Ohara, Akiko
Osaka Math. J.
10 (1958), 239-257.

La Structure du Groupe des Similitudes Directes $GO_6^+(Q)$ sur un Corps de Caractéristique 2.

Par Akiko OHARA

1. Soient K un corps commutatif de caractéristique 2 et E un espace vectoriel de dimension n sur K. On appelle forme quadratique une application Q de E dans K qui satisfait à une identité de la forme

$$Q(\lambda x+\mu y)=\lambda^2 Q(x)+\mu^2 Q(y)+\lambda\mu f(x, y)\,, \tag{1}$$

où f est une forme bilinéaire sur $E\times E$ et où x, y sont des vecteurs de E et λ, μ des éléments de K. On peut alors définir les notions d'une forme quadratique "non dégénérée" ou "défective", d'un vecteur "singulier", de "l'indice" de Q et d'un sous-espace "isotrope", de même que dans le cas de caractéristique $p\neq 2$, [1]. Nous supposons toujours que la dimension de E soit paire $n=2m$ et que Q soit une forme quadratique non dégénérée d'indice $\nu\leqq m$. Comme f est une forme alternée, il existe une base symplectique pour f, $(e_i)_{1\leqq i\leqq 2m}$ dans E. Alors, on peut écrire $Q(x)$, $x=\sum_{i=1}^{2m} e_i\xi_i$, sous la forme[1)]

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{m-\nu}\{Q(e_i)\xi_i^2+\xi_i\xi_{m+i}+Q(e_{m+i})\xi_{m+i}^2\}+\sum_{j=m-\nu+1}^{m}\xi_j\xi_{m+j}\,. \tag{2}$$

Une collinéation semi-linéaire u, relative à un automorphisme σ de K, est appelée une semi-similitude si on a

$$Q(u(x))=r_u(Q(x))^\sigma \qquad (x\in E)\,, \tag{3}$$

r_u étant une constante non nulle, appelée multiplicateur de u. Les semi-similitudes forment un groupe. Désignons ce groupe par $\Gamma O_n(Q)$. Les transformations de $\Gamma O_n(Q)$ associées à l'automorphisme identique de K forment un sous-groupe distingué $GO_n(Q)$ de $\Gamma O_n(Q)$, appelé *le groupe des similitudes.* Celles de multiplicateur 1 forment *le groupe orthogonal*

---

1) D'après la définition, on obtient d'abord par récurrence sur m l'expression de $Q(x)$ telle que $Q(x)=\sum_{i=1}^{m}\{Q(e_i)\xi_i^2+\xi_i\xi_{m+i}+Q(e_{m+i})\xi_{m+i}^2\}$. Ensuite, pour tout vecteur singulier a et tout plan non isotrope P contenant a, il existe dans P un vecteur singulier et un seul $b\neq a$, tel que $f(a, b)=1$, (cf. [1], p. 20). Donc, dans le cas de l'indice $\nu\geqq 1$, on peut choisir une base (e_i) de sorte que les 2ν termes $Q(e_l)$, $Q(e_{m+l})$ où $m-\nu+1\leqq l\leqq m$ s'annulent.

$O_n(Q)$. Soit $\Delta(Q)=\sum_{j=1}^{m} Q(e_j)\,Q(e_{m+j})$ le pseudo-discriminant de Q, ([1] p. 63), relative à la base symplectique $(e_i)_{1\leqq i\leqq 2m}$, et soit v une similitude symplectique, c'est-à-dire une transformation telle que $f(v(x), v(y))=r_v f(x, y)$. Si l'on écrit v sous la forme de matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$, $D=(d_{ij})$, $1\leqq i,\ j\leqq m$, et si l'on pose $Q_1(x)=Q(v(x))$, le pseudo-discriminant $\Delta(Q_1)$ de Q_1 est donné par

$$\Delta(Q_1) = r_v^2\Delta(Q)+D(v)^2+r_vD(v)\,, \tag{4}$$

où $D(v)=\sum_{i,j=1}^{m} \{Q(e_j)a_{ij}c_{ij}+Q(e_{m+j})b_{ij}d_{ij}+b_{ij}c_{ij}\}$[2]. Si v appartient à $GO_n(Q)$, on a $\Delta(Q_1)=r_v^2\Delta(Q)$ et $D(v)^2+r_vD(v)=0$. On a donc $D(v)=0$ ou $D(v)=r_v$. Le sous-groupe de $GO_n(Q)$ formé des transformations v telles que $D(v)=0$ est appelé *le groupe des similitudes directes.* Désignons ce groupe par $GO_n^+(Q)$.

Dans le cas de caractéristique $p\neq 2$, B. L. van der Waerden [2] et J. Dieudonné [3] ont déterminé les structures des groupes $GO_n^+(Q)$ pour $n=4, 6$ et celles des groupes $O_n^+(Q)$ pour $n=3, 5$. Pour $n=6$ et l'indice $\nu=3, 2$, on peut voir que ces résultats sont indépendants de la caractéristique du corps de base. Il nous reste à examiner la structure du groupe $GO_6^+(Q)$ pour les indices 1 et 0, le corps de base étant de caractéristique 2.

2. Nous allons d'abord démontrer trois séries de lemmes préliminaires concernant les corps (1–6), les formes quadratiques (7–10) et la commutativité des collinéations avec des collinéations ou des corrélations (11–13). Dans tout ce travail, on suppose que le corps de base K soit de caractéristique 2.

Lemme 1. *Si l'on a une extension quadratique K_1 sur K obtenue par adjonction d'une racine ρ de l'équation $X^2+X+a=0$, $a\in K$, et si l'on a $\xi^2+\xi=b$, $\xi\in K_1$, $\xi\notin K$, $b\in K$, il existe alors un élément α dans K tel que $a+b=\alpha^2+\alpha$.*

En effet, en posant $\xi=c\rho+d$, $c, d\in K$, on a $\xi^2+\xi=c^2\rho^2+d^2+c\rho+d = c^2(\rho^2+\rho)+(c^2+c)\rho+d^2+d = c^2a+(c^2+c)\rho+d^2+d$. Comme $(c^2+c)\rho$ doit être dans K, on a $c^2+c=0$, donc $c=0$ ou $c=1$. Comme $c\neq 0$, on a $c=1$, donc $a+b=d^2+d$.

Soient K_1, K_2 les extensions quadratiques de K obtenues par adjonc-

2) Pour obtenir $\Delta(Q_1)$ il suffit de calculer $\sum_{j=1}^{m} Q(v(e_j))Q(v(e_{m+j}))=\sum_{j=1}^{m} Q\{\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}e_i+b_{ij}e_{m+i})\}\times Q\{\sum_{i=1}^{m}(c_{ij}e_i+d_{ij}e_{m+i})\}$, en utilisant la relation $\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & r_vE \\ r_vE & 0 \end{pmatrix}$.

tion des racines ρ_1, ρ_2 des équations $X^2+X+c_1=0$, $X^2+X+c_2=0$, $c_1, c_2 \in K$. Désignons par K_0 leur corps composé K_1K_2 et par K_3 l'extension $K(\rho_1+\rho_2)$. Supposons que K_1 et K_2 soient linéairement disjoints.

Lemme 2. *Pour un élément λ de K_0, si $\lambda^2+\lambda$ appartient à K, alors λ doit être dans K_1, K_2 ou K_3.* (Cf. Théorie de Galois)

Lemme 3. *Soient σ_1, σ_2 les automorphismes de K_0 sur K tels que $\rho_1^{\sigma_1}=\rho_1+1$, $\rho_2^{\sigma_1}=\rho_2$, $\rho_1^{\sigma_2}=\rho_1$, $\rho_2^{\sigma_2}=\rho_2+1$. Si un élément ζ de K_0 est tel que $\zeta\zeta^{\sigma_1}$ appartient à K, alors ζ peut être écrit $\zeta=\zeta_1\zeta_3$, $\zeta_1\in K_1$, $\zeta_3 \in K_3$. De même, pour un élément ζ tel que $\zeta\zeta^{\sigma_2}$ appartient à K, on a $\zeta=\zeta_2\zeta_3$, $\zeta_2\in K_2$, $\zeta_3\in K_3$.*

Si l'on pose $\zeta=\gamma\rho_2+\delta$, γ, $\delta\in K_1$, on a $\zeta\zeta^{\sigma_1}=(\gamma\rho_2+\delta)(\gamma^{\sigma_1}\rho_2+\delta^{\sigma_1})$ $=\gamma\gamma^{\sigma_1}\rho_2^2+\gamma\delta^{\sigma_1}\rho_2+\delta\gamma^{\sigma_1}\rho_2+\delta\delta^{\sigma_1}$ et alors on a $\zeta\zeta^{\sigma_1}+c_2\gamma\gamma^{\sigma_1}+\delta\delta^{\sigma_1}+(\gamma\gamma^{\sigma_1}+\gamma\delta^{\sigma_1}$ $+\delta\gamma^{\sigma_1})\rho_2=0$. Comme $\zeta\zeta^{\sigma_1}+c_2\gamma\gamma^{\sigma_1}+\delta\delta^{\sigma_1}$ est un élément dans K, on a $\gamma\gamma^{\sigma_1}+\gamma\delta^{\sigma_1}+\delta\gamma^{\sigma_1}=0$. Montrons ensuite qu'il existe un élément b dans K tel que $\zeta\{1+b(\rho_1+\rho_2)\}$ ou bien $\zeta\{b(\rho_1+\rho_2)\}$ appartient à K_1. Pour un élément x de K_0, on a $\zeta\{1+x(\rho_1+\rho_2)\}=(\gamma\rho_2+\delta)\{1+x(\rho_1+\rho_2)\}=c_2x\gamma+\delta+$ $x\delta\rho_1+\{\gamma+x(\gamma\rho_1+\gamma+\delta)\}\rho_2$. Si $\gamma\rho_1+\gamma+\delta\neq 0$, posons $x=\gamma(\gamma\rho_1+\gamma+\delta)^{-1}=b$. L'élément $b=\gamma(\gamma\rho_1+\gamma+\delta)^{-1}$ est un élément de K_1 tel que $\zeta\{1+b(\rho_1+\rho_2)\}$ $=c_2b\gamma+\delta+b\delta\rho_1$ appartient à K_1. D'après la relation $\gamma\gamma^{\sigma_1}+\gamma\delta^{\sigma_1}+\delta\gamma^{\sigma_1}=0$, on a $b^{\sigma_1}(\gamma\rho_1+\gamma+\delta)=\gamma^{\sigma_1}(\gamma^{\sigma_1}\rho_1+\delta^{\sigma_1})^{-1}(\gamma\rho_1+\gamma+\delta)=(\gamma^{\sigma_1}\rho_1+\delta^{\sigma_1})^{-1}(\gamma\gamma^{\sigma_1}\rho_1+\gamma\gamma^{\sigma_1}$ $+\gamma^{\sigma_1}\delta)=(\gamma^{\sigma_1}\rho_1+\delta^{\sigma_1})^{-1}(\gamma\gamma^{\sigma_1}\rho_1+\gamma\delta^{\sigma_1})=\gamma$, c'est-à-dire $b^{\sigma_1}=b$ et donc b est un élément de K. Si $\gamma\rho_1+\gamma+\delta=0$, pour un élément arbitraire $b\neq 0$ dans K, on a $\zeta\{b(\rho_1+\rho_2)\}=(\gamma\rho_2+\delta)\{b(\rho_1+\rho_2)\}=b(\gamma\rho_2+\gamma\rho_1+\gamma)(\rho_1+\rho_2)=b\gamma(\rho_1$ $+\rho_2+1)(\rho_1+\rho_2)=b\gamma(c_1+c_2)$, ce qui appartient à K_1. Désignons par ζ_3 l'élément $\{1+b(\rho_1+\rho_2)\}^{-1}$ ou l'élément $\{b(\rho_1+\rho_2)\}^{-1}$, et par ζ_1 l'élément $c_2b\gamma+\delta+b\delta\rho_1$ ou l'élément $b\gamma(c_1+c_2)$, suivant que $\gamma\rho_1+\gamma+\delta\neq 0$ ou bien $\gamma\rho_1+\gamma+\delta=0$. Alors on obtient $\zeta=\zeta_1\zeta_3$, $\zeta_1\in K_1$, $\zeta_3\in K_3$. De la même façon, on peut démontrer la deuxième partie du lemme.

Lemme 4. *Soit K un corps commutatif admettant un automorphisme involutif π. S'il existe un élément c dans K tel que $c^\pi=c$ et qui n'est pas de la forme $\lambda\lambda^\pi$ dans K, alors on peut former une extension quadratique L de K ayant les éléments $1, \omega$ comme base tels que $\omega^2=c$, $\xi^\pi=\omega^{-1}\xi\omega$, $\xi\in K$.*

On peut le voir immédiatement à l'aide des théorèmes 3 et 4 de J. Dieudonné. ([3] p. 184 et p. 186)

Lemme 5. *Soient K, L, π, c vérifiant les mêmes conditions que dans le lemme précédent. Soit F un espace vectoriel sur K de dimension paire $2n$ et soit θ une collinéation de F relative à l'automorphisme π et telle que $\theta^2(x)=xc$. Si l'on pose $x(\xi+\omega\eta)=x\xi+\theta(x)\eta$, $x\in F$, $\xi, \eta\in K$, l'espace*

F devient un espace vectoriel F' de dimension n par rapport à L.

En raison des relations $\theta(x\xi)=\theta(x)\xi^{\pi}$ et $\theta^2(x)=xc$, $x\in F$, $\xi\in K$, on peut facilement vérifier les axiomes d'espace vectoriel et on a une structure d'espace vectoriel sur F par rapport à L.

Lemme 6. *Soit K un corps commutatif admettant les automorphismes involutifs π, σ tels que $\pi\sigma=\sigma\pi$ et soit L une extension quadratique sur K définie par les éléments de base $1, \omega$ tels que $\omega^2=c$, $\xi^{\pi}=\omega^{-1}\xi\omega$, $c^{\sigma}=c^{\pi}=c\in K$, $\xi\in K$. En posant $\alpha^{\sigma'}=\eta_1^{\sigma}+\omega\eta_2^{\pi\sigma}$ où $\alpha=\eta_1+\omega\eta_2$ est un élément arbitraire de L avec $\eta_1, \eta_2\in K$, on peut prolonger l'automorphisme σ en un antiautomorphisme σ' de L.*

En effet, pour deux éléments arbitraires α, β dans L, $\beta=\zeta_1+\omega\zeta_2$, $\zeta_1, \zeta_2\in K$, on vérifie que $(\alpha\beta)^{\sigma'}=\{(\eta_1+\omega\eta_2)(\zeta_1+\omega\zeta_2)\}^{\sigma'}=\{\eta_1\zeta_1+\eta_1\omega\zeta_2+\omega\eta_2\zeta_1+\omega\eta_2\omega\zeta_2\}^{\sigma'}=\{\eta_1\zeta_1+\omega\eta_1^{\pi}\zeta_2+\omega\eta_2\zeta_1+\omega^2\eta_2^{\pi}\zeta_2\}^{\sigma'}=\{\eta_1\zeta_1+\omega\eta_1^{\pi}\zeta_2+\omega\eta_2\zeta_1+c\eta_2^{\pi}\zeta_2\}^{\sigma'}=\{(\eta_1\zeta_1+c\eta_2^{\pi}\zeta_2)+\omega(\eta_1^{\pi}\zeta_2+\eta_2\zeta_1)\}^{\sigma'}=(\eta_1\zeta_1+c\eta_2^{\pi}\zeta_2)^{\sigma}+\omega(\eta_1^{\pi}\zeta_2+\eta_2\zeta_1)^{\pi\sigma}=\eta_1^{\sigma}\zeta_1^{\sigma}+c\eta_2^{\pi\sigma}\zeta_2^{\sigma}+\omega\eta_1^{\sigma}\zeta_2^{\pi\sigma}+\omega\eta_2^{\pi\sigma}\zeta_1^{\pi\sigma}=\eta_1^{\sigma}\zeta_1^{\sigma}+\omega^2\eta_2^{\pi\sigma}\zeta_2^{\sigma}+\omega\eta_1^{\sigma}\zeta_2^{\pi\sigma}+\omega\eta_2^{\pi\sigma}\zeta_1^{\pi\sigma}$, et que $\beta^{\sigma'}\alpha^{\sigma'}=(\zeta_1^{\sigma}+\omega\zeta_2^{\pi\sigma})(\eta_1^{\sigma}+\omega\eta_2^{\pi\sigma})=\zeta_1^{\sigma}\eta_1^{\sigma}+\zeta_1^{\sigma}\omega\eta_2^{\pi\sigma}+\omega\zeta_2^{\pi\sigma}\eta_1^{\sigma}+\omega\zeta_2^{\pi\sigma}\omega\eta_2^{\pi\sigma}=\zeta_1^{\sigma}\eta_1^{\sigma}+\omega\zeta_1^{\pi\sigma}\eta_2^{\pi\sigma}+\omega\zeta_2^{\pi\sigma}\eta_1^{\sigma}+\omega^2\zeta_2^{\sigma}\eta_2^{\pi\sigma}$. Comme K est commutatif, on a $(\alpha\beta)^{\sigma'}=\beta^{\sigma'}\alpha^{\sigma'}$. Il est clair que $\omega^{\sigma'}=\omega$, $\xi^{\sigma'}=\xi^{\sigma}$, $\xi\in K$.

Lemme 7. *Soit $\rho^2+\rho=ab$, alors la forme $a\xi^2+\xi\eta+b\eta^2$ se décompose en $a\left(\xi+\frac{\rho}{a}\eta\right)\left(\xi+\frac{\rho+1}{a}\eta\right)$.*

Lemme 8. *Soient K un corps commutatif et F un espace vectoriel de dimension 4 sur K ayant pour base les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Soit $Q(x)=a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_3+a_3\xi_3^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_4+a_4\xi_4^2$ la forme quadratique à quatre variables sur K. Si le pseudo-discriminant $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)=b^2+b$, il existe alors une base de F telle que $Q(x)=a_1(\eta_1^2+\eta_1\eta_3+a_1a_3\eta_3^2)+a_2(\eta_2^2+\eta_2\eta_4+a_1a_3\eta_4^2)$, et alors $\Delta(Q)$ devient nul. Si $\Delta(Q)$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K, $Q(x)$ s'écrit sous la forme: $Q(x)=a_1(\eta_1^2+\eta_1\eta_3+a_1a_3\eta_3^2)+a_2(\eta_2^2+\eta_2\eta_4+a_2a_4\eta_4^2)$.*

Faisons le changement de variables: $\eta_1=\xi_1$, $\eta_2=\xi_2+\frac{b}{a_2}\xi_4$, $\eta_3=\frac{1}{a_1}\xi_3$, $\eta_4=\frac{1}{a_2}\xi_4$. La forme quadratique s'écrit $Q(x)=a_1\{\eta_1^2+\eta_1\eta_3+a_1a_3\eta_3^2\}+a_2\{\eta_2^2+\eta_2\eta_4+(b^2+b+a_2a_4)\eta_4^2\}=a_1\{\eta_1^2+\eta_1\eta_3+a_1a_3\eta_3^2\}+a_2\{\eta_2^2+\eta_2\eta_4+a_1a_3\eta_4^2\}$. Dans l'autre cas, si l'on fait le changement de variables: $\eta_1=\xi_1$, $\eta_2=\xi_2$, $\eta_3=\frac{1}{a_1}\xi_3$, $\eta_4=\frac{1}{a_2}\xi_4$, on obtient la forme cherchée.

REMARQUE. Soit la forme quadratique $Q(x)=a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_3+a_3\xi_3^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_4+a_4\xi_4^2$ d'indice 0. Soient ρ_1, ρ_2 des racines des équations $X^2+X+a_1a_3=0$, $X^2+X+a_2a_4=0$. Désignons $K(\rho_1)$, $K(\rho_2)$, $K(\rho_1, \rho_2)$ par K_1, K_2, K_0

respectivement. D'après le lemme 1, si $\rho_2 \in K_1$, alors $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. Réciproquement, si $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K, comme on a $\Delta(Q)=b^2+b=a_1a_3+a_2a_4=\rho_1^2+\rho_1+a_2a_4$, on a $\rho_2=\rho_1+b\in K_1$; en utilisant le lemme 8, on peut supposer $\rho_1=\rho_2$. Alors le fait que $\rho_1=\rho_2$ équivaut à la condition que $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. Dans ces conditions on arrive au lemme suivant.

Lemme 9. *Soient $Q(x)$, ρ_1, ρ_2, K_1, K_2, K_0 vérifiant les mêmes conditions que la remarque.* (*i*) *Si $\rho_1=\rho_2=\rho$, et si σ est un automorphisme de K_1 tel que $\rho^\sigma=\rho+1$, alors a_1a_2 n'est pas de la forme $\zeta\zeta^\sigma$ dans K_1.* (*ii*) *Si $\rho_1\neq\rho_2$, et si σ_1, σ_2 sont des automorphismes de K_0 tels que $\rho_1^{\sigma_1}=\rho_1+1$, $\rho_2^{\sigma_1}=\rho_2$, $\rho_1^{\sigma_2}=\rho_1$, $\rho_2^{\sigma_2}=\rho_2+1$, alors a_1a_2 n'est pas de la forme $\zeta\zeta^\pi$ dans K_0, où $\pi=\sigma_1\sigma_2$.*

(i) Si l'on avait $a_1a_2=\zeta\zeta^\sigma$, $\zeta\in K_1$, on aurait $\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)\left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^\sigma=\zeta'\zeta'^\sigma$. Selon la forme $Q(x)$ du lemme 8, et le lemme 7, si l'on prend $\eta_1+\rho\eta_3=\zeta'$, $\eta_2+\rho\eta_4=1$, on aurait $Q(x)=a_1\{\eta_1^2+\eta_1\eta_3+a_1a_3\eta_3^2\}+a_2\{\eta_2^2+\eta_2\eta_4+a_1a_3\eta_4^2\}$ $=a_1\{\eta_1+\rho\eta_3\}\{\eta_1+(\rho+1)\eta_3\}+a_2\{\eta_2+\rho\eta_4\}\{\eta_2+(\rho+1)\eta_4\}=a_1\zeta'\zeta'^\sigma+a_2=0$, pour un vecteur non nul, contrairement à l'hypothèse de l'indice 0.

(ii) Si on avait $a_1a_2=\zeta\zeta^\pi$, $\zeta=\alpha\rho_2+\beta$, $\alpha,\beta\in K_1$, on aurait $a_1a_2=$ $(\alpha\rho_2+\beta)(\alpha^{\sigma_1}\rho_2+\alpha^{\sigma_1}+\beta^{\sigma_1})=\alpha\alpha^{\sigma_1}\rho_2^2+\alpha\alpha^{\sigma_1}\rho_2+\alpha\beta^{\sigma_1}\rho_2+\beta\alpha^{\sigma_1}\rho_2+\alpha^{\sigma_1}\beta+\beta\beta^{\sigma_1}$ $=a_2a_4\alpha\alpha^{\sigma_1}+\alpha^{\sigma_1}\beta+\beta\beta^{\sigma_1}+(\alpha\beta^{\sigma_1}+\beta\alpha^{\sigma_1})\rho_2$. D'où on tire

$$\alpha\beta^{\sigma_1}+\beta\alpha^{\sigma_1}=0 \tag{5}$$

$$a_1a_2+a_2a_4\alpha\alpha^{\sigma_1}+\alpha^{\sigma_1}\beta+\beta\beta^{\sigma_1}=0\,. \tag{6}$$

(*a*) Si $\beta\neq0$, d'après (5) on a $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\sigma_1}=\frac{\alpha}{\beta}$, donc $\frac{\alpha}{\beta}\in K$. Il existe alors un élément a dans K tel que $\alpha=a\beta$. De la formule (6), on tire $a_1a_2+a_2a_4a^2\beta\beta^{\sigma_1}+a\beta\beta^{\sigma_1}+\beta\beta^{\sigma_1}=0$ et $a_1a_2\frac{1}{\beta\beta^{\sigma_1}}+a_2a_4a^2+a+1=0$. En posant $\frac{1}{\beta}=b\rho_1+c$, $b,c\in K$, on a $\frac{1}{\beta\beta^{\sigma_1}}=(b\rho_1+c)(b\rho_1+b+c)=b^2a_1a_3+c^2+bc$, et alors on a $a_1a_2(b^2a_1a_3+c^2+bc)+a_2a_4a^2+a+1=0$. En multipliant par a_2, cette formule se ramène à $a_1(ca_2)^2+(ca_2)(ba_1a_2)+a_3(ba_1a_2)^2+a_21^2+1(aa_2)$ $+a_4(aa_2)^2=0$. Pour le vecteur non nul $x_0=ca_2\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+ba_1a_2\mathcal{E}_3+aa_2\mathcal{E}_4$, la forme $Q(x_0)$ se réduirait à 0, ce qui contredit l'hypothèse que cette forme soit d'indice 0. (*b*) Si $\beta=0$, on a $a_1a_2=a_2a_4\alpha\alpha^{\sigma_1}$ d'après (6). En posant $\frac{1}{\alpha}=b\rho_1+c$, on a $a_1a_2\frac{1}{\alpha\alpha^{\sigma_1}}=a_1a_2(b^2a_1a_3+c^2+bc)=a_2a_4$. Comme dans le cas (*a*) on aurait $a_1(ca_2)^2+(ca_2)(ba_1a_2)+a_3(ba_1a_2)^2+a_4a_2^2=0$. Par suite, pour le vecteur $x_0=ca_2\mathcal{E}_1+ba_1a_2\mathcal{E}_3+a_2\mathcal{E}_4\neq0$, la forme $Q(x_0)$ serait égale à 0, contrairement à l'hypothèse de l'indice 0.

Lemme 10. *Soient K, L les corps du lemme 4, soient F, F' les espaces vectoriels des dimensions $2n$, n respectivement, considérés dans le lemme 5 et soient σ, σ' les antiautomorphismes donnés dans le lemme 6. Alors, la relation $g'(x, y) = g(x, y) + \omega c^{-1} g(\theta(x), y)$ établit une correspondance entre formes sesquilinéaires*[3] *g sur $F \times F$ relatives à l'antiautomorphisme σ et formes sesquilinéaires g' sur $F' \times F'$ relatives à l'antiautomorshisme σ'. De plus, si la forme g' est hermitienne, la forme g l'est aussi. Réciproquement, si la forme g est hermitienne définie par une corrélation φ de F dans F^* telle que ${}^t\varphi = \varphi$, $\varphi\theta = c\check{\theta}\varphi$, alors la forme g' est aussi hermitienne.*

Prenons d'abord une forme sesquilinéaire g' sur $F' \times F'$ relative à l'antiautomorphisme σ', c'est-à-dire, $g'(x\alpha, y) = \alpha^{\sigma'} g'(x, y)$, $g'(x, y\alpha) = g'(x, y)\alpha$ pour $x, y \in F'$, $\alpha \in L$. Posons $g'(x, y) = g(x, y) + \omega g_1(x, y)$, où g et g_1 sont des applications de $F' \times F'$ dans K. Quand on considère F' comme espace vectoriel sur K, g est une forme sur $F \times F$. Puisque $g'(x\omega, y) = \omega^{\sigma'} g'(x, y) = \omega g'(x, y)$, on a $g(x\omega, y) + \omega g_1(x\omega, y) = \omega g(x, y) + \omega^2 g_1(x, y) = \omega g(x, y) + c g_1(x, y)$. Donc, $g(x\omega, y) = c g_1(x, y)$, $g_1(x\omega, y) = g(x, y)$. Mais ces deux relations sont équivalentes. Car, on remarque d'abord que pour $\alpha \in K$, $g(x\alpha, y) = \alpha^{\sigma'} g(x, y)$ et $g_1(x\alpha, y) = \omega^{-1} \alpha^{\sigma'} \omega g_1(x, y) = \alpha^{\sigma' \pi} g_1(x, y)$. Alors, $g(x\omega, y) = c g_1(x, y)$ entraîne que $g(x\omega, y) = g_1(xc, y) = g_1(x\omega^2, y)$. Si x parcourt F', $x\omega = x'$, parcourt aussi F'. Donc cette relation s'écrit $g(x', y) = g_1(x'\omega, y)$. Réciproquement, si $g_1(x\omega, y) = g(x, y)$ on a $g(x\omega, y) = g_1(x\omega^2, y) = g_1(xc, y) = c g_1(x, y)$. D'autre part, on a $\theta(x) = x\omega$. Il s'en suit que pour une application sesquilinéaire g' de $F' \times F'$ dans L il existe une application sesquilinéaire g de $F \times F$ dans K telle que $g'(x, y) = g(x, y) + \omega c^{-1} g(\theta(x), y)$. Il est évident que si g' est hermitienne, c'est-à-dire $g'(y, x) = g'(x, y)^{\sigma'}$, g l'est aussi.

Inversement, considérons une forme sesquilinéaire g de $F \times F$ dans K. Si l'on pose $g'(x, y) = g(x, y) + \omega c^{-1} g(\theta(x), y)$, comme on a, pour $\alpha \in K$, $g(x\alpha, y) = \alpha^{\sigma'} g(x, y)$ et $g(\theta(x\alpha), y) = g(\theta(x)\alpha^{\pi}, y) = \alpha^{\pi\sigma'} g(\theta(x), y)$, on a alors $g'(x\alpha, y) = \alpha^{\sigma'} g(x, y) + \omega c^{-1} \alpha^{\pi\sigma'} g(\theta(x), y) = \alpha^{\sigma'} g(x, y) + \alpha^{\sigma'} \omega c^{-1} g(\theta(x), y) = \alpha^{\sigma'} g'(x, y)$. Et on a $g'(x\omega, y) = g(x\omega, y) + \omega c^{-1} g(\theta(x\omega), y) = \omega^2 c^{-1} g(x\omega, y) + \omega c^{-1} g(xc, y) = \omega\{\omega c^{-1} g(x\omega, y) + g(x, y)\} = \omega^{\sigma'} g'(x, y)$, car on a vu que $\omega^{\sigma'} = \omega$, (lemme 6). Lorsque l'on considère F comme un espace vectoriel F' sur L, g' est alors une application sesquilinéaire de $F' \times F'$ dans L. Supposons ensuite que la forme sesquilinéaire g soit définie par $g(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle$, telle que ${}^t\varphi = \varphi$, $\varphi\theta = c\check{\theta}\varphi$. Alors la forme g est hermitienne: $g(y, x) = g(x, y)^{\sigma'}$. Montrons que la forme g' est hermitienne.

3) On trouve la définition de la forme sesquilinéaire à §5, chap. I [1].

En effet, on a $g(\theta(x), y)^{\pi} = g(y, \theta(x))^{\pi\sigma'}$ [4] $= g(\theta^{-1}(y)c, x)^{\sigma'} = cg(x, \theta^{-1}(y))^{\sigma'^2}$ [5] $= cg(x, \theta(y)c^{-1}) = g(x, \theta(y))$. Comme on a $\omega^{-1}\zeta\omega = \zeta^{\pi}$ pour $\zeta \in K$, on a $\omega g(\theta(x), y)^{\pi\sigma'} = g(\theta(x), y)^{\sigma'}\omega$. D'où on trouve finalement $g'(y, x) = g(y, x) + \omega c^{-1}g(\theta(y), x) = g(x, y)^{\sigma'} + \omega c^{-1}g(x, \theta(y))^{\sigma'} = g(x, y)^{\sigma'} + \omega c^{-1}g(\theta(x), y)^{\pi\sigma'} = g(x, y)^{\sigma'} + c^{-1}g(\theta(x), y)^{\sigma'}\omega = g(x, y)^{\sigma'} + g(\theta(x), y)^{\sigma'}c^{-\sigma'}\omega^{\sigma'} = \{g(x, y) + \omega c^{-1}g(\theta(x), y)\}^{\sigma'} = g(x, y)^{\sigma'}$.

Désignons par $F^{(2)}$ l'espace des bivecteurs sur F. Toute application semi-linéaire v de F dans lui-même a une puissance extérieure seconde qui est une application semi-linéaire $v^{(2)}$ de $F^{(2)}$ sur lui-même définie par $v^{(2)}(x \wedge y) = v(x) \wedge v(y)$, où x, y sont des vecteurs arbitraires de F.

Les trois lemmes suivants sont déduits des résultats obtenus au cours des démonstrations du cas de la caractéristique $p \neq 2$, [3]. Comme ces résultats ne dépendent pas de la caractéristique, nous ne donnons pas de nouveau leurs démonstrations.

Lemme 11. *Soit K un corps commutatif admettant un automorphisme involutif σ et soit F un espace vectoriel de dimension 4 sur K. Soit θ une collinéation de F dans lui-même relative à σ telle que $\theta^2(x) = cx$, $c = c^{\sigma} \in K$, $x \in F$. Pour une transformation linéaire $v \in GL_4(F)$, si l'on a $u = \mu v^{(2)}$, $\mu \in K$ et $u\theta^{(2)} = \theta^{(2)}u$, alors on a $u = \gamma v'^{(2)}$, $\gamma = \gamma^{\sigma} \in K$, $v' \in GL_4(F)$ tel que $v'\theta = \theta v'$, et $\mu = \gamma\beta^2$, $\beta \in K$.*

Lemme 12. *Soient L une extension non commutative de K, σ un automorphisme involutif de L et σ' un antiautomorphisme involutif de L permutant à σ. Soient φ une corrélation involutive de F dans F^* relative à σ' et θ une collinéation involutive de F dans lui-même relative à σ telle que $\theta^2(x) = cx$, $x \in F$, c étant un élément du centre de L et que $\varphi\theta = c\check{\theta}\varphi$. (i) Si l'on a $\varphi v = \lambda\check{v}\varphi$, $v \in GL_4(F)$, $\lambda \in L$, alors $\lambda = \lambda^{\sigma'}$ et λ appartient au centre de L. (ii) Si en outre on a $v\theta = \theta v$, alors $\lambda = \lambda^{\sigma}$ est un élément de K.*

Lemme 13. *Soient ψ une application canonique de $F^{(2)}$ sur $F^{(2)*}$ et φ une corrélation involutive de F dans F^* relative à un automorphisme involutif σ de K. Pour $v \in GL_4(F)$, $\mu \in K$, si l'on a $\mu v^{(2)}\psi^{-1}\varphi^{(2)} = \psi^{-1}\varphi^{(2)}\mu v^{(2)}$, on a alors $\varphi v = \lambda\check{v}\varphi$, $\lambda \in K$, et $\lambda = \lambda^{\sigma}$, $|v| = \mu^{\sigma-1}\lambda^2$ où $|v|$ est le déterminant de v.*

3. Considérons d'abord le cas de l'indice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 6 sur K. Supposons que la forme quadratique $Q(x)$ soit rapportée à une base symplectique $(e_i)_{1 \leqq i \leqq 6}$ telle que

---

4) On a $\varphi\theta = c^t\theta^{-1}\varphi$, ${}^t\varphi = \varphi$ et ${}^t\theta\varphi = c\varphi\theta^{-1}$.

5) Comme $\theta^2 = c$, on a $\theta^{-1} = c^{-1}\theta$.

$$(7) \qquad Q(x) = a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_5+a_5\xi_5^2+\xi_3\xi_6\,,$$

où la forme quadratique à quatre variables $a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_5+a_5\xi_5^2$ est d'indice 0, ce qui entraîne en particulier que a_1a_4, a_2a_5 ne sont pas de la forme $\mathfrak{p}(b)=b^2+b$ dans K. Le pseudo-discriminant est

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Delta(Q) &= Q(e_1)Q(e_4)+Q(e_2)Q(e_5) \\ &= a_1a_4+a_2a_5\,. \end{aligned}$$

Soient ρ, ρ' des racines des équations $X^2+X+a_1a_4=0$, $X^2+X+a_2a_5=0$. Selon la remarque du n°2, nous sommes amenés à distinguer deux cas, suivant que $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K ou non, autrement dit que $\rho=\rho'$ ou $\rho\neq\rho'$.

4. Cas où $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. D'après le lemme 8, la forme quadratique $Q(x)$ peut être écrite (pour une base convenable)

$$Q(x) = a_1\{\xi_1'^2+\xi_1'\xi_4'+(\rho^2+\rho)\xi_4'^2\}+a_2\{\xi_2'^2+\xi_2'\xi_5'+(\rho^2+\rho)\xi_5'^2\}+\xi_3'\xi_6'\,.$$

Soit K_1 l'extension quadratique de K obtenue par adjonction de ρ et soit E_1 l'espace vectoriel obtenu par extension à K_1 du corps des scalaires K de E. Alors la forme Q est la restriction à E de la forme Q_1 définie sur E_1 telle que

$$Q_1(x) = a_1\{\xi_1'+\rho\xi_4'\}\{\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'\}+a_2\{\xi_2'+\rho\xi_5'\}\{\xi_2'+(\rho+1)\xi_5'\}+\xi_3'\xi_6'\,.$$

Les transformations de $GO_6^+(Q)$ sont les restrictions à E des transformations de $\mathrm{GO}_6^+(Q_1)$ qui permutent avec la transformation semi-linéaire involutive w: $(\xi_1', \cdots, \xi_6')\to(\xi_1'^\sigma, \cdots, \xi_6'^\sigma)$ de E_1, où σ est l'unique K-automorphisme de K_1, distinct de l'identité. Par le changement de coordonnées: $\eta_1=a_1(\xi_1'+\rho\xi_4')$, $\eta_2=a_2(\xi_2'+\rho\xi_5')$, $\eta_3=\xi_3'$, $\eta_4=\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'$, $\eta_5=\xi_2'+(\rho+1)\xi_5'$, $\eta_6=\xi_6'$, on a la forme quadratique d'indice 3 sur K_1,

$$Q_1(x) = \eta_1\eta_4+\eta_2\eta_5+\eta_3\eta_6\,.$$

Comme $a_1(\xi_1'^\sigma+\rho\xi_4'^\sigma)=a_1\{\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'\}^\sigma=a_1\eta_4^\sigma$, $a_2(\xi_2'^\sigma+\rho\xi_5'^\sigma)=a_2\{\xi_2'+(\rho+1)\xi_5'\}^\sigma=a_2\eta_5^\sigma$, $\xi_1'^\sigma+(\rho+1)\xi_4'^\sigma=(\xi'_1+\rho\xi'_4)^\sigma=a_1^{-1}\eta_1^\sigma$, $\xi_2'^\sigma+(\rho+1)\xi_5'^\sigma=(\xi_2'+\rho\xi_5')^\sigma=a_2^{-1}\eta_2^\sigma$, la transformation w s'ècrit $(\eta_1, \cdots, \eta_6)\to(a_1\eta_4^\sigma, a_2\eta_5^\sigma, \eta_3^\sigma, a_1^{-1}\eta_1^\sigma, a_2^{-1}\eta_2^\sigma, \eta_6^\sigma)$. Soient F_1 l'espace vectoriel de dimension 4 sur K_1 et ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 les éléments de sa base. Désignons par $F_1^{(2)}$ l'espace des bivecteurs sur F_1. On peut alors identifier E_1 à $F_1^{(2)}$ par la correspondance des éléments de base telle que $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)\leftrightarrow(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2, \varepsilon_1\wedge\varepsilon_3, \varepsilon_1\wedge\varepsilon_4, \varepsilon_3\wedge\varepsilon_4, \varepsilon_2\wedge\varepsilon_4, \varepsilon_2\wedge\varepsilon_3)$. Si θ est la transformation semi-linéaire relative à σ de F_1 dans lui-même: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\to(\varepsilon_4, a_2\varepsilon_3, a_1\varepsilon_2, a_1a_2\varepsilon_1)$, $\theta^{(2)}$ est la transformation semi-linéaire de $F_1^{(2)}$ dans lui-même: $(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2\wedge\varepsilon_3)\to$

$(a_2(\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4),\ a_1(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4),\ a_1a_2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4),\ a_1^2a_2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2),\ a_1a_2^2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3),\ a_1a_2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3))$. On a alors $w=(a_1a_2)^{-1}\theta^{(2)}$. D'après le lemme 9 (i), a_1a_2 n'est pas de la forme $\zeta\zeta^\sigma$ dans K_1. Alors, en vertu du lemme 4, on peut former l'extension quadratique K_2 de K_1 ayant 1 et ω comme base, avec $\omega^2=a_1a_2$, $\zeta^\sigma=\omega^{-1}\zeta\omega$ pour $\zeta \in K_1$. K_2 est le corps de quaternions généralisés sur K qui correspond au couple $(a_1a_4,\ a_1a_2)$: les quatre éléments $1, \rho, \omega, \rho\omega$ forment une base telle que $\omega^2=a_1a_2$, $\rho^2+\rho=a_1a_4$, $\omega^{-1}\rho\omega=\rho+1$. Comme θ est une transformation involutive telle que $\theta^2(x)=a_1a_2x$, d'après le lemme 5, l'espace F_1 peut être considéré comme un espace vectoriel F_2 de dimension 2 sur K_2. D'autre part, pour l'indice 3 on sait que $GO_6^+(Q)\simeq\dfrac{K_1^*\times GL_4(F_1)}{\{(\lambda^2,\ \lambda^{-1})\}}$ où λ parcourt K^*, [2], [3]. Alors, toute transformation u de $GO_6^+(Q_1)$ peut être écrite $u=\mu v^{(2)}$, où μ est un élément de K_1^* (homothétie) et v est une transformation linéaire sur F_1. La condition $wu=uw$ donne $\theta^{(2)}\mu v^{(2)}=\mu v^{(2)}\theta^{(2)}$, et d'après le lemme 11 on a $u=\gamma v'^{(2)}$ où $\gamma=\gamma^\sigma \in K$, $v' \in GL_4(F_1)$, $v'\theta=\theta v'$. Mais, on peut considérer v' comme une transformation linéaire de F_2 sur lui-même. La correspondance $\gamma v'^{(2)} \to u$ est donc un homomorphisme de $K^*\times GL_2(F_2)$ sur $GO_6^+(Q)$, avec un noyau $\{(\gamma^2,\ \gamma^{-1})\}$. On en conclut que $GO_6^+(Q)\simeq\dfrac{K^*\times GL_2(F_2)}{\{(\gamma^2,\ \gamma^{-1})\}}$ *où* γ *parcourt* K^*.

5. Cas où $\Delta(Q)$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. Les deux extensions quadratiques $K(\rho)$ et $K(\rho')$ sont linéairement disjointes sur K. Désignons par K_1 leur composé $K(\rho)K(\rho')$. Soit E_1 l'espace vectoriel obtenu à partir de E en étendant K à K_1. La forme quadratique $Q(x)$ est la restriction à E de la forme

$$Q_1(x)=a_1\{\xi_1'+\rho\xi_4'\}\{\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'\}+a_2\{\xi_2'+\rho'\xi_5'\}\{\xi_2'+(\rho'+1)\xi_5'\}+\xi_3'\xi_6'$$

sur E_1, (lemmes 7 et 8). Si l'on fait le changement de coordonnées: $\eta_1=\xi_1'+\rho\xi_4'$, $\eta_2=a_2(\xi_2'+\rho'\xi_5')$, $\eta_3=\xi_3'$, $\eta_4=a_1\{\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'\}$, $\eta_5=\xi_2'+(\rho'+1)\xi_5'$, $\eta_6=\xi_6'$, on a la forme d'indice 3 sur K_1,

$$Q_1(x)=\eta_1\eta_4+\eta_2\eta_5+\eta_3\eta_6\,.$$

Soient σ, τ les automorphismes de K_1 tels que $\rho^\sigma=\rho+1$, $\rho'^\sigma=\rho'$, $\rho^\tau=\rho$, $\rho'^\tau=\rho'+1$. On peut considérer que toute transformation de $GO_6^+(Q)$ est la restriction à E d'une transformation de $GO_6^+(Q_1)$ qui permute avec les deux transformations semi-linéaires w, w' sur E_1 données par w: $(\xi_1', \cdots, \xi_6')\to(\xi_1'^\sigma, \cdots, \xi_6'^\sigma)$ et w': $(\xi_1', \cdots, \xi_6')\to(\xi_1'^\tau, \cdots, \xi_6'^\tau)$. Les transformations w, w' sont $(\eta_1, \cdots, \eta_6)\to(a_1^{-1}\eta_4^\sigma,\ \eta_2^\sigma,\ \eta_3^\sigma,\ a_1\eta_1^\sigma,\ \eta_5^\sigma,\ \eta_6^\sigma)$ et $(\eta_1, \cdots, \eta_6)\to(\eta_1^\tau,\ a_2\eta_5^\tau,\ \eta_3^\tau,\ \eta_4^\tau,\ a_2^{-1}\eta_2^\tau,\ \eta_6^\tau)$. Soit F_1 un espace vectoriel de dimension 4 sur K_1 et soient φ, φ' deux corrélations relatives aux automorphismes σ, τ de F_1 sur F_1^* (l'espace dual de F_1) telles que φ: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\to(a_1\varepsilon_2^*,\ a_1\varepsilon_1^*,$

$\varepsilon_4^*, \varepsilon_3^*)$, φ' : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \to (\varepsilon_3^*, a_2\varepsilon_4^*, \varepsilon_1^*, a_2\varepsilon_2^*)$. Les applications semi-linéaires de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ déduites de φ, φ' sont $\varphi^{(2)}$: $(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to (a_1^2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, a_1(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, a_1(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, a_1(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, a_1(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$ et $\varphi'^{(2)}$: $(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to (a_2(\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, a_2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, a_2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, a_2^2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, a_2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$. Désignons par ψ l'application canonique de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ telle que $(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to ((\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$. On constate alors que

$$(9) \qquad w = \psi^{-1} a_1^{-1} \varphi^{(2)}, \quad w' = \psi^{-1} a_2^{-1} \varphi'^{(2)}.$$

Comme dans le cas précédent, pour tout $u \in GO_6^+(Q_1)$, on a $u = \mu v^{(2)}$ où μ est une homothétie dans E_1 et v appartient à $GL_4(F_1)$. Les deux conditions $wu = uw$, $w'u = uw'$ s'écrivent avec les relations (9) $\psi^{-1}\mu^\sigma \varphi^{(2)} v^{(2)} = \mu v^{(2)} \psi^{-1} \varphi^{(2)}$, $\psi^{-1}\mu^\tau \varphi'^{(2)} v^{(2)} = \mu v^{(2)} \psi^{-1} \varphi'^{(2)}$. Or, d'après le lemme 13, on a

$$(10) \qquad \varphi v = \lambda \check{v} \varphi, \quad \varphi' v = \lambda' \check{v} \varphi', \quad \lambda, \lambda' \in K_1.$$

Donc, pour que la restriction de $u = \mu v^{(2)}$ appartienne à $GO_6^+(Q)$ il faut et il suffit que v permute projectivement avec φ, φ'. Mais, si l'on introduit l'application semi-linéaire $\theta = a_2 \varphi'^{-1} \varphi$ de F_1 sur lui-même, relative à l'automorphisme $\pi = \sigma\tau = \tau\sigma$, ces conditions sont remplacées par

$$(11) \qquad \varphi v = \lambda \check{v} \varphi, \quad \theta v = \lambda'' v \theta, \quad \lambda, \lambda'' \in K_1.$$

Comme on peut voir facilement, θ est l'application de F_1 sur lui-même: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \to (a_1\varepsilon_4, a_1a_2\varepsilon_3, \varepsilon_2, a_2\varepsilon_1)$, donc on a

$$(12) \qquad \theta^2(x) = a_1 a_2 x.$$

D'après le lemme 9 (ii) a_1a_2 ne peut pas être écrit sous la forme $\zeta\zeta^\pi$, $\zeta \in K_1$. Formons à l'aide du lemme 4 l'extension quadratique K_2 de K_1 ayant 1 et ω pour base, définie par $\omega^2 = a_1a_2$, $\omega^{-1}\zeta\omega = \zeta^\pi$, $\zeta \in K_1$. Lorsque l'on considère l'extension quadratique K_0 de K obtenue par adjonction d'une racine de l'équation $X^2 + X + \Delta(Q) = 0$, alors π laisse invariant tous les éléments de K_0 et K_0 est le centre de K_2. L'extension K_2 est ainsi le corps de quaternions généralisés sur K_0, qui correspond au couple (a_1a_4, a_1a_2). Considérons l'espace vectoriel F_1, en vertu du lemme 5, comme un espace vectoriel par rapport à K_2. Désignons cet espace par F_2. D'après le lemme 6, l'automorphisme σ peut se prolonger en un antiautomorphisme σ' de K_2. Par le lemme 10, la forme g_1 sur F_1 définie par $g_1(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle$ correspond sur F_2 à la forme g telle que $g(x, y) = g_1(x, y) + (a_1a_2)^{-1} \omega g_1(\theta(x), y)$. Et de plus, on a $\varphi\theta = a_1a_2\check{\theta}\varphi$, parce que l'on a $\theta^2(x) = a_2^2 \varphi'^{-1}\varphi\varphi'^{-1}\varphi(x) = a_1a_2x$, donc $\varphi\theta(x) = a_1a_2{}^t(a_2\varphi'^{-1}\varphi)^{-1} \varphi(x) = a_1a_2\check{\theta}\varphi(x)$. Comme ${}^t\varphi = \varphi$, g_1 est alors hermitienne. En utilisant le lemme 10, g est aussi hermitienne.

D'autre part, en raison des relations (11) et (12), on a $\theta v\theta(x)=\lambda'' v\theta^2(x)$ $=\lambda'' a_1a_2v(x)$ et $\theta v\theta(x)=\theta(\lambda''^{-1}\theta v(x)=\lambda''^{-\pi}\theta^2 v(x)=\lambda''^{-\pi}a_1a_2v(x)$; ceci montre que $\lambda''\lambda''^{\pi}=1$. Si l'on choisit un élément β dans K_1 tel que $\beta^{1-\pi}=\lambda''$, $t=\beta v$ est une application linéaire de F_1 sur lui-même, telle que $\theta t=t\theta$. Car la condition (11) donne $\theta(\beta^{-1}t)=\lambda''(\beta^{-1}t)\,\theta$, $\beta^{-\pi}\theta t=\lambda''\beta^{-1}t\theta$, et $\theta t=\beta^{\pi}\lambda''\beta^{-1}t\theta=t\theta$. En appliquant le lemme 13 aux relations $u=\mu v^{(2)}$ $=\mu\beta^{-2}t^{(2)}=\mu_0 t^{(2)}$, $wu=uw$, $w'u=uw'$ et (9), on a

$$\varphi t=\lambda_0\check{t}\varphi\,,\quad \varphi' t=\lambda_0'\check{t}\varphi',\quad \lambda_0=\lambda_0^{\sigma}\in K_1,\quad \lambda_0'=\lambda_0'^{\tau}\in K_1\,, \tag{13}$$
$$|t|=\mu_0^{\sigma-1}\lambda_0^2=\mu_0^{\tau-1}\lambda_0'^2\,.$$

Mais d'après les relations $t\theta=\theta t$, $\theta=a_2\varphi'^{-1}\varphi$, et (13), on a $t\varphi'^{-1}\varphi=\varphi'^{-1}\varphi t$ $=\varphi'^{-1}\lambda_0\check{t}\varphi$, $\lambda_0\check{t}\varphi=\varphi' t\varphi'^{-1}\varphi=\lambda_0'\check{t}\varphi'\varphi'^{-1}\varphi=\lambda_0'\check{t}\varphi$, donc on a $\lambda_0=\lambda_0'$. Comme $\varphi\theta=a_1a_2\check{\theta}\varphi$, $\varphi t=\lambda_0\check{t}\varphi$, par le lemme 12 (i), λ_0 appartient à K_0. De plus, comme $\theta t=t\theta$, il résulte du lemme 12 (ii), que λ_0 appartient à K. Remarquons t peut être considéré comme une application linéaire de F_2 sur lui-même, car $t(x\omega)=t\theta(x)=\theta t(x)=t(x)\,\omega$. Les relations (13) et $\theta t=t\theta$ entraînent que $g(t(x), t(y))=g_1(t(x), t(y))+(a_1a_2)^{-1}\,\omega g_1(\theta t(x), t(y))$ $=\lambda_0 g_1(x, y)+(a_1a_2)^{-1}\,\omega\lambda_0 g_1(\theta(x), y)=\lambda_0 g(x, y)$, ce qui montre que t appartient au groupe $GU_2(F_2, g)$. Inversement, si t appartient à $GU_2(F_2, \check{g})$, on a aisément $g_1(t(x), t(y))=\lambda_1 g_1(x, y)$, $\lambda_1^{\sigma}=\lambda_1^{\tau}=\lambda_1$, donc $\varphi t=\lambda_1\check{t}\varphi$. Comme $t\theta=\theta t$, on a aussi $\varphi' t=\lambda_1\check{t}\varphi'$. Alors, pour que $u=\mu_0 t^{(2)}$ appartienne à $GO_6^+(Q)$, il faut et il suffit qu'on ait les relations (13). D'après la deuxième relation de (13) on a $\mu_0^{\sigma}=\mu_0^{\tau}$ et $\mu_0=\mu_0^{\pi}\in K_0$, ce qui est compatible avec les relations $|t||t|^{\sigma}=\mu_0^{\sigma-1}\lambda_0^2\mu_0^{1-\sigma}\lambda_0^2=\lambda_0^4=|t||t|^{\tau}$ et elles donnent aussi $|t|\in K_0$. Mais pour $\mu_0=\gamma\beta_0$, $\gamma\in K$, $\beta_0\in K_0$, on a de même $|t|=\mu_0^{\tau-1}\lambda_0^2=\beta_0^{\tau-1}\lambda_0^2$. En résumant ce qui précède, on conclut que $GO_6^+(Q)\simeq\Gamma/\{(\gamma^2, \gamma^{-1})\}$ *où* Γ *est le sous-groupe de* $K_0^*\times GU_2(F_2, g)$ *formé des couples* (μ_0, t) *tels que* $|t|=\mu_0^{\tau-1}\lambda_0^2$, $\mu_0\in K_0^*$, $t\in GU_2(F_2, g)$ *et où* γ *parcourt* K^*.

6. Considérons ensuite le cas de l'indice 0. La forme quadratique $Q(x)$ peut s'écrire

$$Q(x)=a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_5+a_5\xi_5^2+a_3\xi_3^2+\xi_3\xi_6+a_6\xi_6^2,$$

où les éléments a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6 ne sont pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. Soient ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3 des racines des équations: $X^2+X+\Delta(Q)=0$, $X^2+X+a_1a_4=0$, $X^2+X+a_2a_5=0$, $X^2+X+a_3a_6=0$. Le pseudo-discriminant est $\Delta(Q)=a_1a_4+a_2a_5+a_3a_6=\rho_0^2+\rho_0$, où $\rho_0=\rho_1+\rho_2+\rho_3$. Le corps $K_1=K(\rho_1$, ρ_2, $\rho_3)$ est une extension de K de degré 2, 4 ou 8.

(i) Dans le premier cas, on a ρ_2, $\rho_3\in K(\rho_1)$. Considérons séparément les deux formes quadratiques $Q'(x)=a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_5+a_5\xi_5^2$,

$Q''(x)=a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_3\xi_3^2+\xi_3\xi_6+a_6\xi_6^2$ et par le lemme 1 notons que $\Delta(Q')=a_1a_4+a_2a_5=\mathfrak{p}(d')$, $\Delta(Q'')=a_1a_4+a_3a_6=\mathfrak{p}(d'')$, $d', d''\in K$. Quand on applique le lemme 8 à Q', Q'', on a (en remarquant que les formules de transformation sont les mêmes pour les coordonnées d'indice 1 et 4)

$$Q(x)=a_1(\xi_1'^2+\xi_1'\xi_4'+a_1a_4\xi_4'^2)+a_2(\xi_2'^2+\xi_2'\xi_5'+a_1a_4\xi_5'^2)$$
$$+a_3(\xi_3'^2+\xi_3'\xi_6'+a_1a_4\xi_6'^2),$$

on peut alors supposer que $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho$. Dans ce cas, $\Delta(Q)=\rho^2+\rho$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K et $\rho_0=\rho$. D'après le lemme 7, la forme quadratique est ramenée sur K_1 à la forme Q_1 telle que

$$(14)\quad Q_1(x)=a_1\{\xi_1'+\rho\xi_4'\}\{\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'\}+a_2\{\xi_2'+\rho\xi_5'\}\{\xi_2'+(\rho+1)\xi_5'\}$$
$$+a_3\{\xi_3'+\rho\xi_6'\}\{\xi_3'+(\rho+1)\xi_6'\},$$

dont l'indice sur $K_1=K(\rho)$ est égal à 3.

Lorsque le degré de $K_1=K(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ sur K est égal à 4, on a deux possibilités suivant que les trois extensions $K(\rho_1)$, $K(\rho_2)$, $K(\rho_3)$ sont distinctes ou non. (ii) Si elles sont distinctes, puisque ρ_3 doit appartenir à $K(\rho_1, \rho_2)$ et que $\rho_3^2+\rho_3=a_3a_6$, selon le lemme 2, ρ_3 doit appartenir à $K(\rho_1+\rho_2)$. Comme $(\rho_1+\rho_2)^2+(\rho_1+\rho_2)=a_1a_4+a_2a_5$, $\rho_1+\rho_2$ tenant le rôle de ρ du lemme 1, $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(d)$. Par le même changement de variables qu'au lemme 8, $Q(x)$ se transforme en $Q(x)=a_1\{\xi_1'^2+\xi_1'\xi_4'+a_1a_4\xi_4'^2\}+a_2\{\xi_2'^2+\xi_2'\xi_5'+a_2a_5\xi_5'^2\}+a_3\{\xi_3'^2+\xi_3'\xi_6'+(d^2+d+a_3a_6)\xi_6'^2\}$. Comme $d^2+d+a_3a_6=a_1a_4+a_2a_5=(\rho_1+\rho_2)^2+(\rho_1+\rho_2)$, on a $Q(x)=a_1\{\xi_1'^2+\xi_1'\xi_4'+(\rho_1^2+\rho_1)\xi_4'^2\}+a_2\{\xi_2'^2+\xi_2'\xi_5'+(\rho_2^2+\rho_2)\xi_5'^2\}+a_3\{\xi_3'^2+\xi_3'\xi_6'+((\rho_1+\rho_2)^2+(\rho_1+\rho_2))\xi_6'^2\}$. Donc, on peut supposer que $\rho_3=\rho_1+\rho_2$ et $\Delta(Q)=0$. En conséquence, la forme Q étendue à K_1 s'écrit

$$(15)\quad Q_1(x)=a_1\{\xi_1'+\rho_1\xi_4'\}\{\xi_1'+(\rho_1+1)\xi_4'\}+a_2\{\xi_2'+\rho_2\xi_5'\}\{\xi_2'+(\rho_2+1)\xi_5'\}$$
$$+a_3\{\xi_3'+(\rho_1+\rho_2)\xi_6'\}\{\xi_3'+(\rho_1+\rho_2+1)\xi_6'\}.$$

(iii) Si deux des trois corps $K(\rho_1)$, $K(\rho_2)$, $K(\rho_3)$ coïncident, par exemple, $K(\rho_1)=K(\rho_2)$, comme dans le cas (i) on peut supposer que $\rho_1=\rho_2=\rho$. ρ_3 n'appartient pas à $K(\rho)$ et $\Delta(Q)=\rho_3^2+\rho_3$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. En utilisant le lemme 7 et le lemme 8, la forme Q s'écrit sur K_1 sous la forme

$$(16)\quad Q_1(x)=a_1\{\xi_1'+\rho\xi_4'\}\{\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'\}+a_2\{\xi_2'+\rho\xi_5'\}\{\xi_2'+(\rho+1)\xi_5'\}$$
$$+a_3\{\xi_3'+\rho_3\xi_6'\}\{\xi_3'+(\rho_3+1)\xi_6'\}.$$

L'indice de Q sur $K(\rho_0)$ est égal à 1 ou 3. Si cet indice est 3, il existe un sous-espace de dimension 3 dans E_0 (espace vectoriel obtenu en étendant K à $K(\rho_0)$) qui rencontre le sous-espace $\{\xi_3=\xi_6=0\}$. Alors, la restriction de Q à ce sous-espace, $Q_0(x)=a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_5+a_5\xi_5^2$

a l'indice 1 ou 2 sur $K(\rho_0)$. En changeant de base, on peut supposer, par exemple, que $a_1a_4=\beta^2+\beta$, $\beta\in K(\rho_0)$; en appliquant le lemme 1, on a $\Delta(Q)+a_1a_4=a_2a_5+a_3a_6=\mathfrak{p}(d)$ dans K. D'après le lemme 8, après le changement de base, on peut supposer que $\rho=\rho_3$, ceci est le cas (i). Par conséquent, dans le cas (iii) on ne traite que la forme Q d'indice 1 sur $K(\rho_0)$ et dans ce cas la forme Q_0 est d'indice 0 sur $K(\rho_0)$. Dans le cas où le degré de K_1 sur K est égal à 4, les raisonnements précédents prouvent que la condition que $K(\rho_1)$, $K(\rho_2)$, $K(\rho_3)$ sont distincts est équivalente à celle que $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K.

(iv) Lorsque le degré de K_1 sur K est égal à 8, ρ_i n'appartient pas à $K(\rho_j, \rho_k)$, $i\neq j$, $i\neq k$, $i, j, k=1, 2, 3$, et $\Delta(Q)=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2+(\rho_1+\rho_2+\rho_3)$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. D'après le lemme 7 et le lemme 8, la forme s'écrit sur K_1

$$(17)\quad Q_1(x)=a_1\{\xi_1'+\rho_1\xi_4'\}\{\xi_1'+(\rho_1+1)\xi_4'\}+a_2\{\xi_2'+\rho_2\xi_5'\}\{\xi_2'+(\rho_2+1)\xi_5'\}$$
$$+a_3\{\xi_3'+\rho_3\xi_6'\}\{\xi_3'+(\rho_3+1)\xi_6'\}\ .$$

L'indice de Q sur $K(\rho_0)$ peut être égal à 0, 1, 2 ou 3. Comme dans le cas (iii), si cet indice est égal à 1, 2 ou 3, on peut trouver une base de E à laquelle au moins un de a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6, par exemple, a_3a_6, est de la forme $\mathfrak{p}(\beta)$ dans $K(\rho_0)$. Par le lemme 1, on a $\Delta(Q)+a_3a_6=a_1a_4+a_2a_5=\mathfrak{p}(d)$, $d\in K$. Par le lemme 8, en changeant de base, on peut supposer que $\rho_1=\rho_2$, ce qui est examiné au cas (iii). Dans le cas (iv), on n'a donc à traiter que le cas où la forme Q est d'indice 0 sur $K(\rho_0)$.

7. Cas où le degré de K_1 sur K est égal à 2. Soient E un espace vectoriel de dimension 6 sur K et E_1 l'espace obtenu en étendant K à K_1. Faisons le changement de coordonnées : $\eta_1=a_1(\xi_1'+\rho\xi_4')$, $\eta_2=a_2(\xi_2'+\rho\xi_5')$, $\eta_3=a_3(\xi_3'+\rho\xi_6')$, $\eta_4=\xi_1'+(\rho+1)\xi_4'$, $\eta_5=\xi_2'+(\rho+1)\xi_5'$, $\eta_6=\xi_3'+(\rho+1)\xi_6'$. La forme (14) se transforme à la forme d'indice 3 sur E_1 telle que

$$Q_1(x)=\eta_1\eta_4+\eta_2\eta_5+\eta_3\eta_6\ .$$

Toute transformation du groupe $GO_6^+(Q)$ est la restriction à E d'une transformation de $GO_6^+(Q_1)$ qui permute avec la transformation semilinéaire w : $(\xi_1', \cdots, \xi_6')\rightarrow(\xi_1'^{\sigma}, \cdots, \xi_6'^{\sigma})$, où σ est l'automorphisme de K_1 sur K, distinct de l'identité. La transformation w est $(\eta_1, \cdots, \eta_6)\rightarrow(a_1\eta_4^{\sigma}, a_2\eta_5^{\sigma}, a_3\eta_6^{\sigma}, a_1^{-1}\eta_1^{\sigma}, a_2^{-1}\eta_2^{\sigma}, a_3^{-1}\eta_3^{\sigma})$. De même que dans le cas de l'indice 1, nous considérons l'espace vectoriel F_1 de dimension 4 sur K_1 et l'espace des bivecteurs $F_1^{(2)}$ sur F_1. Toute transformation u de $GO_6^+(Q_1)$ peut être écrite sous la forme $u=\mu v^{(2)}$, où μ est un élément de K_1^* et v appartient à $GL_4(F_1)$. D'autre part, prenons une corrélation involutive φ de F_1 sur F_1^* relative à l'automorphisme σ telle que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\rightarrow(\varepsilon_1^*, a_2a_3\varepsilon_2^*,$

$a_1a_3\mathcal{E}_3^*$, $a_1a_2\mathcal{E}_4^*$). L'application semi-linéaire $\varphi^{(2)}$ déduite de φ est une corrélation de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ telle que $(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)\to(a_2a_3(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)^*$, $a_1a_3(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_3)^*$, $a_1a_2(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_4)^*$, $a_1^2a_2a_3(\mathcal{E}_3\wedge\mathcal{E}_4)^*$, $a_1a_2^2a_3(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_4)^*$, $a_1a_2a_3^2(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)^*)$. Quand on désigne par ψ l'application canonique de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ telle que $(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)\to((\mathcal{E}_3\wedge\mathcal{E}_4)^*$, $(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_4)^*$, $(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)^*$, $(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)^*$, $(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_3)^*$, $(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_4)^*)$, on a alors $w=\psi^{-1}(a_1a_2a_3)^{-1}\varphi^{(2)}$. De la condition $wu=uw$, on tire $\psi^{-1}\varphi^{(2)}\mu v^{(2)}=\mu v^{(2)}\psi^{-1}\varphi^{(2)}$, et d'après le lemme 13 on a $\varphi v=\lambda\check{v}\varphi$, $|v|=\mu^{\sigma-1}\lambda^2$, $\lambda=\lambda^\sigma\in K$. On peut déterminer un élément μ dans K_1 satisfaisant à ces conditions, à un facteur près égal à un élément arbitraire γ de K^*. Si l'on pose $g(x, y)=\langle\varphi(x), y\rangle$, g est une forme hermitienne sur F_1 et v est une transformation appartenant au groupe $GU_4(F_1, g)$. Pour toute transformation v de $GU_4(F_1, g)$, l'application $v\to|v|\lambda^{-2}$ est une représentation de $GU_4(F_1, g)$ dans le groupe des éléments de norme 1 de K_1. D'où, on peut déterminer complètement la correspondance entre la restriction à E d'une transformation de $GO_6^+(Q_1)$ et une transformation de $GU_4(F_1, g)$. On a alors *l'isomorphisme* $GO_6^+(Q)\simeq\Gamma/\{(\gamma^2, \gamma^{-1})\}$ *où* Γ *est le sous-groupe de* $K_1^*\times GU_4(F_1, g)$ *formé des couples* (μ, v) *tels que* $|v|=\mu^{\sigma-1}\lambda^2$, $\mu\in K_1^*$, $v\in GU_4(F_1, g)$ *et où* γ *parcourt* K^*.

8. Cas où le degré de K_1 sur K est égal à 4 et où $\Delta(Q)$ est de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. Dans la forme qardratique (15), si l'on fait le changement de coordonnées tel que $\eta_1=a_1(\xi_1'+\rho_1\xi_4')$, $\eta_2=a_2(\xi_2'+\rho_2\xi_5')$, $\eta_3=a_3\{\xi_3'+(\rho_1+\rho_2)\xi_6'\}$, $\eta_4=\xi_1'+(\rho_1+1)\xi_4'$, $\eta_5=\xi_2'+(\rho_2+1)\xi_5'$, $\eta_6=\xi_3'+(\rho_1+\rho_2+1)\xi_6'$, on a la forme sur E_1 telle que

$$Q_1(x)=\eta_1\eta_4+\eta_2\eta_5+\eta_3\eta_6\,.$$

Soient σ_1, σ_2 les automorphismes de K_1 sur K distincts de l'identité, qui laissent invariants $K(\rho_2)$, $K(\rho_1)$ respectivement. Toute transformation de $GO_6^+(Q)$ est la restriction à E d'une transformation de $GO_6^+(Q_1)$ qui permute avec les deux transformations semi-linéaires w_1, w_2 de E_1 telles que $w_1: (\eta_1, \cdots, \eta_6)\to(a_1\eta_4^{\sigma_1}, \eta_2^{\sigma_1}, a_3\eta_6^{\sigma_1}, a_1^{-1}\eta_1^{\sigma_1}, \eta_5^{\sigma_1}, a_3^{-1}\eta_3^{\sigma_1})$, et $w_2: (\eta_1, \cdots, \eta_6)\to(\eta_1^{\sigma_2}, a_2\eta_5^{\sigma_2}, a_3\eta_6^{\sigma_2}, \eta_4^{\sigma_2}, a_2^{-1}\eta_2^{\sigma_2}, a_3^{-1}\eta_3^{\sigma_2})$. Considérons deux collinéations θ_1, θ_2 sur F_1 relatives aux automorphismes σ_1, σ_2 telles que $\theta_1: (\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_4)\to(\mathcal{E}_3, a_3\mathcal{E}_4, a_1a_3\mathcal{E}_1, a_1\mathcal{E}_2)$, $\theta_2: (\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_4)\to(\mathcal{E}_2, a_2a_3\mathcal{E}_1, a_3\mathcal{E}_4, a_2\mathcal{E}_3)$. De la même manière qu'aux numéros précédents, on en tire aisément que $\theta_1^{(2)}: (\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)\to(a_3(\mathcal{E}_3\wedge\mathcal{E}_4)$, $a_1a_3(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_3)$, $a_1(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)$, $a_1^2a_3(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)$, $a_1a_3(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_4)$, $a_1a_3^2(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_4))$, $\theta_2^{(2)}: (\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)\to(a_2a_3(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)$, $a_3(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_4)$, $a_2(\mathcal{E}_2\wedge\mathcal{E}_3)$, $a_2a_3(\mathcal{E}_3\wedge\mathcal{E}_4)$, $a_2^2a_3(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_3)$, $a_2a_3^2(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_4))$, et que $w_1=(a_1a_3)^{-1}\theta_1^{(2)}$, $w_2=(a_2a_3)^{-1}\theta_2^{(2)}$. Comme une transformation u de $GO_6^+(Q_1)$ s'écrit $u=\mu v^{(2)}$, $\mu\in K_1^*$, $v\in GL_4(F_1)$, les conditions $w_iu=uw_i$ sont remplacées par $(\theta_iv)^{(2)}=\mu^{1-\sigma_i}(v\theta_i)^{(2)}$, $i=1, 2$. Comme $\theta_1^2(x)=a_1a_3x$, le lemme 11 prouve qu'on a

$u=\mu_1 t_1^{(2)}$, $\mu_1\in K_1$, $t_1\in GL_4(F_1)$ tel que $\mu_1^{\sigma_1}=\mu_1$, $t_1\theta_1=\theta_1 t_1$, $\mu=\mu_1\beta_1^2$, $\beta_1\in K_1$.

D'autre part, a_1a_3 n'est pas de la forme $\zeta\zeta^{\sigma_1}$, $\zeta\in K_1=K(\rho_1, \rho_2)$. En effect, si on avait $a_1a_3=\zeta\zeta^{\sigma_1}$, $\zeta\in K_1$, selon le lemme 3, on aurait $\zeta=\zeta_1\zeta_3$, $\zeta_1\in K(\rho_1)$, $\zeta_3\in K(\rho_1+\rho_2)$, d'où $a_1a_3=\zeta_1\zeta_1^{\sigma_1}\zeta_3\zeta_3^{\sigma_1}$. Si l'on pose $\frac{\zeta_3}{a_3}=\zeta_3'$ on a $\frac{a_1}{a_3}=\zeta_1\zeta_1^{\sigma_1}\zeta_3'\zeta_3'^{\sigma_1}$. Par le changement de variables : $\xi_1'+\rho_1\xi_4'=\zeta_1^{-1}$, $\xi_2'+\rho_2\xi_5'=0$, $\xi_3'+(\rho_1+\rho_2)\xi_6'=\zeta_3'$, la forme quadratique Q deviendrait $Q(x)=a_1\zeta_1^{-1}\zeta_1^{-\sigma_1}+a_3\zeta_3'\zeta_3'^{\sigma_1}=0$, pour un vecteur non nul, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'indice 0. Appliquons la méthode générale. On peut définir l'extension quadratique L_1 de K_1, avec les éléments de base 1, ω_1, tels que $\omega_1^2=a_1a_3$, $\omega_1^{-1}\zeta\omega_1=\zeta^{\sigma_1}$, $\zeta\in K_1$, (lemme 4). En prenant $\omega_1^{\sigma_2}=\omega_1$, on peut prolonger σ_2 en un antiautomorphisme sur L_1. D'après le lemme 5, en posant $\theta_1(x)=x\omega_1$, l'espace vectoriel F_1 peut être considéré comme l'espace vectoriel F_1' de dimension 2 sur L_1. Comme $\theta_2\theta_1=\theta_1\theta_2$, pour $x'\in F_1'$, on a $\theta_2(x'\omega_1)=\theta_2\theta_1(x')=\theta_1\theta_2(x')=\theta_2(x')\,\omega_1=\theta_2(x')\omega_1^{\sigma_2}$, θ_2 devient une collinéation sur F_1', relative à l'automorphisme σ_2 de L_1 et t_1, θ_1 deviennent des transformations de $GL_2(F_1')$.

Montrons ensuite que a_2a_3 n'est pas de la forme $\zeta\zeta^{\sigma_2}$, $\zeta\in L_1$. Supposons que $a_2a_3=\zeta\zeta^{\sigma_2}$ pour un élément $\zeta=\alpha\omega_1+\beta$, α, $\beta\in K_1=K(\rho_1, \rho_2)$, alors cette relation donne $a_2a_3=(\alpha\omega_1+\beta)(\alpha^{\sigma_2}\omega_1^{\sigma_2}+\beta^{\sigma_2})=\alpha\omega_1\alpha^{\sigma_2}\omega_1+\alpha\omega_1\beta^{\sigma_2}+\beta\alpha^{\sigma_2}\omega_1+\beta\beta^{\sigma_2}=\alpha\alpha^{\sigma_1\sigma_2}\omega_1^2+\alpha\beta^{\sigma_1\sigma_2}\omega_1+\beta\alpha^{\sigma_2}\omega_1+\beta\beta^{\sigma_2}=a_1a_3\alpha\alpha^{\sigma_1\sigma_2}+\beta\beta^{\sigma_2}+(\alpha\beta^{\sigma_1\sigma_2}+\beta\alpha^{\sigma_2})\,\omega_1=0$, donc

$$a_2a_3+a_1a_3\alpha\alpha^{\sigma_1\sigma_2}+\beta\beta^{\sigma_2}=0\,, \tag{18}$$

$$\alpha\beta^{\sigma_1\sigma_2}+\beta\alpha^{\sigma_2}=0\,. \tag{19}$$

Si $\beta=0$, de la formule (18), on aurait $\frac{a_2}{a_1}=\alpha\alpha^{\sigma_1\sigma_2}$, d'où $a_1a_2=(a_1\alpha)(a_1\alpha)^{\sigma_1\sigma_2}$, $a_1\alpha\in K(\rho_1, \rho_2)$, ce qui ne peut pas se produire, par le lemme 9. Supposons donc $\beta\neq 0$. La formule (19) entraîne $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^{\sigma_2}}{\beta^{\sigma_1\sigma_2}}=\left(\frac{\alpha}{\beta^{\sigma_1}}\right)^{\sigma_2}$. Si l'on pose $\frac{\alpha}{\beta^{\sigma_1}}=\eta$, on a $\eta\beta^{\sigma_1}=\eta^{\sigma_2}\beta$. En le posant dans (18), on a $a_2a_3=a_1a_3\eta\beta^{\sigma_1}\eta^{\sigma_1\sigma_2}\beta^{\sigma_2}+\beta\beta^{\sigma_2}=a_1a_3\eta^{\sigma_2}\beta\eta^{\sigma_1\sigma_2}\beta^{\sigma_2}+\beta\beta^{\sigma_2}$, donc

$$a_2a_3=\beta\beta^{\sigma_2}(a_1a_3\eta^{\sigma_2}\eta^{\sigma_1\sigma_2}+1)\,. \tag{20}$$

Comme $(\eta^{\sigma_2})(\eta^{\sigma_2})^{\sigma_1}\in K(\rho_2)$, $\beta\beta^{\sigma_2}\in K(\rho_1)$, $a_2a_3\in K$, la formule (20) entraîne que $\eta^{\sigma_2}\eta^{\sigma_1\sigma_2}$ et $\beta\beta^{\sigma_2}$ doivent appartenir à K. Du lemme 3, il résulte qu'il existe des éléments η_1, η_3 tels que $\eta^{\sigma_2}=\eta_1\eta_3^{-1}$, $\eta_1\in K(\rho_1)$, $\eta_3\in K(\rho_1+\rho_2)$ et qu'il existe des éléments η_2, η_3' tels que $\beta=\eta_2^{-1}\eta_3'$, $\eta_2\in K(\rho_2)$, $\eta_3'\in K(\rho_1+\rho_2)$. Si l'on applique σ_2 à $\eta^{\sigma_2}=\eta_1\eta_3^{-1}$, on a $\eta=\eta_1\eta_3^{-\sigma_2}$. La relation $\eta\beta^{\sigma_1}=\eta^{\sigma_2}\beta$ donne alors $\eta_1\eta_3^{-\sigma_2}\eta_2^{-\sigma_1}\eta_3'^{\sigma_1}=\eta_1\eta_3^{-1}\eta_2^{-1}\eta_3'$, $\eta_3^{-\sigma_2}\eta_3'^{\sigma_1}=\eta_3^{-1}\eta_3'$, et

$\eta_3\eta_3'^{\sigma_1}=\eta_3'\eta_3^{\sigma_2}$. Lorsqu'on pose $\eta_3=a(\rho_1+\rho_2)+b$, $\eta_3'=a'(\rho_1+\rho_2)+b'$, $a, b, a', b'\in K$, on a $\{a(\rho_1+\rho_2)+b\}\{a'(\rho_1+\rho_2)+b'+a'\}=\{a'(\rho_1+\rho_2)+b'\}$ $\{a(\rho_1+\rho_2)+b+a\}$, donc $ba'=b'a$. Par suite, on a $a\eta_3'=a\{a'(\rho_1+\rho_2)+b'\}$ $=aa'(\rho_1+\rho_2)+ab'=aa'(\rho_1+\rho_2)+ba'=a'\{a(\rho_1+\rho_2)+b\}=a'\eta_3$. La relation (20) entraîne donc $a_2a_3=\eta_2^{-1}\eta_3'\eta_2^{-\sigma_2}\eta_3'^{\sigma_2}\{a_1a_3\eta_1\eta_3^{-1}\eta_1^{\sigma_1}\eta_3^{-\sigma_1}+1\}$, $a^2a_2a_3\eta_2\eta_2^{\sigma_2}$ $=(a\eta_3')(a\eta_3')^{\sigma_2}\{a_1a_3\eta_1\eta_1^{\sigma_1}\eta_3^{-1}\eta_3^{-\sigma_1}+1\}$, $a^2a_2a_3\eta_2\eta_2^{\sigma_2}=a'^2a_1a_3\eta_1\eta_1^{\sigma_1}+a'^2\eta_3\eta_3^{\sigma_2}$. D'où on a finalement

$$a_1(a'a_3\eta_1)(a'a_3\eta_1)^{\sigma_1}+a_2(aa_3\eta_2)(aa_3\eta_2)^{\sigma_2}+a_3(a'\eta_3)(a'\eta_3)^{\sigma_2}=0\,.$$

En prenant $\xi_1'+\rho_1\xi_4'=a'a_3\eta_1$, $\xi_2'+\rho_2\xi_5'=aa_3\eta_2$, $\xi_3'+(\rho_1+\rho_2)\xi_6'=a'\eta_3$, la forme quadratique Q serait égale à 0 pour un vecteur non nul, contrairement à l'hypothèse de l'indice 0.

On peut donc former l'extension quadratique L_2 de L_1 ayant pour base les éléments 1, ω_2 tels que $a_2a_3=\omega_2^2$, $\omega_2^{-1}\zeta\omega_2=\zeta^{\sigma_2}$, $\zeta\in L_1$, (lemme 4). Comme $\theta_2^2(x)=a_2a_3x$, l'espace vectoriel F_1' de dimension 2 sur L_1 peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension 1 sur L_2, avec $\theta_2(x)=x\omega_2$, (lemme 5), autrement dit, l'espace F_1' peut être identifié au corps L_2. Pour $u=\mu_1t_1^{(2)}$, $\mu_1^{\sigma_1}=\mu_1\in K(\rho_2)$, les relations $\theta_2^2(x)=a_2a_3x$, $u\theta_2^{(2)}=\theta_2^{(2)}u$ donnent $u=\mu_2t_2^{(2)}$ tel que $\mu_2^{\sigma_2}=\mu_2$, $\mu_1=\mu_2\beta_2^2$, $t_2\theta_2=\theta_2t_2$, et donc $\mu_2=\beta_1^{-2}\beta_2^{-2}\mu\in K$, (lemme 11). Pour un élément $\xi+\omega_2\eta$ de L_2 on a $t_2(\xi+\omega_2\eta)=t_2(1)\,\xi+t_2\theta_2(1)\,\eta=t_2(1)\,\xi+\theta_2t_2(1)\,\eta=t_2(1)\xi+t_2(1)\,\omega_2\eta=t_2(1)(\xi+\omega_2\eta)$, cela signifie que t_2 est une homothétie du corps L_2. Comme à la fin du n°4, on conclut que $GO_6^+(Q)\simeq\dfrac{K^*\times L_2{}^*}{\{(\gamma^2,\,\gamma^{-1})\}}$ *où* γ *parcourt* K^*.

9. Cas où le degré de K_1 de K est égal à 4 et où $\Delta(Q)$ n'est pas de la forme $\mathfrak{p}(b)$ dans K. Notons d'abord que la forme Q se transforme sur $K_1=K(\rho,\ \rho_3)$ en la forme (16), donc $Q_1(x)=\eta_1\eta_4+\eta_2\eta_5+\eta_3\eta_6$ et que la forme $a_1\xi_1^2+\xi_1\xi_4+a_4\xi_4^2+a_2\xi_2^2+\xi_2\xi_5+a_5\xi_5^2$ est d'indice 0 sur le corps $K_0=K(\rho_0)$, $\rho_0=\rho_3$.

Comme dans les cas précédents, on peut considérer que toute transformation u de $GO_6^+(Q)$ doit permuter avec les transformations $w:\ (\eta_1,\cdots,\eta_6)\to(a_1\eta_4^\sigma,\ a_2\eta_5^\sigma,\ \eta_3^\sigma,\ a_1^{-1}\eta_1^\sigma,\ a_2^{-1}\eta_2^\sigma,\ \eta_6^\sigma)$, $w':\ (\eta_1,\cdots,\eta_6)\to(\eta_1^\tau,$ $\eta_2^\tau,\ a_3\eta_6^\tau,\ \eta_4^\tau,\ \eta_5^\tau,\ a_3^{-1}\eta_3^\tau)$, où σ,τ sont des automorphismes de K_1 sur K, distincts de l'identité, qui laissent invariants $K(\rho_3)$, $K(\rho)$ respectivement. D'après la méthode du n°5, prenons la collinéation θ de F_1 sur lui-même telle que $\theta:\ (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4)\to(\varepsilon_4,\ a_2\varepsilon_3,\ a_1\varepsilon_2,\ a_1a_2\varepsilon_1)$ relative à σ et la corrélation φ de F_1 sur $F_1{}^*$ telle que $\varphi:\ (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4)\to(\varepsilon_4{}^*,\ a_3\varepsilon_3{}^*, a_3\varepsilon_2{}^*,\ \varepsilon_1{}^*)$ relative à τ. Alors sur $F_1^{(2)}$, $\theta^{(2)}$ est la collinéation : $(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_2\wedge\varepsilon_3)\to(a_2(\varepsilon_3\wedge\varepsilon_4),$ $a_1(\varepsilon_2\wedge\varepsilon_4), a_1a_2(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4),\ a_1^2a_2(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2),\ a_1a_2^2(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3), a_1a_2(\varepsilon_2\wedge\varepsilon_3))$ et $\varphi^{(2)}$ est la corrélation : $(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_2\wedge\varepsilon_3)\to(a_3(\varepsilon_3\wedge\varepsilon_4)^*,\ a_3(\varepsilon_2\wedge\varepsilon_4)^*,\ (\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4)^*,\ a_3(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2)^*,$

$a_3(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, a_3^2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*)$. On en déduit que $w=(a_1a_2)^{-1}\theta^{(2)}$ et $w'=\psi^{-1}a_3^{-1}\varphi^{(2)}$, où ψ est l'application canonique de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ telle que $(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to ((\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$. En considérant $K_1 = K_0(\rho)$ et en appliquant le lemme 9 (i) à la forme $a_1\xi_1^2 + \xi_1\xi_4 + a_4\xi_4^2 + a_2\xi_2^2 + \xi_2\xi_5 + a_5\xi_5^2$, on peut montrer que a_1a_2 n'est pas de la forme $\zeta\zeta^\sigma$ dans K_1. On considère l'extension quadratique K_2 de K_1 ayant 1 et ω comme base telle que $\omega^2 = a_1a_2$, $\omega^{-1}\zeta\omega = \zeta^\sigma$, $\zeta \in K_1$. Désignons par τ' l'antiautomorphisme de K_2 prolongeant τ tel que $\omega^{\tau'} = \omega$, (lemme 6). Le corps K_2 est alors un corps des quaternions généralisés sur K_0, qui correspond au couple (a_1a_4, a_1a_2) tel que $\rho^2 + \rho = a_1a_4$, $\omega^2 = a_1a_2$, $\omega^{-1}\rho\omega = \rho + 1$.

La condition $uw = wu$ donne $u\theta^{(2)} = \theta^{(2)}u$ et comme $\theta^2(x) = a_1a_2x$, pour $u=\mu v^{(2)}$ cette condition entraîne que $u=\mu_0 t^{(2)}$, $t\theta=\theta t$, $\mu_0=\mu_0^\sigma \in K_0$, $\mu=\mu_0\beta^2$, $\beta \in K_1$, où $t \in GL_4(F_1)$, (lemme 11). Pour $u = \mu_0 t^{(2)}$ la condition $uw' = w'u$ donne $\mu_0 t^{(2)}\psi^{-1}\varphi^{(2)} = \psi^{-1}\varphi^{(2)}\mu_0 t^{(2)}$, d'où on a $\varphi t = \lambda_0 \check{t}\varphi$, $|t| = \mu_0^{\tau-1}\lambda_0^2$, (lemme 13). D'autre part, en vertu de la correspondance entre une forme sesquilinéaire g sur F_2 de dimension 2 (l'espace F_1 considéré comme un espace vectoriel sur K_2) et la forme g_1 définie par φ sur F_1 de dimension 4, telle que $g(x, y) = g_1(x, y) + \omega(a_1a_2)^{-1} g_1(\theta(x), y)$, g est une forme hermitienne, comme on a vu aux cas précédents. On a alors $t \in GU_2(F_2, g)$. Comme $\varphi\theta = a_1a_2\check{\theta}\varphi$, $\varphi t = \lambda_0\check{t}\varphi$ implique $\lambda_0 = \lambda_0^\tau \in K(\rho)$, (lemme 12 (i)), et de plus $t\theta = \theta t$ entraîne $\lambda_0 = \lambda_0^\sigma \in K$, (lemme 12 (ii)). D'où on ètablit *l'isomorphisme* $GO_6^+(Q) \simeq \Gamma/\{(\gamma^2, \gamma^{-1})\}$, *où* Γ *est le sous-groupe de* $K_0 \times GU_2(F_2, g)$ *formé des couples* (μ_0, t) *tels que* $|t| = \mu_0^{\tau-1}\lambda_0^2$, $\mu_0 \in K_0$, $t \in GU_2(F_2, g)$ *et où* γ *parcourt* K^*.

10. Cas où le degré de K_1 sur K est égal à 8. Par le changement de coordonnées : $\eta_1 = a_1(\xi_1' + \rho_1\xi_4')$, $\eta_2 = a_2(\xi_2' + \rho_2\xi_5')$, $\eta_3 = a_3(\xi_3' + \rho_3\xi_6')$, $\eta_4 = \xi_1' + (\rho_1 + 1)\xi_4'$, $\eta_5 = \xi_2' + (\rho_2 + 1)\xi_5'$, $\eta_6 = \xi_3' + (\rho_3 + 1)\xi_6'$, la forme quadratique (17) se réduit sur E_1 à la forme

$$Q_1(x) = \eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_5 + \eta_3\eta_6 .$$

Soit σ_i, $i = 1, 2, 3$, l'automorphisme de K_1 sur K qui laisse invariant ρ_j, ρ_k, $j \neq i$, $k \neq i$, $j, k = 1, 2, 3$ et qui transforme ρ_i en $\rho_i + 1$. Toute transformation de $GO_6^+(Q)$ est la restriction à E d'une transformation u de $GO_6^+(Q_1)$, qui permute avec les transformations semi-linéaires $w_i : (\xi_1', \cdots, \xi_6') \to (\xi_1'^{\sigma_i}, \cdots, \xi_6'^{\sigma_i})$, $i = 1, 2, 3$. Considérons les trois corrélations involutives φ_i de F_1 and F_1^*, relatives aux automorphismes σ_i, $i = 1, 2, 3$, définies par $\varphi_1 : (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4) \to (\varepsilon_2^*, \varepsilon_1^*, a_1\varepsilon_4^*, a_1\varepsilon_3^*)$, $\varphi_2 : (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4) \to (\varepsilon_3^*, a_2\varepsilon_4^*, \varepsilon_1^*, a_2\varepsilon_2^*)$, $\varphi_3 : (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4) \to (\varepsilon_4^*, a_3\varepsilon_3^*, a_3\varepsilon_2^*, \varepsilon_1^*)$. Les corrélations $\varphi_i^{(2)}$ de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ sont données par

$$\varphi_1^{(2)} : (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to$$
$$((\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, a_1(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, a_1(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, a_1^2(\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, a_1(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, a_1(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$$
$$\varphi_2^{(2)} : (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to$$
$$(a_2(\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, a_2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, a_2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, a_2^2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, a_2(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$$
$$\varphi_3^{(2)} : (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to$$
$$(a_3(\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, a_3(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*, a_3(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, a_3(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, a_3^2(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*) .$$

On constate alors que $w_i = \psi^{-1} a_i^{-1} \varphi_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3$ où ψ est l'application canonique de $F_1^{(2)}$ sur $F_1^{(2)*}$ telle que $(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \to ((\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_4)^*, (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3)^*, (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4)^*)$. Pour que $w_i u = u w_i$ avec $u = \mu v^{(2)}$, $\mu \in K_1^*$, $v \in GL_4(F_1)$, il faut et il suffit que v permute projectivement avec φ_i, $i = 1, 2, 3$, (lemme 13). Si l'on considère les collinéations involutives $\theta_1 = a_3 \varphi_3^{-1} \varphi_2$, $\theta_3 = a_1 \varphi_1^{-1} \varphi_2$, relatives à $\tau_1 = \sigma_2 \sigma_3$ et $\tau_3 = \sigma_1 \sigma_2$, v doit aussi permuter projectivement avec elles. Comme on a vu au n°4, on a $\theta_1^2 = a_2 a_3$, $\theta_3^2 = a_1 a_2$, $\theta_1 \theta_3 = \theta_3 \theta_1$, $\varphi_2 \theta_1 = a_2 a_3 \check{\theta}_1 \varphi_2$, $\varphi_2 \theta_3 = a_1 a_2 \check{\theta}_3 \varphi_2$. Notons que $K_1 = K(\rho_0)(\rho_2, \rho_3) = K_0(\rho_2, \rho_3)$ où $\rho_0 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, que l'automorphisme τ_1 laisse invariant K_0 et que la forme Q est d'indice 0 sur K_0. Le lemme 9 (ii) montre que $a_2 a_3$ n'est pas de la forme $\zeta\zeta^{\tau_1}$, $\zeta \in K_1 = K_0(\rho_2, \rho_3)$. Formons alors l'extension quadratique L_1 de K_1 ayant pour base les éléments $1, \omega_1$ tels que $\omega_1^2 = a_2 a_3$, $\omega_1^{-1} \zeta \omega_1 = \zeta^{\tau_1}$ pour $\zeta \in K_1$, (lemme 4). En posant $\omega_2^{\sigma_2'} = \omega_1$ l'automorphisme σ_2 peut être prolongé en un antiautomorphisme σ_2' de L_1, (lemme 6) et τ_3 en un automorphisme τ_3' de L_1 en posant $\omega_1^{\tau_3'} = \omega_1$. D'une façon générale, l'espace vectoriel F_1 de dimension 4 peut être considéré comme un espace vectoriel F_1' de dimension 2 sur L_1, (lemme 5). Désignons par φ' la corrélation de F_1' sur $F_1'^*$ correspondant à φ_2, relative à l'antiautomorphisme σ_2'. Soient g_2, g' les formes sesquilinéaires sur F_1, F_1' definies par φ_2, φ'. D'après le lemme 10, la corrélation φ' correspond à la forme g' telle que $g'(x, y) = g_2(x, y) + \omega_1 (a_2 a_3)^{-1} g_2(\theta_1(x), y)$. Lorsque l'on considère θ_3 comme une collinéation sur F_1', la condition $\varphi_2 \theta_3 = a_1 a_2 \check{\theta}_3 \varphi_2$ entraîne $\varphi' \theta_3 = a_1 a_2 \check{\theta}_3 \varphi'$. Les conditions $w_2 u = u w_2$, $w_3 u = u w_3$ donnent $\theta_1^{(2)} u = u \theta_1^{(2)}$ et, pour $u = \mu v^{(2)}$, le lemme 11 montre que $t_1 \theta_1 = \theta_1 t_1$ où $u = \mu_1 t_1^{(2)}$, $t_1 \in GL_2(F_1')$. La condition $w_2 u = u w_2$ entraîne $u \psi^{-1} \varphi'^{(2)} = \psi^{-1} \varphi'^{(2)} u$ et pour $u = \mu_1 t_1^{(2)}$ le lemme 13 donne $\varphi' t_1 = \lambda_0 \check{t}_1 \varphi'$. Faisant jouer par K_0 le rôle de K dans le n°8 et considérant $L_1 = K_0(\rho_2, \rho_3, \omega_1)$, on peut montrer que $a_1 a_2$ n'est pas de la forme $\zeta\zeta^{\tau_3}$, $\zeta \in L_1$. On forme encore l'extension quadratique L_2 de L_1 ayant pour base les éléments $1, \omega_2$ tels que $\omega_2^2 = a_1 a_2$, $\omega_2^{-1} \zeta \omega_2 = \zeta^{\tau_3'}$ pour $\zeta \in L_1$. Si l'on identifie deux éléments $1, \omega_2$ aux éléments de base de F_1', on considère L_2 comme l'espace vectoriel F_1'. En posant $\omega_2^{\tau_3'} = \omega_2$, on prolonge τ_3' en un automorphisme de L_2. D'autre part, la corrélation φ'

correspond à la corrélation φ de l'espace $F_1''=L_2$ sur $F_1''^*$, qui définit la forme bilinéaire g sur L_2 telle que

$$g(x, y)=g'(x, y)+\omega_2(a_1a_2)^{-1}g'(\theta_3(x), y)=(a_1a_2a_3)^{-1}x^{\sigma_2''}\omega_2\omega_1 y\,,$$

où σ_2'' est l'antiautomorphisme σ_2' prolongé en posant $\omega_2^{\sigma_2''}=\omega_2$. Comme ${}^t\varphi_2=\varphi_2$, la forme g_1 sur F_1 est hermitienne, alors g' l'est aussi et donc g est une forme hermitienne. Les conditions $w_1u=uw_1$, $w_2u=uw_2$ donnent $\theta_3^{(2)}u=u\theta_3^{(2)}$ et donc, pour $u=\mu_1t_1^{(2)}$, le lemme 11 prouve que $t_3\theta_3=\theta_3t_3$, $u=\mu_0t_3^{(2)}$. D'autre part, $w_2u=uw_2$ implique pour $u=\mu_0t_3^{(2)}$, $\varphi''t_3=\lambda''\check{t}_3\varphi''$, (lemme 13). Comme $\theta_3^2(x)=a_1a_2x$, $\varphi_2\theta_3=a_1a_2\check{\theta}_3\varphi_2$, d'après le lemme 12 (i) λ'' appartient au centre de L_2 et d'après le lemme 12 (ii) λ'' est un élément de K. Notons que t_3 est une homothétie dans L_2 et posons $t_3(\zeta)=t\zeta$, $t, \zeta\in L_2$, par le même raisonnement qu'à la fin du n°8. On a alors $t^{\tau_3}\omega_2\omega_1t=\lambda''\omega_2\omega_1$. En effet, $\varphi''t_3(1\omega_2\omega_1)=\varphi''(1t_3\omega_2\omega_1)$ $=\varphi''(1)t_3^{\tau_3'}\omega_2^{\tau_3'}\omega_1^{\tau_3'}=\varphi''(1)t_3^{\tau_3'}\omega_2\omega_1$ et $\lambda''\check{t}_3\varphi''(1\omega_2\omega_1)=\lambda''\check{t}_3(\varphi''(1)\omega_2^{\tau_3'}\omega_1^{\tau_3'})$ $=\lambda''\varphi''(1)\omega_2\omega_1t^{-1}$. Toute transformation u peut alors être écrite $u=\mu_0t_3^{(2)}$ avec $t_3\in GU_1(L_2, g)$. Inversement, si t_3 est un élément de $GU_1(L_2, g)$, on a $\varphi''t_3=\lambda'\check{t}_3\varphi''$, $\lambda'\in K$, et $\varphi_2t_3=\lambda'\check{t}_3\varphi_2$. Les conditions $t_3\theta_1=\theta_1t_3$, $t_3\theta_3=\theta_3t_3$ donnent $\varphi_1t_3=\lambda'\check{t}_3\varphi_1$, $\varphi_3t_3=\lambda'\check{t}_3\varphi_3$. Appliquons la méthode exposée à la fin du n° 5. La condition que $u=\mu_0t_3^{(2)}$ appartient à $GO_6^+(Q)$ est équivalente à celle que $\mu_0^{\sigma_i-1}$ est égal à $|t_3|\lambda'^{-2}$ pour chaque $i=1, 2, 3$, cette relation est obtenue par le lemme 13 appliqué à chaque $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Comme μ_0 est invariant par deux des automorphismes σ_i, $i=1, 2, 3$, μ_0 est un élément de $K_0=K(\rho_1+\rho_2+\rho_3)$. On a $|t_3|\,|t_3|^{\sigma_i}=\lambda'^4$ pour chaque $i=1, 2, 3$, donc $|t_3|\in K_0$. Si l'on choisit un élément $\beta'\in K_0$ tel que $\beta'^{\sigma_1-1}\lambda'^2=|t_3|$, pour un élément arbitraire γ de K, on a de même $|t_3|=\mu_0^{\sigma_1-1}\lambda'^2=\beta'^{\sigma_1-1}\lambda'^2$. En résumant ce qui précède, on constate que $GO_6^+(Q)\simeq\Gamma/\{(\gamma^2, \gamma^{-1})\}$, *où* Γ *est le sous-groupe de* $K_0^*\times GU_1(L_2, g)$ *formé des couples* (μ_0, t_3) *tels que* $|t_3|=\mu_0^{\sigma_1-1}\lambda'^2$ *et où* γ *parcourt* K^*.

(Reçu le 22 Septembre, 1958)

Références

[1] J. Dieudonné: La géométrie des groupes classiques.

[2] B. L. van der Waerden: Gruppen von linearen Transformationen.

[3] J. Dieudonné: Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications, Acta Math. **87** (1952).