

SUR LES ALGÈBRES DE LIE DE GÉNÉRATEURS DE KILLING ET L'HOMOGÉNÉITÉ D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE*

Dédié à Monsieur le professeur K. Shoda à l'occasion
de son soixantième anniversaire de naissance

PAR

KATSUMI NOMIZU

Le présent mémoire est essentiellement une suite du travail [2] dans lequel on a introduit la notion de générateur de Killing en chaque point d'une variété riemannienne. On démontre d'abord que l'ensemble des générateurs de Killing $\mathfrak{k}(x)$ forme une algèbre de Lie et étudie la structure de cette algèbre de Lie.

Ensuite, après avoir discuté des variétés riemanniennes localement homogènes, on obtiendra des résultats qui généralisent un théorème de [2] ainsi qu'un résultat de I. M. Singer [3] concernant l'homogénéité des variétés riemanniennes. On y utilisera un lemme de A. Nijenhuis [1].

Toutes les notations de [2] seront réservées.

1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}(x)$. Soit M une variété différentiable munie d'une métrique riemannienne définie-positive g . Pour chaque point x de M , $T(x)$ et $E(x)$ désignent l'espace tangent en x et l'algèbre de Lie des endomorphismes antisymétriques de $T(x)$ muni de produit scalaire g_x respectivement. Un générateur de Killing en x est un élément (X, A) de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}(x) = T(x) + E(x)$ (somme directe) qui satisfait à la condition

$$(1) \quad (\nabla_x + A) \cdot (\nabla^m R) = 0 \quad \text{pour tout } m = 0, 1, 2, \dots,$$

où $\nabla^m R$ est la différentielle covariante d'ordre m du champ de tenseurs de courbure R de M . L'ensemble de tous les générateurs de Killing en x se note $\mathfrak{k}(x)$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}(x)$ admet une opération de crochet définie par

$$(2) \quad [(X, A), (Y, B)] = (AY - BX, -R(X, Y) + [A, B]),$$

* Ce travail a été financé partiellement par NSF. Grant No. 14032. L'énoncé des résultats a été présenté à Amer. Math. Soc. le 7 novembre, 1961.

où $R(X, Y)$ est la transformation de courbure qui s'obtient par contraction de R avec X et Y . On va démontrer

Théorème 1. *Le sous-espace $\mathfrak{k}(x)$ de $\mathfrak{g}(x)$ forme une algèbre de Lie (sur le corps des nombres réels).*

Démonstration. Il suffit de montrer : 1) $[\mathfrak{k}(x), \mathfrak{k}(x)] \subset \mathfrak{k}(x)$ et 2) l'identité de Jacobi dans $\mathfrak{k}(x)$.

1) Soient $(X, A), (Y, B) \in \mathfrak{k}(x)$. Partons de la formule

$$(3) \quad (A(\nabla^{m+1}R))(Y;) = A(\nabla_Y(\nabla^m R)) - \nabla_{AY}(\nabla^m R),$$

dont l'expression à gauche signifie le tenseur qui associe aux vecteurs X_1, \dots, X_m en x le tenseur $(A(\nabla^{m+1}R))(Y, X_1, \dots, X_m)$ en x . La formule (3) n'est que la loi de dérivation A à qui s'étend l'endomorphisme A de $T(x)$. Comme (X, A) et (Y, B) satisfont à (1), on obtient de (3)

$$-(\nabla_X(\nabla^{m+1}R))(Y;) = -AB(\nabla^m R) - \nabla_{AY}(\nabla^m R).$$

En échangeant (X, A) et (Y, B) , on a également

$$-(\nabla_Y(\nabla^{m+1}R))(X;) = -BA(\nabla^m R) - \nabla_{BX}(\nabla^m R).$$

Les deux égalités ci-dessus entraînent

$$\nabla_{AY-BX}(\nabla^m R) = (\nabla_X(\nabla^{m+1}R))(Y;) - (\nabla_Y(\nabla^{m+1}R))(X;) - [A, B](\nabla^m R).$$

En utilisant l'identité de Ricci

$$(\nabla_X(\nabla K))(Y;) - (\nabla_Y(\nabla K))(X;) = R(X, Y) \cdot K,$$

qui est valable pour tout champ de tenseurs K , on arrive à

$$\nabla_{AY-BX}(\nabla^m R) = (R(X, Y) - [A, B]) \cdot (\nabla^m R).$$

Ceci montre que $[(X, A), (Y, B)] = (AY - BX, -R(X, Y) + [A, B])$ appartient à $\mathfrak{k}(x)$.

2) Si $(X, A), (Y, B)$ et $(Z, C) \in \mathfrak{k}(x)$, on a

$$\begin{aligned} & [[(X, A), (Y, B)], (Z, C)] \\ &= (-R(X, Y)Z + [A, B]Z - C(AY - BX), \\ & \quad -R(AX - BX, Z) - [R(X, Y), C] + [[A, B], C]). \end{aligned}$$

Si l'on désigne par \mathfrak{S} la somme cyclique pour $(X, A), (Y, B)$ et (Z, C) , on a

$$\mathfrak{S}\{[[X, A), (Y, B)], (Z, C)]\} = \mathfrak{S}\{(0, -R(AY, Z) + R(BX, Z)) - [R(X, Y), C]\},$$

en vertu de $\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\} = 0$ et de $\mathfrak{S}\{[[A, B], C]\} = 0$. Or on a

$$\begin{aligned} [C, R(X, Y)] &= (CR)(X, Y) + R(CX, Y) + R(X, CY) \\ &= -(\nabla_Z R)(X, Y) + R(CX, Y) + R(X, CY), \end{aligned}$$

puisque $(Z, C) \in \mathfrak{k}(x)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}\{-R(AY, Z) + R(BX, Z) - [R(X, Y), C]\} \\ &= \mathfrak{S}\{-R(AY, Z) + R(BX, Z) + R(CX, Y) + R(X, CY) - (\nabla_Z R)(X, Y)\} \\ &= -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} = 0, \end{aligned}$$

en vertu de l'identité de Bianchi.

REMARQUE. On a erronément constaté dans [2] que $\mathfrak{g}(x)$ est une algèbre de Lie. L'identité de Jacobi n'y est valable que dans le cas où le tenseur R est 0 en x .

2. Produit scalaire dans $\mathfrak{k}(x)$. La métrique riemannienne g définit canoniquement un produit scalaire défini-positif dans $\mathfrak{g}(x)$ par

$$(4) \quad ((X, A), (Y, B)) = g_x(X, Y) - \text{trace}(AB).$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}(x)$ se munit aussi de ce produit scalaire canonique. Soit $\mathfrak{h}(x) = E(x) \cap \mathfrak{k}(x)$, c'est-à-dire, $\mathfrak{h}(x)$ est l'ensemble de tous les endomorphismes antisymétriques A de $T(x)$ tels que $A \cdot (\nabla^m R) = 0$ pour $m=0, 1, 2, \dots$. Evidemment, $\mathfrak{h}(x)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{k}(x)$.

Lemme. *Le produit scalaire dans $\mathfrak{k}(x)$ est invariant par $\mathfrak{h}(x)$.*

En effet, soient $(X, A), (Y, B) \in \mathfrak{k}(x)$ et $C = (0, C) \in \mathfrak{h}(x)$. On a

$$([(0, C), (X, A)], (Y, B)) = ((CX, [C, A]), (Y, B)) = g_x(CX, Y) - \text{trace}([C, A]B).$$

On a également $((X, A), [(0, C), (Y, B)]) = g_x(X, CY) - \text{trace}(A[C, B])$. Comme C est antisymétrique, on a $g_x(CX, Y) + g_x(X, CY) = 0$. D'autre part, on a aisément $\text{trace}([C, A]B) + \text{trace}(A[C, B]) = 0$. Il en résulte que $([(0, C), (X, A)], (Y, B)) + ((X, A), [(0, C), (Y, B)]) = 0$, c'est-à-dire, le produit scalaire est invariant par $\text{ad}((0, C))$ opérant dans $\mathfrak{k}(x)$.

Soit $\mathfrak{m}(x)$ le complément orthogonal de $\mathfrak{h}(x)$ dans $\mathfrak{k}(x)$. Le lemme entraîne

Théorème 2. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}(x)$ est la somme directe $\mathfrak{m}(x) + \mathfrak{h}(x)$, où $[\mathfrak{m}(x), \mathfrak{h}(x)] \subset \mathfrak{m}(x)$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}(x)$ est réductive dans $\mathfrak{k}(x)$.*

Soit π la projection canonique de $\mathfrak{g}(x)$ sur $T(x)$. Il est clair que π induit un isomorphisme de $\mathfrak{m}(x)$ dans $T(x)$. On voit que $\pi(\mathfrak{k}(x)) = T(x)$ si et seulement si π applique $\mathfrak{m}(x)$ sur $T(x)$, ce qui revient à dire que $\dim \mathfrak{m}(x) = \dim M$. On dira que M est *infinitésimalement homogène en x* si $\dim \mathfrak{m}(x) = \dim M$,

3. Variétés riemanniennes localement homogènes. Une variété riemannienne M sera dite *localement homogène* si pour tous les points x et y de M il existe une isométrie f d'un voisinage de x sur un voisinage de y telle que $f(x)=y$. Si M est localement homogène, il est évident que tout point de M est \mathfrak{k} -régulier dans le sens de [2]. M est dite *homogène* si pour tous les points x et y de M il existe une isométrie de M sur elle-même telle que $f(x)=y$. On établira plus loin le fait que si M est connexe, simplement connexe et complète, l'homogénéité locale entraîne l'homogénéité globale.

On démontre ici

Théorème 3. *Si une variété riemannienne M est infinitésimalement homogène en un point x qui est \mathfrak{k} -régulier, alors x admet un voisinage ouvert qui est localement homogène.*

Corollaire. *Si une variété riemannienne analytique connexe est infinitésimalement homogène en tout point, elle est localement homogène.*

Ici la condition que M soit complète n'est ni supposée ni impliquée.

Démonstration du théorème 3. Comme x est \mathfrak{k} -régulier, on a $\mathfrak{k}^*(x) \cong \mathfrak{k}(x)$ d'après le théorème 4 de [2], où $\mathfrak{k}^*(x)$ est l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs de Killing. Soit U un voisinage ouvert de x tel que $\mathfrak{k}^*(x)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}(U)$ des champs de vecteurs de Killing définis dans U . M étant homogène en x , il en résulte que pour tout $X \in T(x)$ il existe $X^* \in \mathfrak{k}(U)$ tel que $X_x^* = X$. Maintenant le théorème 3 est une conséquence du lemme suivant.

Lemme. *Soit \mathfrak{k} une algèbre de Lie de dimension finie formée par des champs de vecteurs sur une variété différentiable M . Si $\{X_x; X \in \mathfrak{k}\}$ coïncide avec $T(x)$, alors x admet un voisinage U ayant la propriété suivante : pour tout $y \in U$, il existe un élément $X \in \mathfrak{k}$ qui engendre un groupe local à un paramètre de transformations locales $\exp tX$ définies dans un voisinage de x pour $-1 \leq t \leq 1$ tel que $\exp X$ applique x en y .*

La démonstration de ce lemme est facile.

Le corollaire se déduit du théorème 3 de [2] et du fait que si tout point d'une variété riemannienne admet un voisinage localement homogène, elle est localement homogène.

4. Variétés riemanniennes à courbure complètement homogène. On dira qu'une variété riemannienne M est à *courbure complètement homogène* si elle satisfait à la condition suivante. Pour tous les points x et y de M , il existe une isométrie de l'espace tangent $T(x)$ sur $T(y)$ qui conserve $\nabla^m R$ pour tout $m=0, 1, 2, \dots$. I. M. Singer [3] a démontré

qu'une variété riemannienne simplement connexe et complète est homogène si elle est à courbure complètement homogène (voir 5). On va démontrer plus généralement

Théorème 4. *Si une variété riemannienne connexe M est à courbure complètement homogène, elle est localement homogène.*

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse faite que $\dim \mathfrak{k}(x)$ est constante sur M . Il suffit alors, en vertu du théorème 3, de montrer que M est infinitésimalement homogène en tout point x .

Soit $X \in T(x)$ et soit $x(t)$ une géodésique déterminée par le vecteur tangent initial X . Désignons par x_n le point de la géodésique pour $t=1/n$ et par τ_n le déplacement parallèle le long de la géodésique du point x jusqu'à x_n . Pour un champ de tenseurs quelconque K , on a

$$\nabla_X K = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\tau_n^{-1} \cdot K_{x_n} - K_x),$$

où K_x désigne la valeur de K en x . Soit φ_n une isométrie de $T(x)$ sur $T(x_n)$ qui conserve $\nabla^m R$ pour tout $m=0, 1, 2, \dots$. Le composé $S_n = \tau_n^{-1} \cdot \varphi_n$ est une isométrie de $T(x)$ sur lui-même pour tout n . Pour $K = \nabla^m R$, $m=0, 1, 2, \dots$, on a $S_n \cdot K_x = \tau_n^{-1} \cdot \varphi_n \cdot K_x = \tau_n^{-1} \cdot K_{x_n}$ de sorte que

$$\nabla_X K = \lim_{n \rightarrow \infty} n(S_n \cdot K_x - K_x).$$

On a aussi

$$\nabla_X g = \lim_{n \rightarrow \infty} n(S_n \cdot g_x - g_x) = 0.$$

Or un lemme de Nijenhuis [1], p. 121, affirme qu'il existe un endomorphisme antisymétrique A de $T(x)$ tel que $A \cdot K_x = \nabla_X K$ pour tout $K = \nabla^m R$, $m=0, 1, 2, \dots$. Cela signifie que $(X, -A) \in \mathfrak{k}(x)$. On a ainsi démontré que M est infinitésimalement homogène en x .

Il est évident que si M est localement homogène, elle est à courbure complètement homogène. On vient de démontrer que cette dernière propriété entraîne que M est infinitésimalement homogène en tout point. D'après le théorème 7 de [2], on a comme dans [3]

Corollaire. *Soit M une variété riemannienne connexe, simplement connexe et complète. Si M est à courbure complètement homogène (en particulier, si M est localement homogène), alors M est homogène.*

Dans ce cas, l'algèbre de Lie du groupe des isométries de M est isomorphe à $\mathfrak{k}(x)$, x étant un point arbitraire, et celle-ci est déterminée algébriquement par $(\nabla^m R)_x$, $m=0, 1, 2, \dots$. Ce fait a été déjà montré dans [2].

5. L'hypothèse de I. M. Singer. Le résultat de I. M. Singer [3] est un peu plus général que celui indiqué plus haut. Pour le préciser, soit $\mathfrak{h}_s(x) = \{A \in E(x); A \cdot (\nabla^m R) = 0 \text{ pour } 0 \leq m \leq s\}$ et soit $s(x)$ le premier entier s tel que $\mathfrak{h}_s(x) = \mathfrak{h}_{s+1}(x)$. L'hypothèse faite par Singer est

(*) Pour tous les points x et y de M , il existe une isométrie de $T(x)$ sur $T(y)$ qui conserve tous les $\nabla^m R$, $0 \leq m \leq s(x) + 1$.

Son résultat peut être généralisé dans une forme plus précise que le théorème 4.

Théorème 5. *Si une variété riemannienne connexe M satisfait à la condition (*), M est localement homogène.*

On en indiquera les procédés de démonstration dans les étapes suivantes.

1) Sous l'hypothèse (*), on voit que $s(x)$ est une constante, soit s , sur M . En désignant par $\mathfrak{k}_m(x)$ le sous-ensemble des éléments $(X, A) \in \mathfrak{g}(x)$ tels que $(\nabla_X + A) \cdot (\nabla^i R) = 0$ pour $0 \leq i \leq m$, on démontre que $\mathfrak{k}_s(x) = \mathfrak{k}_{s+1}(x)$ en tout point x . Soit $(X, A) \in \mathfrak{k}_s(x)$. Par le raisonnement qui s'appuie sur le lemme de Nijenhuis dans la démonstration du théorème 4, on voit qu'il existe $B \in E(x)$ tel que $(X, B) \in \mathfrak{k}_{s+1}(x)$. Il en résulte que $(X, A) - (X, B) = (0, A - B) \in \mathfrak{k}_s(x) \cap E(x) = \mathfrak{h}_s(x)$. Comme on a $\mathfrak{h}_s(x) = \mathfrak{h}_{s+1}(x)$, on obtient $(X, A) = (X, B) + (0, A - B) \in \mathfrak{k}_{s+1}(x)$.

2) Pour démontrer que M est localement homogène, il suffit de montrer que $\mathfrak{k}^*(x) \cong \mathfrak{k}_{s+1}(x)$ en tout point x (sous l'hypothèse (*), bien entendu), parce que l'on sait déjà que pour tout $X \in T(x)$ il existe $A \in E(x)$ tel que $(X, A) \in \mathfrak{k}_{s+1}(x)$. La démonstration de cet isomorphisme est tout à fait analogue à celle du théorème 4 de [2]; il suffit de faire les deux remarques suivantes.

3) La démonstration du lemme 12 de [2] établit que la prolongation de $(X, A) \in \mathfrak{k}_{s+1}(x)$ le long du chemin $v(t)$ est contenue dans $\mathfrak{k}_{s+1}(v(t))$; on n'a besoin que du fait que $\mathfrak{k}_s(v(t)) = \mathfrak{k}_{s+1}(v(t))$ le long du chemin.

4) Dans la démonstration du théorème 4 de [2], il suffit d'avoir la condition $(\nabla_X + A) \cdot R = 0$ le long du chemin $v(t)$, c'est-à-dire, $(X(t), A(t)) \in \mathfrak{k}_0(v(t))$.

BROWN UNIVERSITY

(Reçu le 1^{er} Mars, 1962)

Bibliographie

- [1] A. Nijenhuis: *A theorem on sequences of local affine collineations and isometries*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) **2** (1954), 118-125.
- [2] K. Nomizu: *On local and global existence of Killing vector fields*, Ann. Math. **72** (1960), 105-120.
- [3] I. M. Singer: *Infinitesimally homogeneous spaces*, Commun. Pure Applied Math. **13** (1960), 685-697.

