec celle des fonctions obtenues par ce procédé.*

2° Pour construire les fonctions appartenant à \mathcal{F}_{II} , on fait ν_0 éclatements successifs satisfaisant aux conditions (Q) au point O_0 et aussi ν_∞ fois au point O_∞ . Soient M la variété obtenue et η l'application canonique de M sur V . Soit $\Gamma \subset M$ le transformé propre de $\Gamma^{(0)} = \{(z, w) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1; w = \infty\}$ et soit C_0^Γ (resp. C_∞^Γ) celui de $\pi^{-1}(0)$ (resp. $\pi^{-1}(\infty)$). Soit $\hat{S}_* \subset M$ la courbe insérée par l'éclatement final en O_* ($* = 0$ ou ∞). Soient $\{A_i\}_{1 \leq i \leq \nu_0 + \nu_\infty - 2}$ les courbes $\eta^{-1}(O_0)$ et $\eta^{-1}(O_\infty)$ auxquelles on a enlevé \hat{S}_0 et \hat{S}_∞ . On a alors $(\Gamma^2) = -1$, $(\hat{S}_0^2) = (\hat{S}_\infty^2) = -1$, $(C_0^{\Gamma 2}) \leq -2$, $(C_\infty^{\Gamma 2}) \leq -2$ et $(A_i^2) \leq -2$ pour $1 \leq i \leq \nu_0 + \nu_\infty - 2$. Posons $\Sigma = \{\Gamma, C_0^\Gamma, C_\infty^\Gamma\} \cup \{A_i; 1 \leq i \leq \nu_0 + \nu_\infty - 2\}$; Σ vérifie aussi la propriété (2) des conditions (R_a) . On suppose que Σ est exceptionnelle et que la courbe qui dégénère en un point par la dernière des contractions successives de Σ est un membre de $(\pi \circ \eta)^{-1}(\infty)$. D'après le théorème 2.1, $\text{cont}_\Sigma(M)$ est alors birégulière à \mathbf{P}^2 et on peut définir la fonction rationnelle primitive R de type rationnel donnée par $R \circ \rho = z \circ \eta$ où $\rho = \text{cont}_\Sigma$. D'après la remarque 2.1, elle est de type $(0, 1)$. Soit S_* le transformé propre de \hat{S}_* par ρ où $* = 0$ ou ∞ . Il est évident que R a un zéro (resp. un pôle) d'ordre élevé en S_0 (resp. S_∞). Le triplet $[M, \Sigma, \rho]$ est sa résolution minimale du point d'indétermination et on a $\eta = \eta_1$ et V est l'espace produit $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta_1)$ pour R . On en conclut la

Proposition 5.2. *La famille \mathcal{F}_{II} coïncide avec celle des fonctions obtenues par ce procédé.*

6. Le graphe de Σ^* . Soit R une fonction appartenant à \mathcal{F} . Soit $[M, \Sigma, \rho]$ sa résolution minimale du point d'indétermination. Conservons les notations introduites dans les sections précédentes. Posons $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\hat{S}_0, \hat{S}_\infty\}$. Dans cette section, nous allons donner tous les graphes de Σ^* . Dans les notations

5) Voir le théorème 2.1.

suivantes, un cercle \circ représente une courbe de Σ , un carré \square représente \hat{S}_0 ou \hat{S}_∞ . Le nombre attaché à chaque \circ ou \square est $(-1) \times$ (le nombre de self-intersection). De plus, on introduit quelques notations. Pour une famille \mathcal{C} de courbes, on désigne par $g(\mathcal{C})$ le graphe de \mathcal{C} . Pour un graphe G , on désigne le graphe $\underbrace{G-G \cdots G}_{\lambda\text{-fois}}$ par G^λ . Pour un entier $l \geq 0$, on désigne par \vec{G}_l le graphe

$$\begin{aligned} & \circ \text{---} \circ \text{---} \circ && \text{pour } l=0, \\ & 2 \quad 2 \quad 2 \\ & \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^{j-1} \text{---} \circ \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \right)^{j-1} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^5 && \text{pour } l=2j-1 \ (j \geq 1) \\ & 7 \qquad 5 \qquad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \qquad 2 \end{aligned}$$

et

$$\left(\text{---} \circ \text{---} \right)^j \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \right)^{j-1} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^5 \text{ pour } l=2j \ (j \geq 1).$$

On interprète \vec{G}_{-1} par le graphe vide. La notation $\text{---} \vec{G}_l \text{---}$ représente

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 2 \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ \square_1 \end{array} \text{ pour } l=0, \quad \begin{array}{c} 5 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ \square_1 \end{array} \text{ pour } l=1, \\ & \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^{j-1} \text{---} \circ \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \square_1 \end{array} \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^5 \text{ pour } l=2j-1 \ (j \geq 2) \text{ et} \\ & \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^j \text{---} \begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \square_1 \end{array} \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^5 \text{ pour } l=2j \ (j \geq 1). \end{aligned}$$

Par \vec{H}_l ($l \geq 1$), on désigne le graphe obtenu en enlevant cinq \circ 's au bord droit de \vec{G}_l . Les graphes $^+ \vec{G}_l$ et $^+ \vec{H}_l$ (resp. \vec{G}_l^+ et \vec{H}_l^+) sont obtenus par augmentant le nombre attaché à l'extrémité gauche (resp. droite) de \vec{G}_l et \vec{H}_l par un respectivement. Par $^+ \vec{H}_l^-$, on désigne le graphe obtenu en diminuant de un le nombre à l'extrémité droite de $^+ \vec{H}_l$. Les graphes $\vec{G}_l^-, \vec{H}_l^-, \vec{G}_l^+, \vec{H}_l^+, \vec{H}_l^-$ et $^- \vec{H}_l^+$ sont obtenus par inversant les sens des graphes correspondants. Le graphe $\text{---} \circ \text{---}$ re-

$$\text{présente } \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^{\lambda-1} \begin{array}{c} \circ \\ \lambda+1 \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)^{\lambda-1} \text{ et le graphe } \begin{array}{c} \circ \\ \lambda \\ \text{---} \end{array} \text{ représente}$$

$$-\left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}\right) \frac{\lambda-1}{2} \begin{array}{c} | \\ \circ \\ \lambda+1 \\ | \\ \circ \end{array} \frac{\lambda-1}{2} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}\right) \frac{\lambda-1}{2}$$
 lorsque $\lambda \geq 1$. Lorsque $\lambda = 0$,

$$\begin{array}{c} 2 \circ \text{---} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \frac{b}{c} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \frac{c-1}{a}$$
 ($a \geq 2, b \geq 0, c \geq 3$) représente (qui ne dépend pas de b). Cela posé, on a le

Théorème 6.1. *Soit R une fonction appartenant à \mathcal{F} . Alors le graphe de Σ^* de R est un graphe dans la liste ci-dessous.*

Réciproquement, tout graphe dans la liste ci-dessous est obtenu de cette manière. Dans le cas où $R \in \mathcal{F}_0$

O^* : $\begin{array}{c} \square \text{---} \circ \text{---} \square \\ 0 \quad 1 \quad 0 \end{array}$

Dans le cas où $R \in \mathcal{F}_I$

$I(0)^*$: $\begin{array}{c} \square \text{---} \circ \text{---} \vec{G}_0 \\ 0 \quad 1 \quad | \\ \square \quad 1 \end{array}$

$I^+(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)^*$: $\begin{array}{c} \square \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \vec{G}_0 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad \lambda_N \quad 3 \quad \lambda_{N-1} \quad 3 \quad \lambda_{N-2} \quad \dots \quad 3 \quad \lambda_1 \quad | \\ \square \quad 1 \end{array}$ pour $N \geq 1$.

$I^-(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)^*$: $\begin{array}{c} \square \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \square \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad \lambda_N \quad 3 \quad \lambda_{N-1} \quad 3 \quad \lambda_{N-2} \quad \dots \quad 3 \quad \lambda_1 \end{array}$ pour $N \geq 1$.

Ici, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des entiers tels que $\lambda_j \geq 1$.

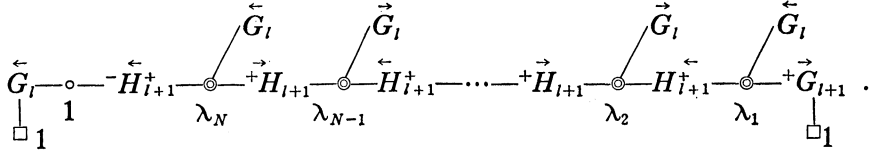
Dans le cas où $R \in \mathcal{F}_{II}$

$II(l)^*$: $\begin{array}{c} \vec{G}_l \text{---} \circ \text{---} \vec{G}_{l+1} \\ | \quad 1 \quad | \\ \square \quad 1 \quad \square \end{array}$ pour $l \geq 0$.

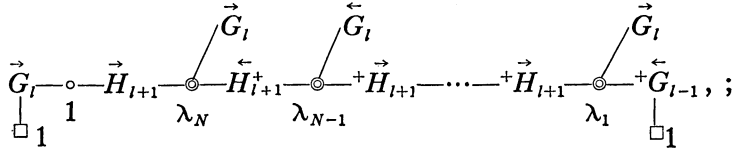
$II^+(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)^*$: si N est un entier pair ($N \geq 2$),

$$\vec{G}_l \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \square \quad 1 \end{array} \vec{H}_{l+1} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \vec{G}_l \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \vec{H}_{l+1} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \vec{G}_l \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \vec{H}_{l+1} \dots \vec{H}_{l+1} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \vec{G}_l \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \vec{H}_{l+1} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \vec{G}_l \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \vec{H}_{l+1} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \square \quad 1 \end{array}$$

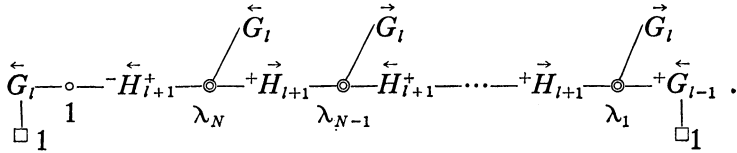
si N est un entier impair ($N \geq 1$),



$II^-(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)^*$: si N est un entier impair ($N \geq 1$),

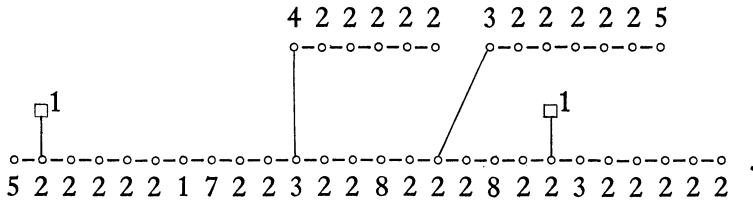


si N est un entier pair ($N \geq 2$),



Ici, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des entiers tels que $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ si $l \geq 1$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 1$ si $l=0$.

Par exemple, les graphes $II(0)$ et $II(1)$ sont donnés explicitement par les graphes (6.7) et (6.8) respectivement. La notation $II^+(1, 2; 2, 0)^*$ signifie le graphe



DÉMONSTRATION. Nous allons d'abord donner tous les graphes possibles de Σ^* . On a déjà vérifié le théorème pour le cas où $R \in \mathcal{F}_0$. Nous allons donc voir le cas où $R \in \mathcal{F}_I$ ou $R \in \mathcal{F}_{II}$, en remarquant que Σ est une famille exceptionnelle minimale, que $F(\beta)$ se réduit à \circ par une suite de contractions, et que

d'autre part $F(\beta)$ sont obtenues par une modification de $P^1 \times P^1$ comme on l'a vu dans le 2° de la section 5.

1° Envisageons d'abord le cas où $R \in \mathcal{F}_I$. Dans ce cas, Σ consiste en Γ et Σ_∞ . On a alors $(\Gamma^2) = (\hat{S}_\infty^2) = -1$ et $(C^2) \leq -2$ pour tout membre C de Σ_∞ .

a) Supposons d'abord que Σ est linéaire. Comme Σ est exceptionnelle et

minimale, le graphe de Σ est $\underset{1}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^\lambda$ pour $\lambda \geq 1$. Comme $F(\infty)$ se réduit à $\underset{0}{\circ}$, $g(F(\infty))$ doit être $\underset{0}{\circ} - \underset{1}{\circ} - \underset{1}{\circ} - \underset{1}{\circ}$. D'où $g(\Sigma^*)$ est $\underset{0}{\square} - \underset{1}{\circ} - \underset{1}{\circ} - \underset{1}{\circ}$.

b) Supposons ensuite que Σ est non linéaire. Soit N le nombre des embranchements de Σ . Conservons les notations utilisées dans la section 4; $\{B_i\}$, $\{C_i\}$, $\{C_i^*\}$, $\{L_i\}$, $\{Q_i\}$, $\{\hat{Q}_i\}$ et $\{Q_i^*\}$ ($1 \leq i \leq N$). Dans ce cas,

(i) $g(\mathcal{E}_N^*)$ est $\underset{1}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^{1+\lambda_N}$ pour $\lambda_N \geq 1$ puisque $\mathcal{E}_N^* (= \mathcal{E}_N \cup \{B_N\})$ est linéaire et se réduit à $\underset{1}{\circ}$ par $\text{cont}_{\mathcal{E}_N}$, et Γ est une extrémité de Σ . D'où $g(\Sigma)$ est

$$\underset{1}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_N} \underset{2}{\circ} \begin{matrix} \nearrow g(\mathcal{L}_N) \\ \searrow g(\mathcal{Q}_N) \end{matrix} \text{ pour } \lambda_N \geq 1.$$

(ii) Par $\text{cont}_{\hat{\mathcal{Q}}_N}$, $F(\infty)$ se réduit à $\underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_N} \underset{1}{\circ} - g(\mathcal{L}_N)$. Comme le graphe est linéaire et qu'il se réduit à $\underset{0}{\circ}$, le graphe $-g(\mathcal{L}_N)$ est égal à $\underset{0}{\circ} - \underset{1+\lambda_N}{\circ}$.

(iii) Voyons ensuite le graphe de $\text{cont}_{\mathcal{E}_N}(\Sigma)$: $\underset{1+\lambda_N}{\circ} - \underset{1}{\circ} - g(\mathcal{Q}_N)$. Comme il se contracte en un point, $g(\mathcal{Q}_N)$ est $\underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_N-1}$ si $\underset{1}{\circ} - g(\mathcal{Q}_N)$ se contracte en un point par contractions successives. Sinon, $-g(\mathcal{Q}_N)$ contient $\underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_N-1} \underset{3}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^\lambda$ pour $\lambda \geq 0$.

(iv) Supposons d'abord $N=1$, Alors $g(\mathcal{Q}_1)$ est $\underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_1-1}$ ou bien $\underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_1-1} \underset{3}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^\lambda$. D'après la propriété (B*.3) pour $(\hat{\mathcal{Q}}_1, \hat{\mathcal{Q}}_1^*)$, $g(\Sigma^*)$ s'écrit

$$\underset{0}{\square} - \underset{1}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_1} \underset{2}{\circ} \begin{matrix} \circ 1+\lambda_1 \\ | \\ \circ \end{matrix} - \underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_1-1} \underset{1}{\square} \quad \text{pour } \lambda_1 \geq 2$$

ou bien

$$\underset{0}{\square} - \underset{1}{\circ} - \underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_1} \underset{2}{\circ} \begin{matrix} \circ 1+\lambda_1 \\ | \\ \circ \end{matrix} - \underset{2}{(-\circ-)}^{\lambda_1-1} \underset{3}{\circ} - \underset{2}{\circ} - \underset{2}{\circ} \begin{matrix} \square 1 \\ | \\ \circ \end{matrix} \quad \text{pour } \lambda_1 \geq 1.$$

Dans le premier cas, on exclut $\lambda_1=1$ parce que Σ est non linéaire.

(v) Ensuite, on suppose $N \geq 2$. Comme $g(\Sigma)$ dégénère en $g(\mathcal{I}_N)$ par contractions successives, $g(\mathcal{I}_N)$ est

$$\begin{array}{c} \phantom{g(\mathcal{L}_{N-1})} \\ \phantom{g(\mathcal{I}_{N-1})} \diagup \\ (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}}{2} \circ -g(\mathcal{I}_{N-1}) \\ \phantom{g(\mathcal{I}_{N-1})} \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{c} \phantom{g(\mathcal{L}_{N-1})} \\ \phantom{g(\mathcal{I}_{N-1})} \diagup \\ (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}}{2} \circ (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}-1}{2} \circ -g(\mathcal{I}_{N-1}) \\ \phantom{g(\mathcal{I}_{N-1})} \end{array}$$

Cependant, on peut exclure le premier cas à cause de la propriété suivante.

Le cas suivant n'existe jamais:

$$\begin{array}{cc} g(\mathcal{L}_i) & g(\mathcal{L}_{i-1}) \\ | & | \\ g(\mathcal{E}_i) \circ - (-\circ-)\frac{\lambda}{2} \circ -g(\mathcal{I}_{i-1}) \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array}$$

pour $\lambda \geq 0, 2 \leq i \leq N$ et $a \geq 3$.

En effet, d'après la propriété (B*.3) pour $(\hat{\mathcal{I}}_{i-1}, \hat{\mathcal{I}}_{i-1}^*), g(\text{cont}_{\hat{\mathcal{I}}_{i-1}}(\hat{\Sigma}))$:

$$\begin{array}{c} g(\mathcal{L}_i) \\ | \\ g(\mathcal{E}_i) \circ - (-\circ-)\frac{\lambda}{2} \circ -g(\mathcal{L}_{i-1}), \quad \text{où } \hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\hat{S}_\infty\}. \\ | \\ 2 \end{array}$$

C'est en contradiction avec la propriété (B*.3) pour $(\hat{\mathcal{I}}_i, \hat{\mathcal{I}}_i^*)$.

D'où $g(\Sigma)$ s'écrit

$$\begin{array}{c} \phantom{g(\mathcal{L}_{N-1})} \\ \phantom{g(\mathcal{I}_{N-1})} \diagup \\ \circ - (-\circ-)\frac{\lambda_N}{2} \circ (-\circ-)\frac{\lambda_N-1}{2} \circ (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}-1}{3} \circ (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}-1}{2} \circ -g(\mathcal{I}_{N-1}) \\ | \\ \lambda_N + 1 \\ \phantom{g(\mathcal{I}_{N-1})} \end{array}$$

pour $\lambda_N, \lambda_{N-1} \geq 1$. Envisageons ce graphe. Soit D_N le membre de Σ correspondant à \circ du graphe ci-dessus et soit \mathcal{G}_N la sous-famille connexe de $\Sigma \setminus \{D_N\}$ qui est à droite de D_N .

(vi) On peut alors facilement voir que la propriété (B*.3) pour $(\hat{\mathcal{I}}_N, \hat{\mathcal{I}}_N^*)$ entraîne (B*.3) pour $(\hat{\mathcal{G}}_N, \hat{\mathcal{G}}_N^*)$ où $\hat{\mathcal{G}}_N = \{\hat{S}_\infty\} \cup \mathcal{G}_N$ et $\hat{\mathcal{G}}_N^* = \mathcal{G}_N \cup \{D_N\}$.

(vii) Soit \mathcal{K}_N la sous-famille de Σ correspondant à

$$\begin{array}{c} \circ - (-\circ-)\frac{\lambda_N}{2} \circ (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}-1}{2} \\ | \\ 1 \end{array}; \mathcal{K}_N \text{ est exceptionnelle et } g(\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma)) \text{ est}$$

$$\begin{array}{c} g(\mathcal{L}_{N-1}) \\ | \\ \circ - (-\circ-)\frac{\lambda_{N-1}-1}{2} \circ -g(\mathcal{I}_{N-1}) \\ | \\ 2 \end{array} \quad \text{pour } \lambda_{N-1} \geq 1.$$

Posons $\Sigma' = \text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma)$ et $F'(\infty) = \text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\hat{\mathcal{G}}_N^*)$. Il est immédiat que Σ' se contracte en un point et $F'(\infty)$ se réduit à \circ . La deuxième propriété résulte de \circ .

(vi). Donc Σ' satisfait la même condition que Σ , tandis que le nombre des embranchements de Σ' est inférieur de un à celui de Σ . On peut ainsi se ramener par récurrence à montrer le cas où $R \in \mathcal{F}_I$.

2° Avant de considérer le cas \mathcal{F}_{II} , nous allons étudier le graphe des familles exceptionnelles. Avec les mêmes notations que dans le 2° de la section 1, soit \mathcal{C} une famille de courbes sur une variété V . On dit que *le graphe de \mathcal{C} se contracte en un point* (resp. *se réduit à \circ*) si \mathcal{C} se contracte en un point (resp. se réduit à \circ). On suppose que \mathcal{C} est une famille exceptionnelle minimale linéaire

telle que la courbe exceptionnelle de \mathcal{C} coupe exactement deux membres de \mathcal{C} . Dans cette condition, on peut facilement voir les faits suivants:

(G.1) *Tous les graphes possibles de \mathcal{C} sont*

$$(6.1) \quad \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{x_1} \circ \text{---} \circ \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{y_1} \quad \text{pour } x_1 \geq 1 \text{ et } y_1 \geq 0.$$

$$(6.2) \quad \vec{X}: \circ \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{x_v} \circ \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{x_{v-1}} \dots \\ \dots \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{x_1} \circ \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{y_1} \circ \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{y_2} \dots \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{y_v}$$

pour $v \geq 1$ et $x_1, \dots, x_v, y_1, \dots, y_v \geq 0$.

$$(6.3) \quad \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{x_{v+1}} \vec{X} \quad \text{pour } x_{v+1} \geq 1.$$

$$(6.4) \quad \vec{X} \text{---} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right)^{y_{v+1}} \quad \text{pour } y_{v+1} \geq 0.$$

Ici, lorsqu'on fait des contractions successives pour les graphes (6.1) et (6.4), c'est la courbe à l'extrémité droite du graphe qui est contractée par la contraction finale. Pour les graphes (6.2) et (6.3), c'est la courbe à l'extrémité gauche.

(G.2) *Le graphe \vec{X} se réduit à \circ où \vec{X} représente le graphe obtenu en diminuant de un le nombre attaché à l'extrémité gauche de \vec{X} .*

Après ces préparatifs, nous allons voir le cas où $R \in \mathcal{F}_{II}$. Dans ce cas, on a $(\Gamma^2) = (\hat{S}_0^2) = (\hat{S}_\infty^2) = -1$, $(C^2) \leq -2$ pour tout membre $C \in \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$ et Σ_0 est linéaire.

a) Envisageons le cas où Σ est linéaire. En remarquant que $F(0)$ est obtenue par éclatements successifs comme on l'a vu dans le 2° de la section 5, le

cas le plus simple de $F(0)$ est $\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}$. D'après l'hypothèse (3.3) et la re-



marque (G.1), $g(\Sigma)$ s'écrit sous la forme $\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{5}{\circ}-\overset{2}{\circ}$. De plus,

d'après ce que $F(\infty)$ est aussi obtenue par éclatements successifs satisfaisant aux

conditions (Q), $g(F(\infty))$ s'écrit sous la forme $\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}$. D'où $g(\Sigma^*)$



s'écrit $\text{II}(0)^*$: $\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{5}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}$. À l'exclusion du cas ci-



dessus, le graphe de Σ_0 s'écrit sous la forme

$$\vec{X}_l: \overset{a_l}{\circ}-\overset{b_l+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{a_{l-1}}{\circ}-\overset{b_{l-1}+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\dots-\overset{a_1}{\circ}-\overset{b_1+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}$$

pour $l \geq 1$, $a_1 \geq 1$, et $a_2, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l \geq 0$. Le graphe de $\Sigma_0 \cup \{\Gamma\}$ est donc $\vec{X}_l-\overset{1}{\circ}$ ou bien $\overleftarrow{X}_l-\overset{1}{\circ}$. On appelle l longueur de Σ_0 . Donc $g(\Sigma)$ s'écrit sous la forme

$$(6.5) \quad \vec{X}_l-\overset{1}{\circ}-\overset{a_1+2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_1}{\circ}-\overset{a_2+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\dots-\overset{a_l+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_l}{\circ}-\overset{3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_{l+1}}{\circ}$$

pour $b_{l+1} \geq 1$

ou bien

$$(6.6) \quad \overleftarrow{X}_l-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_l+1}{\circ}-\overset{a_l+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_{l-1}}{\circ}-\overset{a_{l-1}+3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_{l-2}}{\circ}-\overset{a_{l-2}+3}{\circ}-\dots-\overset{a_1+3}{\circ}$$

En désignant par \vec{Y}_l le sous-graphe entre $-\overset{b_1}{\circ}-\overset{2}{\circ}$ et $-\overset{b_l}{\circ}-\overset{2}{\circ}$ de (6.5) et

son inverse \overleftarrow{Y}_l pour simplifier, les graphes (6.5) et (6.6) s'écrivent

$$\vec{X}_l-\overset{1}{\circ}-\overset{a_1+2}{\circ}-\vec{Y}_l-\overset{3}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{b_{l+1}}{\circ}$$

et

$$\overleftarrow{X}_l-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overleftarrow{Y}_l-\overset{a_1+3}{\circ} \quad \text{respectivement.}$$

On peut alors déterminer $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ grâce au fait que $F(0)$ et $F(\infty)$ se réduisent

à \circ . D'abord, notons que $F(0) = \Sigma_0 \cup \{\hat{S}_0\}$ se réduit à \circ . Donc $g(F(0))$ doit

être le graphe suivant:

$$\circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{a_l} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{a_{j-1}} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{a_1}$$

$\begin{array}{c} b_l+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_j+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \square_1 \\ | \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_{j-1}+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_1+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$

lorsque $l=2j-1$ ($j \geq 1$),

$$\circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{a_l} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{a_{j+1}-1} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{2} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{a_1}$$

$\begin{array}{c} b_l+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_{j+1}+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \square_1 \\ | \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_j+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_1+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$

lorsque $l=2j$ ($j \geq 1$).

En plus, il faut que $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ satisfassent aux conditions $(F(0))_l$ ($l \geq 1$):

Si $l=2j-1$, alors $a_1=b_l+1$, $a_j=b_j+2$ et $a_k=b_{l-k+1}$ pour tout k sauf 1 et j .

Si $l=2j$, alors $a_1=b_l+1$, $a_{j+1}=b_j+2$ et $a_k=b_{l-k+1}$ pour tout k ($\neq 1, j+1$).

Cela posé, on voit que

$g(\Sigma)$ n'est pas en réalité le graphe (6.6).

En effet, d'après ce qu'on vient de voir, on doit avoir $b_l+2=a_l+2$ puisque $F(\infty)$ se réduit à \circ . C'est en contradiction avec les conditions $(F(0))_l$.

Pour la suite, bornons-nous au graphe (6.5). D'après le même raisonnement que pour Σ_0 , $g(F(\infty))$ est égal à

$$\circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{b_l} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{b_j-1} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{2} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{b_{l+1}}$$

$\begin{array}{c} a_1+2 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} a_j+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \square_1 \\ | \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} a_{j+1}+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_{l+1} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$

si $l=2j-1$,

$$\circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{b_l} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{b_{j+1}-1} \dots \circ - \left(\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \right) \xrightarrow{b_{l+1}}$$

$\begin{array}{c} a_1+2 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} a_{j+1}+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \square_1 \\ | \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} a_{j+2}+3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} b_{l+1} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array}$

si $l=2j$.

Pour que $F(\infty)$ se réduise à \circ par contractions successives, il faut que $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ satisfassent aux conditions $(F(\infty))_l$:

Si $l=2j-1$, alors $0=b_l$, $a_{j+1}+2=b_j$, $a_k=b_{l-k+2}$ pour tout k ($1 \leq k \leq l$, $k \neq j+1$).

Si $l=2j$, alors $0=b_1, a_{j+1}+2=b_{j+1}, a_k=b_{l-k+2}$ pour tout $k (1 \leq k \leq l, k \neq j+1)$.

D'après $(F(0))_l$ et $(F(\infty))_l$, pour $l=2j-1$, on a $a_1=5, a_2=\dots=a_j=4, a_{j+1}=\dots=a_l=0, b_1=\dots=b_{j-1}=0, b_j=2, b_{j+1}=\dots=b_l=4, b_{l+1}=5$, et pour $l=2j$, on a $a_1=5, a_2=\dots=a_j=4, a_{j+1}=2, a_{j+2}=\dots=a_l=0, b_1=\dots=b_j=0, b_{j+1}=\dots=b_l=4, b_{l+1}=5$.

On obtient ainsi tous les graphes possibles de Σ^* dans le cas linéaire:

$$(6.7) \quad \begin{array}{cccccccccccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & & \\ \square_1 & & & & \square_1 & & & & & \end{array} \quad \text{si } l=0,$$

$$(6.8) \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \downarrow & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ \square_1 & & & & & & & \square_1 & & & & & & & & \end{array} \quad \text{si } l=1,$$

$$\begin{array}{l} \left(\text{---} \right)_7^{j-1} \text{---} \underset{5}{\circ} \text{---} \underset{\square_1}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \right)_3^2 \text{---} \underset{\square_1}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \right)_3^2 \text{---} \left(\text{---} \right)_2^{j-2} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ}^5 \\ \text{---} \left(\text{---} \right)_7^j \text{---} \underset{\square_1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \right)_3^2 \text{---} \left(\text{---} \right)_2^{j-1} \text{---} \underset{2}{\circ}^5 \end{array} \quad \text{si } l=2j-1 (\geq 3),$$

$$\begin{array}{l} \left(\text{---} \right)_7^j \text{---} \underset{\square_1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \right)_3^2 \text{---} \left(\text{---} \right)_2^{j-1} \text{---} \underset{2}{\circ}^5 \text{---} \underset{1}{\circ} \\ \text{---} \left(\text{---} \right)_7^j \text{---} \underset{5}{\circ} \text{---} \underset{\square_1}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \right)_3^2 \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \right)_2^{j-1} \text{---} \underset{2}{\circ}^5 \end{array} \quad \text{si } l=2j (\geq 2).$$

b) Envisageons le cas où Σ est non linéaire. Cette situation est presque la même que celle du cas où $R \in \mathcal{F}_I$ et Σ est non linéaire. Soit N le nombre des embranchements de Σ et conservons les notations $\{\mathcal{E}_i\}, \{\mathcal{L}_i\}$ et $\{\mathcal{I}_i\}$. D'après ce qu'on vient de voir ci-dessus, le graphe de $\Sigma_0 \cup \{\Gamma\}$ est $\vec{G}_0 \text{---} \underset{1}{\circ}$, $\vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ}$ ou $\vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ}$ pour $l \geq 1$ et $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ satisfont aux conditions $(F(0))_l$.

(1) Le cas où $l=0$. D'après le même raisonnement que pour les i), ii) et iii) de 1° pour \mathcal{F}_I , les graphes de $\mathcal{E}_N^*, \Sigma, \mathcal{L}_N$ et \mathcal{I}_N doivent être comme suit:

- i) $g(\Sigma)$ est égal à $\frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 5 \ 2} \frac{\lambda_N-1}{2} \overset{g(\lambda_N)}{\circ} - g(\mathcal{I}_N)$ pour $\lambda_N \geq 1$,
- ii) $-g(\mathcal{L}_N)$ est égal à $\frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{1+\lambda_N \ 2 \ 2 \ 2}$,
- iii) $-g(\mathcal{I}_N)$ est égal à $-\frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_N-1}}{2}$ ou contient $-\frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_N-1}}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{6 \ 2}^\lambda$ pour $\lambda \geq 0$ selon que Σ dégénère en \mathcal{L}_N ou \mathcal{I}_N .
- iv) Supposons $N=1$. De la même manière que dans le iv) de 1° pour \mathcal{F}_1 , $g(\mathcal{I}_1)$ est $\frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_1-1}}{2}$ ou bien $\frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_1-1}}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{6 \ 2}^\lambda$. D'après la propriété (B*.3) pour $(\hat{\mathcal{I}}_1, \hat{\mathcal{I}}_1^*)$, $g(\Sigma^*)$ est égal à

$$\frac{\square^1}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 5 \ 2} \frac{\lambda_1-1}{2} \overset{\lambda_1+1 \ 2 \ 2 \ 2}{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{2} \frac{\lambda_1-1}{2} \square^1 \quad (\lambda_1 \geq 1)$$

ou bien

$$\frac{\square^1}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 5 \ 2} \frac{\lambda_1-1}{2} \overset{\lambda_1+1 \ 2 \ 2 \ 2}{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{2} \frac{\lambda_1-1}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{6 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2} \square^1 \quad (\lambda_1 \geq 1).$$

v) Supposons ensuite $N \geq 2$. D'après le fait que $g(\Sigma)$ dégénère en $g(\mathcal{I}_N)$ et grâce à la remarque dans la propriété v) de 1° pour \mathcal{F}_1 , le graphe de \mathcal{I}_N est

$$\frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_N-1}}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{6 \ 2} \frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_{N-1}-1}}{2} \overset{g(\mathcal{L}_{N-1})}{\circ} - g(\mathcal{I}_{N-1}) \quad \text{pour } \lambda_{N-1} \geq 1.$$

Soit D_N la composante \circ et soit \mathcal{H}_N la famille connexe de $\mathcal{I}_N \setminus \{D_N\}$ qui est à droite de D_N . On pose $\hat{\mathcal{H}}_N = \mathcal{H}_N \cup \{\hat{S}_\infty\}$ et $\hat{\mathcal{H}}_N^* = \hat{\mathcal{H}}_N \cup \{D_N\}$. Évidemment on a la propriété (B.3) pour $\hat{\mathcal{H}}_N$ et $\hat{\mathcal{H}}_N^*$. Comme dans le cas \mathcal{F}_1 , soit \mathcal{K}_N la famille de Σ correspondant à

$$\frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^3}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{1 \ 5 \ 2} \frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_N-1}}{2} \frac{\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ}{2} \frac{(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ)^{\lambda_N-1}}{2}; \mathcal{K}_N \text{ est alors exception-}$$

nelle, En outre, $g(\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma))$ est égal à

$$\circ \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{5}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{\lambda_{N-1}-1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{g(\mathcal{L}_{N-1})}{\circ} \text{---} g(\mathcal{G}_{N-1}) \quad \text{pour } \lambda_{N-1} \geq 1.$$

Désignons par $\Sigma', F'(\infty)$ et \hat{S}'_∞ respectivement $\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma)$, $\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\hat{\mathcal{G}}_N^*)$ et le transformé de \hat{S}_∞ . Alors Σ' se contracte en un point et $F'(\infty)$ se réduit à $\underset{0}{\circ}$.

Donc, par récurrence, on peut démontrer le théorème dans le cas \mathcal{F}_{II} avec $l=0$.

(2) Le cas où $l \geq 1$.

i) D'après ce qu'on a vu dans le cas où Σ est linéaire, $g(\Sigma)$ est un des graphes suivants:

$$(6.9) \quad (a) \quad \vec{X}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{\lambda_N-1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{g(\mathcal{L}_N)}{\circ} \text{---} g(\mathcal{G}_N) \quad (\lambda_N \geq 1),$$

$$(b) \quad \vec{X}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \overset{g(\mathcal{L}_N)}{\circ} \text{---} g(\mathcal{G}_N) \quad (\lambda_N = 0),$$

$$(c) \quad \vec{X}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{\lambda_N-1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{g(\mathcal{L}_N)}{\circ} \text{---} g(\mathcal{G}_N) \quad (\lambda_N \geq 1),$$

$$(d) \quad \vec{X}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \overset{g(\mathcal{L}_N)}{\circ} \text{---} g(\mathcal{G}_N) \quad (\lambda_N = 0).$$

ii) Regardons le graphe de $\text{cont}_{\mathcal{G}_N^*}(F(\infty))$:

$$(6.10) \quad (a) \quad \circ \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{\lambda_N-1}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} g(\mathcal{L}_N),$$

$$(b) \quad \circ \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} g(\mathcal{L}_N),$$

$$(c) \quad \circ \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \overset{\lambda_N-1}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} g(\mathcal{L}_N),$$

$$(d) \quad \circ \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} g(\mathcal{L}_N).$$

Ils se réduisent à \circ . Comme les graphes (6.5) et (6.6) se contractent en un point, les graphes

$$(6.11) \quad \vec{X}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{2}{\circ}$$

et

$$(6.12) \quad \tilde{X}_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \tilde{Y}_i \text{---} \underset{a_1+2}{\circ}$$

se réduisent à $\underset{0}{\circ}$. On désigne par δ_1 (resp. δ_2) le sous-graphe $(\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^{\underset{1}{a_1}} \underset{1}{\circ}$ (resp. $\underset{1}{\circ}$) de (6.11) (resp. (6.12)). Alors le graphe obtenu en contractant δ_1 (resp. δ_2) dans le graphe (6.11) (resp. (6.12)) s'écrit sous la forme $\vec{X}'_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{2}{\circ}$ (resp. $\tilde{X}'_i \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \tilde{Y}_i \text{---} \underset{a_1+2}{\circ}$). Ici, \vec{X}'_i (resp. \tilde{X}'_i) est le graphe obtenu à partir de \vec{X}_i (resp. \tilde{X}_i) en remplaçant $\text{---}\underset{b_1+3}{\circ}\text{---}(\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^{\underset{1}{a_1}}$ par $\text{---}\underset{b_1+2}{\circ}$ (resp. $\text{---}\underset{b_1+3}{\circ}$ par $\text{---}\underset{b_1+2}{\circ}$).

Il s'ensuit que $g(\mathcal{L}_N)$ s'écrit

$$(6.13) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \tilde{X}_i \text{---} \underset{\lambda_N+1}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ}, & \text{(b)} \quad \tilde{X}'_i \text{---} \underset{1}{\circ}, \\ \text{(c)} \quad \vec{X}_i \text{---} \underset{\lambda_N+1}{\circ} \text{---} \underset{1}{\circ}, & \text{(d)} \quad \vec{X}'_i \text{---} \underset{1}{\circ}. \end{array}$$

iii) Comme dans le cas précédent, on a (1) ou (2) suivant que Σ dégénère en \mathcal{L}_N ou \mathcal{Q}_N .

$$(6.14) \quad \begin{array}{l} \text{(a) (1)} \quad \underset{2}{\circ} \text{---} g(\mathcal{Q}_N) \text{ est égal à } \underset{2}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^{\lambda_N-1} \underset{3}{\circ} \text{---} \tilde{Y}_i, \\ \text{(2)} \quad \underset{2}{\circ} \text{---} g(\mathcal{Q}_N) \text{ contient } \underset{2}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^{\lambda_N-1} \underset{3}{\circ} \text{---} \tilde{Y}_i \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^\lambda, \\ \text{(b) (1)} \quad \underset{3}{\circ} \text{---} g(\mathcal{Q}_N) \text{ est égal à } \underset{3}{\circ} \text{---} \tilde{Y}_i, \\ \text{(2)} \quad \underset{3}{\circ} \text{---} g(\mathcal{Q}_N) \text{ contient } \underset{3}{\circ} \text{---} \tilde{Y}_i \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^\lambda, \\ \text{(c) (1)} \quad \underset{2}{\circ} \text{---} g(\mathcal{Q}_N) \text{ est égal à } \underset{2}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^{\lambda_N-1} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i, \\ \text{(2)} \quad \underset{2}{\circ} \text{---} g(\mathcal{Q}_N) \text{ contient } \underset{2}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^{\lambda_N-1} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \vec{Y}_i \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} (\text{---}\underset{2}{\circ}\text{---})^\lambda, \end{array}$$

$$(d) (1) \circ \xrightarrow{a_1+3} g(\mathcal{G}_N) \text{ est égal à } \circ \xrightarrow{a_1+3} \vec{Y}_l,$$

$$(2) \circ \xrightarrow{a_1+3} g(\mathcal{G}_N) \text{ contient } \circ \xrightarrow{a_1+3} \vec{Y}_l \text{---} \circ \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)_2^\lambda,$$

pour $\lambda \geq 0$.

iv) Supposons d'abord $N=1$. Alors, pour tous les graphes (2) dans (6.14), on a aussi l'égalité. Soit \mathcal{K}_N la sous-famille de Σ qui correspond à la partie $g(\mathcal{E}_N) \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)_2^{\lambda_1}$ de $g(\Sigma)$; \mathcal{K}_N est exceptionnelle. Le graphe de $\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma)$ est d'une des formes suivantes:

$$(6.15) (a) (1) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l, \quad (2) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)_2^\lambda,$$

$$(b) (1) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l, \quad (2) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l \text{---} \underset{a_1+3}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)_2^\lambda,$$

$$(c) (1) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l, \quad (2) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{a_1+2}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)_2^\lambda,$$

$$(d) (1) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l, \quad (2) \vec{X}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \underset{3}{\circ} \text{---} \vec{Y}_l \text{---} \left(\text{---} \circ \text{---} \right)_2^\lambda.$$

Envisageons les graphes (a) et (c) de (6.15). Posons $\Sigma' = \text{cont}_{\mathcal{K}_1}(\Sigma)$. Soit \hat{S}'_∞ le transformé propre de \hat{S}_∞ , et soit Σ'_∞ la famille connexe de $\Sigma' \setminus \{\circ\}$ qui est à droite de $\underset{1}{\circ}$ dans $g(\Sigma')$. On a alors $(\hat{S}'_\infty)^2 = -1$. D'ailleurs, $\Sigma'_\infty \cup \{\hat{S}'_\infty\}$ se réduit à $\underset{0}{\circ}$. Donc ce cas se réduit au cas où Σ est linéaire. Pour le graphe (2), il est

immédiat que le cas a) ne peut pas se réaliser et le graphe (c) est donné par $\vec{G}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \vec{G}_{l+1}$. En remarquant ce que le graphe (1) dégénère en son côté gauche et que la longueur de Σ_0 est l , on peut facilement voir que le graphe (c) ne peut pas intervenir et le graphe (a) est donné par $\vec{G}_l \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \vec{G}_{l-1}$.

Ensuite, envisageons les graphes (b) et (d) de (6.15). Soient $Q(\delta_1)$ et $Q(\delta_2)$ les applications réciproques des contractions δ_1 et δ_2 qu'on vient de voir dans ii) respectivement. Les graphes (b) et (d) de (6.15) sont égaux aux graphes (a) et (c) de (6.15) grâce à $Q(\delta_2)$ et $Q(\delta_1)$ respectivement. On peut alors poser $\Sigma' = Q(\delta_2) \circ \text{cont}_{\mathcal{K}_1}(\Sigma)$ dans le cas (b) et aussi $\Sigma' = Q(\delta_1) \circ \text{cont}_{\mathcal{K}_1}(\Sigma)$ dans le cas (d). Soit \hat{S}'_∞ le transformé propre de \hat{S}_∞ par cette modification et soit Σ'_∞ la sous-famille connexe de $\Sigma' \setminus \{\circ\}$ qui est à droite de $\underset{1}{\circ}$ dans $g(\Sigma')$. Évidemment, on

doit avoir $(\hat{S}'_{\infty}) = -1$ et $\Sigma'_{\infty} \cup \hat{S}'_{\infty}$ doit se réduire à \circ . Donc les cas (b) et d (d)

se réduisent aux cas (a) et (c) respectivement.

v) Supposons ensuite $N \geq 2$. Dans ce cas, il est évident que Σ dégénère en \mathcal{G}_N . Donc, pour les cas (a) et (c), le graphe de $\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma)$ s'écrit sous la forme

$$(6.16) \quad (a) \quad \begin{array}{c} \tilde{X}_I - \circ - \circ - \tilde{Y}_I - \circ - \circ - (-\circ -) \xrightarrow{\lambda_{N-1}-1} \circ \begin{array}{l} \nearrow g(\mathcal{L}_{N-1}) \\ \searrow g(\mathcal{G}_{N-1}) \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & a_1+3 & & 2 \end{array} \end{array} \quad \text{pour } \lambda_{N-1} \geq 1$$

ou bien

$$\begin{array}{c} \tilde{X}_I - \circ - \circ - \tilde{Y}_I - \circ \begin{array}{l} \nearrow g(\mathcal{L}_{N-1}) \\ \searrow g(\mathcal{G}_{N-1}) \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & a_1+3 \end{array} \end{array} \quad \text{pour } \lambda_{N-1} = 0,$$

$$(c) \quad \begin{array}{c} \vec{X}_I - \circ - \circ - \vec{Y}_I - \circ - \circ - (-\circ -) \xrightarrow{\lambda_{N-1}-1} \circ \begin{array}{l} \nearrow g(\mathcal{L}_{N-1}) \\ \searrow g(\mathcal{G}_{N-1}) \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & 1 & a_1+2 & & 3 & & 2 \end{array} \end{array} \quad \text{pour } \lambda_{N-1} \geq 1$$

ou bien

$$\begin{array}{c} \vec{X}_I - \circ - \circ - \vec{Y}_I - \circ \begin{array}{l} \nearrow g(\mathcal{L}_{N-1}) \\ \searrow g(\mathcal{G}_{N-1}) \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & 1 & a_1+2 & 3 \end{array} \end{array} \quad \text{pour } \lambda_{N-1} = 0.$$

On pose $\Sigma' = \text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma)$. Soient \hat{S}'_{∞} le transformé propre de \hat{S}_{∞} et Σ'_{∞} la sous-famille connexe de $\Sigma' \setminus \{\circ\}$ qui est à droite de \circ dans $g(\Sigma')$. On a $(\hat{S}'_{\infty}) = -1$ et $\Sigma'_{\infty} \cup \{\hat{S}'_{\infty}\}$ se réduit à \circ . C'est le cas pour $N-1$. Donc on peut raisonner

par récurrence. Tous les graphes possibles des Σ^* sont ainsi obtenus.

La réciproque résulte de la proposition 5.1 ou 5.2. Ceci termine la démonstration du théorème 6.1.

Le théorème ci-dessus donne en même temps les graphes des Σ . On désigne par $O, I(0), I^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N), II(l)$ et $II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ les graphes des Σ qui correspondent à $O^*, I(0)^*, \dots$, respectivement. On emploie les mêmes notations $I(0), I^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N), \dots$ pour représenter les ensembles des fonctions R qui correspondent.

Enfin, nous allons donner une variante du théorème 6.1. Soit M une surface obtenue en éclatant successivement un point p de \mathbf{P}^2 . Soit ρ l'application de M sur \mathbf{P}^2 . Posons $\Sigma = \rho^{-1}(p)$; soient S_0 et S_{∞} deux courbes rationnelles

sur \mathbf{P}^2 qui ne se coupent qu'en un point p et telles que $S_0 \setminus \{p\}$ et $S_\infty \setminus \{p\}$ soient analytiquement isomorphes à \mathbf{C} . On désigne par n et m les degrés de S_0 et S_∞ respectivement. Soient \hat{S}_0 et \hat{S}_∞ les transformés propres de S_0 et S_∞ par ρ^{-1} respectivement. Posons $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\hat{S}_0, \hat{S}_\infty\}$. Cela posé, on a le

Lemme 6.1. *Supposons en plus que le graphe de Σ^* est un des types dans le théorème 6.1. Alors on peut toujours trouver une fonction rationnelle R sur \mathbf{P}^2 appartenant à \mathcal{F} telle que $(R) = mS_0 - nS_\infty$ et que $[M, \Sigma, \rho]$ soit la résolution du point d'indétermination de R .*

En effet, il est évident que Σ^* se réduit à $\begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ | & | & | \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$. La variété obtenue est alors birégulière à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, d'après le théorème de Nagata qu'on a vu dans le 1° de la section 4. Donc, d'après la proposition 5.1 ou 5.2, on peut construire la fonction R dont on a besoin.

7. Ordres et degrés des courbes premières singulières de R . Soit R une fonction appartenant à \mathcal{F}_I ou \mathcal{F}_{II} et soit $[M, \Sigma, \rho]$ sa résolution minimale du point d'indétermination. La formule (RF.2) pour une fibre singulière $F(\beta)$ et le théorème 6.1 nous permettent de calculer l'ordre des courbes premières singulières.

1° Cas où $R \in \mathcal{F}_I$. Dans ce cas, le diviseur de R est donné par la relation (3.1). D'après le lemme 4.6, on peut prendre des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 telles que S_∞ soit la droite à l'infini de \mathbf{P}^2 . Alors R est un polynôme de x et y de degré n . On a la

Proposition 7.1. *Le degré n de R est égal à $2, 2 \prod_{i=1}^N (\lambda_i + 1)$ ou $\prod_{i=1}^N (\lambda_i + 1)$ selon que R appartient à $I(0), I^+(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ou $I^-(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.*

En effet, pour $R \in I(0)$, c'est évident. Soient C_∞^∞ le membre de Σ coupant Γ , D_i celui de Σ correspondant à $\begin{matrix} \circ \\ | \\ \lambda_i + 1 \end{matrix}$ et $B_i \in \mathcal{B}^u(\Sigma)$ le membre de $\begin{matrix} \circ \\ | \\ \lambda_i \end{matrix}$ dans Σ coupant trois autres membres où $i = 1, \dots, N$. En remarquant que $F(\infty)$ est obtenue par une modification de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ comme on l'a vu dans le 1° de la section 5, on peut facilement voir qu'on a $\text{ord}_{C_\infty^\infty}(\hat{R}) = \text{ord}_{D_N}(\hat{R}) = 1$ et $\text{ord}_{B_i}(\hat{R}) = \text{ord}_{D_{i-1}}(\hat{R})$ pour $2 \leq i \leq N$. Cela posé, on peut calculer n d'après la formule (RF.2).

2° Cas où $R \in \mathcal{F}_{II}$. Dans ce cas, le diviseur de R est donné par la relation (3.2). Soit $\{m_i\}_{(i \in \mathbf{Z})}$ une suite définie par

$$(7.1) \quad m_{i+2} = 3m_{i+1} - m_i \quad \text{avec} \quad m_{-2} = 1 \quad \text{et} \quad m_{-1} = 1,$$

et posons:

$$(7.2) \quad n_l = m_{l+1},$$

$$(7.3) \quad s_l^+(i) = \begin{cases} m_l - m_{l-2} & \text{pour } i \text{ pair} \\ m_{l-2} & \text{pour } i \text{ impair,} \end{cases}$$

$$s_l^-(i) = s_l^+(i-1) = \begin{cases} m_{l-2} & \text{pour } i \text{ pair} \\ m_l - m_{l-2} & \text{pour } i \text{ impair.} \end{cases}$$

Proposition 7.2. *Si R appartient à $II(l)$, m et n sont égaux à m_l et n_l respectivement. Si R appartient à $II^s(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, m est aussi égal à m_l et n est égal à*

$$(7.4) \quad n = n_l^s(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_{l \pm 1} \prod_{i=1}^N (\lambda_i m_i^2 + m_l s_l^s(i) - 1).$$

DÉMONSTRATION. Nous effectuerons le calcul de n pour le cas $II^s(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ dans la section 11; nous démontrons maintenant les autres énoncés.

Supposons d'abord que R appartienne à $II(l)$. Conservons les notations C_*^β ($\beta=0$ ou ∞ et $*$ = T ou Γ) introduites dans le 1° de la section 4. D'après la remarque 4.1, C_T^0 et C_T^∞ sont les extrémités de Σ ; de plus, C_T^β et C_Γ^β sont celles de Σ_β , et d'après le lemme 4.1 et la définition de C_*^β , on a $\text{ord}_{C_*^\beta}(\hat{R})=1$. Ce fait, la formule (RF.2) et le théorème 6.1 montrent que m et n ne dépendent que de l ; on les désigne par $m(l)$ et $n(l)$. En regardant le graphe de Σ , il est évident qu'on a $n(l)=m(l+1)$; par suite, il suffit de calculer seulement $m(l)$.

Regardons le graphe \vec{G}_l . Soit K_0 le membre de Σ_0 coupant \hat{S}_0 ; l'ordre de \hat{R} en

□₁

K_0 est $m(l)$ puisque, si on écrit la fibre $|F(0)|=m(l) \hat{S}_0 + \sum \mu_i C_i$, on a $m(l) (\hat{S}_0^2) + \sum \mu_i (C_i \cdot \hat{S}_0) = 0$ et $(\hat{S}_0^2) = -1$. Il est facile de calculer et on obtient $m(0)=2$, $m(1)=5$, $m(2)=13$ et $m(3)=34$. Soit $R_{(l)}$ la fonction appartenant à $II(l)$. Désignons par $\Sigma(l)$, $\Sigma_0(l)$ et $K_0(l)$ respectivement les quantités Σ , Σ_0 et K_0 correspondant à $R_{(l)}$. Supposons $l=2j$. Pour $k=l, l+1, l+2$ et $l+3$, la fonction $R_{(k)} \circ \rho$ a un zéro du même ordre en le $j^{\text{ième}}$ (resp. $(j+1)^{\text{ième}}$) sommet \circ du côté gauche du \vec{G}_k , qu'on désigne par a (resp. b). Pour $k=l+2$ et $l+3$, $R_{(k)} \circ \rho$ a aussi un zéro du même ordre en le $(j+2)^{\text{ième}}$ sommet \circ du côté gauche du \vec{G}_k , qu'on désigne par c . Le membre $K_0(k)$ est le $(j+2)^{\text{ième}}$ sommet \circ du côté gauche du \vec{G}_k pour $k=l, l+1$ et le $(j+3)^{\text{ième}}$ pour $k=l+2, l+3$. Donc, en regardant les graphes $\vec{G}_l, \vec{G}_{l+1}, \vec{G}_{l+2}$ et \vec{G}_{l+3} , on a les relations suivantes: $2b=a+m(l)$, $5b=a+m(l+1)$, $7b=a+c$, $2c=b+m(l+2)$ et $5c=b+m(l+3)$. On obtient ainsi $m(l)=m_l$.

Supposons ensuite $R \in II^s(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ($N \geq 1$). Pour calculer l'ordre de R en S_0 , la situation est tout-à-fait analogue à celle dans le cas $II(l)$. Donc on a aussi $\text{ord}_{S_0}(R)=m_l$.

Si on admet la formule (7.4), il est alors immédiat que le théorème 6.1 et la proposition 7.2 montrent que deux conditions (3.3) et (3.4) sont équivalentes comme on l'a dit dans la section 3.

8. Fonction minimale associée à $R \in \mathcal{F}_1$. Soit R une fonction de \mathcal{F}_1 . Soient (x, y) des coordonnées inhomogènes de \mathbf{P}^2 telles que R soit un polynôme en x et y appartenant à \mathcal{P}_1 , d'après la proposition 4.1. Dans cette section, on va étudier une fonction R' , définie par la condition (4.2), associée à R . D'après le lemme 4.6, on a les corollaires suivants:

Corollaire 8.1. *La paire (R, R') est un automorphisme algébrique de $\mathbf{C}^2(x, y)$.*

Corollaire 8.2. *La fonction R' est aussi un polynôme primitif de type (0, 1).*

Corollaire 8.3. *La fonction R' est aussi une fonction de \mathcal{F}_1 ou bien \mathcal{F}_0 admettant le point d'indétermination au même point p que celui de R et ayant aussi un pôle en S_∞ .*

Corollaire 8.4. *Une résolution $[M, \Sigma, \rho]$ du point d'indétermination de R est aussi celle de R' .*

Posons $(R) = S_0 - n S_\infty$ et $(R') = S'_0 - n' S_\infty$. La fonction R appartient à une des $I(0)$, $I^+(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ et $I^-(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ($N \geq 1$). Alors on dit aussi que (R, R') appartient à $I(0)$, $I^+(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ et $I^-(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ respectivement. Notons que la restriction de \hat{R}' à \mathbf{C}^2_∞ , qui est la courbe correspondant à \bullet dans le graphe $\circ - \circ - \circ - \bullet$ pour $N=0$ et à \circ dans le graphe pour $N \neq 0$, est univalent d'après la définition de R' , on a alors le

Lemme 8.1. *Si R appartient à $I(0)$ ou $I^\epsilon(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, alors R' appartient à \mathcal{F}_0 ou $I^\epsilon(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ respectivement et on a $n = (1 + \lambda_N) n'$. Le triplet $[\text{cont}_{\mathcal{K}_N}(M), \text{cont}_{\mathcal{K}_N}(\Sigma), \rho \circ \text{cont}_{\mathcal{K}_N}^{-1}]$ est la résolution minimale du point d'indétermination de R' .*

Ici $I^+(0)$ représente $I(0)$ et $I^-(0)$ représente \mathcal{F}_0 . La notation \mathcal{K}_N ($N \geq 1$) a été introduite dans la section 6 et \mathcal{K}_0 est la sous-famille de Σ correspondant à $\circ - \circ - \circ$.

Considérons maintenant la fonction h définie par $(R')^{1+\lambda_N}/R$. Il est immédiat que $(h) = (1 + \lambda_N) S'_0 - S_0$, et S'_0 et S_0 se coupent transversalement en un seul point p^* dans $\mathbf{P}^2 \setminus \{p\}$. On peut facilement voir que h est une fonction rationnelle primitive de type (0, 2) admettant deux points d'indétermination p et p^* . D'ailleurs, h prend une valeur constante α_0 ni nulle, ni infinie sur S_∞ . On peut donc normaliser $\alpha_0 = -1$ en remplaçant R' par $\alpha R'$ pour $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Cette

paire (R, R') s'appelle *paire normalisée* et on la désigne par $[R, R']$.

Enfin, on voit qu'une telle fonction R' est caractérisée de la manière suivante :

Lemme 8.2. *Soit Ψ une fonction rationnelle telle que la paire (R, Ψ) soit un automorphisme algébrique de \mathbf{C}^2 . Alors Ψ est égale à R' si $v = \text{ord}_{S_\infty}(\Psi) < n$ et à $R' + cR$ si $v = n$ pour une fonction R' associée à R et $c \in \mathbf{C}^*$.*

En effet, si R' est une fonction minimale associée à R , il existe un nombre complexe α non nul et un polynôme β tels que ψ s'écrive $\alpha R' + \beta(R)$.

9. Fonctions adjointes distinguées associées à $R \in \mathcal{F}_{II}$.—Fonctions rationnelles de type $(0, 2)$.— Soit R une fonction appartenant à \mathcal{F}_{II} . Pour déterminer sa forme explicite, il est nécessaire de trouver les fonctions adjointes distinguées φ, ψ, f et g associées à R . On a déjà introduit les fonctions φ et ψ dans la section 4 et on définit les fonctions f et g par φ^m/R^s et $\varphi^{n'}/R^{t'}$ respectivement où $(R) = m S_0 - n S_\infty$, $(\varphi) = T + s S_0 - t S_\infty$ et les entiers n' et t' sont les diviseurs de n et t respectivement tels que $n/t = n'/t'$ et $(n', t') = 1$. On verra que φ, ψ, f et g sont des fonctions rationnelles primitives de type $(0, 2)$. En général, soit Φ une fonction rationnelle primitive de type $(0, 2)$. Dans ce cas, la formule (1.1) se réduit à $1 \leq \#e(\Phi) \leq d \leq 2$. Posons $\#e(\Phi) = k$. Il s'ensuit que trois cas seulement peuvent se présenter (PI): (1) $k=2$ et $d=2$; (2) $k=1$ et $d=2$; (3) $k=1$ et $d=1$. La fonction h , qu'on vient de voir dans la section précédente, est de type (1). Nous verrons que φ, ψ, f et g sont de type (2). Soit $[M, \Sigma, \rho]$ la résolution minimale du point d'indétermination de R .

1° La fonction φ . Elle est définie par la condition (4.5). Par $\eta_1 \circ \rho^{-1}$, $\mathbf{P}^2 \setminus (S_0 \cup S_\infty)$ est isomorphe à l'espace produit $\Delta = \{(z, w) \mid z \in \mathbf{C}^* \text{ et } w \in \mathbf{C}\}$ et S_0 (resp. S_∞) correspond au point $(0, 0)$ (resp. (∞, ∞)). Soit T l'image réciproque propre de la courbe $w=0$ par $\eta_1 \circ \rho^{-1}$. On décompose les fibres singulières de \hat{R} de la façon suivante :

$$|F(0)| = \sum_i m_i C_i^0 + m \hat{S}_0 \quad \text{et} \quad |F(\infty)| = \sum_i n_i C_i^\infty + n \hat{S}_\infty$$

où $C_1^\beta = C_\Gamma^\beta$ et $C_2^\beta = C_T^\beta$ ($\beta=0, \infty$) et puis C_1^β et C_2^β sont les diviseurs introduits dans la section 4; c'est-à-dire que C_1^β est l'extrémité de Σ_β qui coupe Γ et que C_2^β (resp. C_T^β) est l'autre extrémité de Σ_0 (resp. de Σ_∞ pour $R \in II(l)$ et de $\Sigma_\infty \setminus \{\mathcal{L}_N\}$ pour $R \in II^s(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$); par suite, on a $m_i = n_i = 1$ pour $i=1, 2$. D'autre part, M est obtenue en éclatant $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ comme on l'a vu dans le 2° de la section 5. On a donc les propriétés suivantes :

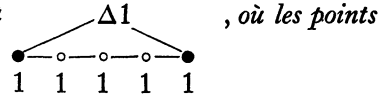
(9.1). a) *Les restrictions de $\hat{\varphi}$ ($= \varphi \circ \rho$) à C_Γ^0 et à C_T^∞ sont toutes deux univalentes. La fonction $\hat{\varphi}$ a un pôle d'ordre un sur Γ et sur C_Γ^∞ , un zéro sur \hat{S}_0 et un zéro d'ordre un sur C_T^0 et sur \hat{T} , où \hat{T} est le transformé propre de T .*

b) Pour $\beta=0$ ou ∞ , C_T^β et \hat{T} se coupent transversalement en un seul point qu'on désigne par q_β .

On en déduit:

c) On a $\hat{T} \cap \hat{S}_0 = \emptyset$, $\hat{T} \cap \hat{S}_\infty = \emptyset$ et $\hat{T} \cap |\Sigma| = \{q_0, q_\infty\}$. La courbe T est de type (0, 2) comme courbe première de φ .

d) Par $\text{cont } \mathcal{D}^\infty \circ \text{cont } \mathcal{D}^0, \Sigma^* \cup \{\hat{T}\}$ se réduit à



noirs • représentent les transformés de $C_T^\beta (\beta=0, \infty)$ et le triangle Δ représente celui de \hat{T} .

On en conclut le

Lemme 9.1.

(0) φ est une fonction rationnelle primitive de type (0, 2).

(i) Le point d'indétermination de φ est égal à celui de R et il est de type (2) de (PI).

(ii) Le nombre des valeurs singulières est deux.

(iii) Les courbes constantes singulières sont données par

$$(9.1) \quad (\varphi) = T + sS_0 - tS_\infty,$$

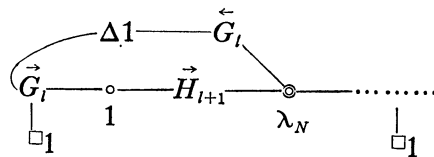
où T est de type (0, 2) comme courbe première de φ , $T \cap S_0 = \{p\}$, $T \cap S_\infty = \{p\}$ et $1 \leq s, t$.

(iv) La paire (R, φ) donne une transformation birégulière de $\mathbf{P}^2 \setminus (S_0 \cup S_\infty)$ sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$.

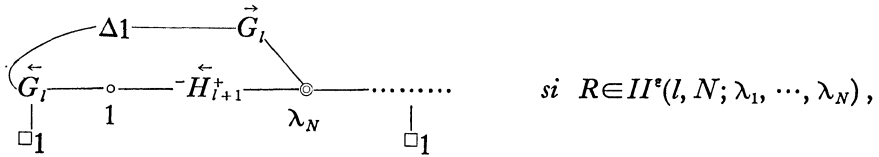
(v) Pour R , la fonction φ se détermine uniquement à un facteur constant près.

De plus, d'après les propriétés a), b), c) et d), on a le

Lemme 9.2. Le triplet $[M, \Sigma, \rho]$ est aussi une résolution du point d'indétermination de φ . Le graphe de $\Sigma^* \cup \{\hat{T}\}$ est égal à



ou



si $R \in II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$,

où le triangle Δ représente \hat{T} .

On en déduit:

Proposition 9.1. *On peut prendre la sous-famille exceptionnelle \mathcal{K}' de Σ telle qu'on ait $C_\Gamma^0 \in \mathcal{K}'$ et que $\mathcal{K}' \cup \{C_\Gamma^0\}$ se réduise à \circ . Alors $[\text{cont}_{\mathcal{K}'}(M), \text{cont}_{\mathcal{K}'}(\Sigma), \rho \circ \text{cont}_{\mathcal{K}'}^{-1}]$ est la résolution minimale du point d'indétermination de φ .*

On dit que (R, φ) appartient à $II(l)$, à $II^+(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ou à $II^-(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ si R appartient à $II(l)$, à $II^+(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ou à $II^-(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ respectivement. Quant aux ordres s et t introduits par la relation (9.1), ils vérifient la

Proposition 9.2. *Étant données les suites $\{m_i\}$, $\{n_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)\}$ et $\{s_i^e(N)\}$ définies par les relations (7.2), (7.3) et (7.4) respectivement, on pose*

$$(9.2) \quad s_i = m_i - m_{i-2} \quad \text{et} \quad t_i = s_{i+1}.$$

$$(9.3) \quad t_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \{\lambda_N m_i s_i^e(N) + (s_i^e(N))^2 + \lambda_N\} \\ \times n_i^e(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) \text{ où } n_i^e(0) = m_{i \pm 1}.$$

Alors $(s, t) = (s_i, t_i)$ si $(R, \varphi) \in II(l)$ et $(s, t) = (s_i^e(N), t_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N))$ si $(R, \varphi) \in II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

En effet, supposons d'abord $N=0$. Envisageons le graphe du zéro ($\hat{T} \cup |\Sigma_0 \setminus \{C_\Gamma^0\}| \cup \hat{S}_0$) et celui du pôle ($\Gamma \cup |\Sigma_\infty \setminus \{C_\Gamma^0\}| \cup \hat{S}_\infty$) de $\hat{\phi}$. Il est clair que s et t satisfont aux mêmes formules récurrentes que m et n . En désignant donc par $s(l)$ et $t(l)$ les quantités s et t pour $(R, \varphi) \in II(l)$ respectivement; on a $s(l+2) = 3s(l+1) - s(l)$ et $t(l) = s(l+1)$; d'après la formule (RF.2), on a $s(0) = 1$ et $s(1) = 4$; on a donc $s(l) = s_l$ et $t(l) = s_{l+1}$. Supposons ensuite $N \geq 1$. Si le graphe de $\{\hat{T}\} \cup \Sigma_0$ est $\Delta - \vec{G}_l$, on a évidemment $s = s_l$. Supposons qu'il est $\Delta - \vec{G}_l$.

Comme la restriction de $\hat{\phi}$ à C_Γ^0 est univalente, le calcul de s pour $(R, \varphi) \in II^+(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ avec N impair et $l \geq 3$ et $(R, \varphi) \in II^-(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ avec N pair et $l \geq 3$ est le même que celui de m pour $R \in II(l-2)$. En vertu de la formule (RF.2), la valeur de s pour $l=0, 1$ et 2 est $1, 1$ et 2 respectivement; donc $s = m_{l-2}$. On fera le calcul de t dans la section 11.

2° La fonction ψ . C'est une fonction définie par la condition (4.6), c'est-à-dire, par $\psi \circ \rho = (w/z) \circ \eta_1$; donc $\psi = \varphi/R$. On a donc:

Lemme 9.3. *La fonction ψ est rationnelle primitive de type (0, 2). Elle vérifie aussi les propriétés (i), (ii), (iv) de φ . Ses courbes constantes singulières sont données par*

$$(\psi) = T + (n-t)S_\infty - (m-s)S_0$$

où $n-t > 0$ et $m-s > 0$.

On a la propriété

(9.2) *Les restrictions de $\hat{\psi}$ à C_T^0 et à $C_{\bar{T}}^\infty$ sont univalentes.*

D'autre part on utilise la remarque suivante pour les fonctions φ et ψ .

Lemme 9.4. *Soit Φ une fonction rationnelle telle que (R, Φ) satisfasse à la propriété (iv) du lemme 9.1. Alors Φ s'écrit*

$$\Phi = (\alpha R^a \varphi + \beta(R)) / R^b$$

où $\alpha \in \mathbf{C}^*$, $\beta(z)$ est polynôme de z et a, b sont des entiers ≥ 0 . Si $a > 0$, alors $\beta(0) \neq 0$. La fonction Φ est une fonction rationnelle primitive de type (0,2).

D'après ce lemme, on peut caractériser φ et ψ de la manière suivante:

Proposition 9.3. *Pour $R \in \mathcal{F}_{II}$, il existe toujours une fonction rationnelle Φ telle que (R, Φ) soit une transformation birégulière de $\mathbf{P}^2 \setminus (S_0 \cup S_\infty)$ sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$. Si Φ a un zéro (resp. un pôle) d'ordre inférieur ou égal à m (resp. $m-s$) en S_0 et un pôle (resp. un zéro) d'ordre au plus n (resp. $n-t$) en S_∞ , alors Φ est notre fonction φ (resp. ψ) à un facteur constant près.*

Considérons la fonction φ^λ / R^μ pour toute paire d'entiers λ et μ telle que $\lambda \neq 0$, $(\lambda, \mu) = 1$ et $(\lambda, \mu) \neq (m, s), (n', t')$. Il est clair que cette fonction est rationnelle primitive de type (0, 2) et de type (2) de (PI). De plus

$$(\varphi^\lambda / R^\mu) = \lambda T + (\lambda s - m\mu)S_0 - (\lambda t - n\mu)S_\infty$$

où $\lambda \neq 0$, $\lambda s - m\mu \neq 0$ et $\lambda t - n\mu \neq 0$; ses valeurs singulières sont 0 et ∞ .

3° La fonction $f = \varphi^m / R^s$. On la considère comme fonction rationnelle définie par $f \circ \rho = (w^m / z^s) \circ \eta_1$. On note que la fonction w^m / z^s sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ a les propriétés suivantes: a) elle est primitive; car, d'après les propositions 7.2 et 9.2 et les relations (7.1), (7.3), (9.2), il est immédiat que $(m, s) = 1$; b) elle admet deux points d'indétermination (0,0) et (∞, ∞) ; c) elle est de type (0, 2)⁶⁾; d) ses valeurs singulières sont 0 et ∞ , et ses courbes premières singulières sont données par les

6) Toute courbe constante générale d'elle est de type (0, 2); c'est-à-dire la partie de cette courbe obtenue par l'exclusion de son deux points d'indétermination (0, 0) et (∞, ∞) est une surface de Riemann ouverte de genre 0 ayant 2 points frontières.

équations $z=0, \infty$ et $w=0, \infty$. De plus, en tenant compte de la propriété iv) du lemme 9.1, nous allons étudier les propriétés de f , dont quelques unes sont faciles à vérifier:

(i) f est une fonction rationnelle primitive.

Comme $(R)=mS_0-nS_\infty$ et que $(\varphi)=T+sS_0-tS_\infty$, on a

$$(ii) \quad (9.4) \quad (f) = mT - (mt - ns)S_\infty$$

avec $mt - ns > 0$ puisque $m > 1$.

En remarquant qu'on a $S_0 \cap T = \{p\}$ et $S_0 \cap S_\infty = \{p\}$, on a:

(iii) f prend une valeur constante α_0 ni nulle, ni infinie sur S_0 .

On peut maintenant normaliser $\alpha_0 = -1$ en remplaçant φ par $\alpha\varphi$ pour $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Cette paire (R, φ) s'appelle *paire normalisée* et on la désigne par $[R, \varphi]$. Pour R , cette fonction φ est déterminée à une racine de l'unité près. Dès maintenant, on prend f pour une paire normalisée $[R, \varphi]$. Soit U le transformé propre de la courbe constante à valeur -1 de la fonction w^m/z^s par $\rho \circ \gamma_1^{-1}$. On en conclut ainsi que

(iv) f est de type $(0, 2)$.

(v) Elle admet un et un seul point d'indétermination qui est le point p . Son type est (2) de (PI).

(vi) Ses valeurs singulières sont $0, -1$ et ∞ .

(vii) Ses courbes constantes singulières sont données par la relation (9.4) et par

$$(9.5) \quad (f+1) = U + S_0 - (mt - ns)S_\infty.$$

La courbe U est de type $(0, 1)$ comme courbe première de f . Les courbes U et S_0 se coupent transversalement en un point p^* dans $\mathbf{P}^2 \setminus \{p\}$; enfin $U \cap S_0 = \{p, p^*\}$.

La démonstration de la propriété (vii) sera donnée plus loin d'après le corollaire 9.1 du lemme 9.6. En admettant cela, on obtient en résumé le lemme suivant:

Lemme 9.5. *La fonction rationnelle f est celle de type $(0, 2)$ admettant les propriétés (i) à (vii).*

Nous allons donner maintenant une résolution du point d'indétermination de f .

Proposition 9.4. *Le triplet $[M, \Sigma, \rho]$ est aussi une résolution du point*

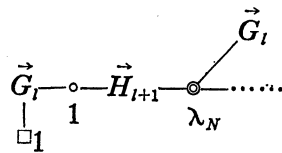
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \square 1 \\ | \\ \left(\circ \text{---} \right)^j \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \left[\begin{array}{c} \square \\ 2 \end{array} \right] \left(\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \right)^{j-1} \left(\circ \text{---} \right)^4 \end{array} \\
\text{pour } l=2j (j \geq 1), \\
\begin{array}{c} \square 1 \\ | \\ \left(\circ \text{---} \right)^j \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \left[\begin{array}{c} \square \\ 2 \end{array} \right] \circ \text{---} \circ \text{---} \left(\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \right)^{j-1} \left(\circ \text{---} \right)^4 \end{array} \\
\text{pour } l=2j+1 (j \geq 1), \\
\begin{array}{c} \square 1 \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \left[\begin{array}{c} \square \\ 2 \end{array} \right] \circ \end{array} \\
\text{pour } l=1.
\end{array}$$

Allors on a le

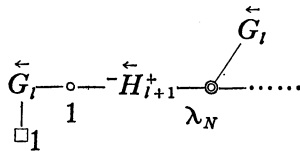
Lemme 9.7. Soit K_∞ le membre de Σ_∞ correspondant à $\left[\begin{array}{c} \square \\ \circ \text{---} \\ 2 \end{array} \right]$ de \vec{G}_{l+1} . Alors la restriction de \hat{f} à K_∞ est univalente.

En effet, considérons C_Γ^0 et C_Γ^∞ . D'après la propriété (a) pour ϕ , la restriction de ϕ à C_Γ^0 (resp. C_Γ^∞) est univalente et \hat{R} a un zéro (resp. un pôle) d'ordre un sur C_Γ^0 (resp. C_Γ^∞). Soit Σ'_∞ la famille formée de la courbe K_∞ et des courbes de la composante connexe de $|\Sigma_\infty \setminus \{K_\infty\}|$ contenant C_Γ^∞ . On a $|\Sigma'_\infty| \cap \hat{S}_0 = \emptyset$, $|\Sigma'_\infty| \cap \hat{S}_\infty = \emptyset$ et $|\Sigma'_\infty \setminus \{C_\Gamma^\infty\}| \cap \hat{T} = \emptyset$. Soit Σ'_0 la famille formée de la courbe K_0 et des courbes de la composante connexe de $|\Sigma_0 \setminus \{K_0\}|$ contenant à C_Γ^0 . Il est évident que le calcul des ordres de \hat{f} en les courbes de Σ'_0 et Σ'_∞ est le même. Donc \hat{R} (resp. ϕ) a un pôle d'ordre m (resp. s) en K_∞ . La démonstration suit le même raisonnement que pour K_0 .

(b) On suppose ensuite que $[R, \varphi]$ appartienne à $II^*(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ à l'exclusion des cas $II^+(1, N; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, 0)$ si N est impair et $II^-(1, N; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, 0)$ si N est pair. D'après le même raisonnement que pour le cas (a), considérons le graphe de Σ^* :



ou



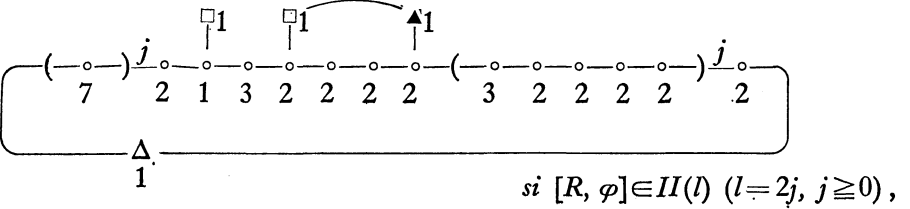
où $\hat{S}_\infty \cap |\mathcal{L}_N| \neq \emptyset$, $\hat{S}_\infty \cap |\mathcal{E}_N| = \emptyset$ et $\hat{S}_\infty \cap |\mathcal{L}_N| = \emptyset$. Quand $\lambda_N \geq 1$, il est im-

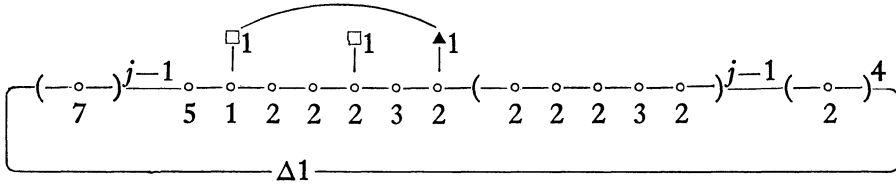
On a donc obtenu une résolution du point d'indétermination de f pour tout type. On va maintenant montrer que la résolution minimale $[M_f, \Sigma_f, \rho_f]$ est obtenue en contractant une composante de Σ ou de $Q_q(\Sigma)$. Considérons le graphe de Σ . Soit σ la composante de Σ correspondant à

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \circ - \circ \\ 2 \quad 1 \end{array} \qquad \text{pour } \vec{G}_0 - \circ - \dots, \\
 \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right)^{j-1} \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 4 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 7 \end{array} \left. \right)^{j-1} \\
 \text{pour } \vec{G}_l - \circ - \dots \text{ où } l=2j-1 \ (j \geq 1), \\
 \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \left(\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right)^{j-1} \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 4 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 7 \end{array} \left. \right)^j \\
 \text{pour } \vec{G}_l - \circ - \dots \text{ où } l=2j \ (j \geq 1), \\
 \begin{array}{c} \circ - \left(\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 5 \quad 7 \end{array} \right)^{j-1} \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \end{array} \left(\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right)^{j-1} \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \\ 2 \end{array} \\
 \text{pour } \vec{G}_l - \circ - \dots \text{ où } l=2j-1 \ (j \geq 1), \\
 \begin{array}{c} \circ - \left(\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 7 \end{array} \right)^j \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \end{array} \left(\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right)^j \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \\
 \text{pour } \vec{G}_l - \circ - \dots \text{ où } l=2j \ (j \geq 1).
 \end{array}
 \end{array}$$

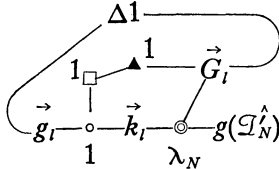
Cela posé, l'ensemble σ est exceptionnel. En utilisant les lemmes 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 et la proposition 9.4, il est immédiat que la résolution minimale $[M_f, \Sigma_f, \rho_f]$ de f est $[\text{cont}_\sigma(M), \text{cont}_\sigma(\Sigma), \rho \circ \text{cont}_\tau^{-1}]$ dans le cas général et $[\text{cont}_\sigma \circ Q_q(M), \text{cont}_\sigma \circ Q_q(\Sigma), \rho \circ (\text{cont}_\sigma \circ Q_q^{-1})]$ dans le cas exceptionnel. Ici, on utilise la même lettre σ pour l'image propre de σ par Q_q . Soient $\tilde{S}_0, \tilde{S}_\infty, \tilde{U}$ et \tilde{T} les transformés propres de $\hat{S}_0, S_\infty, \hat{U}$ et \hat{T} par cont_σ ou $\text{cont}_\sigma \circ Q_q$ respectivement. On a donc la

Proposition 9.5. *Le graphe de $\Sigma_f \cup \{\tilde{S}_0, \tilde{S}_\infty, \tilde{U}, \tilde{T}\}$ est le suivant :*



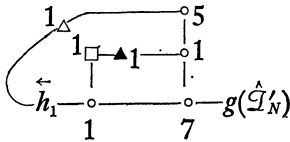


si $[R, \varphi] \in II(l)$ ($l = 2j - 1, j \geq 1$),



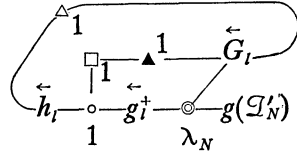
si $[R, \varphi] \in II^*(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$

telle que $(\varepsilon, N) = (+, \text{pair})$ ou $(-, \text{impair})$ et $l \geq 0$,



si $[R, \varphi] \in II^*(1, N; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, 0)$

telle que $(\varepsilon, N) = (+, \text{impair})$ ou $(-, \text{pair})$,



si $[R, \varphi] \in II^*(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$

telle que $(\varepsilon, N) = (+, \text{impair})$ ou $(-, \text{pair})$, $(l, \lambda_N) \neq (1, 0)$ et $l \geq 1$.

Ici, par \vec{g}_i , on désigne $(\text{---}) \frac{j}{7} \circ$ si $l = 2j$ ($j \geq 0$) et $(\text{---}) \frac{j-1}{7} \circ$ si $l = 2j - 1$ ($j \geq 1$). On désigne par \overleftarrow{h}_i $(\text{---}) \frac{4}{2} (\text{---}) \frac{j-1}{2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2}$ si $l = 2j - 1$ ($j \geq 1$) et $(\text{---}) \frac{4}{2} (\text{---}) \frac{j-1}{2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2} \circ$ si $l = 2j$ ($j \geq 1$). Par \vec{g}_i , on désigne le graphe obtenu en enlevant l'extrémité droite $(\text{---}) \frac{5}{2}$ et $\vec{g}_i \circ$ du graphe de Σ_f qui est linéaire. $g(\hat{\mathcal{Q}}'_N)$ représente le graphe obtenu en enlevant $g(\mathcal{E}_N)$, $g(\mathcal{L}_N)$ et \circ dans $g(\Sigma \cup \{\hat{\mathcal{S}}_\infty\})$ où \mathcal{E}_N , \mathcal{L}_N et \mathcal{Q}'_N sont les notations introduites dans la section 4. Le triangle noir \blacktriangle (resp. le triangle blanc \triangle) représente \tilde{U} (resp. \tilde{T}).

Le graphe $\begin{array}{c} \blacktriangle \\ \diagdown \quad \diagup \\ \vec{G}_i \end{array}$ (resp. $\begin{array}{c} \triangle \\ \diagdown \quad \diagup \\ \overleftarrow{G}_i \end{array}$) représente celui obtenu en remplaçant le carré \square de $\begin{array}{c} \vec{G}_i \\ | \\ \square \end{array}$ (resp. $\begin{array}{c} \overleftarrow{G}_i \\ | \\ \square \end{array}$) par \blacktriangle .

Enfin, considérons la relation (9.4). Le degré de S_∞ étant m d'après le lemme 4.9, on a le

Lemme 9.10. *Le degré de T est $mt - ns$.*

Posons $r = mt - ns$. D'après les propositions 7.2 et 9.2, r est égal à $m_i t_i - n_i s_i$ si $(R, \varphi) \in II(l)$ et à $m_i t_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N) - n_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N) s_i^e(N)$ si $(R, \varphi) \in II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$; on désigne ces valeurs par r_i et $r_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ respectivement. Le nombre r qui est l'ordre de f en S_∞ et le degré de T , fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 9.6.

$$(9.6) \quad \begin{aligned} r_i &= 3 \\ r_i^e(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N) &= (\lambda_N m_i + s_i^e(N)) n_i^e(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) \end{aligned}$$

En effet, en vertu des relations (7.1), (7.2) et (9.2), on a

$$m_i s_{i+1} - m_{i+1} s_i = m_{i-1} s_i - m_i s_{i-1}.$$

D'autre part, on a $m_0 s_1 - m_1 s_0 = 3$. D'où $r_i = 3$.

4° La fonction $g = \varphi^{n'} / R^{t'}$. On la considère comme fonction rationnelle:

$$g \circ \rho = (w^{n'} / z^{t'}) \circ \eta_1.$$

En reprenant le même raisonnement que pour f , on voit que g est aussi une fonction rationnelle primitive de type $(0, 2)$. Elle vérifie les mêmes propriétés que celles de f , c'est-à-dire, (i), (ii) avec $(g) = n'T - (mt' - n's)S_\infty$, (iii) pour S_∞ , (iv), (v), (vi), (vii) avec $(g + \beta) = V_\beta + \nu S_\infty - (mt' - n's)S_0$ où β est la valeur constante de g sur S_∞ , V_β est le transformé propre de $w^{n'} / z^{t'} = \beta$ dans $\mathbb{C}^2(z, w)$ et $\nu \geq 1$. En particulier, on remarque la propriété suivante:

(1) Pour $[R, \varphi]$ appartenant à $II(l)$ ou $II^-(0, 1; \lambda_1)$, on a

$$n' = n, \quad t' = t, \quad \nu = 1.$$

La courbe V_β est de type $(0, 1)$ comme courbe première de g . Les courbes \hat{V}_β et \hat{S}_∞ se coupent transversalement en un seul point dans $M \setminus |\Sigma|$ et on a $\hat{V}_\beta \cap \hat{S}_0 = \emptyset$.

(2) Sinon, on a

$$n > n', \quad t > t', \quad \nu > 1, \quad \hat{V}_\beta \cap (\hat{S}_0 \cup \hat{S}_\infty) = \emptyset.$$

La courbe V_β est de type $(0, 2)$ comme courbe première de g .

PARTIE III. DÉTERMINATION DES FONCTIONS RATIONNELLES DE TYPE $(0, 1)$

Conservons les notations introduites dans la partie précédente.

10. Fonctions rationnelles appartenant à $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$. On a déjà vu que \mathcal{F}_0 consiste en toutes les fonctions rationnelles linéaires. Dans cette section, on va déterminer les formes explicites des fonctions de \mathcal{F}_1 . Soit R une fonction appartenant à \mathcal{F}_1 . D'après ce qu'on a vu dans la section 8, on peut prendre une paire normalisée $[R, R']$. Elle donne un automorphisme algébrique de $\mathbf{P}^2 \setminus S_\infty (\cong \mathbf{C}^2)$ et appartient à une des familles $I(0)$ et $I^\varepsilon(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ où $(R) = S_0 - nS_\infty$ et $\varepsilon = \pm$.

Théorème 10.1. *Supposons que $[R, R']$ appartienne à $I^-(1; \lambda_1) (\lambda_1 \geq 1)$ où $I^-(1; 1) = I(0)$. Alors on peut prendre des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 telles que*

$$(10.1) \quad \begin{cases} R = y + \sum_{i=2}^{\lambda_1+1} a_i x^i \\ R' = x \end{cases}$$

avec $a_i \in \mathbf{C} (i=2, \dots, \lambda_1)$ et $a_{\lambda_1+1} = -1$.

Réciproquement, toute paire définie de la manière ci-dessus avec des nombres complexes arbitraires a_i appartient à $I^-(1; \lambda_1)$.

En effet, dans ce cas, on a $(R) = S_0 - (1 + \lambda_1)S_\infty$. D'après le lemme 8.1, R' est linéaire; $(R') = S'_0 - S_\infty$. La droite complexe S'_0 et la courbe algébrique S_0 de degré $\lambda_1 + 1$ se coupent transversalement en un seul point dans $\mathbf{P}^2 \setminus S_\infty$. On peut donc prendre des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 telles que S_∞ soit la droite à l'infini de \mathbf{P}^2 , que ce point soit $(0, 0)$, que $R' = x$ et que la droite $y = 0$ soit tangente à S_0 en $(0, 0)$. D'après le corollaire 8.1 et la définition de $[R, R']$, on obtient donc la relation (10.1), en remplaçant y par $\alpha y (\alpha \in \mathbf{C}^*)$, si nécessaire.

La réciproque est évidente.

Théorème 10.2. *Supposons que $[R, R']$ appartienne à $I^\varepsilon(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ($\neq I^-(1; \lambda_1)$) où $N \geq 1$ et $\varepsilon = \pm$. Alors on peut prendre une paire normalisée $[R', R'']$ appartenant à $I^\varepsilon(N-1, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ telle que*

$$(10.2) \quad R = \alpha R'' + \sum_{i=1}^{\lambda_N+1} a_i (R')^i,$$

avec $\alpha \in \mathbf{C}^*, a_i \in \mathbf{C} (i=1, \dots, \lambda_N)$ et $a_{\lambda_N+1} = -1$.

Réciproquement, toute paire (R, R') définie de la manière ci-dessus avec des nombres complexes arbitraires a_i et un nombre complexe $\alpha \neq 0$ appartient à $I^\varepsilon(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

Ici, la notation $I(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ pour $N=0$ signifie $I(0)$.

En effet, on prend R'' telle que $[R', R'']$ appartienne à $I^\varepsilon(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$. Utilisons les corollaires 8.1 et 8.3. La restriction de R sur $\mathbf{P}^2 \setminus S_\infty$ est un polynôme de R' et R'' . La relation (10.2) résulte du fait que la restriction de R à

toute courbe première de R' sauf S'_∞ est univalente.

La réciproque est évidente.

Compte tenu de la proposition 4.1 et le lemme 8.2, les théorèmes 10.1 et 10.2 donnent une autre démonstration pour le théorème établi par H.W.E. Jung [3], qui dit que tout automorphisme de l'espace \mathbf{C}^2 est un produit de transformations linéaires et de transformations de type: $x'=x, y'=y+cx'$ ($c \in \mathbf{C}, l$ est un entier positif).

D'autres démonstrations ont été données par A. Guthwirth [2], M. Nagata [8], I. Wakabayashi [14] (voir M. Furushima [1] pour la démonstration) et M. Suzuki [12].

11. Fonctions rationnelles appartenant à \mathcal{F}_{II}

1° Relation entre les graphes $II(l)$ et $II(l-1)$. Soit τ_l le sous-graphe du $II(l)$:

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{c} \circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \end{array} & \text{si } l=0, \\
 \begin{array}{c} \circ-(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ) \xrightarrow{j-1} (\circ-\circ) \xrightarrow{4} \circ-(\circ-\circ) \xrightarrow{j} \circ \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \quad 2 \end{array} & \text{si } l=2j-1, \\
 \begin{array}{c} \circ-\circ-\circ-(\circ-\circ-\circ-\circ-\circ-\circ) \xrightarrow{j-1} (\circ-\circ) \xrightarrow{4} \circ-(\circ-\circ) \xrightarrow{j} \circ \\ 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \quad 5 \end{array} & \text{si } l=2j.
 \end{array}$$

Il est immédiat que τ_l est exceptionnel. Pour le graphe $II(l)$, on désigne par σ_l la composante σ introduit dans le 3° de la section 9. Par $II(l)^t$, on désigne le graphe de $\Sigma \cup \{\hat{S}_\infty, \hat{U}\}$. Compte tenu de la proposition 9.5, on a alors le

Lemme 11.1. *On a les relations:*

$$\begin{aligned}
 \text{cont}_{\tau_l}(II(l)) &= \text{cont}_{\sigma_{l-1}}(II(l-1)) = II(l-1)_f, \\
 \text{cont}_{\tau_l}(II(l)^t) &= \text{cont}_{\sigma_{l-1}}(II(l-1))^* \quad (l \geq 1) \text{ et } \text{cont}_{\tau_0}(II(0)^t) = I(0)^*.
 \end{aligned}$$

On désigne par la même letter τ_l la sous-famille de Σ correspondant à τ_l . Par $\mu_{l,l-1}$, on désigne $\text{cont}_{\sigma_{l-1}}^{-1} \circ \text{cont}_{\tau_l}$ pour $l \geq 1$ et cont_{τ_0} pour $l=0$. Posons $M' = \mu_{l,l-1}(M)$ et $\Sigma' = \mu_{l,l-1}(\Sigma)$. Alors, $\mu_{l,l-1}$ est une transformation birationnelle de M sur M' et birégulière de $M \setminus |\tau_l \cup \mu_{l,l-1}^{-1}(\sigma_{l-1})|$ sur $M' \setminus |\sigma_{l-1} \cup \mu_{l,l-1}(\tau_l)|$ où σ_{-1} désigne le point $\text{cont}_{\tau_0}(\tau_0)$.

Corollaire 11.1. *On a les relations:*

$$\begin{aligned}
 \mu_{0,-1}(II(0)^t) &= I(0)^* \\
 \mu_{l,l-1}(II(l)^t) &= II(l-1)^* \quad \text{pour } l \geq 1.
 \end{aligned}$$

2° Relation entre les graphes $II^e(l, N: \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ et $II^e(l, N-1; \lambda_1, \dots,$

λ_{N-1}) ($\varepsilon = \pm$ et $N \geq 1$). On interprète la notation $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ pour $N=0$ comme $II(l)$ si $\varepsilon = +$, comme $II(l-1)$ si $\varepsilon = -$ et $l \geq 1$ et comme $I(0)$ si $\varepsilon = -$ et $l=0$. On définit $\mu_i^{N, N-1}$ par $\text{cont}_{\mathcal{K}_N}$ si $\lambda_N > 0$, par $Q(\delta_2) \circ \text{cont}_{\mathcal{K}_N}$ si $\lambda_N = 0$ et $\varepsilon(-1)^N = -1$ et par $Q(\delta_1) \circ \text{cont}_{\mathcal{K}_N}$ si $\lambda_N = 0$ et $\varepsilon(-1)^N = +1$; les notations \mathcal{K}_N , $Q(\delta_1)$ et $Q(\delta_2)$ ont été introduites dans le b) de 2° de la section 6. Posons $M' = \mu_i^{N, N-1}(M)$ et $\Sigma' = \mu_i^{N, N-1}(\Sigma)$. Alors, $\mu_i^{N, N-1}$ est une transformation birationnelle de M sur M' et birégulière de $M \setminus |\mathcal{K}_N \cup \mu^{-1}(\delta_i)|$ sur $M' \setminus |\delta_i \cup \mu(\mathcal{K}_N)|$ où $i=1, 2$ et μ signifie $\mu_i^{N, N-1}$.

On désigne par $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)'$ le graphe de $\Sigma \cup \{\hat{U}, \hat{S}_\infty\}$. Alors, d'après ce qu'on a vu dans le b) de 2° de la section 6 et dans la proposition 9.5, on a le

Lemme 11.2. *On a la relation:*

$$\mu_i^{N, N-1}(II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)') = II^\varepsilon(l, N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})^*$$

pour $\varepsilon = \pm$ et $N \geq 1$.

3° Détermination des paires normalisées $[[R, \varphi]]$ appartenant à $II(l)$. Dans ce cas, par les propositions 7.2 et 9.2, on a $m = m_l$, $n = m_{l+1}$, $s = s_l$, $t = s_{l+1}$, $mt - ns = 3$ où $m_{l+2} = 3m_{l+1} - m_l$, $m_0 = 2$ et $m_1 = 5$, $s_l = m_l - m_{l-2}$. On a $(R) = m_l S_0 - m_{l+1} S_\infty$, $(\varphi) = T + s_l S_0 - s_{l+1} S_\infty$, $(f) = m_l T - 3S_\infty$ et $(f+1) = S_0 + U - 3S_\infty$. Par suite, on a $\text{deg } S_0 = m_{l+1}$, $\text{deg } S_\infty = m_l$, $\text{deg } T = 3$ et $\text{deg } U = m_{l-1}$. Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée appartenant à $II(l)$. Toute paire normalisée appartenant à $II(l)$ est donnée par $[c^m R, c^s \varphi]$ pour un $c \in \mathbf{C}^*$. En outre, d'après la propriété (iii) de la fonction g , on peut prendre la paire normalisée $[R, \varphi]$ telle que $g = \varphi^n / R^t$ prenne la valeur constante -1 en S_∞ . Elle s'appelle *paire normalisée par S_0 et S_∞* et on la désigne par $[[R, \varphi]]$. Toute paire normalisée par S_0 et S_∞ s'écrit de la forme $[[\omega R, \omega^2 \varphi]]$ où $\omega^3 = 1$ puisqu'on a $mt - ns = 3$. D'après le lemme 6.1 et le corollaire 11.1, on a le

Lemme 11.3. *Soit $[[R, \varphi]]$ une paire normalisée appartenant à $II(l)$. Alors:*

(i) *Si $l \geq 1$, on peut toujours trouver une paire normalisée $[[R', \varphi']]$ appartenant à $II(l-1)$ telle que $[\mu_{l, l-1}(M), \mu_{l, l-1}(\Sigma), \rho \circ \mu_{l, l-1}^{-1}]$ soit la résolution minimale du point d'indétermination de R' et que l'on ait*

$$(11.1) \quad S'_0 = S_\infty, \quad S'_\infty = U \quad \text{et} \quad T' = T.$$

La paire $[[R', \varphi']]$ est déterminée uniquement à une racine cubique de 1 près. Le transformé propre de C_T^β par $\mu_{l, l-1}$ est $C_T^{\beta'}$ où $\beta = 0, \infty$.

(ii) *Si $l = 0$, on peut toujours trouver une paire normalisée $[R', \varphi']$ appartenant à $I(0)$ telle que $[\mu_{0, -1}(M), \mu_{0, -1}(\Sigma), \rho \circ \mu_{0, -1}^{-1}]$ soit la résolution minimale du point d'indétermination de R' et que l'on ait*

$$(11.2) \quad S'_0 = S_\infty, \quad S'_\infty = U \quad \text{et} \quad T' \cap T = \{p\}.$$

La paire $[R', \varphi']$ est déterminée uniquement à un facteur constant près. Le transformé propre de $C_{\bar{T}}$ par $\mu_{0,-1}$ est $C_{\bar{T}'}$. Ici, S'_0, S'_∞, T' et $C_{\bar{T}'}$ sont S_0, S_∞, T et $C_{\bar{T}}$ pour $[[R', \varphi']]$ ou $[R', \varphi']$ respectivement.

Lemme 11.4. Pour deux paires normalisées $[[R, \varphi]]$ et $[[R', \varphi']]$ satisfaisant aux conditions du lemme 11.3, on a

$$\varphi^{m_i}/R^{s_i} = \varphi'^{m_i}/R'^{s_i} \quad \text{pour} \quad l \geq 1.$$

En effet, les fonctions φ^{m_i}/R^{s_i} et φ'^{m_i}/R'^{s_i} sont f pour $[[R, \varphi]]$ et g pour $[[R', \varphi']]$ respectivement; on les désigne par f et g' respectivement. On a $(g') = m_i T' - 3S'_0$ car $(R') = m_{i-1} S'_0 - m_i S'_\infty$, $(\varphi') = T' + s_{i-1} S'_0 - s_i S'_\infty$ et $s_{i-1} m_i - s_i m_{i-1} = -3$. D'autre part, on a $(f) = m_i T - 3S_\infty$. D'après la condition (11.1), on a $f = \alpha g'$ où $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Compte tenu de la définition de paire normalisée par S_0 et S_∞ , la restriction de f et celle de g' à $U (= S'_\infty)$ sont identiquement égales à -1 . Donc le lemme est démontré.

D'après le lemme 11.4, on a le

Lemme 11.5. Soit $[[R, \varphi]]$ une paire normalisée appartenant à $II(l)$ où $l \geq 1$. Alors il existe une paire normalisée unique $[[R', \varphi']]$ appartenant à $II(l-1)$ telle que

$$\begin{aligned} R &= (\varphi'^{m_i} + R'^{s_i})^{m_i} / R'^{s_i m_i - 1} \\ \varphi &= \varphi' (\varphi'^{m_i} + R'^{s_i})^{s_i} / R'^{(s_i)^2}. \end{aligned}$$

D'après cette relation, $[[\omega R', \omega^2 \varphi']]$ correspond à $[[\omega R, \omega^2 \varphi]]$ où $\omega^3 = 1$.

En effet, pour $[[R, \varphi]]$ on peut prendre $[[R', \varphi']]$ satisfaisant aux conditions du lemme 11.4. Considérons la résolution minimale $[M', \Sigma', \rho]$ et l'espace produit $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_i)$ pour R' . Soient (z, w) les coordonnées telles que

$$R' \circ \rho' = z \circ \eta'_i \quad \text{et} \quad \varphi' \circ \rho' = w \circ \eta'_i.$$

On désigne par R^*, φ^* et f^* respectivement les fonctions R, φ et f regardées en tant que fonctions sur $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_i)$. D'après le lemme 11.4, on a $f^* = w^{m_i} / z^{s_i}$. Par l'application $\eta'_i \circ \rho'^{-1}$, le domaine $\mathbf{P}^2 \setminus (S_\infty \cup U)$ est isomorphe à $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ et S_∞ (resp. U) correspond au point $(0, 0)$ (resp. (∞, ∞)) d'après la condition (11.1). En remarquant qu'on a $(m_i, s_i) = 1$, le transformé propre de S_0 est donc donné par $w^{m_i} + z^{s_i} = 0$. D'après le lemme 11.3 et les propriétés (9.1), \hat{R} a un pôle d'ordre un sur $C_{\bar{T}'}$ et $\hat{\varphi}$ est non constante sur $C_{\bar{T}'}$; c'est-à-dire que R^* a un pôle d'ordre un sur $z = \infty$ et φ^* est non constante sur $z = \infty$. Cela posé, on a

$$\begin{aligned} R^* &= \alpha^{m_i} (w^{m_i} + z^{s_i})^{m_i} / z^{s_i m_i - 1} \\ \varphi^* &= \alpha^{s_i} w (w^{m_i} + z^{s_i})^{s_i} / z^{(s_i)^2} \end{aligned}$$

où $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Remarquons ici que les fonctions $\varphi^{m_i+1}/R^{s_i+1}$ et $\varphi^{m_i-1}/R^{s_i-1}$ prennent la valeur constante -1 en S_∞ puisqu'on a $S_\infty = S'_0$. D'où on a $\alpha^3 = 1$. Si $\alpha \neq 1$, il suffit de prendre $[[\omega R', \omega^2 \varphi']]$ au lieu de $[[R', \varphi']]$ où $\omega = \alpha^{-m_i}$.

Voyons ensuite le cas où $[[R, \varphi]]$ appartient à $II(0)$. On a le

Lemme 11.6. *Soit $[[R, \varphi]]$ une paire normalisée appartenant à $II(0)$. Alors on peut prendre des coordonnées inhomogènes (x, y) de \mathbf{P}^2 telles que*

$$(11.3)^7) \quad R = R_0(x, y) = \{(y-x^2)^2 - 2xy^2(y-x^2) + y^5\}^2 / (y-x^2)^5$$

$$\varphi = \varphi_0(x, y) = (xy - x^3 - y^3) \{(y-x^2)^2 - 2xy^2(y-x^2) + y^5\} / (y-x^2)^4.$$

Il n'y a que les automorphismes $(x, y) \rightarrow (\omega x, \omega^2 y)$ ($\omega^3 = 1$) de \mathbf{P}^2 par lesquels le diviseur de $[[R_0, \varphi_0]]$ soit invariant. On a $R_0(\omega x, \omega^2 y) = \omega R_0(x, y)$ et $\varphi_0(\omega x, \omega^2 y) = \omega^2 \varphi_0(x, y)$.

En effet, on prend une paire normalisée $[R', \varphi']$ appartenant à $I(0)$ satisfaisant aux conditions du lemme 11.3. On considère la résolution minimale $[M', \Sigma', \rho']$ et l'espace produit $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_0)$ pour R' . Soient (z, w) les coordonnées telles que $R' \circ \rho' = z \circ \eta'_0$ et $\varphi' \circ \rho' = w \circ \eta'_0$. On désigne par R^*, φ^* et f^* respectivement les fonctions R, φ et f regardées en tant que fonctions sur $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_0)$. Par l'application $\eta'_0 \circ \rho'^{-1}$, $\mathbf{P}^2 \setminus U (= \mathbf{C}^2)$ est isomorphe à tout l'espace (z, w) et U correspond au point (∞, ∞) . Notons que $(f) = 2T - 3S_\infty$, que $T \cap T' = \{p\}$ et que $S_\infty = S'_0$. De plus, \square et \triangle représentant les transformés propres des \hat{S}_∞ et \hat{T}' respectivement, $\mu_{0,-1}(|\Sigma| \cup \hat{S}_\infty) \cup T'$ se réduit à

$$\begin{array}{ccc} 0 \circ & \text{---} & \circ 0 \\ | & & | \\ 0 \square & \text{---} & \triangle 0, \end{array}$$

le transformé propre \tilde{T} de \hat{T} coupe transversalement ces courbes seulement en les points $(0, \infty)$ et $(\infty, 0)$ et on a $(\tilde{T}^2) = 2$. Donc la courbe \tilde{T} est donnée par $zw + a = 0$ et on a donc

$$f = (zw + a)^2 / z^3.$$

Ici, $(c^2 R', c \varphi')$ pour $c \in \mathbf{C}^*$ est aussi notre paire normalisée $[c^2 R', c \varphi']$. Donc on peut prendre de nouveau $[R', \varphi']$ telle que $f = (zw - 1)^2 / z^3$. Par suite, le transformé propre de \hat{S}_0 est donné par $(zw - 1)^2 + z^3 = 0$ puisqu'on a $(f + 1) = U + S_0 - 3S_\infty$ où U correspond au point (∞, ∞) par $\eta'_0 \circ \rho'^{-1}$. D'où

$$R^* = \alpha^2 \{(zw - 1)^2 + z^3\}^2 / z^5,$$

$$\varphi^* = \alpha (zw - 1) \{(zw - 1)^2 + z^3\} / z^4$$

où $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Cela posé, on a $\alpha^3 = 1$ puisque la restriction de φ^5 / R^4 à $S_\infty (= S'_0)$

7) La courbe donnée par $R_0(x, y) = 0$ apparaît dans H. Yoshiwara [13].

est constante égale à -1 . En remplaçant $[R', \varphi']$ par $[\omega R', \omega^2 \varphi']$ où $\omega^3=1$, on peut supposer $\alpha=1$. D'après le théorème 10.1, on peut prendre des coordonnées homogènes (u_0, u_1, u_2) de \mathbf{P}^2 telles que $R'=(u_0 u_2 - u_1^2)/u_2^2$ et que $\varphi'=u_1/u_2$, en remarquant que φ'^2/R' prend la valeur constante -1 en $u_2=0$. Le point d'indétermination p de nos fonctions est alors donné par $(1, 0, 0)$. Ainsi, en posant $x=u_1/u_0$ et $y=u_2/u_0$, le résultat est établi.

Corollaire 11.2. *On définit les fonctions R_{-1} et φ_{-1} par*

$$(11.4) \quad R_{-1} = (y-x^2)/y^2, \quad \varphi_{-1} = x/y.$$

Alors (R_{-1}, φ_{-1}) est la paire normalisée $[R_{-1}, \varphi_{-1}]$ appartenant à $I(0)$. On écrit

$$(11.5) \quad \begin{aligned} R_0 &= \{(\varphi_{-1} - (R_{-1})^{-1})^2 + R_{-1}\}^2 / R_{-1} \\ \varphi_0 &= (\varphi_{-1} - (R_{-1})^{-1}) \{(\varphi_{-1} - (R_{-1})^{-1})^2 + R_{-1}\} / R_{-1}. \end{aligned}$$

on a donc le

Théorème 11.1. *Soient R_l et φ_l ($l \geq 1$) les fonctions rationnelles définies par*

$$(11.6) \quad \begin{aligned} R_l &= ((\varphi_{l-1})^{m_l} + (R_{l-1})^{s_l})^{m_l} / (R_{l-1})^{s_l m_l - 1} \\ \varphi_l &= \varphi_{l-1} ((\varphi_{l-1})^{m_l} + (R_{l-1})^{s_l})^{s_l} / (R_{l-1})^{(s_l)^2} \end{aligned}$$

avec R_0 et φ_0 données par les définitions (11.3) ou les relations (11.5). Alors (R_l, φ_l) est une paire normalisée $[[R_l, \varphi_l]]$ appartenant à $II(l)$.

Toute paire normalisée $[[R, \varphi]]$ appartenant à $II(l)$ est la paire $[[R_l, \varphi_l]]$ pour certaines coordonnées inhomogènes (x, y) qui se déterminent uniquement par $[[R, \varphi]]$.

Il n'y a que les automorphismes $(x, y) \rightarrow (\omega x, \omega^2 y)$ ($\omega^3=1$) de \mathbf{P}^2 par lesquels le diviseur de $[[R_l, \varphi_l]]$ soit invariant.

On désigne par f_l la fonction $(\varphi_l)^{m_l} / (R_l)^{s_l}$.

Corollaire 11.3. *On a les relations: $R_l(\omega x, \omega^2 y) = \omega R_l(x, y)$, $\varphi_l(\omega x, \omega^2 y) = \omega^2 \varphi_l(x, y)$ et $f_l(\omega x, \omega^2 y) = f_l(x, y)$ avec $\omega^3=1$.*

On désigne par S_0^l, S_∞^l, T^l et U^l les quantités S_0, S_∞, T et U associées à $[[R_l, \varphi_l]]$ respectivement. Pour R_{-1} , on désigne par S_0^{-1} et S_∞^{-1} les quantités S_0 et S_∞ respectivement. On a alors la

REMARQUE 11.1.

$$(11.7) \quad \begin{aligned} T^{l-1} &= T^l \quad \text{pour } l \geq 1, \\ S_0^{l-1} &= S_0^l \quad \text{et } S_\infty^{l-1} = U^l \quad \text{pour } l \geq 0. \end{aligned}$$

4° Polynômes définis par la paire $[[R_l, \varphi_l]]$. Soit (x, y) un système de coordonnées inhomogènes de \mathbf{P}^2 . En combinant le théorème 11.1, le corollaire 11.2, la remarque 11.1 et les relations (9.4) et (9.5) avec les relations $m=m_l$ et $mt-ns=3$, on a le

Corollaire 11.4. *On pose*

$$(11.8) \quad \begin{aligned} P_{-1} &= y-x^2, & Q_{-1} &= y, \\ P_0 &= (y-x^2)^2-2xy^2(y-x^2)+y^5, \\ Q_0 &= y-x^2, & \Phi_0 &= xy-x^3-y^3, \\ Q_l &= P_{l-1}, & P_l &= ((\Phi_0)^{m_l}+(Q_l)^3)/Q_{l-1}. \end{aligned}$$

Alors P_l et Q_l sont des polynômes en x et y de degrés m_{l+1} et m_l qui définissent les diviseurs S'_0 et S'_∞ de R_l respectivement. On a $f_l = (\Phi_0)^{m_l}/(Q_l)^3, f_{l+1} = P_l Q_{l-1}/(Q_l)^3, R_l = (P_l)^{m_l}/(Q_l)^{m_{l+1}}$ et $\varphi_l = \Phi_0(P_l)^{s_l}/(Q_l)^{s_{l+1}}$.

On dira que (P_l, Q_l, φ_l) sont les polynômes définis par $[[R_l, \varphi_l]]$.

5° Détermination des paires normalisées $[R, \varphi]$ appartenant à $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ où $N \geq 1$ et $\varepsilon = \pm$. Dans ce cas, par les propositions 7.2 et 9.2, on a $m=m_l$ et $s=s'_i(N)$. Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée de $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Alors toute paire normalisée de $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est donnée par $[c^m R, c^{s'_i(N)} \varphi]$ pour $c \in \mathbf{C}^*$. Conservons la notation $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ pour $N=0$ introduit dans le 2°. D'après les lemmes 6.1 et 11.2, on a le

Lemme 11.7. *Pour une paire normalisée $[R, \varphi]$ appartenant à $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, on peut toujours trouver une paire normalisée unique $[R', \varphi']$ appartenant à $II^\varepsilon(l, N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ à un facteur constant près telle que si $(N, \varepsilon) = (1, -)$,*

$$(11.9) \quad S'_0 = S_\infty, \quad S'_\infty = U$$

et sinon,

$$(11.10) \quad S'_0 = U, \quad S'_\infty = S_\infty$$

et telle que le graphe de Σ'^* soit $II^\varepsilon(l, N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})^*$ et le transformé propre de C_T^∞ par $\mu_l^{N, N-1}$ soit $C_T^{\infty'}$ si $(N, \varepsilon) = (1, -)$ et $C_T^{0'}$ sinon.

Ici $S'_0, S'_\infty, C_T^{0'}, C_T^{\infty'}$ et Σ'^* sont $S_0, S_\infty, C_T^0, C_T^\infty$ et Σ^* pour R' respectivement.

Sous les notations B_k, \mathcal{L}_k et \mathcal{I}_k introduites dans la section 4, on désigne par J_k (resp. J_0) le membre à l'extrémité de S_∞ appartenant à \mathcal{L}_k (resp. \mathcal{I}_1). Puisque Σ est obtenue par éclatements successifs comme on l'a vu dans le 2° de la section 5, on a le

REMARQUE 11.2. $J_N = C_T^\infty. \mu_l^{1,0}(J_1) = C_T^{\infty'}, \mu_l^{1,0}(J_0) = C_T^{0'}$ si $(N, \varepsilon) = (1, -)$

et $\mu_1^{N,N-1}(J_N) = C_T^{\rho'}$, $\mu_1^{N,N-1}(J_{N-1}) = C_T^{\infty}$ sinon.
 $\text{ord}_{B_k}(\hat{R}) = \text{ord}_{J_{k-1}}(\hat{R})$ pour $k=1, \dots, N$, $\text{ord}_{J_N}(\hat{R})=1$ et la restriction de ϕ à J_N est univalente.

(a) Le cas où $II^-(l, 1; \lambda_1)$.

Lemme 11.8. Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée appartenant à $II^-(l, 1; \lambda_1)$. Alors, si $l \geq 1$ (resp. $l=0$), il existe une paire normalisée $[[R', \varphi']]$ appartenant à $II(l-1)$, (resp. $[R', \varphi']$ appartenant à $I(0)$) et des nombres complexes $a_i \in \mathbb{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_1$) avec $a_{\lambda_1} \neq 0$ tels que

$$f = \xi^{m_i}/R'^{s_i}$$

où $\xi = \varphi' + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i R'^{-i}$. Si $l=0$, on a en plus $a_0=0$.

Réciproquement, toute fonction définie de la manière ci-dessus avec des nombres complexes arbitraires a_i est de type $(0, 2)$.

En effet, si $l \geq 1$, on prend une paire $[R', \varphi']$ satisfaisant aux conditions du lemme 11.7. Alors $[c^{m_i-1}R', c^{s_i-1}\varphi']$ ($c \in \mathbb{C}^*$) est notre paire. En particulier, prenons une paire normalisée $[[R', \varphi']]$. Considérons la résolution minimale $[M', \Sigma', \rho']$ et l'espace produit $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \eta'_1)$ pour R' . Soient (z, w) les coordonnées telles que $R' \circ \rho' = z \circ \eta'_1$ et $\varphi' \circ \rho' = w \circ \eta'_1$. Alors $M' \setminus |(\Sigma \setminus \{J_1\}) \cup \{\hat{U}, \hat{S}_\infty\}|$ est isomorphe à l'espace produit $\{(z, w) : z \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, w \in \mathbb{C}\}$ par $\eta'_1 \circ \mu_1^{1,0}$ et le transformé propre de J_1 est donné par $z = \infty$. Les courbes $S_\infty (= S'_0)$ et $U (= S'_\infty)$ correspondent aux points $(0, 0)$ et (∞, ∞) respectivement. En désignant par f^* la fonction f regardée en tant que fonction sur $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \eta'_1)$, la restriction de f^* à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ a un zéro seulement en $z = \infty$ et \tilde{T} , qui est le transformé propre de T , et un pôle seulement en $z = 0$. L'ordre en $z = \infty$ (resp. \tilde{T}) est s_i (resp. m_i). Cela posé, on peut facilement voir que la courbe \tilde{T} est donnée par $z^{\lambda_1} w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_{\lambda_1-i} z^i = 0$ où $a_i \in \mathbb{C}$ ($i=0, 1, \dots, \lambda_1-1$) et $a_{\lambda_1} \in \mathbb{C}^*$. Par suite, en remarquant que φ'^{m_i}/R'^{s_i} prend la valeur constante -1 en U , la fonction f^* s'écrit

$$(z^{\lambda_1} w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_{\lambda_1-i} z^i)^{m_i} / z^{\lambda_1 m_i + s_i}.$$

Si $l=0$, on prend une paire $[R', \varphi']$ donnée par le lemme 11.7 satisfaisant de plus à la condition $\mu_0^{1,0}(\hat{T} \cap J_1) \in \hat{T}$. Grâce à cette condition, en reprenant le même raisonnement que le cas où $l \geq 1$, \tilde{T} est donnée par $z^{\lambda_1} w + \sum_{i=0}^{\lambda_1-1} a_{\lambda_1-i} z^i = 0$ où $a_i \in \mathbb{C}$ ($i=1, \dots, \lambda_1-1$) et $a_{\lambda_1} \in \mathbb{C}^*$. Donc f^* s'écrit

$$(z^{\lambda_1} w + \sum_{i=0}^{\lambda_1-1} a_{\lambda_1-i} z^i)^2 / z^{2\lambda_1+1}.$$

Le lemme est ainsi démontré.

D'après les théorèmes 10.1 et 11.1, on a donc le

Corollaire 11.5. *Pour $[R, \varphi]$ appartenant à $II^-(l, 1; \lambda_1)$, la fonction f admet la forme*

$$(11.11) \quad f_{\bar{l}, 1, (\lambda_1)}(\mathbf{a}) = \xi^{m_l} / (R_{l-1})^{s_l}$$

pour des certaines coordonnées inhomogènes $(x, y) \in \mathbf{P}^2$ de où $\xi = \varphi_{l-1} + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i (R_{l-1})^{-i}$, $a_i \in \mathbf{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_1$) avec $a_{\lambda_1} \neq 0$ et $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{\lambda_1})$ si ($l=0, a_0=0$). De plus on a

$$f_{\bar{l}, 1, (\lambda_1)}(\mathbf{a}; \omega x, \omega^2 y) = f_{\bar{l}, 1, (\lambda_1)}(\mathbf{a}^*; x, y)$$

où

$$(11.12) \quad a_i^* = a_i \omega^{-(i-1)}, \quad \mathbf{a}^* = (a_0^*, \dots, a_{\lambda_1}^*) \quad \text{et} \quad \omega^3 = 1.$$

Théorème 11.2. *Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée appartenant à $II^-(l, 1; \lambda_1)$. Alors il existe des coordonnées inhomogènes $(x, y) \in \mathbf{P}^2$ et des nombres complexes $a_i \in \mathbf{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_1$) avec $a_{\lambda_1} \neq 0$ (si $l=0, a_0=0$) tels que*

$$(11.13) \quad \begin{aligned} R &= c^{m_l} \zeta^{m_l} / (R_{l-1})^{m_l s_l - 1} \\ \varphi &= c^{s_l} \xi \zeta^{s_l} / (R_{l-1})^{(s_l)^2} \end{aligned}$$

où $\xi = \varphi_{l-1} + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i (R_{l-1})^{-i}$, $\zeta = \xi^{m_l} + (R_{l-1})^{s_l}$ et $c \in \mathbf{C}^*$.

Réciproquement, toute paire (R, φ) définie de la manière ci-dessus avec des nombres complexes arbitraires a_i et un nombre complexe $c \neq 0$ est une paire normalisée appartenant à $II^-(l, 1; \lambda_1)$:

En effet, pour $[R, \varphi]$, d'après le corollaire 11.5, il existe des coordonnées inhomogènes $(x, y) \in \mathbf{P}^2$ et des nombres complexes $a_i \in \mathbf{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_1$) avec $a_{\lambda_1} \neq 0$ (si $l=0, a_0=0$) tels que f soit donnée par la relation (11.11). Considérons la résolution minimale $[M', \Sigma', \rho']$ et l'espace produit $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_1)$ pour R_{l-1} . Soient (z, w) les coordonnées telles que $R_{l-1} \circ \rho' = z \circ \eta'_1$ et $\varphi_{l-1} \circ \rho' = w \circ \eta'_1$. On désigne par R^* , φ^* et f^* respectivement les fonctions R, φ et f regardées en tant que fonctions sur $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_1)$. Alors $f^* + 1$ s'écrit $\{(w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i z^{-i})^{m_l} + z^{s_l}\} / z^{s_l}$.

D'autre part, pour $(f+1) = S_0 + U - r S_\infty$, $S_\infty (= S'_0)$ et $U (= S''_0)$ correspondent aux points $(0, 0)$ et (∞, ∞) par $\eta'_1 \circ \rho'^{-1}$ respectivement. Il est immédiat que le transformé propre de S_0 est donné par

$$(w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i z^{-i})^{m_l} + z^{s_l} = 0.$$

on a donc

$$R^* = c^{m_l} \{(w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i z^{-i})^{m_l} + z^{s_l}\} / z^{-1 + m_l s_l}$$

où $c \in \mathbf{C}^*$, puisque R^* a un pôle d'ordre un en $z = \infty$ qui est le transformé propre de $\mu_i^{1,0}(J_1)$ par η'_1 . On a aussi

$$\varphi^* = c^{s_1} \{w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i z^{-i}\} \{(w + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_i z^{-i})^{m_1} + z^{s_1}\}^{s_1} / z^{(s_1)^2}$$

puisque φ^* est non constante sur $z = \infty$. La relation (11.13) est ainsi obtenue. La réciproque est évidente.

REMARQUE 11.3. On désigne par $[R_{\bar{l},1,(\lambda_1)}^-(\mathbf{a}), \varphi_{\bar{l},1,(\lambda_1)}^-(\mathbf{a})]$ la paire $[R, \varphi]$ donnée par (11.13) avec $c=1$. On a alors

$$\begin{aligned} R_{\bar{l},1,(\lambda_1)}^-(\mathbf{a}; \omega x, \omega^2 y) &= \omega R_{\bar{l},1,(\lambda_1)}^-(\mathbf{a}^*; x, y) \\ \varphi_{\bar{l},1,(\lambda_1)}^-(\mathbf{a}; \omega x, \omega^2 y) &= \omega^2 \varphi_{\bar{l},1,(\lambda_1)}^-(\mathbf{a}^*; x, y) \end{aligned}$$

où \mathbf{a}, \mathbf{a}^* et ω satisfont aux relations (11.12).

(b) Le cas où $II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N) \neq II^-(l, 1; \lambda_1)$.

Lemme 11.9. Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée appartenant à $II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Alors il existe une paire normalisée $[R', \varphi']$ appartenant à $II^e(l, N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ et des nombres complexes $a_i \in \mathbf{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_N$) avec $a_{\lambda_N} \neq 0$ tels que

$$(11.14) \quad \begin{aligned} f &= \xi^{m_1} R'^{s_1^e(N)} \\ \text{où} \quad \xi &= \varphi' / R' + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i R'^i. \end{aligned}$$

Réciproquement, toute fonction f définie de la manière ci-dessus avec des nombres complexes arbitraires a_i est de type $(0, 2)$.

Pour toute paire normalisée $[c^{m_1} R', c^{s_1^e(N-1)} \varphi']$ ($c \in \mathbf{C}^*$), on a

$$f((a_i); c^{m_1} R', c^{s_1^e(N-1)} \varphi') = f((a'_i); R', \varphi')$$

où $a'_i = a_i c^{i m_1 + s_1^e(N)}$.

En effet, on prend une paire $[R', \varphi']$ du lemme 11.7. Considérons la résolution minimale $[M', \Sigma', \rho']$ et l'espace produit $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_2)$ pour R' . Soient (z, u) les coordonnées telles que $R' \circ \rho' = z \circ \eta'_2$ et $(\varphi' / R') \circ \rho' = u \circ \eta'_2$. On désigne par f^* la fonction f regardée en tant que fonction sur $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_2)$. Alors $M' \setminus |(\Sigma \setminus \{J_N\}) \cup \{\hat{U}, \hat{S}_\infty\}|$ est isomorphe à l'espace produit $\{(z, u); z \in \mathbf{C}, u \in \mathbf{C}\}$ par $\eta'_2 \circ \mu_i^{N, N-1}$; le transformé propre de J_N par elle est donné par $z=0$; $S'_0 (=U)$ et $S'_\infty (=S_\infty)$ correspondent aux points $(0, \infty)$ et $(\infty, 0)$ respectivement; donc la restriction de f^* à $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ est un polynôme qui a un zéro seulement en \tilde{T} qui est le transformé propre de T et en $z=0$. En outre, les ordres de zéro en \tilde{T} et en $z=0$ sont m_1 et $s_1^e(N)$ respectivement. D'après le même raisonnement que pour le cas précédent, T est donnée par

$$u + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i z^i = 0$$

où $a_i \in \mathbf{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_{N-1}$) et $a_{\lambda_N} \in \mathbf{C}^*$. Donc, en remarquant que $\varphi'^{m_i}/R'^{s_i^e(N-1)}$ prend la valeur constante -1 en U , on obtient la relation (11.14).

Théorème 11.3. *Supposons $l \geq 0$, $N \geq 1$ et $(N, \varepsilon) \neq (1, -)$. Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée appartenant à $II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Alors il existe une paire normalisée unique $[R', \varphi']$ appartenant à $II^e(l, N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ et des nombres complexes $a_i \in \mathbf{C}$ ($i=0, \dots, \lambda_{N-1}$), $a_{\lambda_N} \in \mathbf{C}^*$ tels que*

$$(11.15) \quad \begin{aligned} R &= \zeta^{m_i} R'^{s_i^e(N)} m_i^{-1} \\ \varphi &= \xi \zeta^{s_i^e(N)} R'^{(s_i^e(N))^2} \end{aligned}$$

où $\xi = \varphi'/R' + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i R'^i$ et $\zeta = \xi^{m_i} + (R')^{-s_i^e(N)}$.

Réciproquement, toute paire (R, φ) définie de la manière ci-dessus avec des nombres complexes arbitraires a_i est une paire normalisée appartenant à $II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

En effet, on prend une paire $[R', \varphi']$ du lemme 11.9. Alors $[c^{m_i} R', c^{s_i^e(N-1)} \varphi']$ ($c \in \mathbf{C}$) est notre paire. Considérons le même espace $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_2)$ pour R' et les mêmes coordonnées (z, u) que pour le lemme 11.9. On désigne par R^* et φ^* respectivement les fonctions R et φ regardées en tant que fonctions sur $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_2)$. Alors R^* est une fonction rationnelle qui admet un zéro d'ordre m_i seulement en le transformé propre \tilde{S}_0 de S_0 et un pôle d'ordre un seulement en $z=0$ sur $\{(z, u) \in \mathbf{C}^2\}$. Comme $M \setminus |(\Sigma \setminus \{J_N\}) \cup \{\hat{U}, \hat{S}_\infty\}|$ est isomorphe à tout l'espace (z, u) , J_N est isomorphe à $z=0$ et \hat{U} (resp. \hat{S}_∞) correspond au point $(0, \infty)$ (resp. $(\infty, 0)$) par $\eta'_2 \circ \mu_i^{N, N-1}$. D'après le même raisonnement que pour le cas (a), on écrit

$$\begin{aligned} R^* &= c^{m_i} [(u + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i z^i)^{m_i} z^{s_i^e(N)} + 1]^{m_i} / z, \\ \varphi^* &= c^{s_i^e(N)} (u + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i z^i) [(u + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i z^i)^{m_i} z^{s_i^e(N)} + 1]^{s_i^e(N)}. \end{aligned}$$

En remplaçant $[R', \varphi']$ par $[c^{-m_i} R', c^{-s_i^e(N-1)} \varphi']$, on peut supposer $\alpha=1$ dès le début.

La réciproque est évidente.

REMARQUE 11.4. *Sous la situation du théorème 11.3, en prenant l'autre paire $[R'', \varphi'']$ donnée par $[\varphi^2 R', \omega \varphi']$, on a*

$$(11.16) \quad \begin{aligned} R &= \omega^2 \zeta'^{m_i} R''^{s_i^e(N)} m_i^{-1} \\ \varphi &= \omega \xi' \zeta'^{s_i^e(N)} R''^{(s_i^e(N))^2} \end{aligned}$$

$$\text{où } \xi' = \varphi''/R'' + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_i^* R''^i, \zeta' = \xi'^{m_i} + (R'')^{-s_i^e(N)},$$

$$(11.17) \quad a_i^* = a_i \omega^{i-1} \quad (0 \leq i \leq \lambda_N) \text{ et } \omega^3 = 1.$$

6° Démonstration des propositions 7.2 et 9.2. On calcule ici n , t et r qui ont été donnés sans démonstrations dans les propositions 7.2 et 9.2. Soit $[R, \varphi]$ une paire normalisée appartenant à $II^e(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ($\varepsilon = \pm$ et $N \geq 1$). Soit J_k le membre à l'extrémité de Σ_∞ qui appartient à \mathcal{L}_k . Alors on a

$$(11.18) \quad \text{ord}_{J_{N-1}}(\hat{R}) = \lambda_N(m_i)^2 + m_i s_i^e(N) - 1$$

$$\text{ord}_{J_{N-1}}(\hat{\phi}) = \lambda_N m_i s_i^e(N) + \lambda_N + (s_i^e(N))^2 \quad \text{pour } N \geq 2.$$

En effet, rappelons le théorème 11.3 et la remarque 11.2. Pour l'espace produit $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_1)$ de R' et ses coordonnées (z, w) telles que $R' \circ \rho' = z \circ \eta'_1$ et $\varphi' \circ \rho' = w \circ \eta'_1$, l'image propre de J_{N-1} par l'application $\eta'_1 \circ \mu_1^{N, N-1}$ est donné par $z = \infty$. On peut donc calculer les ordres (11.18) d'après les relations (11.15).

Soit J_0 le membre, qui appartient à \mathcal{L}_0 , à l'extrémité de Σ_∞ . Si $N=1$, on a

$$(11.19) \quad \text{ord}_{J_0}(\hat{R}) = \lambda_1(m_i)^2 + m_i s_i^e(1) - 1$$

$$\text{ord}_{J_0}(\hat{\phi}) = \lambda_1 m_i s_i^e(1) + \lambda_1 + (s_i^e(1))^2.$$

En effet, la situation dans le cas $II^+(l, 1; \lambda_1)$ est la même que celle du cas précédent. Dans le cas $II^-(l, 1; \lambda_1)$, sous la situation du théorème 11.2, en prenant l'autre $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \eta'_2)$ pour R_{l-1} et ses coordonnées (z, u) avec $u = w/z$, l'image propre de J_0 par l'application $\eta'_2 \circ \mu_1^{1, 0}$ est donné par $z = 0$. Donc (11.19) est aussi une conséquence des relations (11.13).

En outre, on a

$$(11.20) \quad \text{ord}_{J_{k-1}}(\hat{R}) = \text{ord}_{J_k}(\hat{R}) \{ \lambda_k(m_i)^2 + m_i s_i^e(k) - 1 \}$$

$$\text{ord}_{J_{k-1}}(\hat{\phi}) = \text{ord}_{J_k}(\hat{\phi}) \{ \lambda_k(m_i)^2 + m_i s_i^e(k) - 1 \}$$

pour $N \geq 2$ et $1 \leq k \leq N-1$.

En effet, d'après la remarque 11.2, l'ordre de \hat{R} (resp. $\hat{\phi}$) en B_k est égal à celui de \hat{R} (resp. $\hat{\phi}$) en J_{k-1} . La famille \mathcal{L}_k est linéaire. D'ailleurs, on a $|\mathcal{L}_k| \cap |(\Sigma^* \cup \{T\}) \setminus \mathcal{L}_k^*| = \emptyset$ pour $1 \leq k \leq N-1$. D'autre part, d'après (11.18), on a $\text{ord}_{B_N}(\hat{R}) = \lambda_N(m_i)^2 + m_i s_i^e(N) - 1$. Ici, on remarque qu'on a $\text{ord}_{J_N}(\hat{R}) = 1$ et $|\mathcal{L}_N| \cap |\Sigma^* \setminus \mathcal{L}_N^*| = \emptyset$. Donc, d'après la formule (RF.2), on peut facilement obtenir (11.20).

D'après les relations (11.20), il est immédiat que

$$(11.21) \quad \text{ord}_{J_0}(\hat{R}) = \prod_{k=1}^N (\lambda_k(m_i)^2 + m_i s_i^e(k) - 1)$$

$$\text{ord}_{J_0}(\hat{\phi}) = (\lambda_N m_i s_i^e(N) + \lambda_N + (s_i^e(N))^2) \prod_{k=1}^{N-1} (\lambda_k(m_i)^2 + m_i s_i^e(k) - 1).$$

Maintenant, pour calculer n et t , considérons le graphe de \mathcal{L}_0 . Soit C^* le membre de \mathcal{L}_0 qui coupe S_∞ . On a alors $|\mathcal{L}_0| \cap (\hat{S} \cup \hat{T}) = \emptyset$ et $|\mathcal{L}_0 \setminus \{C^*\}| \cap \hat{S}_\infty = \emptyset$. D'après le même raisonnement que pour le lemme 9.6, l'ordre de \hat{R} (resp. ϕ) en \hat{S}_∞ est égal à celui de \hat{R} (resp. ϕ) en C^* . On a les relations (11.21). D'où, en appliquant la méthode de calcul de m et s , on peut calculer n et t , par suite r . On a donc terminé la démonstration des propositions 7.2 et 9.2.

7° Conclusion dans le cas où $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ($\varepsilon = \pm$ et $N \geq 1$). Soit (x, y) des coordonnées inhomogènes de \mathbf{P}^2 . Soient N un entier ≥ 1 et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbf{N}^N$ ou \mathbf{N}_+^N où \mathbf{N} est l'ensemble des entiers ≥ 0 et $\mathbf{N}_+ = \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Soit $\mathfrak{G}(N; \lambda) = \{\mathbf{a} = (a_{j,i}); a_{j,i} \in \mathbf{C}, a_{j,\lambda_j} \neq 0\}$. Ici, les indices (j, i) parcourent les intervalles $1 \leq j \leq N$ et $0 \leq i \leq \lambda_j$. Soit $\mathfrak{G}_0(N; \lambda) = \{\mathbf{a} = (a_{j,i}) \in \mathfrak{G}(N; \lambda); a_{1,0} = 0\}$. On prend $\mathbf{a} = (a_{j,i}) \in \mathfrak{G}(N; \lambda)$ (resp. $\mathfrak{G}_0(N; \lambda)$) et $\mathbf{a}' = (a'_{j,i}) \in \mathfrak{G}(N-1; \lambda')$ (resp. $\mathfrak{G}_0(N-1; \lambda')$) avec $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N)$ et $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$. On note $\mathbf{a}' < \mathbf{a}$ si $a'_{j,i} = a_{j,i}$ pour tout $1 \leq j \leq N-1$ et $0 \leq i \leq \lambda_j$.

1) Les formes canoniques de $[R, \varphi]$.

Nous allons définir par récurrence en N , les fonctions rationnelles $R_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a})$ et $\varphi_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a})$ sur \mathbf{P}^2 avec paramètre $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}(N; \lambda)$ (si $(l, \varepsilon) = (0, -)$, alors $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}_0(N; \lambda)$):

Si $(\varepsilon, N) = (+, 1)$, on définit $[R_{i,1,\lambda}^+(\mathbf{a}), \varphi_{i,1,\lambda}^+(\mathbf{a})]$ par $[R, \varphi]$ donnée par les relations (11.15) avec $[R', \varphi'] = [[R_i, \varphi_i]]$, $\lambda \in \mathbf{N}^1$ (si $l=0$, alors $\lambda \in \mathbf{N}_+^1$) et $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}(1; \lambda)$.

Si $(\varepsilon, N) = (-, 1)$, on a défini $[R_{i,1,\lambda}^-(\mathbf{a}), \varphi_{i,1,\lambda}^-(\mathbf{a})]$ par $[R, \varphi]$ donnée par les relations (11.13) avec $c=1$, $\lambda \in \mathbf{N}^1$ et $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}(1; \lambda)$ (si $l=0$, alors $\lambda \in \mathbf{N}_+^1$ et $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}_0(1; \lambda)$).

En général, pour $N \geq 2$, on définit $[R_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a}), \varphi_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a})]$ par $[R, \varphi]$ donnée par les relations (11.15) avec $[R', \varphi'] = [R_{i,N-1,\lambda'}^\varepsilon(\mathbf{a}'), \varphi_{i,N-1,\lambda'}^\varepsilon(\mathbf{a}'), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbf{N}^N$ (si $l=0$, alors $\lambda \in \mathbf{N}_+^N$), $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$, $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}(N; \lambda)$ et $\mathbf{a}' \in \mathfrak{G}(N-1; \lambda')$ tels que $\mathbf{a}' < \mathbf{a}$ (si $(l, \varepsilon) = (0, -)$, alors $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}_0(N; \lambda)$ et $\mathbf{a}' \in \mathfrak{G}_0(N-1; \lambda')$). Alors, d'après les théorèmes 11.2 et 11.3, on peut conclure le

Théorème 11.4. *Toute $[R_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a}), \varphi_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a})]$ est une paire normalisée appartenant à $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.*

Réciproquement, si $[R, \varphi]$ est une paire normalisée appartenant à $II^\varepsilon(l, N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, alors il existe un automorphisme algébrique ι de \mathbf{P}^2 et un point $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}(N; \lambda)$ (si $(l, \varepsilon) = (0, -)$, alors $\mathbf{a} \in \mathfrak{G}_0(N; \lambda)$) tels que

$$R = c^m R_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a}) \circ \iota$$

$$\varphi = c^{s_i(N)} \varphi_{i,N,\lambda}^\varepsilon(\mathbf{a}) \circ \iota$$

où $c \in \mathbf{C}^*$.

En plus, si \mathbf{a}^ et ι^* satisfont aux relations ci-dessus, $\iota \circ \iota^{*-1}$ doit être l'automorphisme de \mathbf{P}^2*

$$(x, y) \rightarrow (\omega x, \omega^2 y) \quad (\omega^3 = 1).$$

2) Les polynômes définis par $[R_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}), \varphi_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a})]$. On a déjà vu les polynômes (P_i, Q_i, Φ_0) définis par $[[R_i, \varphi_i]]$. En général, on appelle (P, Q, Φ) *polynômes définis par* $[R, \varphi]$ si P, Q , et Φ sont les polynômes de x et y qui définissent les diviseurs S_0, S_{∞} et T de $[R, \varphi]$ et si on a $R=P^m/Q^n, \varphi=\Phi P^s/Q^t$. Pour $[R_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}), \varphi_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a})]$, on pose: Si $(\varepsilon, N) = (-, 1)$, alors

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{i},1,\lambda}(\mathbf{a}) &= \Phi_0(P_{i-1})^{\lambda_1 m_{i-1} + s_{i-1}} + \sum_{i=0}^{\lambda_1} a_{1,i} (Q_{i-1})^{i m_{i-1} + s_i} (P_{i-1})^{(\lambda_1 - i) m_{i-1}} \\ P_{\bar{i},1,\lambda}(\mathbf{a}) &= \{(P_{i-1})^{m_{i-1}(\lambda_1 m_{i-1} + s_i)} + (\Phi_{\bar{i},1,\lambda}(\mathbf{a}))^{m_i}\} / Q_{i-1}, \\ Q_{\bar{i},1,\lambda}(\mathbf{a}) &= P_{i-1} (= Q_i). \end{aligned}$$

Si $(\varepsilon, N) \neq (-, 1)$, alors

$$\begin{aligned} \Phi_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}) &= \Phi' Q'^{(1+\lambda_N) n' - t'} + \sum_{i=0}^{\lambda_N} a_{N,i} P'^{(i+1) m_i - s'} Q'^{(\lambda_N - i) n'}, \\ P_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}) &= \{Q'^r + (\Phi_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}))^{m_i}\} / P', \\ Q_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}) &= Q' = Q_i. \end{aligned}$$

Ici, si $(\varepsilon, N) = (+, 1)$, alors P', Φ', n', s', t' et r signifient $P_i, \Phi_0, m_{i+1}, s_i, s_{i+1}$ et $r_i^+(1; \lambda_1)$ respectivement et si $N \geq 2$, alors ils signifient $P_{i,N-1,\lambda'}^{\varepsilon}(\mathbf{a}')$, $\Phi_{i,N-1,\lambda'}^{\varepsilon}(\mathbf{a}')$, $n_i^{\varepsilon}(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$, $s_i^{\varepsilon}(N-1)$, $t_i^{\varepsilon}(N-1; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ et $r_i^{\varepsilon}(N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ respectivement. Alors, d'après les théorèmes 11.2, 11.3, 11.4 et les relations (11.9), (11.10), on a le

Corollaire 11.6. $(P_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}), Q_i, \Phi_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}))$ sont les polynômes définis par $[R_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a}), \varphi_{i,N,\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{a})]$.

Bibliographie

- [1] M. Furushima: *Finite groups of polynomial automorphisms in the complex affine plane (I)*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **36** (1982), 85–105.
- [2] A. Gutwirth: *An inequality for certain pencils of plane curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 631–639.
- [3] H.W.E. Jung: *Über ganze birationale transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174.
- [4] T. Kizuka: *Analytic automorphisms of the complement of an algebraic curve in the complex projective plane*, Tôhoku Math. J. **3** (1981), 77–89.
- [5] K. Kodaira: *On compact complex analytic surface I*, Ann. of Math. **71** (1960), 111–152; II, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626.
- [6] M. Miyanishi and T. Sugie: *On a projective plane curve whose complement has logarithmic Kodaira dimension $-\infty$* , Osaka J. Math. **18** (1981), 1–11.
- [7] M. Nagata: *On rational surfaces I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1*, Mem. Coll. Soc. Univ. Kyoto, Ser A **32**, Math. (1960), 351–370.

- [8] M. Nagata: *A theorem of Gutwirth*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 149–154.
- [9] H. Saito: *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes (I)*, Osaka J. Math. **9** (1972), 293–332.
- [10] ———: *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes (II)*, Osaka J. Math. **14** (1977), 649–674.
- [11] H. Kashiwara: *Rational functions of $(0, 1)$ -type on the two-dimensional complex projective space*, Proc. Japan Acad. **58A** (1982), 200–203.
- [12] M. Suzuki: *Propriétés topologique des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2* , J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.
- [13] H. Yoshihara: *A problem on plane rational curve*, Sugaku **31** (1979), 256–261, (in Japanese).
- [14] I. Wakabayashi: *Automorphism group of \mathbb{C}^2* , preprint.

University of Osaka Prefecture
Mozu-Umemachi, Sakai-city, Osaka 591
Japan

