Koszul, J.L.
Osaka J. Math.
15 (1978), 547-551

VARIANTE D'UN THÉOREME DE H. OZEKI

JEAN LOUIS KOSZUL

(Received July 25, 1977)

On démontre dans ce qui suit le résultat suivant:

Théorème. *Soit $\boldsymbol{g}$ une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique nulle. Si $\boldsymbol{g}$ est somme directe de deux sous-algèbres $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ réductives dans $\boldsymbol{g}$, alors g est somme directe de deux idéaux $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$ tels que la projection de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}_i$ induise un isomorphisme de $\boldsymbol{a}_i$ sur $\boldsymbol{b}_i$ $(i=1, 2)$.*

L'article de Ozeki cité ([3]) donne une démonstration de ce résultat dans le cas où $\boldsymbol{g}$ est une algèbre de Lie compacte sur R. Sa démonstration fait appel à des arguments de nature topologique. La démonstration donnée ici est algébrique.

Etant donnée une algèbre de Lie réductive $\boldsymbol{a}$, on notera $D\boldsymbol{a}$ son idéal dérivé et $\rho(\boldsymbol{a})$ le nombre des idéaux figurant dans les décompositions de $\boldsymbol{a}$ en somme directe d'idéaux minimaux.

Lemme 1. *Les hypothèses étant celles du Théorème, on a*

$$D\boldsymbol{g} = D\boldsymbol{a}_1 + D\boldsymbol{a}_2 \tag{1}$$

$$\rho(\boldsymbol{g}) = \rho(\boldsymbol{a}_1) + \rho(\boldsymbol{a}_2)\,. \tag{2}$$

Soit p la dimension de $\boldsymbol{a}_1$ et soit $f_1, \cdots, f_p$ une base de l'espace des formes linéaires sur $\boldsymbol{g}$ qui sont nulles sur $\boldsymbol{a}_2$. La forme $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots f_p$ est une base de l'espace $C^p(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)$ des p-cochaines sur $\boldsymbol{g}$ qui sont basiques par rapport à $\boldsymbol{a}_2$. C'est un cocycle du complexe $C^*(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)$ dont la classe engendre l'espace $H^p(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)$. En composant l'homomorphisme canonique $\varphi: H^*(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2) \rightarrow H^*(\boldsymbol{g})$ et l'homomorphisme $\chi: H^*(\boldsymbol{g}) \rightarrow H^*(\boldsymbol{a}_1)$ défini par l'injection de $\boldsymbol{a}_1$ dans $\boldsymbol{g}$, on obtient un homomorphisme $\chi \circ \varphi: H^*(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2) \rightarrow H^*(\boldsymbol{a}_1)$. Puisque $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots f_p$ a pour restriction à $\boldsymbol{a}_1$ une base de l'espace $C^p(\boldsymbol{a}_1)$ des p-cochaines sur $\boldsymbol{a}_1$, l'homomorphisme $\chi \circ \varphi$ applique $H^p(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)$ sur $H^p(\boldsymbol{a}_1)$. Puisque $\boldsymbol{a}_1$ est unimodulaire, $H^p(\boldsymbol{a}_1)$ est de dimension 1. D'autre part, $\boldsymbol{a}_2$ étant réductive dans $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{g}$ étant unimodulaire, tout idéal non nul de $H^*(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)$ contient $H^p(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)$ (cf. [2], Th. 12.1). On voit donc que $\chi \circ \varphi$ est injectif. Puisque $\boldsymbol{a}_1$ est réductive dans $\boldsymbol{g}$, l'image de φ est une sous-algèbre de $H^*(\boldsymbol{g})$ engendrée par des éléments primitifs ([2] Th. 13.2). Or χ applique les éléments primitifs de $H^*(\boldsymbol{g})$ sur des éléments primitifs de

$H^*(\boldsymbol{a}_1)$ ([2] Th. 10.3). Par suite l'image de $\chi\circ\varphi$ est engendrée par des éléments primitifs de $H^*(\boldsymbol{a}_1)$. Comme elle contient les éléments de degré maximal p, elle coïncide avec $H^*(\boldsymbol{a}_1)$. On a ainsi montré que $\chi\circ\varphi$: $H^*(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)\to H^*(\boldsymbol{a}_1)$ est un isomorphisme. En échangeant les rôles de $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$, on prouve de même que l'homomorphisme canonique $H^*(\boldsymbol{g})\to H^*(\boldsymbol{a}_2)$ est surjectif, autrement dit, $\boldsymbol{a}_2$ est "non homologue à zéro" dans $\boldsymbol{g}$. Il en résulte ([2], Th. 17.3) que $H^*(\boldsymbol{a})$ est isomorphe à $H^*(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{a}_2)\otimes H^*(\boldsymbol{a}_2)$, donc à $H^*(\boldsymbol{a}_1)\otimes H^*(\boldsymbol{a}_2)$. En particulier, $\dim H^1(\boldsymbol{g})=\dim H^1(\boldsymbol{a}_1)+\dim H^1(\boldsymbol{a}_2)$. Ceci signifie que la codimension de $D\boldsymbol{g}$ est égale à la somme des codimensions de $D\boldsymbol{a}_1$ et $D\boldsymbol{a}_2$, d'où l'assertion (1) puisque $D\boldsymbol{g}\supset D\boldsymbol{a}_1+D\boldsymbol{a}_2$. Appliquant ce qui précède à la décomposition de $D\boldsymbol{g}$ en somme directe des sous-algèbres $D\boldsymbol{a}_1$ et $D\boldsymbol{a}_2$, on voit que $H^*(D\boldsymbol{g})$ est isomorphe à $H^*(D\boldsymbol{a}_1)\otimes H^*(D\boldsymbol{a}_2)$, donc, puisque ces algèbres sont semi-simples, $\dim H^3(D\boldsymbol{g}) =\dim H^3(D\boldsymbol{a}_1)+\dim H^3(D\boldsymbol{a}_2)$. Or si $\boldsymbol{a}$ est une algèbre de Lie semi-simple, $\rho(\boldsymbol{a})=\dim H^3(\boldsymbol{a})$ ([2], Th. 11.2). Par conséquent, le nombre des idéaux minimaux de $D\boldsymbol{g}$ est égal à la somme du nombre des idéaux minimaux de $D\boldsymbol{a}_1$ et de $D\boldsymbol{a}_2$. Avec (1), ceci achève la démonstration de (2).

La suite de la démonstration repose sur des Lemmes élémentaires d'algèbre linéaire.

Lemme 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et*

$$E=\bigoplus_{x\in X} V_x\,,\qquad E=\bigoplus_{y\in Y} W_y$$

deux décompositions de E en somme directe de sous-espaces non nuls. On suppose que:

1°) *Card $X\leqq$ Card Y,*

2°) *Pour tout $x\in X$, V_x est contenu dans la somme des sous-espaces W_y tels que $\dim W_y\geqq\dim V_x$.*

Dans ces conditions, quel que soit l'entier $p\geqq 0$, les deux familles $(V_x)_{x\in X}$ et $(W_y)_{y\in Y}$ contiennent le même nombre de sous-espaces de dimension p.

Soit v_p (resp. w_p) le nombre des sous-espaces V_x (resp. W_y) qui sont de dimension p et soit $d_p=w_p-v_p$. Si $n=\dim E$, on a

$$(1)\qquad d_1+2d_2+\cdots nd_n=0\,.$$

Des conditions 1°) et 2°) résultent d'autre part les inégalités:

$$(2)\qquad d_1+d_2+\cdots d_n\geqq 0$$

$$(3)\qquad pd_p+(p+1)d_{p+1}+\cdots nd_n\geqq 0$$

quel que soit $p\geqq 0$. On a donc, d'après (1) et (3):

$$(4) \qquad d_1+2d_2+\cdots pd_p \leqq 0\,.$$

Cette relation, avec l'identité

$$(5) \qquad p(d_1+d_2+\cdots d_p) = d_1+(d_1+d_2)+\cdots(d_1+\cdots d_{p-1})+(d_1+2d_2+\cdots pd_p)$$

montre par induction sur p que

$$d_1+d_2+\cdots d_p \leqq 0$$

quel que soit p. Pour $p=n+1$, la relation (5) s'écrit

$$d_1+(d_1+d_2)+\cdots(d_1+\cdots d_n) = (n+1)(d_1+\cdots d_n)-(d_1+2d_2+\cdots nd_n)$$

et ceci est $\geqq 0$ d'après (1) et (2). On a donc $d_1+\cdots d_p=0$ pour tout p, et par conséquent $w_p-v_p=d_p=0$ pour tout p.

Lemme 3. *Les hypothéses étant celles du Lemme 2, pour tout $y\in Y$, on note π_y le projecteur de E sur W_y ayant pour noyau la somme des $W_{y'}$ avec $y'\neq y$. On suppose que*

2°)′ *quel que soit $(x, y)\in X\times Y$, ou bien $V_x\subset \operatorname{Ker} \pi_y$, ou bien $V_x\cap \operatorname{Ker} \pi_y=(0)$.*

Dans ces conditions, il existe une bijection f de X sur Y telle que, pour tout $x\in X$, $\pi_{f(x)}$ induise un isomorphisme de V_x sur $W_{f(x)}$

On observera que la condition 2°) est conséquence de la condition 2°)′. D'après le Lemme 2, la borne supérieure s des dimensions des sous-espaces V_x est aussi la borne supérieure des dimensions des sous-espaces W_y. La démonstration du Lemme 3 se fera par induction sur s. Soient X_s l'ensemble des $x\in X$ tels que $\dim V_x=s$ et Y_s l'ensemble des $y\in Y$ tels que $\dim W_y=s$. D'après le Lemme 2, Card X_s=Card Y_s et l'espace E_s, somme des V_x avec $x\in X_s$, est aussi la somme des W_y avec $y\in Y_s$. Pour tout $x\in X_s$, soit $P(x)$ l'ensemble des $y\in Y$ tels que $\pi_y(V_x)\neq(0)$. La condition 2°)′ entraine que $P(x)\subset Y_s$. Pour toute partie $A\subset X_s$, soit $P(A)=\bigcup_{x\in A} P(x)\subset Y_s$. Puisque $\bigoplus_{x\in A} V_x\subset \bigoplus_{y\in P(A)} W_y$, on a Card $(A)\leqq$Card $P(A)$. Un Lemme de combinatoire classique (cf. [1], Ensembles, Chap. III, §4, Exer. 6) dit que, dans ces conditions, il existe une injection f_s de X_s dans Y_s telle que $f_s(x)\in P(x)$ quel que soit $x\in X_s$(*). Pour tout $x\in X_s$, $\pi_{f_s(x)}$ applique isomorphiquement V_x sur $W_{f_s(x)}$. Soit maintenant π' le projecteur $\sum_{y\in Y-Y_s}\pi_y$ et soit E' son image. C'est d'une part la somme directe des sous-espaces W_y avec $y\in Y'=Y-Y_s$, d'autre part la somme directe des sous-espaces $V'_x=\pi'(V_x)$ avec $x\in X'=X-X_s$. Puisque Card (X_s)=Card (Y_s), ces

* L'idee d'utiliser ce Lemme ici m'a ete donnee par A. Morimoto.

deux décompositions de E' en sommes directes satisfont aux conditions du Lemme. Compte tenu de l'hypothèse inductive, il existe donc une bijection f' de X' sur Y' telle que, pour tout $x\in X'$, $\pi_{f(x)}$ applique isomorphiquement V'_x sur $W_{f'(x)}$ et induise donc aussi un isomorphisme de V_x sur $W_{f'(x)}$. En prenant pour f la bijection de X sur V ayant f_s pour restriction à X_s et f' pour restriction à X', on obtient une bijection de X sur Y ayant le propriétés voulues.

REMARQUE. Si $y\neq f(x)$, alors $V_x\cap W_y=(0)$. Si $y=f(x)$, ou bien $V_x=W_y$, ou bien $V_x\cap W_y=(0)$.

Lemme 4. *Soit $\boldsymbol{g}$ une algèbre de Lie réducti ve, somme directe des idéaux minimaux $\boldsymbol{b}_y (y\in Y)$. On suppose $\boldsymbol{g}$ somme directe d'une famille $(\boldsymbol{a}_x)_{x\in X}$ de sous-algèbres simples ou de dimension* 1. *Si* Card $(X)\leqq$ Card (Y), *alors* Card $(X)=$ Card (Y) *et il existe une bijection f de X sur Y telle que, pour tout x, la projection de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}_{f(x)}$ ayant pour noyau $\sum_{y\neq f(x)} \boldsymbol{b}_y$ induise un isomorphisme de $\boldsymbol{a}_x$ sur $\boldsymbol{b}_{f(x)}$.*

C'est une conséquence immédiate du Lemme 3.

Démonstration du Théorème. Supposons d'abord $\boldsymbol{g}$ semi-simple. Soit $\boldsymbol{a}_i=\bigoplus_{x\in X_i} \boldsymbol{a}_x\ (i=1, 2)$ des décompositions des algèbres $\boldsymbol{a}_i$ en somme directe d'idéaux minimaux. Notant X l'union disjointe de X_1 et X_2, $\boldsymbol{g}=\bigoplus_{x\in X} \boldsymbol{a}_x$ est une décomposition de $\boldsymbol{g}$ en somme directe de sous-algèbres simples ou de dimension 1. D'après le Lemme 1, puisque $\rho(\boldsymbol{a}_i)=\mathrm{Card}\, X_i$, on a $\rho(\boldsymbol{g})=\mathrm{Card}\, X$. Soit $(\boldsymbol{b}_y)_{y\in Y}$ la famille des idéaux minimaux de $\boldsymbol{g}$. On a Card $(Y)=\rho(\boldsymbol{g})=$ Card (X). D'après le Lemme 4, il existe donc une bijection f de X sur Y telle que, pour tout $x\in X$, la projection de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}_{f(x)}$ induise un isomorphisme de $\boldsymbol{a}_x$ sur $\boldsymbol{b}_{f(x)}$. Si x, $x'\in X_i$, alors $[\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_{x'}]=(0)$. Puisque le centre de $\boldsymbol{b}_{f(x)}$ est nul, ceci entraîne que $\boldsymbol{a}_{x'}$ est contenu dans le noyau du projecteur de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}_{f(x)}$. Par conséquent, si $\boldsymbol{b}_i$ designe l'idéal de $\boldsymbol{g}$ somme des $\boldsymbol{b}_{f(x)}$ avec $x\in X_i$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{b}_1\oplus\boldsymbol{b}_2$ et le projecteur de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}_i$ applique isomorphiquement $\boldsymbol{a}_i$ sur $\boldsymbol{b}_i$. Dans le cas général, on applique ce qui précède à l'algèbre de Lie semi-simple $D\boldsymbol{g}$ qui, d'après le Lemme 1 est somme directe des sous-algèbres $D\boldsymbol{a}_i\ (i=1, 2)$. Cela montre que $D\boldsymbol{g}$ est somme directe de deux idéaux $\boldsymbol{b}'_i$ tels que la projection de $D\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}'_i$ induise un isomorphisme de $\boldsymbol{a}_i$ sur $\boldsymbol{b}'_i$. Soit $\boldsymbol{c}$ le centre de $\boldsymbol{g}$ et π le projecteur de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{c}$ de noyau $D\boldsymbol{g}$. Puisque $D\boldsymbol{g}=D\boldsymbol{a}_1+D\boldsymbol{a}_2$, π_i applique injectivement le centre de $\boldsymbol{a}_i$ sur un idéal $\boldsymbol{c}_i\subset\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{c}$ est somme directe de $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$. On pose alors $\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}'_i+\boldsymbol{c}_i$. Il est clair que $\boldsymbol{g}$ est somme directe des idéaux $\boldsymbol{b}_i$ et que la projection de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{b}_i$ induit un isomorphisme de $\boldsymbol{a}_i$ sur $\boldsymbol{b}_i\ (i=1, 2)$.

INSTITUT FOURIER

Bibliographie

[1] N. Bourbaki: Théorie des ensembles, Chap. III.
[2] J.L. Koszul: *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127.
[3] H. Ozeki: *On a transitive transformation group of a compact group manifold*, Osaka J. Math. **14** (1977), 519–531.