

## SCHIEFKÖRPER UNENDLICHEN RANGES ÜBER DEM ZENTRUM

Herrn Prof. Dr. K. Shoda zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

VON

MASATOSHI IKEDA

Das erste Beispiel eines Schiefkörpers unendlichen Ranges über dem Zentrum hat D. Hilbert in den "Grundlagen der Geometrie" gegeben.<sup>1)</sup> Dieser Schiefkörper enthält zwei Erzeugende, die miteinander nicht vertauschbar und über dem Zentrum transzendent sind. Die Schiefkörper unendlichen Ranges, die nur über ihrem Zentrum algebraische Elemente enthalten, sind von einigen Mathematiker, unter anderen von G. Köthe [5] und N. Jacobson [4], untersucht worden. Sie bilden eine Klasse der Schiefkörper, auf die sich die Mehrzahl der im klassischen Fall behandelten Probleme in nahe liegender Weise übertragen lässt.<sup>2)</sup> Die vorliegende Arbeit schliesst sich dagegen an die von Hilbert an; im folgenden wird nämlich eine spezielle Klasse der Schiefkörper betrachtet, die als Quotientenkörper der zerfallenden verschränkten Produkte eines Schiefkörpers  $K$  mit den torsionsfreien Gruppen der Automorphismen von  $K$  entstehen. Wir werden zwar, unter der Existenz einer geeigneten Untergruppenmenge<sup>3)</sup> in der Automorphismengruppe eines Schiefkörpers, eine Menge der Schiefkörper vom genannten Typus konstruieren; damit werden wir die folgende Tatsache zeigen: wenn es in der Automorphismengruppe eines kommutativen Körpers  $K$  eine geeignete Untergruppenmenge gibt, so existiert eine unendliche aufsteigende Folge der Schiefkörper, die den Körper  $K$  und einen Teilkörper von  $K$  als gemeinsamen maximalen (kommutativen) Teilkörper bzw. als gemeinsames Zentrum enthalten.

1.  $K$  sei ein Schiefkörper, und  $G$  sei eine Gruppe der Automorphismen von  $K$ . Wir führen nun in das Linearformenmodul  $\sum_{\varphi \in G} u_{\varphi} K$  mit

---

1) Cf. Hilbert [3], S. 107.

2) Cf. N. Jacobson [4], G. Azumaya-T. Nakayama [2].

3) Siehe Abschnitt 2.

den  $\varphi$  zugeordneten Symbolen  $u_\varphi$  ( $\varphi \in G$ ) die folgenden Relationen zusammen mit dem distributiven Gesetz für die Elemente des Moduls ein:

- i)  $au_\varphi = u_\varphi a^\varphi$  für jedes  $a \in K$  und jedes  $\varphi \in G$ .
- ii)  $u_\varphi u_\psi = u_{\varphi\psi}$  für jedes Paar  $\varphi, \psi \in G$ .

Dann wird das Modul zu einem Ring mit einer Eins, den wir das "zerfallende verschränkte Produkt von  $K$  mit  $G$ " nennen und mit  $[K, G]$  bezeichnen wollen.

Zunächst wollen wir den einfachsten Fall betrachten.  $\varphi$  sei nämlich ein Automorphismus von  $K$  von unendlicher Ordnung. Das zerfallende verschränkte Produkt  $[K, \varphi]$  von  $K$  mit der zyklischen Gruppe  $\{\varphi\}$  enthält den nicht-kommutativen Polynomring  $K[u_\varphi]$  in  $u_\varphi$  über  $K$ , der ersichtlich ein Integritätsbereich ist, und, dessen sämtliche einseitige Ideale Hauptideale sind. Es gibt also nach K. Asano<sup>4)</sup> einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Quotientenkörper  $Q$  von  $K[u_\varphi]$ , der gleichzeitig als Quotientenkörper von  $[K, \varphi]$  angesehen werden kann, denn  $Q$  enthält einen zu  $[K, \varphi]$  isomorphen Teilring. Der Ring  $[K, \varphi]$  besitzt also einen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Quotientenkörper, den wir mit  $(K, \varphi)$  bezeichnen wollen.

Wenn man übrigens statt des Polynomringes den Ring der nicht-kommutativen formalen Potenzreihen in  $u_\varphi$  über  $K$  verwendet, so ergibt sich als Quotientenkörper der Ring der Laurentschen Reihen in  $u_\varphi$  über  $K$ . Das Beispiel von Hilbert<sup>5)</sup> ist eines von diesem Typus.

Nun wollen wir zwei Hilfssätze über  $(K, \varphi)$  beweisen, die wir nachher in Gebrauch machen. Dafür bezeichnen wir mit  $V_R(M)$  den Kommutatorring einer Untermenge  $M$  eines Ringes  $R$ , d.h.,  $V_R(M)$  ist die Gesamtheit der Elemente von  $R$ , die mit  $M$  elementweise vertauschbar sind. Mit  $I(K)$  bezeichnen wir die Gruppe der inneren Automorphismen von  $K$ , die bekanntlich einen Normalteiler der Automorphismengruppe von  $K$  bildet.

**Hilfssatz 1.**  *$K'$  sei ein Teilkörper von  $K$ , auf dem die Potenzen von  $\varphi$  niemals durch die Transformationen mit Elementen von  $K$  erzeugt werden. Dann ist  $V_{(K, \varphi)}(K') = V_K(K')$ .*

**Beweis.** Da  $V_K(K')$  offenbar in  $V_{(K, \varphi)}(K')$  enthalten ist, bleibt nur, zu zeigen, dass  $V_{(K, \varphi)}(K')$  in  $V_K(K')$  enthalten ist. Sei  $\rho$  ein Element von  $V_{(K, \varphi)}(K')$ . Nach der Definition des Quotientenkörpers gibt es zwei Elemente  $\lambda$  und  $\lambda'$  im nicht-kommutativen Polynomring  $K[u_\varphi]$  derart,

4) Cf. K. Asano [1].

5) Cf. D. Hilbert [3], S.107.

dass  $\rho\lambda$  und  $\lambda'\rho$  in  $K[u_\varphi]$  liegen. Nun seien  $\lambda = \sum_{i=0}^n u_\varphi^i a_i$ ,  $\lambda' = \sum_{i=0}^{n'} u_\varphi^i a'_i$ ,  $\rho\lambda = \sum_{i=0}^m u_\varphi^i b_i$  und  $\lambda'\rho = \sum_{i=0}^{m'} u_\varphi^i b'_i$ , wobei die Koeffizienten  $a_n$ ,  $a'_{n'}$ ,  $b_m$  und  $b'_{m'}$  von Null verschieden sind. Da aber  $\rho$  zu  $V_{(K, \varphi)}(K')$  gehört, ist  $c\rho = \rho c$  für beliebiges Element  $c$  von  $K'$ ; daraus folgt die Gleichung  $\lambda'c(\rho\lambda) = (\lambda'\rho)c\lambda$ , oder

$$(1) \quad \left( \sum_i u_\varphi^i a'_i \right) c \left( \sum_i u_\varphi^i b_i \right) = \left( \sum_i u_\varphi^i b'_i \right) c \left( \sum_i u_\varphi^i a_i \right),$$

insbesondere für  $c=1$ ,

$$(2) \quad \left( \sum_i u_\varphi^i a'_i \right) \left( \sum_i u_\varphi^i b_i \right) = \left( \sum_i u_\varphi^i b'_i \right) \left( \sum_i u_\varphi^i a_i \right).$$

Zuerst folgt aus (1)  $n' + m = m' + n$ , und, als Koeffizienten von  $u_\varphi^{n'+m}$  ( $= u_\varphi^{m'+n}$ ) der beiden Seiten von (2) und (1), bekommt man

$$(3) \quad (a'_{n'})^{\varphi^m} b_m = (b'_{m'})^{\varphi^n} a_n$$

bzw.

$$(4) \quad (a'_{n'})^{\varphi^m} c^{\varphi^m} b_m = (b'_{m'})^{\varphi^n} c^{\varphi^n} a_n.$$

Wäre nun  $n \neq m$ , dann ergäbe sich aus (3) und (4)

$$(5) \quad c^{\varphi^{m-n}} = ((a'_{m'})^{-\varphi^{m-n}} b'_{m'}) c ((a'_n)^{-\varphi^{m-n}} b'_{n'})^{-1}$$

für beliebiges Element  $c$  von  $K'$ , was mit unserer Voraussetzung im Widerspruche steht. Es muss also  $n=m$  — folglich  $n'=m'$  — sein. Dann wird die Gleichung (5) folgendermassen geschrieben:

$$c = ((a'_{n'})^{-1} b'_{n'}) c ((a'_n)^{-1} b'_n)^{-1}.$$

Da  $c$  beliebiges Element von  $K'$  ist, so muss  $(a'_{n'})^{-1} b'_{n'}$  ein Element von  $V_K(K')$  sein:  $b'_{n'} = a'_n d$  und  $b_n = d^{\varphi^n} a_n$  mit einem Element  $d$  aus  $V_K(K')$ . Indem man die Koeffizienten jeder Potenz von  $u_\varphi$  in den beiden Seiten von (1) bzw. von (2) vergleicht, kann man durch die Induktion leicht nachweisen, dass die Gleichungen  $b_\nu = d^{\varphi^\nu} a_\nu$  und  $b'_\mu = a'_\mu d$  ( $\nu=0, 1, \dots, n$ ;  $\mu=0, 1, \dots, n'$ ) bestehen. Nun war  $\lambda = \sum_i u_\varphi^i a_i$  und  $\rho\lambda = \sum_i u_\varphi^i b_i$ . Da aber  $b_\nu = d^{\varphi^\nu} a_\nu$  für  $\nu=0, 1, \dots, n$  ist, folgt daraus unmittelbar  $\rho\lambda = d\lambda$ , und folglich  $\rho = d$ , was zu beweisen war.

**Hilfssatz 2.** *Ein Automorphismus  $\psi$  von  $K$  lässt sich dann und nur dann zu einem inneren Automorphismus von  $(K, \varphi)$  erweitern, wenn  $\psi \equiv \varphi^n \pmod{I(K)}$  mit einer geeigneten Potenz von  $\varphi$  gilt.*

Beweis. Sei  $\psi$  ein Automorphismus von  $K$ , und er sei in der Form  $\psi = \varphi^n \tau(a)$  geschrieben, wobei  $\tau(a)$  ein innerer Automorphismus von  $K$  ist, der durch die Transformation mit dem Element  $a$  von  $K$  erzeugt wird. Wie man sich leicht versichern kann, lässt  $\psi$  sich dann zu einem inneren Automorphismus von  $(K, \varphi)$  erweitern, der durch die Transformation mit dem Element  $u_\varphi^n a$  erzeugt wird. Sei umgekehrt  $\psi$  ein Automorphismus von  $K$ , der sich zu einem inneren Automorphismus von  $(K, \varphi)$  erweitern lässt. Es gibt dann ein derartiges Element  $\rho$  in  $(K, \varphi)$ , dass  $a\rho = \rho a^\psi$  für jedes Element  $a$  von  $K$  ist. Wie immer nehmen wir zwei Element  $\lambda$  und  $\lambda'$  aus  $K[u_\varphi]$  so, dass  $\rho\lambda$  und  $\lambda'\rho$  beide zu  $K[u_\varphi]$  gehören. Schreiben wir die Elemente explizite:  $\lambda = \sum_{i=0}^n u_\varphi^i a_i$ ,  $\lambda' = \sum_{i=0}^{n'} u_\varphi^i a'_i$ ,  $\rho\lambda = \sum_{i=0}^m u_\varphi^i b_i$  und  $\lambda'\rho = \sum_{i=0}^{m'} u_\varphi^i b'_i$ . Aus der Gleichung  $\lambda'a(\rho\lambda) = (\lambda'\rho)a^\psi\lambda$  folgt dann  $(a'_n)^{\varphi^m} a^{\varphi^m} b_m = (b'_m)^{\varphi^m} a^{\psi\varphi^n} a_n$ . Andererseits ergibt sich aus  $\lambda'(\rho\lambda) = (\lambda'\rho)\lambda$  die Gleichung  $(a'_n)^{\varphi^m} b_m = (b'_m)^{\varphi^m} a_n$ . Aus diesen beiden folgt unmittelbar  $\psi = \varphi^{m-n} \cdot \tau(c)$  mit einem inneren Automorphismus  $\tau(c)$  von  $K$ .

2. Die Überlegung im Abschnitt 1 legt nahe, die weitere Klasse der Schiefkörper aufzubauen. Dafür setzen wir weiter voraus, dass es in der Automorphismengruppe eines Schiefkörpers  $K$  eine aufsteigende wohl-geordnete Untergruppenmenge  $\{G_\alpha\}$  gibt, die den folgenden Bedingungen genügt:<sup>6)</sup>

- (I)  $G_\alpha \supset G_\beta$ , falls  $\alpha > \beta$ .
- (II) Ist  $\alpha$  keine Limeszahl, dann ist  $G_\alpha = \{\varphi_\alpha\} \cdot G_{\alpha-1}$ , wobei  $\varphi_\alpha$  ein Element von unendlicher Ordnung in bezug auf  $G_{\alpha-1}$  und mit der Eigenschaft  $\varphi_\alpha^{-1} G_\beta \varphi_\alpha = G_\beta$  für alle  $\alpha < \beta$  ist.
- (III) Ist  $\alpha$  eine Limeszahl, dann ist  $G_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$ .
- (IV)  $G_0 = \{1\}$ .

Unter dieser Voraussetzung wollen wir die zerfallenden verschränkten Produkte  $[K, G_\alpha]$  von  $K$  mit  $G_\alpha$  noch näher betrachten.

Im allgemeinen kann das zerfallende verschränkte Produkt  $[K, H]$  von  $K$  mit einer Untergruppe  $H$  einer beliebigen Gruppe  $G$  der Automorphismen von  $K$  natürlicherweise in das zerfallende verschränkte Produkt  $[K, G]$  von  $K$  mit  $G$  eingebettet werden. Wir werden also das isomorphe Bild von  $[K, H]$  in  $[K, G]$  von nun an stets mit  $[K, H]$  selbst identifizieren. Dann bedeutet die Bedingung (I), dass jedes verschränkte Produkt  $[K, G_\alpha]$  sämtliche verschränkten Produkte  $[K, G_\beta]$  mit den als  $\alpha$

6) Für die Existenz des Quotientenkörpers des zerfallenden verschränkten Produktes  $[K, G]$  ist die Gruppe  $G$  der Automorphismen von  $K$  notwendigerweise eine torsionsfreie Gruppe. Ob es hinreichend ist, ist aber dem Verfasser eine offene Frage.

kleineren Ordnungszahlen  $\beta$  enthält. Ist  $\alpha$  keine Limeszahl, dann ist nach der Bedingung (II)  $[K, G_\alpha] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_{\varphi_\alpha}^\nu [K, G_{\alpha-1}]$ , und jedes  $[K, G_\beta]$  mit einer als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahl  $\beta$  wird durch die Transformation mit dem Element  $u_{\varphi_\alpha}$  auf sich selbst abgebildet. Wir bezeichnen so entstandenen Automorphismus von  $[K, G_\beta]$  ebenfalls mit  $\varphi_\alpha$ . Ist dagegen  $\alpha$  eine Limeszahl, dann ist nach der Bedingung (III)  $[K, G_\alpha] = \bigcup_{\beta < \alpha} [K, G_\beta]$ .

Mit Rücksicht auf diese Beschaffenheit kann man durch die Induktion den folgenden Hilfssatz leicht nachweisen.

**Hilfssatz 3.** *Jedes  $[K, G_\alpha]$  ist ein Integritätsbereich.*

Nun beweisen wir weiter den

**Hilfssatz 4.** *Jedes  $[K, G_\alpha]$  besitzt einen Quotientenkörper.*

Beweis. Da das verschränkte Produkt  $[K, G_1]$  einen Quotientenkörper besitzt, führen wir den Beweis induktiv nach der Ordnungszahl  $\alpha$ . Wir nehmen also an, unsere Behauptung sei für die verschränkten Produkte mit den als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahlen schon bewiesen. Ist  $\alpha$  zunächst keine Limeszahl, dann ist, wie eben erwähnt,  $[K, G_\alpha] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_{\varphi_\alpha}^\nu [K, G_{\alpha-1}]$ , und das Element  $u_{\varphi_\alpha}$  induziert einen Automorphismus  $\varphi_\alpha$  auf  $[K, G_{\alpha-1}]$ . Nach der Induktionsvoraussetzung besitzt  $[K, G_{\alpha-1}]$  einen Quotientenkörper, den wir mit  $(K, G_{\alpha-1})$  bezeichnen wollen. Der Automorphismus  $\varphi_\alpha$  von  $[K, G_{\alpha-1}]$  kann auf  $(K, G_{\alpha-1})$  eindeutig ausgedehnt werden. Die Erweiterung von  $\varphi_\alpha$  auf  $(K, G_{\alpha-1})$  bezeichnen wir ebenfalls mit  $\varphi_\alpha$ . Man kann dann, wie im Abschnitt 1, den Körper  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  bilden, denn  $\varphi_\alpha$  ist ein Automorphismus von  $(K, G_{\alpha-1})$  von unendlicher Ordnung.  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  ist nämlich ein Quotientenkörper des zerfallenden verschränkten Produktes  $[(K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha]$  von  $(K, G_{\alpha-1})$  mit der zyklischen Gruppe  $\{\varphi_\alpha\}$ . Sei das verschränkte Produkt in der folgenden Form gegeben:

$$[(K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_{\varphi_\alpha}^\nu (K, G_{\alpha-1}) \text{ und } \rho v_{\varphi_\alpha} = v_{\varphi_\alpha} \rho^{\varphi_\alpha} \text{ für } \rho \in (K, G_{\alpha-1}).$$

Nun wollen wir zeigen, dass  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  zwar ein Quotientenkörper des Teiltringes  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_{\varphi_\alpha}^\nu [K, G_{\alpha-1}]$  von  $[(K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha]$  ist. Sei  $\eta$  nämlich ein beliebiges Element von  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$ , dann gibt es ein geeignetes Element  $\lambda$  für  $\eta$  in  $[(K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha]$ , und  $\eta\lambda$  gehört zu  $[(K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha]$ . Seien  $\lambda = \sum_{\nu} v_{\varphi_\alpha}^\nu a_\nu$  und  $\eta\lambda = \sum_{\mu} v_{\varphi_\alpha}^\mu b_\mu$ , wobei  $a_\nu$  und  $b_\mu$  Elemente aus  $(K, G_{\alpha-1})$  und nur eine endliche Anzahl von ihnen von Null verschieden

sind. Da aber  $(K, G_{\alpha-1})$  ein Quotientenkörper von  $[K, G_{\alpha-1}]$  ist, kann man ein Element  $c$  in  $[K, G_{\alpha-1}]$  so finden, dass die Elemente  $a, c$  und  $b, c$  sämtlich in  $[K, G_{\alpha-1}]$  liegen. Dann gehört  $\lambda c$ , ebenso wie  $\eta \lambda c$ , zu  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_{\varphi_{\alpha}}^{\nu} [K, G_{\alpha-1}]$ . Somit wurde gezeigt, dass  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_{\alpha})$  ein Rechtsquotientenkörper des Ringes  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_{\varphi_{\alpha}}^{\nu} [K, G_{\alpha-1}]$  ist. Ähnlicherweise kann man zeigen, dass  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_{\alpha})$  ein Linksquotientenkörper von  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_{\varphi_{\alpha}}^{\nu} [K, G_{\alpha-1}]$  ist. Andererseits geht  $[K, G_{\alpha}]$  durch die Abbildung isomorph auf  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_{\varphi_{\alpha}}^{\nu} [K, G_{\alpha-1}]$  über, die die Elemente von  $[K, G_{\alpha-1}]$  auf sich selbst und  $u_{\varphi_{\alpha}}$  auf  $v_{\varphi_{\alpha}}$  abbildet. Daraus folgt die Existenz des Quotientenkörpers von  $[K, G_{\alpha}]$ ; gleichzeitig hat es sich herausgestellt, dass die Quotientenkörper von  $[K, G_{\alpha}]$  zu  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_{\alpha})$  isomorph sind. Nun sei  $\alpha$  eine Limeszahl. Nach der Induktionsvoraussetzung besitzt jedes  $[K, G_{\beta}]$  mit einer als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahl  $\beta$  einen Quotientenkörper, also nach dem Asano'schen Kriterium<sup>7)</sup> gibt es für jedes Paar  $\lambda (\neq 0)$ ,  $\mu$  aus  $[K, G_{\beta}]$  geeignete Paare der Elemente  $\lambda' (\neq 0)$ ,  $\mu'$  und  $\lambda'' (\neq 0)$ ,  $\mu''$  in  $[K, G_{\beta}]$  mit der Eigenschaft  $\mu \lambda' = \lambda \mu'$  bzw.  $\mu'' \lambda = \lambda'' \mu$ . Nun nehmen wir ein beliebiges Paar  $\rho, \eta$  aus  $[K, G_{\alpha}]$ . Da aber  $[K, G_{\alpha}] = \bigcup_{\beta < \alpha} [K, G_{\beta}]$  ist, gibt es eine als  $\alpha$  kleinere Ordnungszahl  $\beta$ , für die die Elemente  $\rho$  und  $\eta$  zu  $[K, G_{\beta}]$  gehören. Wie eben besagt, existieren dann geeignete Paare  $\rho', \eta'$  und  $\rho'', \eta''$  in  $[K, G_{\beta}]$ , und  $\eta \rho' = \rho \eta'$  bzw.  $\eta'' \rho = \rho'' \eta$ . Daraus folgt nach dem Asano'schen Kriterium die Existenz des Quotientenkörper von  $[K, G_{\alpha}]$ .

Wir wollen einen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Quotientenkörper von  $[K, G_{\alpha}]$ , dessen Existenz eben versichert wurde, mit  $(K, G_{\alpha})$  bezeichnen. Die Schiefkörper  $(K, G_{\beta})$  mit den als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahlen  $\beta$  können, durch die (eindeutig bestimmte) Erweiterung der natürlichen Einbettung von  $[K, G_{\beta}]$  in  $[K, G_{\alpha}]$ , in den Schiefkörper  $(K, G_{\alpha})$  eingebettet werden. Wir werden also das isomorphe Bild von  $(K, G_{\beta})$  in  $(K, G_{\alpha})$  ( $\alpha < \beta$ ) von nun an stets mit  $(K, G_{\beta})$  identifizieren. Für eine Limeszahl  $\alpha$  ist nun die in  $(K, G_{\alpha})$  gebildete Vereinigung  $\bigcup_{\beta < \alpha} (K, G_{\beta})$  ersichtlich ein Schiefkörper und darüberhinaus ein Quotientenkörper von  $[K, G_{\alpha}]$ , denn  $[K, G_{\alpha}]$  ist  $\bigcup_{\beta < \alpha} [K, G_{\beta}]$ . Also stimmt  $(K, G_{\alpha})$  mit der Vereinigung  $\bigcup_{\beta < \alpha} (K, G_{\beta})$  überein. Falls  $\alpha$  dagegen keine Limeszahl ist, dann ist, wie im Beweis des Hilfssatzes 4 gezeigt wurde,  $(K, G_{\alpha}) = ((K, G_{\alpha-1}), \varphi_{\alpha})$ . Ferner werden die Teilkörper  $(K, G_{\beta})$  ( $\beta < \alpha$ ) von

7) Cf. K. Asano [1].

$(K, G_\alpha)$  durch die Transformation mit dem Element  $u_{\varphi_\alpha}$  auf sich selbst abgebildet, denn die Transformation bildet die Teilringe  $[K, G_\beta]$  auf sich selbst ab. Wie früher wollen wir den so entstandenen Automorphismus von  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha$ ) mit  $\varphi_\alpha$  bezeichnen. Fassen wir diese Situation im folgenden Hilfssatz zusammen.

**Hilfssatz 5.** *Jedes  $(K, G_\alpha)$  enthält die sämtlichen Schiefkörper  $(K, G_\beta)$ , die den als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahlen entsprechen. Ist  $\alpha$  keine Limeszahl, dann  $(K, G_\alpha) \cong ((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$ , und die Transformation mit dem Element  $u_{\varphi_\alpha}$  erzeugt einen Automorphismus in jedem Teilkörper  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha$ ). Ist dagegen  $\alpha$  eine Limeszahl, dann  $(K, G_\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} (K, G_\beta)$ .*

Wir beweisen nun den folgenden

**Hilfssatz 6.** *Ein Automorphismus von  $K$  lässt sich zu einem inneren Automorphismus von  $(K, G_\alpha)$ , der die sämtlichen Teilkörper  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha$ ) auf sich selbst abbildet, dann und nur dann erweitern, wenn er zur Gruppe  $G_\alpha I(K)$  gehört.*

Beweis. Nach dem Hilfssatz 2 ist unsere Behauptung für den Körper  $(K, G_1)$  richtig, also führen wir den Beweis durch die Induktion nach der Ordnungszahl. Wir nehmen also an, unsere Behauptung sei für die Ordnungszahlen  $\beta < \alpha$  schon bewiesen. Wenn  $\alpha$  eine Limeszahl ist, dann  $(K, G_\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} (K, G_\beta)$ . Sei  $\psi$  ein Automorphismus von  $K$ , der sich zu einem inneren Automorphismus  $\tau(\rho)$  von  $(K, G_\alpha)$  mit der genannten Eigenschaft erweitern lässt, wobei  $\rho$  ein Element von  $(K, G_\alpha)$  ist. Als Element von  $(K, G_\alpha)$  gehört  $\rho$  zu einem Teilkörper  $(K, G_\beta)$  mit einer als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahl  $\beta$ , also nach der Induktionsvoraussetzung muss  $\psi$  zur Gruppe  $G_\beta I(K)$ —folglich zur Gruppe  $G_\alpha I(K)$ —gehören. Nun sei umgekehrt  $\psi$  ein Automorphismus von  $G_\alpha I(K)$ . Nach der Bedingung (III) über die Gruppenmenge, gehört dann  $\psi$  zu einer Gruppe  $G_\beta \cdot I(K)$  mit einer als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahl. Nach der Induktionsvoraussetzung lässt sich  $\psi$  dann zu einem inneren Automorphismus von  $(K, G_\beta)$  erweitern, der die sämtlichen Teilkörper  $(K, G_\gamma)$  ( $\gamma < \beta$ ) von  $(K, G_\beta)$  auf sich selbst abbildet. Der letztere kann offenbar zu einem inneren Automorphismus von  $(K, G_\alpha)$  mit der genannten Eigenschaft erweitert werden. Somit ist der Fall einer Limeszahl erledigt. Ist  $\alpha$  keine Limeszahl, dann nach dem Hilfssatz 5  $(K, G_\alpha) = ((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$ . Also betrachten wir den Schiefkörper  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  an Stelle von  $(K, G_\alpha)$ .  $\psi$  sei ein Automorphismus von  $K$ , der sich zu einem inneren Automorphismus von  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  mit der genannten Eigenschaft erweitern lässt.  $\psi$  lässt sich nämlich zu einem Automorphismus  $\psi'$  von  $(K, G_{\alpha-1})$  erweitern, der

sich weiter zu einem inneren Automorphismus von  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  erweitern lässt. Nach dem Hilfssatz 2 ist dann  $\psi' = \varphi_\alpha^n \cdot \tau(\rho)$  mit einer geeigneten Potenz von  $\varphi_\alpha$  und einem inneren Automorphismus  $\tau(\rho)$  von  $(K, G_{\alpha-1})$ . Daraus folgt aber, dass der Automorphismus  $\varphi_\alpha^{-n} \cdot \psi'$  von  $K$  sich zu einem inneren Automorphismus von  $(K, G_{\alpha-1})$  erweitern lässt. Die Automorphismen  $\varphi_\alpha^{-n}$  und  $\psi'$  bilden die sämtlichen Teilkörper  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha - 1$ ) auf sich selbst, also besitzt der innere Automorphismus  $\tau(\rho)$  auch die gleiche Eigenschaft. Nach der Induktionsvoraussetzung folgt also, dass der Automorphismus  $\varphi_\alpha^{-n} \cdot \psi'$  von  $K$  zu  $G_{\alpha-1} \cdot I(K)$  gehört. Daher gehört  $\psi$  zur Gruppe  $G_\alpha \cdot I(K)$ . Umgekehrt sei  $\psi$  ein Element von  $G_\alpha \cdot I(K)$ , dann nach der Bedingung (II) lässt  $\psi$  sich in der Form  $\varphi_\alpha^n \cdot \psi'$  schreiben, wobei  $\psi'$  ein Element von  $G_{\alpha-1} \cdot I(K)$  ist. Nach der Induktionsvoraussetzung lässt  $\psi'$  sich zu einem inneren Automorphismus von  $(K, G_{\alpha-1})$  erweitern, der die sämtlichen Teilkörper  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha - 1$ ) auf sich selbst abbildet. Wir wählen ein erzeugendes Element  $\rho$  dieses Automorphismus. Dann ist der von  $u_\varphi^n \cdot \rho$  erzeugte innere Automorphismus trivialerweise eine Erweiterung des Automorphismus  $\psi$  von  $K$ , und er bildet alle Teilkörper  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha$ ) auf sich selbst, denn der von  $u_\varphi$  erzeugte innere Automorphismus besitzt diese Eigenschaft.

Für unseren Zweck ist der folgende Hilfssatz von besonderem Interesse.

**Hilfssatz 7.** *Besteht die Gruppe  $G_\alpha$  nur aus äusseren Automorphismen, dann stimmt der Kommuterring  $V_{(K, G_\alpha)}(K)$  von  $K$  in  $(K, G_\alpha)$  mit dem Zentrum von  $K$  überein.*

Beweis. Im Hilfssatz 1 ist unsere Behauptung für  $(K, G_1)$  schon bewiesen. Wir nehmen also an, sie sei für  $G_\beta$  mit den als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahlen  $\beta$  schon bewiesen. Ist  $\alpha$  eine Limeszahl, dann ist  $(K, G_\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} (K, G_\beta)$ . Sei  $\rho$  ein beliebiges Element von  $V_{(K, G_\alpha)}(K)$ . Dann gehört  $\rho$  zu einem geeigneten Teilkörper  $(K, G_\beta)$  mit einer als  $\alpha$  kleineren Ordnungszahl  $\beta$ . Da aber die Gruppe  $G_\beta$  ( $\beta < \alpha$ ) auch nur aus äusseren Automorphismen bestehen, gehört  $\rho$  nach der Induktionsvoraussetzung zum Zentrum von  $K$ . Somit ist der Fall einer Limeszahl erledigt. Nun sei  $\alpha$  keine Limeszahl. Dann ist  $(K, G_\alpha)$  zu  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  isomorph. Wir betrachten  $((K, G_{\alpha-1}), \varphi_\alpha)$  an Stelle von  $(K, G_\alpha)$ .  $K$  ist nun ein Teilkörper von  $(K, G_{\alpha-1})$ , auf dem die Potenzen des Automorphismus  $\varphi_\alpha$  von  $(K, G_{\alpha-1})$ , niemals durch die Transformationen mit den Elementen von  $(K, G_{\alpha-1})$  erzeugt werden. Denn sonst liesse sich eine Potenz  $\varphi_\alpha^n$  des Automorphismus  $\varphi_\alpha$  von  $K$  zu einem inneren Automorphismus von  $(K, G_{\alpha-1})$  erweitern, der die sämtlichen Teilkörper  $(K, G_\beta)$  ( $\beta < \alpha$ ) auf sich



selbst abbildet.  $\varphi_\alpha^n$  müsste also nach dem Hilfssatz 6 zur Gruppe  $G_{\alpha-1} \cdot I(K)$  gehören, daher liesse sich in der Form  $\varphi_\alpha^n = \psi \cdot \tau(a)$  schreiben, wobei  $\psi$  und  $\tau(a)$  ein Automorphismus aus  $G_{\alpha-1}$  bzw. ein innerer Automorphismus von  $K$  sind. Dann würde der Automorphismus  $\psi^{-1}\varphi_\alpha^n$  von  $K$ , der kein identischer Automorphismus sein kann, zu einem inneren Automorphismus von  $K$ , was mit unserer Voraussetzung im Widerspruche steht. Nach dem Hilfssatz 1 ist dann  $V_{(K, G_\alpha)}(K) = V_{(K, G_{\alpha-1})}(K)$ , woraus nach der Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung folgt.

Nun fassen wir die obigen Ergebnisse im folgenden Satz zusammen.

**Satz 1.**  *$K$  sei ein Schiefkörper, in dessen Automorphismengruppe eine aufsteigende wohl-geordnete Untergruppenmenge  $\{G_\alpha\}$  mit den folgenden Eigenschaften vorhanden ist:*

- (I)  $G_\alpha \supset G_\beta$  für  $\alpha > \beta$ .
- (II) Ist  $\alpha$  keine Limeszahl, dann ist  $G_\alpha = \{\varphi_\alpha\} \cdot G_{\alpha-1}$ , wobei  $\varphi_\alpha$  ein Element von unendlicher Ordnung in bezug auf  $G_{\alpha-1}$  und mit der Eigenschaft  $\varphi_\alpha^{-1}G_\beta\varphi_\alpha = G_\beta$  für alle  $\beta < \alpha$  ist.
- (III) Für eine Limeszahl  $\alpha$  ist  $G_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$ .
- (IV) Jede Gruppe  $G_\alpha$  besteht nur aus äusseren Automorphismen von  $K$ .
- (V)  $G_0 = \{1\}$ .

Dann bildet die Gesamtheit der Quotientenkörper  $(K, G_\alpha)$  der zerfallenden verschränkten Produkte  $[K, G_\alpha]$  von  $K$  mit  $G_\alpha$  eine aufsteigende wohl-geordnete Menge der Schiefkörper, und der Kommutorring  $V_{(K, G_\alpha)}(K)$  von  $K$  in  $(K, G_\alpha)$  stimmt mit dem Zentrum von  $K$  überein.

Aus dem Satz 1 folgt insbesondere der nächste

**Satz 2.**  *$K$  sei ein kommutativer Körper, in dessen Automorphismengruppe über einem Teilkörper  $k$  eine aufsteigende wohl-geordnete Untergruppenmenge  $\{G_\alpha\}$  mit den Eigenschaften (I), (II), (III) und (V) vorhanden ist. Ferner sei  $k$  der Invariantenkörper jeder Gruppe  $G_\alpha$ . Dann bildet die Gesamtheit der Quotientenkörper  $(K, G_\alpha)$  der zerfallenden verschränkten Produkte  $[K, G_\alpha]$  von  $K$  mit  $G_\alpha$  eine aufsteigende wohl-geordnete Menge der Schiefkörper, die die Körper  $K$  und  $k$  als gemeinsamen maximalen (kommutativen) Teilkörper bzw. als gemeinsames Zentrum enthalten.*

Dass ein kommutativer Körper mit den oben genannten Eigenschaften tatsächlich existiert, kann man sich mit dem rationalen Funktionenkörper  $k(x)$  über einem Körper  $k$  von Charakteristik Null versichern,

EGE UNIVERSITÄT  
BORNOVA-IZMIR, DIE TÜRKEI

(Eingegangen am 19 März, 1962)

### Literaturverzeichnis

- [ 1 ] K. Asano: *Über die Quotientenbildung von Schieftringen*, J. Math. Soc. Jap. **1** (1949), 73-78.
- [ 2 ] G. Azumaya-T.Nakayama: *On irreducible rings*, Ann. of Math. **48** (1948), 949-965.
- [ 3 ] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 1923.
- [ 4 ] N. Jacobson: *Structure theory for algebras of bounded degree*, Ann. of Math. **46** (1945), 695-707.
- [ 5 ] G. Köthe: *Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum*, Math. Ann. **105** (1931), 15-39.

### Zusatz bei der Korrektur

Inzwischen hat der Verfasser das folgende Ergebnis erhalten, das den Satz 1 als Sonderfall enthält:

**Satz.** *K sei ein Schiefkörper, und G sei die Vereinigung einer wohlgeordneten aufsteigenden Reihe  $\{G_\alpha\}$  der Gruppen der Automorphismen von K mit den folgenden Eigenschaften:*

- 1)  $G_\alpha \supset G_\beta$ , falls  $\alpha > \beta$ .
- 2) Ist  $\alpha$  keine Limeszahl, dann ist  $G_\alpha$  eine Gruppenerweiterung von  $G_{\alpha-1}$  mit einer Torsionsfreien Abelschen Gruppe.
- 3) Ist  $\alpha$  eine Limeszahl, dann  $G_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$ .
- 4) Jede Gruppe  $G_\alpha$  besteht aus äusseren Automorphismen von K.
- 5)  $G_0 = \{1\}$ .

*Dann ist ein beliebiges verschränktes Produkt P von K mit G ein Integritätsbereich mit einem Quotientenkörper Q, und der Kommutorring  $V_Q(K)$  von K in Q stimmt mit dem Zentrum von K überein.*

Für den genauen Beweis siehe die Arbeit "On crossed products of a sfield", die in kurzem in Nagoya Mathematical Journal erscheinen wird.