Gourdin, D.
Osaka J. Math.
30 (1993), 349-364

SYSTÈMES QUASI LINÉAIRES HYPERBOLIQUES NON SYMÉTRISABLES

DANIEL GOURDIN

(Reçu le 17 décembre, 1991)

Introduction

Après la théorie de J. Leray sur les systèmes quasi linéaires à partie principale diagonale, hyperboliques stricts dans les espaces de Sobolev et hyperboliques non stricts dans des espaces de Gevrey, ([14], [15]), T. Kato a résolu le problème de Cauchy local dans les espaces de Sobolev pour les systèmes quasi linéaires symétrisables ([13]).

Nous résolvons ici le problème de Cauchy local C^∞ pour un type de systèmes quasi linéaires hyperboliques non symétrisables de trois équations du premier ordre lorsque les linéarisés ont des rangs et des multiplicités caractéristiques constants, sous des conditions rappelant les conditions de Mme Choquet-Bruhat ([3]) en utilisant la théorie des systèmes hyperboliques linéaires de J. Vaillant ([17], [18]), la théorie de Nash-Moser ([11], [16]) et une méthode utilisée par N. Iwasaki pour les systèmes quasi linéaires effectivement hyperboliques ([12]).

Nous montrons dans une remarque finale qu'un autre type de systèmes quasi linéaires hyperboliques non symétrisables, mais de deux équations du premier ordre cette fois, peut être traité de la même manière et a un problème de Cauchy local C^∞ résoluble sous des conditions analogues sur les linéarisés.

Ce travail a été résumé dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([10]). $X=(x_0, x)$ est le point courant de $\boldsymbol{R}^{r+1}$ avec $x_0 \in \boldsymbol{R}$ et $x=(x_1, \cdots, x_r) \in \boldsymbol{R}^r$.

Ω est un ouvert contenant l'origine de $\boldsymbol{R}^{r+1}$.

$\zeta=(\xi_0, \xi)$ est la variable duale, $\xi_0 \in \boldsymbol{R}$ et $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_r) \in \boldsymbol{R}^r$; $\mathcal{G}=(1, 0)$.

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial^i = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (0 \leq i \leq r) .$$

I. Hypothèses et énoncés des résultats

1) Hypothèses Considérons les opérateurs notés Φ définis par:

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi\colon C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega) \to C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega) \\ \Phi(y) = \sum_{i=0}^{r} H^i(X, y)\, \partial_i y + Q(X, y) \\ y = {}^t(y^1, y^2, y^3) \in C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega) \\ H^i = (H^{iA}_B)_{1\le A,B\le 3} \in C^\infty_{\boldsymbol{R}^9}(\Omega\times \boldsymbol{R}^3) \\ Q = (Q^c)_{1\le c\le 3} \in C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega\times \boldsymbol{R}^3) \end{cases}$$

où $H^i(X, Y)$ et $Q(X, Y)$ s'écrivent sous forme matricielle

$$H^i(X, Y) = \begin{pmatrix} H^{i1}_1 & H^{i1}_2 & H^{i1}_3 \\ H^{i2}_1 & H^{i2}_2 & H^{i2}_3 \\ H^{i3}_1 & H^{i3}_2 & H^{i3}_3 \end{pmatrix} (X, Y),\ Q(X, Y) = \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{pmatrix} (X, Y)$$

respectivement dans $\boldsymbol{R}^9$ et $\boldsymbol{R}^3$, pour tout $X\in\Omega$, et tout $Y={}^t(Y^1, Y^2, Y^2)\in\boldsymbol{R}^3$. Soit U un ouvert de $\boldsymbol{R}^3$ contenant l'origine. On suppose que Φ satisfait aux hypothèses suivantes:

(I_1) $\mathrm{Support}_X\, Q(X, O)\subset\Omega^+=\Omega\cap([0, +\infty[\times\boldsymbol{R}^r)$

(I_2) En posant $H(X, Y, \zeta) = \sum_{i=0}^{r} H^i(X, Y)\,\xi_i$

$$p(X, Y, \zeta) = \det H(X, Y, \zeta)$$

on a $p(X, Y, \mathcal{T})=1$, $\forall\, X\in\Omega$, $\forall\, Y\in U$.

(I_3) $p(X, Y, \zeta)=[H_0(X, Y, \zeta)]^3$, $H_0(X, Y, \zeta) = \xi_0-L_0(X, Y, \xi)$,

$$L_0(X, Y, \xi) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(X, Y)\,\xi_i\ (\forall\, X\in\Omega,\ \forall\, Y\in U,\ \forall\,\zeta\in\boldsymbol{R}^{r+1}),\ \lambda_i\in C^\infty_{\boldsymbol{R}}(\Omega\times U)$$
$$(i = 1, \cdots, r)\,.$$

(I_4) En notant $H=(H^A_B)_{1\le A,B\le 3}$ et A la matrice des cofacteurs de H, A est divisible par H_0; B étant la matrice quotient de A par H_0, B est une matrice 3×3 d'éléments polynômiaux homogènes de degré 1 en ζ et de classe $C^\infty(\Omega\times U)$ en (X, Y); de plus en appelant A^{DE}_{AB} le cofacteur de $H^A_D\, H^B_E$ dans le développement de

$p = \det H$, on a:

$$\inf\{|B^1_1(X, Y; L_0(X, Y, \xi), \xi)|\,;\, X\in\Omega,\ Y\in U,\ |\xi|= 1\}>0\,,$$
$$\inf\{|A^{12}_{12}(X, Y; L_0(X, Y, \xi), \xi)|\,;\, X\in\Omega,\ Y\in U,\ |\xi|= 1\}>0$$

(I_5) Les polynômes en ζ

$$\mathcal{P}^i_C = \sum_{A,B}\left\{\left(\frac{\partial H^{iA}_C}{\partial Y^B}-\frac{1}{2}\frac{\partial H^{iA}_B}{\partial Y^C}\right)B^1_A\, B^B_1+\frac{1}{2}\, H^A_B\left(\frac{\partial B^B_1}{\partial\xi_i}\frac{\partial B^1_A}{\partial Y^C}-\frac{\partial B^1_A}{\partial\xi_i}\frac{\partial B^B_1}{\partial Y^C}\right)\right\}$$

$(i=0, \cdots, r;\ c=1, 2, 3)$

$$\mathcal{H} = \sum_{A,B}\left\{\left(\frac{\partial Q^A}{\partial Y^B}-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\frac{\partial H^{jA}_B}{\partial x_j}\right) B^1_A\, B^B_1+\frac{1}{2}\, H^A_B\sum_{j=0}^{r}\left(\frac{\partial B^B_1}{\partial\xi_j}\frac{\partial B^1_A}{\partial x_j}-\frac{\partial B^B_1}{\partial x_j}\frac{\partial B^1_A}{\partial\xi_j}\right)\right\}$$

sont divisibles par H_0.

(I_6) Les polynômes en ζ.

$$\mathcal{R}_c^i = \sum_{1\leq A,B\leq 3} \left\{ B_B^1 \frac{\partial H_c^{iB}}{\partial Y^A} + (\partial^i B_B^1) \frac{\partial H_A^B}{\partial Y^c} \right\} A_{12}^{1A}$$

et

$$\mathcal{S}_c^i = \sum_{1\leq A,B\leq 3} A_{1B}^{12} \left\{ \frac{\partial H_c^{iB}}{\partial Y^A} B_1^A + H_A^{iB} \frac{\partial B_1^A}{\partial Y^c} \right\}$$

($i=0, \cdots, r$; $c=1, 2, 3$) sont divisibles par H_0.

(I_7)

$$(I_7)_1 \begin{cases} \check{\mathcal{K}}_1^2 = \sum_{A,B} A_{1B}^{12} \left(\frac{\partial Q^B}{\partial Y^A} B_1^A + \sum_{j=0}^r H_A^{jB} \frac{\partial B_1^A}{\partial x_j} \right) \\ \text{est divisible par } H_0 \text{ et} \\ \hat{\mathcal{K}}_2^1 = \sum_{A,B} \left(B_A^1 \frac{\partial Q^B}{\partial Y^A} + \sum_{j=0}^r (\partial^j B_B^1) \frac{\partial H_B^A}{\partial x_j} \right) A_{12}^{1A} \\ \text{vérifie } \hat{\mathcal{K}}_2^1(X, Y; L_0(X, Y, \xi), \xi) \neq 0 \quad (\forall X \in \Omega, \forall Y \in U, \forall \xi \neq 0) \end{cases}$$

ou bien

$$(I_7)_2 \begin{cases} \hat{\mathcal{K}}_2^1 \text{ divisible par } H_0 \\ \text{et} \\ \check{\mathcal{K}}_1^2(X, Y, L_0(X, Y, \xi), \xi) \neq 0 \quad (\forall X \in \Omega, \forall Y \in U, \forall \xi \neq 0) \end{cases}$$

REMARQUE: (I_4) implique que H possède la forme réduite

$$H \sim \begin{pmatrix} (H_0)^2 & & \\ & H_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

dans φ_0 anneau localisé de $\boldsymbol{R}[\zeta]$ par l'idéal premier engendré par H_0 en chaque point $(X, Y) \in \Omega \times U$ ([17]). (I_5), (I_6) et (I_7) signifient que les linéarisés Φ' de Φ vérifient les conditions de Levi des systèmes à caractéristiques de multiplicité 3 lorsque la matrice des cofacteurs s'annule sur la variété caractéristique ([2], [18]).

EXEMPLE d'opérateur Φ vérifiant les propriétés (I_1) à (I_7).

$$\Phi(y) = {}^t(\partial_0 y^3 - \lambda(X)\, \partial_1 y^3 + d_1(X, y);\ -(\partial_0 y^2 - \lambda(X)\, \partial_1 y^2) + d_2(X, y);$$
$$\partial_0 y^1 - \lambda(X)\, \partial_1 y^1 + \mu(X, y)\, \partial_1 y^3 + d_3(X, y)) \text{ avec}$$

$\lambda \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(\Omega)$, μ et $d_i \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(\Omega \times \boldsymbol{R}^3)$ $(1 \leq i \leq 3)$ vérifiant $\mu(0, 0) \neq 0$, $\dfrac{\partial d_1}{\partial y^1} = -\dfrac{1}{2} \partial_1 \lambda$

et $\left[\dfrac{\partial d_2}{\partial y^1} = 0 \text{ et } \dfrac{\partial d_1}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0 \right]$ ou $\left[\dfrac{\partial d_1}{\partial y^2} = 0 \text{ et } \dfrac{\partial d_2}{\partial y^1}(0, 0) \neq 0 \right]$

2) Enoncé des résultats

On note

$$Y=(Y^1,\ Y^2,\ Y^3)\in \boldsymbol{R}^3,\ E_S=\{\alpha=(\alpha_0,\cdots,\alpha_r)\in \boldsymbol{N}^{r+1};\ |\alpha|\leq S\}\ ,$$
$$N_S=\text{Card } E_S,\ Y^k_S=\{Y^k_\alpha\}_{\alpha\in E_S}\in \boldsymbol{R}^{N_S}\ ,$$

$Y_S=(Y^1_S,\ Y^2_S,\ Y^3_S)\in \boldsymbol{R}^{3N_S}$, U^k_S un ouvert de $\boldsymbol{R}^{N_S}$ contenant 0 $(1\leq k\leq 3)$,
$U_S=U^1_S\times U^2_S\times U^3_S$ un ouvert de $\boldsymbol{R}^{3N_S}$ contenant 0,

$$V^k_S(\Omega)=\{y^k\in C^\infty_{\boldsymbol{R}}(\Omega);\ \{\partial^\alpha y^k(X)\}_{\alpha\in E_S}\in U^k_S,\ \forall\ X\in\Omega\}$$

un voisinage de 0 dans $C^\infty_{\boldsymbol{R}}(\Omega)$,

$$V_S(\Omega)=V^1_S(\Omega)\times V^2_S(\Omega)\times V^3_S(\Omega)\quad \text{un voisinage de } O \text{ dans}$$

$C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega)=[C^\infty_{\boldsymbol{R}}(\Omega)]^3$, $U_0=U$, $V_0(\Omega)=V(\Omega)$.
Le linéarisé $\Phi'(u)$ de Φ au point $u\in C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega)$ s'écrit:

$$\Phi'(u)\,(y)=\sum_{i=0}^{r} H^i(X,u)\,\partial_i y+\sum_{j=1}^{3} y^j\left(\frac{\partial Q}{\partial u^j}+\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial H^i}{\partial u^j}\,\partial_i u\right). \tag{2}$$

Soit

$\Omega_{a,\varepsilon}$ l'ouvert de $\boldsymbol{R}^{r+1}$ defini par

$$\Omega_{a,\varepsilon}=\{X=(x_0,x)\in\boldsymbol{R}^{r+1};\ -\varepsilon a<x_0<\varepsilon(a-|x|^2)\}\quad (a>0,\ \varepsilon>0)\ ,$$
$$C^\infty_+(\Omega)=\{z\in C^\infty_{\boldsymbol{R}^3}(\Omega);\ \text{supp } z\in\Omega^+\}$$

Considerons $\tilde\Omega_0=\Omega_{\tilde a_0,\tilde\varepsilon_0}$ tel que $\overline{\Omega_{\tilde a_0,\tilde\varepsilon_0}}\subset\Omega$. D'après ($\mathrm{I}_1$)

$$\Phi\colon C^\infty_+(\tilde\Omega_0)\to C^\infty_+(\tilde\Omega_0)\ . \tag{3}$$

De plus, pour tout $u\in\tilde V_0=V(\tilde\Omega_0)$ associé à U fixé précédemment, en notant
$\nabla^S_u=\left\{\dfrac{\partial^S u}{(\partial x_0)^{\alpha_0}\cdots(\partial x_r)^{\alpha_r}}\right\}_{|\alpha|=S}\ (S\in\boldsymbol{N})$,

(4) $\Phi'(u)=\Phi'(u)\,(X,u,\nabla u,D)\colon C^\infty_+(\tilde\Omega_0)\to C^\infty_+(\tilde\Omega_0)$ dépend "linéairement" de ∇u. Nous obtenons la proposition suivante:

Proposition 1. *Soit U_2 un voisinage ouvert de O dans $\boldsymbol{R}^{3N_2}$ dont la projection sur $\boldsymbol{R}^3$ est incluse dans U.*

Il existe $\Omega_{a'_0,\varepsilon'_0}$ tel que $\Omega_{a'_0,\varepsilon'_0}\subset\tilde\Omega_0$ et un opérateur différentiel linéaire de la forme:

$$b_1(X,u,\nabla u,D)=B(X,u,D)+B^*_1(X,u,\nabla u) \tag{5}$$
$$(\text{resp. } b_2(X,u,\nabla u,D)=B(X,u,D)+B^*_2(X,u,\nabla u))$$

pour tout $u\in V_2(\Omega_{a'_0,\varepsilon'_0})$ tels que

$$l_1(X, u, \nabla u, \nabla^2 u, D) = \Phi' \circ b_1 \text{ (resp. } l_2(X, u, \nabla u, \nabla^2 u, D) = b_2 \circ \Phi') \textit{ soit}$$

de la forme suivante:

(6) $l(X,u,\nabla u,\nabla^2 u,D) = [h_0(X,u,D)]^2 I_3 + e_1(X,u,\nabla u) h_0(X,u,D) + e_2(X,u,\nabla u,\nabla^2 u)$ *où* $B(X, u, D)$ *a pour symbole* $B(X, Y, \zeta)$, $h_0(X, u, D)$ *a pour symbole* $H_0(X, Y, \zeta)$, $B_1^*(X, Y_1)$ *ainsi que* $B_2^*(X, Y_1)$, $e_1(X, Y_1)$ *et* $e_2(X, Y_2)$ *sont des matrices* 3×3 *de fonctions de classe* $C^\infty(\Omega_{a_0', \varepsilon_0'} \times U_1)$ *si et seulement si on a à la fois*:

(i) $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X, Y_1, \zeta)$ *est divisible par* H_0

(ii) $\check{\mathcal{K}}_1^2 = \check{\mathcal{K}}_1^2(X, Y_1, \zeta)$ *est divisible par* H_0

(iii) $\hat{\mathcal{K}}_2^1 = \hat{\mathcal{K}}_2^1 (X, Y_1, \zeta)$ *vérifie*

$$\hat{\mathcal{K}}_2^1 (X, Y, \xi_0 = L_0(X, Y, \xi), \xi) \neq 0 \textit{ quel que soit } X \in \Omega_{a_0', \varepsilon_0'},\ Y_2 \in U_2,\ \xi \neq 0)$$

(resp. (i)′ $\mathcal{K}$ *est divisible par* H_0

(ii)′ $\hat{\mathcal{K}}_2^1$ *est divisible par* H_0

(iii)′ $\check{\mathcal{K}}_1^2 (X, Y_1, \xi_0 = L_0(X, Y, \xi), \xi) \neq 0$ *quel que soit* $X \in \Omega_{a_0', \varepsilon_0'}$, $Y_2 \in U_2, \zeta \neq 0)$
où

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}(X, Y, \zeta) + \sum_{i=0}^{r} \sum_{c=1}^{3} \mathcal{P}_C^i(X, Y, \zeta)\, Y_{(i)}^c \tag{7}$$

$$\check{\mathcal{K}}_1^2 = \check{\check{\mathcal{K}}}_1^2 + \sum_{i=0}^{r} \sum_{c=1}^{3} \mathcal{S}_C^i\, Y_{(i)}^C \tag{8}$$

$$\hat{\mathcal{K}}_2^1 = \hat{\hat{\mathcal{K}}}_2^1 + \sum_{i=0}^{r} \sum_{c=1}^{3} \mathcal{R}_C^i\, Y_{(i)}^C \tag{9}$$

(10) $\quad Y_{(i)}^C = Y_{\alpha-(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}^C$ (1 *se trouvant au i-ème rang dans* $\alpha \in \boldsymbol{N}^{r+1}$)

Les hypothèses (I_5), (I_6), (I_7) et la proposition 1 conduisent à la deuxième proposition suivante.

Proposition 2. *Sous les hypothèses* (I_1) *à* (I_7), *il existe* $\Omega_{a_1,\varepsilon_1}$ *tel que* $\overline{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \subset \Omega$ *et un ouvert* U_2 *relativement compact de* $\boldsymbol{R}^{3N_2}$, *dont la projection sur* $\boldsymbol{R}^3$ *est incluse dans* U, *tels que pour tout* $u \in V_2(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ *associé à* U_2, *le problème de Cauchy pour* $\Phi'(u)$:

$$\Phi'(u)\, y = f \quad \textit{dans} \quad \Omega_{a_1,\varepsilon_1} \tag{11}$$

possède une solution unique $y \in C_+^\infty(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ *pour tout* $f \in C_+^\infty(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ *à support compact dans* $\Omega_{a_1,\varepsilon_1}$.

De plus, pour tout ouvert U_{S+2} *borné de* $\boldsymbol{R}^{3N_{S+2}}$ *contenant* 0, *dont la projection sur* $\boldsymbol{R}^3$ *est incluse dans* U, *il existe une constante* $C_S > 0$ *indépendante de* $u \in V_{S+2}(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ *associé à* U_{S+2} *telle que*

$$\|z\|_{S-1} \leq C_S\, \|\Phi'(u)\, z\|_S \tag{12}$$

pour tout $z \in C_+^\infty(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ *à support compact et telle que*

$$(13) \qquad \|y\|_{s-1} \leq C_s \|f\|_s$$

pour y solution de (11) *avec $f \in C_+^\infty(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ à support compact, où $\| \ \|_s$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev $W^{s,2}(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$*:

$$\|v\|_s = \Big(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha v\|^2_{L(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})}\Big)^{1/2}.$$

Considérons maintenant $\Omega_{a_2,\varepsilon_2}$ tel que $\overline{\Omega_{a_2,\varepsilon_2}} \subset \Omega_{a_1,\varepsilon_1}$. Comme $\Omega_{a,\varepsilon}$ admet la propriété de S prolongement pour tout S ([1]) on déduit de la proposition 2 l'inégalité:

$$(14) \qquad \|\tilde{y}\|_{s-1} \leq C_s \|\tilde{\Phi}'(u)\, y\|_s$$

pour tout $y \in C_+^\infty(\overline{\Omega_{a_2,\varepsilon_2}})$ et tout $u \in V_{S+2}(\Omega_{a_2,\varepsilon_2})$ associé à U_{S+2}, $\|\tilde{z}\|_s$ étant la norme de Sobolev de z dans $W^{s,2}(\Omega_{a_2,\varepsilon_2})$.

On précise la proposition 2 sous la forme suivante, grace à l'invariance des propriétés (I_1)-(I_7) lorsqu'on commute $\langle D_x \rangle^{2\alpha}$ et $\Phi'(u)$.

Proposition 3. *Sous les hypothèses (I_1) à (I_7), le problème de Cauchy* (11) *est bien posé dans $C_+^\infty(\overline{\Omega_{a_2,\varepsilon_2}})$. L'inégalité* (14) *se précise sous la forme*:

$$(15) \qquad \|\tilde{y}\|_{s_0+2\alpha-1} \leq C_{s_0+2\alpha}(\|\tilde{\Phi}'(u)\, y\|_{2\alpha+s_0} + |a|_{2\alpha+s_0} \|\tilde{\Phi}'(u)\, y\|_{s_0})$$

pour tout $y \in C_+^\infty(\overline{\Omega_{a_2,\varepsilon_2}})$ où a désigne les coefficients de $\Phi'(u)$, $|a|_S$ désigne la norme höldérienne d'ordre S de a sur $\overline{\Omega_{a_2,\varepsilon_2}}$ et $C_{s_0+2\alpha}$ est indépendante de $u \in V_{s_0+4}(\Omega_{a_2,\varepsilon_2})$ associé à U_{s_0+4} ouvert borné de $\boldsymbol{R}^{3N_{s_0+4}}$ contenant 0, dont la projection sur $\boldsymbol{R}^3$ est incluse dans U.

On obtient alors, grace à la théorie de Nash-Moser (*cf* [9], [11], [16]) *le résultat principal suivant*:

Théorème. *Sous les hypothèses (I_1) à (I_7), pour toute $f \in C_+^\infty(\Omega)$, il existe $\Omega_{a,\varepsilon}$ tel que $\overline{\Omega_{a,\varepsilon}} \subset \Omega$ et $y \in C_+^\infty(\overline{\Omega_{a,\varepsilon}})$ unique vérifiant $\Phi(y) = f$ dans $\overline{\Omega_{a,\varepsilon}}$.*

Le détail des démonstrations des trois propositions et du théorème fait l'objet du paragraphe suivant.

II. Preuve des propositions et du théorème

1) Preuve de la proposition 1.

Elle repose sur la définition et les lemmes suivants.

DÉFINITION. Nous dirons que $\Phi'(X, u, \nabla u, D) = h$ vérifie la condition $C^d(h)$ (resp. $C^g(h)$) si il existe b_1(resp. b_2) de la forme (5) tel que $h \circ b_1$(resp. $b_2 \circ h$) vérifie (6).

Nous avons l'égalité suivante:

$$h(y)=\sum_{i=0}^{r} H^i(X,u)\,\partial_i\,y+\sum_{j=1}^{3} y^j\left(\frac{\partial Q}{\partial u_j}+\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial H^i}{\partial u^j}\,\partial_i\,u\right)$$

En posant

$$H(X,u,D)=\sum_{i=0}^{r} H^i(X,u)\,\partial_i$$

$$H^*(X,u,\nabla u)=\left[\frac{\partial Q}{\partial u^1}+\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial H^i}{\partial u^1}\,\partial_i\,u,\ \frac{\partial Q}{\partial u^2}+\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial H^i}{\partial u^2}\,\partial_i\,u,\ \frac{\partial Q}{\partial u^3}+\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial H^i}{\partial u^3}\,\partial_i\,u\right]$$

nous obtenons les lemmes 1 à 5 suivants:

Lemma 1. *h vérifie* $C^d(h)$ (resp. $C^g(h)$) *si et seulement si il existe* $B_1^*(X,u,\nabla u)$ (resp. $B_2^*(X,u,\nabla u)$) *et* Λ_1 (resp. Λ_2) *tels que*:

$$M_1=\sum_{\alpha=0}^{r}\partial^\alpha H\partial_\alpha B+HB_1^*+H^*B-\sum_{\alpha=0}^{r}\partial^\alpha H_0\,\partial_\alpha H_0\,I_3$$

(resp. $M_2=\sum_{\alpha=0}^{r}\partial^\alpha B\partial_\alpha H+BH^*+B_2^*H-\sum_{\alpha=0}^{r}\partial^\alpha H_0\,\partial_\alpha H_0\,I_3$)

soit de la forme $H_0\Lambda_1$) (resp. $H_0\Lambda_2$).

Lemma 2. ([2]) $B_1^1BM_1\equiv B_1^1M_2B\equiv\mathcal{K}B$ *(modulo un multiple de H_0) où $\mathcal{K}$ est le polynôme sous-caractéristique de h exprimé par* (7).

Lemma 3. ([2]) *Supposons $\mathcal{K}$ divisible par H_0 et considérons* $N=\dfrac{M_2BM_1}{H_0}$ *alors $B_1^1N\equiv N_1^1B$ (modulo un multiple de H_0).*

Lemma 4. ([2]) *Si $\mathcal{K}$ est divisible par H_0, alors*

$A_{12}^{12}[B_1^1]^2N\equiv[A_{12}^{12}]^2\hat{\mathcal{K}}_2^1\check{\mathcal{K}}_1^2B\equiv A_{12}^{12}B_1^1N_1^1B$ *(modulo un multiple de H_0) où*

$$\sum_{1\leq A,B\leq 3}\left(B_B^1H^{*B}_A+\sum_{\alpha=0}^{r}\partial^\alpha B_B^1\,\partial_\alpha H_A^B\right)A_{12}^{1A}\equiv A_{12}^{12}\hat{\mathcal{K}}_2^1\quad et$$

$$\sum_{1\leq A,B\leq 3}A_{1B}^{12}\left[H^{*B}_A B_1^A+\sum_{\alpha=0}^{r}\partial^\alpha H_A^B\,\partial_\alpha B_1^A\right]\equiv A_{12}^{12}\check{\mathcal{K}}_1^2$$

(modulos un multiple de H_0).

Lemma 5. *Supposons $\mathcal{K}$ divisible par H_0 et posons*

$$C=\frac{M_2B}{H_0}\ (\text{resp. } D=\frac{BM_1}{H_0});\ alors$$

$$B_1^1C_2^1-B_2^1C_1^1\equiv A_{12}^{12}\hat{\mathcal{K}}_2^1,$$

$$A_{12}^{12}[B_1^1]^2CM_1\equiv[A_{12}^{12}]^2\hat{\mathcal{K}}_2^1\check{\mathcal{K}}_1^2B,$$

$$B_1^1D_1^2-B_2^1D_1^1\equiv A_{12}^{12}\check{\mathcal{K}}_1^2,$$

$$A_{12}^{12}[B_1^1]^2M_2D\equiv[A_{12}^{12}]^2\hat{\mathcal{K}}_2^1\check{\mathcal{K}}_1^2B$$

(*modulos un multiple de* H_0).

La proposition 1 se démontre alors comme suit:
La nécessité de (i) (ii) (iii) (resp. (i)′(ii)′(iii)′) résulte des lemmes 1 à 5.

Pour démontrer la suffisance, il suffit d'après le lemme 1 de résoudre l'équation matricielle:

$$M_1(\xi_0 = L_0) = 0 \text{ (resp. } M_2(\xi_0 = L_0) = 0)$$

d'inconnue matricielle $B_1^* = B_1^*(\xi_0 = L_0)$ (resp. $B_2^* = B_2^*(\xi_0 = L_0)$).

En séparant l'inconnue matricielle en colonnes (resp. en lignes) on constate que l'on obtient un système linéaire de rang $m-2=3-2=1$ dont les conditions de compatibilité sont satisfaites si et seulement si (i) (ii) (iii) (resp. (i)′(ii)′(iii)′) sont vérifiées, en vertu des lemmes 2 à 5 (ce qui est le cas d'après les hypothèses (I.2) à (I.7)). La proposition 1 est démontrée.

2) Preuve de la proposttion 2.

On utilise le lemme suivant dont la démonstration est aisée.

Lemma 6. *Choisissons* $\Omega_{a_0'',\varepsilon_0''}$ *et* $\Omega_{a_0''',\varepsilon_0'''}$ *vérifiant* $\Omega_{a_0',\varepsilon_0'} \subset \bar{\Omega}_{a_0',\varepsilon_0'} \subset \Omega_{a_0'',\varepsilon_0''} \subset \bar{\Omega}_{a_0'',\varepsilon_0''} \subset \Omega_{a_0''',\varepsilon_0'''} \subset \bar{\Omega}_{a_0''',\varepsilon_0'''} \subset \tilde{\Omega}_0$ *et une fonction* $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{r+1})$ *telle que*

$$\begin{aligned} &0 \leq \varphi(X) \leq 1, \ \forall X \in \boldsymbol{R}^{r+1} \\ &\varphi(X) = 1 \ si \ X \in \bar{\Omega}_{a_0'',\varepsilon_0''} \\ &\varphi(X) = 0 \ si \ X \in \boldsymbol{R}^{r+1} \backslash \Omega_{a_0''',\varepsilon_0'''} . \end{aligned}$$

Alors il existe U_2' *voisinage de* 0 *dans* $\boldsymbol{R}^{3N_2}$ *avec* $\bar{U}_2' \subset U_2$ *tel que l'on ait*:

$$\begin{cases} V_2'(\Omega_{a_0',\varepsilon_0'}) \overset{\alpha}{\to} V_2(\boldsymbol{R}^{r+1}) \\ v = \alpha(u) \\ v(X) = u(X\varphi(X)) \end{cases}$$

et en posant:

$$\begin{aligned} &h_0'(X, v, D) = h_0(X\varphi, u(X\varphi), D) \\ &e_1'(X, v, \nabla v) = e_1(X\varphi, u(X\varphi), \nabla u(X\varphi)) \\ &e_2'(X, v, \nabla v, \nabla^2 v) = e_2(X\varphi, u(X\varphi), \nabla u(X\varphi), \nabla^2 u(X\varphi)) \\ &l' = l'(X, v, \nabla v, \nabla^2 v, D) = [h_0'(X, v, D)]^2 I_3 + e_1'(X, v, \nabla v)\, h_0'(X, v, D) + \\ &\quad e_2'(X, v, \nabla v, \nabla^2 v) \end{aligned}$$

l' *est un opérateur faiblement hyperbolique bien décomposable à coefficients dans* $C^\infty(\Omega \times V_2(\boldsymbol{R}^{r+1}))$ ([5]) *où* $V_2(\boldsymbol{R}^{r+1})$ *est associé à* U_2 *et* $V_2'(\Omega_{a_0',\varepsilon_0'})$ *est associé à* U_2'

vérifiant:

$$l'|_{C_+^\infty(\bar{\Omega}_{a_0',\varepsilon_0'})} = l|_{C_+^\infty(\bar{\Omega}_{a_0',\varepsilon_0'})}$$

De plus $h_0'(X, v, D)$ *a pour symbole*

$$H_0'(X, v, \zeta) = \xi_0 - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(X\varphi, u(X\varphi))\,\xi_i\,.$$

Désignons par l_1'(resp. l_2') l'opérateur l' correspondant à l_1 (resp. l_2).

Soit p_0 une borne supérieure de la vitesse de propagation (par rapport à x_0) des ondes relativement à l' sur $\boldsymbol{R}^{r+1}$ et $Y \in U'$=projection de U_2' sur $\boldsymbol{R}^3$.

$p_0 = \sup\ \{|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(X\varphi(X), Y)\,\xi_i|\,;\ X \in \boldsymbol{R}^{r+1},\ Y \in U',\ |\xi| = 1\}$ et choisissons a_0 tel que $0 < a_0 < \varepsilon_0'\, a_0'$.

Alors pour $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit et pour $\Omega_{a_0,\varepsilon_0} \subset \bar{\Omega}_{a_0,\varepsilon_0} \subset \Omega_{a_0',\varepsilon_0'}$ les cônes $\Gamma(E)$ de sommet $E = (e_0, e)$ de dépendance de l' vis à vis des données et du second membre en chaque point $E \in \Omega_{a_0,\varepsilon_0}$ définis par

$$\Gamma(E) = \{X \in \boldsymbol{R}^{r+1};\ -\varepsilon_0\, a_0 < x_0 < \varepsilon_0\, a_0,\ |x - e| < p_0(e_0 - x_0)\} \tag{16}$$

sont inclus dans $\Omega_{a_0,\varepsilon_0}$.

Considérons $0 < a_1 < a_0$ et $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ tels que

$$F_{a_1,\varepsilon_1} = \{X \in \boldsymbol{R}^{r+1};\ 0 \le x_0 \le \varepsilon_1\, a_1,\ |x| < \sqrt{a_1} + p_0\, x_0\} \tag{17}$$

soit inclus dans $\Omega_{a_0,\varepsilon_0}$; on obtient le lemme suivant:

Lemme 7. *Pour toute* $f \in C_+^\infty(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ *à support compact, il existe* z *unique de classe* $C_+^\infty([-\varepsilon_1\, a_1, \varepsilon_1\, a_1] \times \boldsymbol{R}^r)$ *tel que*

$$l'z = f\ (\forall X \in [-\varepsilon_1\, a_1, \varepsilon_1\, a_1] \times \boldsymbol{R}^r) \tag{18}$$

De plus supp $z \subset F_{a_1,\varepsilon_1}$ *et l'on a*:

$$||z||_S^{[0,\varepsilon_1 a_1] \times \boldsymbol{R}^r} = ||z||_S^{F_{a_1,\varepsilon_1}} \le C_s\, ||f||_S^{[0,\varepsilon_1 a_1] \times \boldsymbol{R}^r} = C_s\, ||f||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \tag{19}$$

où C_s *est indépendante de* $u \in V_{S+2}'$ *associé à* U_{S+2}' *ouvert borné de* $\boldsymbol{R}^{3N_{S+2}}$*, dont la projection sur* $\boldsymbol{R}^3$ *est* U'*. Dans ce lemme, on a noté*:

$$||z||_S^{[0,\varepsilon_1 a_1] \times \boldsymbol{R}^r} = \Big(\int_{[0,\varepsilon_1 a_1] \times \boldsymbol{R}^r} \big[\sum_{|\alpha| \le S} |D_X^\alpha\, z(X)|^2\big]\, dx\Big)^{1/2}.$$

Preuve du Lemme 7. L'existence et l'unicité de $z \in C_+^\infty([-\varepsilon_1\, a_1, \varepsilon_1\, a_1] \times \boldsymbol{R}^r)$ vérifiant $l'z = f$ et le fait que supp $z \subset F_{a_1,\varepsilon_1}$ résultent de [7] et [8]. Démontrons l'estimation à priori.

Comme dans [10] p. 130, on pose

$$\begin{cases} z_2(X) = z(X) \\ h_0'\, z_2 = z_1 \end{cases} \tag{20}$$

L'écriture de $l'z=f$ devient:

$$h'_0 z_1 = -e'_1 z_1 - e'_2 z_2 + f(X)\,. \tag{21}$$

En posant $\|D^S z(x_0)\|_t = \sup_{0 \le j \le S} \|D^j_{x_0} z(x_0, \cdot)\|_{t+s-j}$ où $\|u\|_{t+s-j}$ est la norme de Sobolev d'ordre $t+s-j$ relativement à x (i.e. calculée sur $\boldsymbol{R}^r$), on utilise le lemme suivant.

Lemme 8 ([8]) *Il existe une constante $C^1_S>0$ indépendante de u pourvu que u et ses dérivées soient bornées jusqu'à l'ordre S telle que:*

$$\|D^S z_2(x_0)\|_0 \le C^1_S \int_0^{x_0} \|D^S z_1(\theta)\|_0\, d\theta \tag{22}$$

pour tout $z_2 \in C^\infty_+(\Omega_{a_1,\varepsilon_1})$ à support compact.

D'après (20) (21) (22) on a:

$$\|D^S z_1(x_0)\|_0 \le C^1_S \int_0^{x_0} [\|D^S f(\theta)\|_0 + \|D^S e'_1 z_1(\theta)\|_0 + \|D^S e'_2 z_2(\theta)\|_0]\, d\theta \tag{23}$$

Puisque $e'_1 = e'_1(X\varphi, u(X\varphi), \nabla u(X\varphi))$ et $e'_2 = e'_2(X\varphi, u(X\varphi), \nabla u(X\varphi), \nabla^2 u(X\varphi))$ sont d'ordre 0, (23) s'écrit:

$$\|D^S z_1(x_0)\|_0 \le C^2_S \int_0^{x_0} \{\|D^S f(\theta)\|_0 + \|D^S z_1(\theta)\|_0 + \|D^S z_2(\theta)\|_0\}\, d\theta \tag{24}$$

où C^2_S est une constante positive indépendante de u quand $\{u, \cdots, \nabla^{S+2} u\}$ est borné.

A l'aide de (22) et (24), on déduit comme dans [8] p. 132,

$$\|D^S z_1(x_0)\|_0 \le C'_S \int_0^{x_0} \|D^S f(\theta)\|_0\, d\theta \tag{25}$$

où C'_S est indépendante de u quand $\{u, \cdots, \nabla^{S+2} u\}$ est borné.

D'où

$$\|D^S z(x_0)\|_0 \le C'_S\, x_0 \Big(\int_{\boldsymbol{R}^r} \int_0^{x_0} \sum_{|\alpha| \le S} |D^\alpha_X f(X)|^2\, dx\Big)^{1/2}\,.$$

Comme

$$\|z\|\|_S^{[0,\varepsilon_1 a_1]\times \boldsymbol{R}^r} \le \alpha\Big(\int_0^{\varepsilon_1 a_1} \|D^S z(x_0)\|_0^2\, dx_0\Big)^{1/2}$$

l'inégalité (19) est démontrée avec $C_S = \alpha(\varepsilon_1 a_1)^{3/2} C'_S$.

Le lemme 7 est démontré.

Reprenons la démonstration de la porposition 2. La proposition 1, le lemme 7 et le théorème 4(a) de [2] p. 192 nous donnent l'existence et l'unicité de la solution y de l'équation (11). En posant

$$||z||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} = \left(\int_{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \sum_{|\alpha|\le S} |D_X^\alpha z(X)|^2 dx\right)^{1/2}$$

puisque

$$||z||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \le ||z||_S^{[0,\varepsilon_1 a_1]\times R^r}$$

le lemme 4 nous donne l'inégalité

$$||z||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \le C_S\, ||f||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}}$$

Lorsque les hypothèses (I_1) à (I_6) et $(I_7)_1$ sont satisfaites, les assertions (i) (ii) (iii) de la proposition 1 sont alors vérifiées et en appliquant l'inégalité précédente à $l'=l'_1$ et à $l_1=\Phi'\circ b_1$, on a pour $y=b_1 z$ où $b_1=b_1\,(X, u, \nabla u, D)$ est d'ordre 1, $||y||_{S-1}^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \le C''_S\, ||z||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}}$ où C''_S est indépendant de u puisque $\{u, \cdots, \nabla_u^S\}$ est borné; d'où les inégalités (12) et (13).

Lorsque les hypothèses (I_1) à (I_6) et $(I_7)_2$ sont satisfaites, les assertions (i)′ (ii)′ (iii)′ de la proposition 1 sont alors vérifiées et en appliquant l'inégalité $||z||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \le C_S\, ||f||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}}$ à $l'=l'_2$ et à $l_2=b_2\circ\Phi'$, on a en remplaçant z par y et f par $b_2 f$:

$$||y||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \le C_S\, ||b_2 f||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}};$$

comme $b_2=b_2(X, u, \nabla u, D)$ est d'ordre 1

$$||b_2 f||_S^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}} \le C'''_S\, ||f||_{S+1}^{\Omega_{a_1,\varepsilon_1}}$$

où C'''_S est indépendant de u puisque $\{u, \cdots, \nabla^S u)\}$ est borné; à nouveau, nous obtenons les inégalités (12) et (13).

La proposition 2 est démontrée.

3) Preuve de la proposition 3

On effecture un raisonnement identique à celui utilisé dans la preuve de la proposition 4 de [9] (pages 39 a 42), la proposition 3 de [9] est remplacée par le lemme suivant:

Lemme 9. $\langle D_x\rangle^{2\alpha}\, \Phi'(X, u, \nabla u, D)\, y = \varpi(X, u, \nabla^2 u, \nabla^3 u, D)\, \langle D_x\rangle^{2\alpha} y + Ly$, *où* $\langle D_x\rangle^{2\alpha}$ *est l'opérateur de symbole* $(1+|\xi|^2)^\alpha$, $\varpi(X, u, \nabla^2 u, \nabla^3 u, D)$ *est un opérateur composé d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients dépendant de* X, *de* u *et des dérivées* $\nabla u, \nabla u^2, \nabla^3 u$ *de* u *avec* $\langle D_x\rangle^{-2\alpha}$, *faiblement hyperbolique de même symbole principal que celui de* $\Phi'(X, u, \nabla u, D)$ *dont le polynôme sous-caractéristique* $sc(\varpi)$ *et les invariants* $\check{\mathcal{K}}_1'^2 = \check{\mathcal{K}}_1'^2(\varpi)$, $\hat{\mathcal{K}}_2'^1 = \hat{\mathcal{K}}_2'^1(\varpi)$ *(correspondants aux invariants* $\check{\mathcal{K}}_1^2$, $\hat{\mathcal{K}}_2^1$ *respectifs de* $h=\Phi'$*) vérifient les propriétés* (i) (ii) (iii) (resp. (i)′ (ii)′ (iii)′) *de la proposition* 1 *suivant que* $\mathcal{K}$, $\check{\mathcal{K}}_1^2$, $\hat{\mathcal{K}}_2^1$ *vérifient* (i) (ii) (iii) (resp. (i)′(ii)′ (iii)′), *Ly est une relation bilinéaire des coefficients (notés* $a(X, u, \nabla u)$

de Φ' $(X, u, \nabla u, D)$ et des dérivées de y [l'ordre de dérivation de a est 2α, celui de y est 2α-2, l'ordre de dérivation total est $2\alpha+1$].

Preuve: Elle résulte de l'égalité.

$$\langle D_x\rangle^{2\alpha}\, \Phi'(X, u, \nabla u, D) = \langle D_x\rangle^{2\alpha}\, \Phi'(X, u, \nabla u, D)\, \langle D_x\rangle^{-2\alpha}\, \langle D_x\rangle^{2\alpha}\,.$$

Posons

$$\tilde{\omega} = \langle D_x\rangle^{2\alpha}\, \Phi'(X, u, \nabla u, D)\, \langle D_x\rangle^{-2\alpha}$$

Le symbole $\sigma(\Phi')$ de Φ' s'écrit:

$$\sigma(\Phi') = H(X, u, \zeta) + H^*(X, u, \nabla u) = q$$

où $H(X, u, \zeta)$ est la partie homogène d'ordre 1 et $H^*(X, u, \nabla u)$ celle d'ordre 0 en ζ.

Nous avons:

$$\sigma(\tilde{\omega}) = \sum_{|\beta|=0}^{2\alpha} D_X^\beta\, q(X, u, \nabla u, \zeta)\, \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha}$$

Soit ϖ l'opérateur de symbole

$$\sigma(\varpi) = \sum_{|\beta|=0}^{2} \frac{1}{\beta!}\, (D_X^\beta q)\, \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha}\,,$$

et L l'opérateur aux dérivées partielles linéaire de symbole:

$$\sigma(L) = \sum_{|\beta|=3}^{2\alpha} \frac{1}{\beta!}\, (D_X^\beta q)\, \partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha$$

Alors Φ' et ϖ ont même symbole principal $H(X, u, \zeta)$. Le polynôme sous caractéristique de ϖ s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathrm{sc}(\varpi) &= \mathcal{K} + \sum_{1\leq A, B\leq 3}\, \sum_{|\beta|=1} [D_X^\beta H_B^A]\, \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha}\, B_1^B\, B_A^1 \\ &= \mathcal{K} + 2\alpha \sum_{1\leq A, B\leq 3}\, \sum_{k=1}^{r} [D_{x_k} H_B^A]\, \frac{\xi_k}{1+|\xi|^2}\, B_1^B\, B_A^1 \end{aligned}$$

où $\mathcal{K} = \mathcal{H} + \sum_{i=0}^{r} \sum_{c=1}^{3} \mathcal{P}_c^i\, \partial_i u^c$ est le polynôme sous caractéristique de Φ'.

Comme $\sum_{1\leq A, B\leq 3} H_B^A\, B_1^B\, B_A^1 = (H_0)^2\, B_1^1\,,$

$\sum_{1\leq A, B\leq 3} (D_{x_k} H_B^A)\, B_1^B\, B_A^1 \equiv (2H_0)\, (D_{x_k} H_0)\, B_1^1 \equiv 0$

(modulo un multiple de H_0) et $\mathrm{sc}(\varpi)$ est divisible par H_0 en même temps que $\mathcal{K}$.

De plus:

$$A_{12}^{12}\, \hat{\mathcal{K}}_2'^1 \equiv A_{12}^{12}\, \hat{\mathcal{K}}_2^1 + 2\alpha \sum_{A\leq 1, B\leq 3} B_B^1 \sum_{k=1}^{r} [D_{x_k} H_B^A]\, \frac{\xi_k}{1+|\xi|^2}\, A_{12}^{1A}$$

et

$$A_{12}^{12}\,\check{\mathcal{K}}_1'^2 = A_{12}^{12}\,\check{\mathcal{K}}_1^2 + 2\alpha \sum_{1\le A,B\le 3} A_{1B}^{12} \sum_{k=1}^{r} [D_{x_k} H_A^B] \frac{\xi_k}{1+|\xi|^2} B_1^A\,;$$

donc puisque

$$\sum_{1\le A,B\le 3} B_B^1 [D_{x_k} H_A^B]\, A_{12}^{1A} \equiv 0\,,$$

$$\sum_{1\le A,B\le 3} A_{1B}^{12} [D_{x_k} H_A^B]\, B_1^A \equiv 0 \quad \text{(modulo } H_0\text{) d'après les relations}$$

$$\sum_{1\le A\le 3} H_A^B B_1^A \equiv \sum_{1\le B\le 3} B_B^1 H_A^B \equiv 0 \quad \text{(modulo } (H_0)^2\text{) et}$$

$$\sum_{1\le A\le 3} H_A^B A_{12}^{1A} \equiv \sum_{1\le B\le 3} A_{1B}^{12} H_A^B \equiv 0 \quad \text{(modulo } H_0\text{)}\,,$$

$\check{\mathcal{K}}_1'^2$ (resp $\hat{\mathcal{K}}_2'^1$) a les mêmes propriétés que $\check{\mathcal{K}}_1^2$ (resp. $\hat{\mathcal{K}}_2^1$).

Donc

$$\sigma(\varpi) = \sigma(\varpi)\,(X, u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u, \zeta) \text{ et } \sigma(L) = \sigma(L)\,(X, u, \cdots, \nabla^{2\alpha+1} u, \zeta)$$

vérifient le lemme

4) Preuve du théorème

Elle s'obtient à l'aide des propositions 1,2 et 3 et de la théorie de Nash-Moser de la même manière que dans [9] p. 45 à 48.

III. REMARQUE.

Nous obtenons un résultat analogue pour les systèmes quasi linéaires faiblement hyperboliques non symétrisables de deux équations du premier ordre définis par les opérateurs Ψ du type suivant.

$$(26)\quad \begin{cases} \Psi\colon C^\infty_{\boldsymbol{R}^2}(\Omega) \to C^\infty_{\boldsymbol{R}^2}(\Omega) \\ \Psi(y) = \sum_{i=0}^{r} G^i(X, y)\, \partial_i y + P(X, y) \\ y = {}^t(y^1, y^2) \in C^\infty_{\boldsymbol{R}^2}(\Omega) \\ G^i = (G^{i}{}^A_B)_{1\le A,B\le 3} \in C^\infty_{\boldsymbol{R}^4}(\Omega\times \boldsymbol{R}^2) \\ P = (P^c)_{1\le c\le 2} \in C^\infty_{\boldsymbol{R}^2}(\Omega\times\boldsymbol{R}^2) \end{cases}$$

où $G^i(X, Y)$ et $P(X, Y)$ s'écrivent sous forme matricielle:

$$G^i(X, Y) = \begin{pmatrix} G^{i}{}^1_1(X, Y) & G^{i}{}^1_2(X, Y) \\ G^{i}{}^2_1(X, Y) & G^{i}{}^2_2(X, Y) \end{pmatrix}, \; P(X, Y) = \begin{pmatrix} P^1(X, Y) \\ P^2(X, Y) \end{pmatrix}$$

respectivement dans $\boldsymbol{R}^4$ et $\boldsymbol{R}^2$ pour tout $X\in\Omega$, $Y={}^t(Y^1, Y^2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Soit U un ouvert de $\boldsymbol{R}^2$ contenant l'origine; on suppose que Ψ satisfait les hypothèses suivantes:

(J_1) $\operatorname{Support}_X P(X,0)\subset\Omega^+$

(J_2) En posant $\begin{cases} G(X,Y;\zeta)=\sum_{i=0}^{r} G^i(X,Y)\,\xi_i \\ q(X,Y;\zeta)=\det G(X,Y,\zeta)\end{cases}$ on a $q(X,Y;\mathcal{D})=1$ $(\forall X\in\Omega,\ \forall Y\in U)$.

(J_3) $q(X,Y;\zeta)=[G_0(X,Y;\zeta)]^2$

$G_0(X,Y;\zeta)=\xi_0-L_0(X,Y;\xi)$

$L_0(X,Y;\xi)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(X,Y)\,\xi_i$ $(\forall X\in\Omega,\ \forall Y\in U,\ \forall\xi\in\boldsymbol{R}^r)$

$\lambda_i\in\mathcal{C}^\infty_{\boldsymbol{R}}(\Omega\times U)$ $(1\leq i\leq r)$

(J_4) En posant $G=\sum_{i=0}^{r}G^i\,\xi_i=(G^A_B)_{1\leq A\,;\,B\leq 2}$ et $A=(A^B_C)_{1\leq B\,;\,C\leq 2}$ la matrice des cofacteurs de G, $\inf\{|A^1_1(X,Y;L_0(X,Y;\xi),\xi)|\,;\,X\in\Omega,\ Y\in U,\ |\xi|=1\}>0$.

(J_5) Les polynômes en ζ

$$\mathcal{P}'^{i}_{C}=\sum_{1\leq A,B\leq 2}\left\{\left(\frac{\partial G^{iA}_{C}}{\partial Y^B}-\frac{1}{2}\frac{\partial G^{iA}_{B}}{\partial Y^C}\right)A^1_A\,A^B_1+\frac{1}{2}\,G^A_B\left(\frac{\partial A^B_1}{\partial\xi^i}\frac{\partial A^1_A}{\partial Y^c}-\frac{\partial A^1_A}{\partial\xi_i}\frac{\partial A^B_1}{\partial Y^c}\right)\right\}$$

$(i=0,\cdots,r;\ C=1,2)$ et

$$\mathcal{H}'=\sum_{1\leq A,B\leq 2}\left\{\left(\frac{\partial p^A}{\partial Y^B}-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\frac{\partial G^{jA}_{B}}{\partial x_j}\right)A^1_A\,A^B_1+\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{2}\,H^A_B\left(\frac{\partial A^B_1}{\partial\xi_j}\frac{\partial A^1_A}{\partial x_j}-\frac{\partial A^1_A}{\partial\xi_j}\frac{\partial A^B_1}{\partial x_j}\right)\right\}$$

sont divisibles par G_0 $(\forall X\in\Omega,\ \forall Y\in U)$.

(Signalons que (J_4) implique la forme réduite suivante de G dans φ_0 anneau localisé de $\boldsymbol{R}[\zeta]$ par l'idéal premier engendré par G_0, en chaque point $(X,Y)\in\Omega\times U$:

$$G\widetilde{_{\varphi_0}}\begin{pmatrix}(G_0)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

EXEMPLE D'OPERATEUR Ψ VERIFIANT LES HYPOTHESES (J_1) A (J_5) AVEC $\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$.

$$\Psi(y)=\begin{pmatrix}\partial_0 y^1-a(y^1,y^2)\,\partial_1 y^1+a(y^1,y^2)\,\partial_1 y^2+r(y^1-y^2)\\ -a(y^1,y^2)\,\partial_1 y^1+\partial_0 y^2+a(y^1,y^2)\,\partial_1 y^2+s(y^1-y^2)\end{pmatrix}$$

où $a\in\mathcal{C}^\infty_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^2)$, $a(0,0)\neq 0$, r et $s\in\mathcal{C}^\infty_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})$ *et* $r(0)=s(0)=0$.

Sous les hypothèses (J_1) à (J_5), il existe alors $\Omega_{a,\varepsilon}$ tel que $\overline{\Omega_{a,\varepsilon}}\subset\Omega$ et $y\in\mathcal{C}^\infty_+(\overline{\Omega_{a,\varepsilon}})$ unique vérifiant $\Psi(y)=f$ dans $\overline{\Omega_{a,\varepsilon}}$.

La preuve de ce résultat repose sur des considérations analogues à celles des propositions 2 et 3 précédentes introduites par le lemme suivant remplaçant la Proposition 1.

Lemme 10. *Soit* $\Psi'(u)(y)=\sum_{i=0}^{r}G^i(X,u)\,\partial_i y+\sum_{j=1}^{2}y^j\left(\frac{\partial P}{\partial u^j}+\sum_{i=0}^{r}\frac{\partial G^i}{\partial u^j}\,\partial_i u\right)$ *le linéarisé de* Ψ *au point* u *et* U_2 *un voisinage de* 0 *dans* $\boldsymbol{R}^{2N_2}$ *dont la projection sur* $\boldsymbol{R}^2$ *est incluse dans* U. *Il existe* $\Omega_{a'_0,\varepsilon'_0}$, *tel que* $\overline{\Omega_{a'_0,\varepsilon'_0}}\subset\tilde{\Omega}_0$ *et deux opérateurs* *différentiels linéaires de la forme*:

$$(27)\qquad \begin{cases} a_1(X, u, \nabla u, D) = A(X, u, D) + A_1^*(X, u, \nabla u) \\ a_2(X, u, \nabla u, D) = A(X, u, D) + A_2^*(X, u, \nabla u) \end{cases}$$

tels que $k_1(X, u, \nabla u, \nabla^2 u, D) = \Psi' \circ a_1$ *et* $k_2(X, u, \nabla u, \nabla^2 u, D) = a_2 \circ \Psi'$ *soient de la forme suivante*

$$(28)\qquad \begin{aligned} k(X, u, \nabla u, \nabla^2 u, D) = {} & [g_0(X, u, D)]^2\, I_2 + f_1(X, u, \nabla u) \circ g_0(X, u, D) \\ & + f_2(X, u, \nabla u, \nabla^2 u) \end{aligned}$$

où $A(X, u, D)$ *a pour symbole* $A(X, Y, \zeta)$, $g_0(X, u, D)$ *a pour symbole* $G_0(X, Y, \zeta)$, $A_i^*(X, Y_1)$ $(i=1, 2)$, $f_1(X, Y_1)$, $f_2(X, Y_2)$ *sont des matrices* 2×2 *de fonctions de classe* $C^\infty(\Omega_{a_0', \varepsilon_0'} \times U_2)$, *pour tout* $u \in V_2(\Omega_{a_0', \varepsilon_0'})$.

La démonstration de ce lemme 10 s'obtient à l'aide de [5] et [6] en remarquant que le polynôme sous-caractéristique $\mathcal{K}' = \mathcal{H}' + \sum_{i=0}^{r} \sum_{c=1}^{2} \mathcal{P}_C'^i\, \partial_i u^C$ de $\Psi'(u)$ est divisible par G_0 d'après (J_5).

Par la suite on résoud dans $C_+^\infty(\Omega_{a_1, \varepsilon_1})$ le problème de Cauchy ("a données nulles"):

$$(29)\qquad \Psi'(u)\, y = f$$

L'existence de la solution y de (29) résulte de lemmes 6 et 7 en remplaçant l par $k = k_1 = \Psi' \circ a_1$ et l' par k_1' ("extension de k_1"); l'unicité de la solution y de (29) résulte aussi des lemmes 6 et 7 en remplaçant l par $k = k_2 = a_2 \circ \Psi'$ et l' par k_2' ("extension de k_2"). On obtient aussi des estimations du type (12) et (13) dans lesquelles $\Phi'(u)$ est remplacé par $\Psi'(u)$. On précise ces estimations par une inégealité du type (15) où $\Phi'(u)$ est remplacé par $\Psi'(u)$ et par la théorie de Nash-Moser comme [9] p. 45 à 48 on obtient le résultat annoncé dans cette remarque.

References

[1] Adams: *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] R. Berzin et J. Vaillant: *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples*, Journal de Math. Pures et Appl. **58** (1979), 165–216.

[3] Y. Choquet-Bruhat: *Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équa: tions aux dérivées partielles non linéaires*, Journal de Math. Pures et Appl. **48** (1969), 117–158.

[4] J. Cl De Paris: *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité*, Journal de Math. Pures et Appl. **51** (1972), 231–256.

[5] D. Gourdin: *Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques mulitples*, C.R.

Acad. Sc. Paris **278**, Série A (1974), 269–272.

[6] D. Gourdin: *Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicité constante, bien décomposables et le problème de Cauchy associé*, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 539–566.

[7] D. Gourdin: *Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable*, Comm. in Partial Diff. Equations **4** (1979), 447–507.

[8] D. Gourdin et M. Mechab: *Etude du problème de Cauchy faiblement hyperbolique C^∞ pour des systèmes à caractéristiques de multiplicité variable quelconque*, Propagation des Singularités et opérateurs différentiels (J. Vaillant, Collections Travaux en cours, Hermann) 1985, 121–147.

[9] D.Gourdin: *Une classe d'opérateurs faiblement hyperboliques non linéaires*, Bull. Sc. Math. 2ème série **113** (1989), 23–50.

[10] D. Gourdin: *Systèmes faiblement hyperboliques non linéaires*, C.R. Acad. Sc. Paris **312**, Série I (1991), 823–826.

[11] L. Hörmander. *The boundary problems of physical Geodesy*, Arch. Rational Mech. Anal. (1976), 1–52.

[12] N. Iwasaki: *Effectively hyperbolic equations*, J. Math. Kyoto Univ., **25** (1985), 727–743.

[13] T. Kato: *The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems*, Arch Rational Mech. Anal. **58** (1975), 181–205.

[14] J. Leray: Hyperbolic differential equations, Princeton, 1952.

[15] J. Leray et Y. Ohya: *Equations et systèmes non linéaires hyperboliques non stricts*, Math. Ann. **170** (1967), 167–205.

[16] S. Lojasiewicz Jr et E. Zehnder: *An inverse function theorem in Frechet Spaces*, Journal of functional Analysis **33** (1979), 165–174.

[17] J. Vaillant: *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles; role des bicaractéristiques*, J. Math. Pures et Appl. **47** (1968), 1–40.

[18] J. Vaillant: *Conditions d'hyperbolicité lorsque la matrice des cofacteurs s'annule sur la variété caractéristique*, C.R. Acad. Sc. Paris **310**, Séier I (1990), 865–868.

Département de Mathématiques
UFR 920
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu
75252 Paris Cédex 05 FRANCE