Osaka Mathematical Journal
Vol. 4, No. 2, December, 1952

Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen

Von Kenjiro SHODA

In den früheren Arbeiten[1] über die allgemeinen algebraischen Systeme haben wir uns meistens mit der Verallgemeinerung der Gruppentheorie, sowie der Ringtheorie beschäftigt. Dabei haben wir die ganze Theorie auf den folgenden Grundvoraussetzungen[2] aufgebaut, die wir in der vorliegenden Arbeit auch stets annehmen werden.

I. *Es gibt ein (festzusetzendes) Nullelement* 0.
II. *Die algebraische Vereinigung zweier normalen Untersysteme ist normal.*
III. *Jeder Meromorphismus ist Klassenmeromorphismus.*

Dort haben wir ferner auch allgemeine Erweiterung eines Systems betrachtet und den Begriff der algebraischen Abhängigkeit eingeführt.

In der vorliegenden Arbeit studieren wir die Theorie der algebraischen Erweiterungen eines Systems, die man sowohl als eine Verallgemeinerung der Steinitzschen Theorie der Körper[3] als auch als die der von R. Baer und T. Szele entwickelten Theorie der Abelschen Gruppe[4] anzusehen ist. Dabei beschränken wir uns auf den primitiven Systeme.[5]

---

1) K. Shoda: Über die allgemeinen algebraischen Systeme I-VIII, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 17 (1941), 323-327; 18 (1942), 179-185, 227-232, 276-279; 19 (1943), 120-124, 259-263, 515-517; 20 (1944), 584-588; zitiert nach den Nummern. Allgemeine Algebra, Osaka Math. J. 1 (1949), 182-225, zitiert mit AA.

2) Ein Element heisst Nullelement, wenn es allein ein Untersystem bildet, also, wenn es bei der vorgegebenen Verknüpfungen geschlossen ist. Eine durch einen Homomorphismus induzierte Klasseneinteilung führt uns zum Begriff des Restklassensystems. Eine das festgesetzte Nullelement enthaltende Restklasse eines geeigneten Restklassensystems heisst normales Untersystem.

3) E. Steinitz: Algebraische Theorie der Körper, Crelles Journ. 137 (1910), 167-309.

4) R. Baer: Abelian groups that are direct summands of every containing Abelian group, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 800-806. T. Szele: Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppe, Crelle's Journ. 188 (1950), 168-192.

5) Unter einem primitiven System verstehen wir ein System, das durch die ausnahmslos ausführbaren Verknüpfungen definiert ist. Vgl. I. Der Begiff des Körpers ist nicht primitv. Aber ist der Begriff des Ringes mit einem festen Koeffizientkörper ist primitiv. Die in dieser Arbeit angegebene Definition der algebraischen Elemente stimmen dann ersichtlich mit der Körpertheorie überein. Der Begriff der Abelschen Gruppe mit einem festen Operatorring ist primitiv.

Den Anfangspunkt bildet der Begriff der algebraischen Elemente, der eine natürgemässe Verallgemeinerung des Begriffs in des Körpertheorie ist. Wir werden uns hier damit begnügen, die Theorie der algebraischen Erweiterungen § 1, die der Polynome § 2, den Satz über die Existenz und die Eindeutigkeit der algebraisch abgeschlossenen algebraischen Erweiterung § 3 zu verallgemeinern. Die Theorie ist aber nicht genügend die Theorie der Körper und die Theorie der Abelschen Gruppen gänzlich und einheitlich zu entwickeln. Auf die nicht algebraischen Erweiterungen hoffen wir in einer anderen Stelle einzugehen.

Wir werden stets annehmen:

IV. *Jedes Restklassensystem wird durch das normale Untersystem (Modul) eindeutig bestimmt.*

Dadurch wird die Theorie erheblich vereinfacht. Die Voraussetzung, dass jedes Untersystem normal ist, zieht die meisten Voraussetzungen in den Sätzen nach sich und dadurch erhält man ferner noch gewisse genauere Analogien mit der Theorie der Abelschen Gruppen.

§ 1. Algebraische Erweiterung. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Untersystem eines primitiven Systems Ω. Wir werden im folgenden den Bereich V der Verknüpfungen und das System der Axiomengleichungen fest. Ω heisst eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Ein Element α aus Ω heisst *transzendent* über $\mathfrak{A}$, wenn das durch $\mathfrak{A}$ und α erzeugte System $\mathfrak{A}(\alpha)$ das freie Produkt[6] von $\mathfrak{A}$ und α ist. Ein nicht transzendentes Element heisst *formal algebraisch*.[7] Ein Element α heisst *algebraisch*[8] über $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}(\alpha)$ keine Kongruenz besitzt derart, dass je zwei Elemente aus $\mathfrak{A}$ inkongruent sind. Nach der Voraussetzung IV ist α dann und nur dann algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn es kein normales Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}(\alpha)$ mit $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B} = 0$ gibt. Dabei bedeutet 0 das nach I festgesetzte Nullelement von $\mathfrak{A}(\alpha)$, also von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Ist α transzendent über $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ ersichtlich zu $\mathfrak{A}(\alpha)$ homomorph, also ist α nicht algebraisch, d. h. ein algebraisches Element ist formal algebraisch. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht. Eine Erweiterung heisst *algebraisch*, wenn die zugehörigen Elemente sämtlich algebraisch sind.

---

6) Vgl. I.

7) Dieser Begriff ist mit dem Begriff der Abhängigkeit in VII; AA, 56 äquivalent. Es handelt sich in der Körpertheorie um eine Erweiterung, die zum Restklassenring von $\mathfrak{A}(x)$ nach einem, nicht notwendig irreduziblen, Polynom isomorph ist. Vgl. die Anmerkung.[5]

8) Die hier angegebene Definition des algebraischen Elementes is keine direkte Verallgemeinerung der Definition von T. Szele in der Theorie der Abelschen Gruppe. Sie ist auch verschieden von der Definition in VII; AA, § 6. Ein algebraisches Element ist auch algebraisch im Sinne von T. Szele. Es gilt aber nicht die Umkehrung.

Eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ heisst *schwach zerfallend*, wenn es ein Restklassensystem $\Omega/\mathfrak{B}$ von Ω gibt derart, dass jede Restklasse genau ein Element aus $\mathfrak{A}$ enthält. Dies ist genau der Fall, dass $\Omega/\mathfrak{B}$ natürlicherweise zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

Satz 1. *Eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn Ω keine schwach zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ enthält.*

Beweis: Ist α nicht algebraisch über $\mathfrak{A}$, so gibt es nach der Definition und IV ein von Null verschiedenes normales Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}(\alpha)$ und $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ ist zu $\mathfrak{A}$ isomorph. Also ist $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ eine schwach zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Besitzt $\mathfrak{A}$ eine schwach zerfallende Erweiterung $\mathfrak{C}$ in Ω, so ist $\mathfrak{A}$ einem Restklassensystem $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$ isomorph. Ist γ ein in $\mathfrak{A}$ nicht liegendes, also von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{C}'$, so ist $\mathfrak{A}(\gamma)$ auch eine schwach zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{A}(\gamma)/\mathfrak{A}(\gamma)\cap\mathfrak{C}'$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist. Daher ist γ nicht algebraisch über $\mathfrak{A}$.

Eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ heisst zerfallend,[9] wenn $\Omega=\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=0$. Dabei dedeutet $\mathfrak{B}$ ein normales Untersystem von Ω. Dann ist $\Omega/\mathfrak{B}$ nach der Voraussetzung IV zu $\mathfrak{A}$ isomorph,[10] also ist schwach zerfallend über $\mathfrak{A}$. Nach dem Beweis des Satzes 1 erhält man

Satz 2. *Eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn Ω keine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ enthält.*

Ist $\mathfrak{A}'$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$, α ein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$, so ist α nicht notwendig algebraisch über $\mathfrak{A}'$. Es gilt aber

Satz 3. *Sind $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'\leq\mathfrak{A}''$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$.*

Beweis: Ist $\mathfrak{A}''$ nicht algebraisch über $\mathfrak{A}'$, so besitzt $\mathfrak{A}''$ nach Satz 1 eine schwach zerfallende Erweiterung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}'$ mit dem normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{C}$. Dann ist $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ eine schwach zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$, entgegen der Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ ist.

Ein System $\mathfrak{A}$ heisst *algebraisch abgeschlossen*, wenn es überhaupt kein in $\mathfrak{A}$ nicht liegendes algebraisches Element über $\mathfrak{A}$ gibt.

Satz 4. *Ein System $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann algebraisch abgeschlossen, wenn jede einfache Erweiterung von $\mathfrak{A}$ schwach zerfallend ist.*

9) In der Gruppentheorie nennt man üblich eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{B}$ (nicht von $\mathfrak{A}$) mit Hilfe von $\mathfrak{A}$.

10) Zweiter Isomorphiesatz. Vgl. III, § 10; AA. § 2.

Dabei versteht man unter einer einfachen Erweiterung eine von der Form $\mathfrak{A}(\alpha)$ mit einem Element α.

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}$ algebraisch abgeschlossen. Da α kein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$ ist, so gibt es ein normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ und ein Restklassensystem $\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}(\alpha)/\mathfrak{B}$, welches als ein Erweiterung von $\mathfrak{A}$ anzusehen ist. Die Vereinigung der aufsteigenden Kette solcher Kongruenzen von $\mathfrak{A}(\alpha)$ definiert ein Restklassensystem $\mathfrak{A}(\alpha)/\mathfrak{B}$, welches auch als eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ anzusehen ist. Also existiert nach dem Zornschen Lemma eine maximale Kongruenz, die eine Erweiterung $\mathfrak{A}(\bar{\alpha})$ mit einem algebraischen $\bar{\alpha}$ angibt. Da aber $\mathfrak{A}$ algebraisch abgeschlossen ist, so ist $\bar{\alpha}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten, also ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ schwach zerfallend über $\mathfrak{A}$. Die Umkehrung ist nach Satz 1 klar.

Für die weiteren Untersuchungen sind die folgenden Bedingungen wesentlich.

a) *Ist $\mathfrak{A}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$.*

b) *Ist α algebaisch über $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ eine algebraische Erweiterung von A.*

Da die Vereinigung der aufsteigenden Kette der algebraischen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ nur aus den algebraischen Elementen besteht, also algebraisch über $\mathfrak{A}$ ist, so enthält jede Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ nach dem Zornschen Lemma eine maximale algebraische Erweiterung $\mathfrak{M}$ von A. Dann gibt es nach a) keine in Ω enthaltene algebraische Erweiterung von $\mathfrak{M}$. Also erhält man

Satz 5. *Gilt die Bedingung a), so enthält eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ eine maximale algebraische Erweiterung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$, die man nicht weiter algebraisch erweitern kann.*

Das System $\mathfrak{M}$ ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Jede algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in Ω ist aber mindestens in einer maximalen algebraischen Erweiterung enthalten.

Ist Ω algebraisch über $\mathfrak{A}$, so kann man nach Satz 3 eine wohlgeordnete Kette von nacheinander folgenden Erweiterungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_\lambda \subset \cdots$$

konstruieren, so dass Ω die Vereinigung von den $\mathfrak{A}_\lambda$ ist. Dabei ist $\mathfrak{A}_\lambda$ entweder die Vereinigung $\bigvee_{\mu<\lambda} \mathfrak{A}_\mu$ oder eine einfache Erweiterung von $\mathfrak{A}_{\lambda-1}$ ist, je nachdem λ eine Limeszahl ist oder nicht.

Wenn man auf der anderen Seite solche Kette in einer beliebigen Erweiterung Ω konstruiert, so ist die Vereinigung nach den Bedingungen a), b) algebraisch über $\mathfrak{A}$. Also erhält man

Satz 6. *Gelten die Bedingungen a), b), so ist eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ dann und nur dann algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn Ω sich als die Vereinigung einer wohlgeordneten Kette von nacheinander folgenden einfachen algebraischen Erweiterungen, wie oben, darstellen lässt.*

Wir betrachten nun den spezialen Fall, wo jedes Untersystem normal ist. Es sei $\mathfrak{C}$ eine schwach zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ und zwar sei $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph. Da $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{C}$ ist, so ist $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ ist zerfallend über $\mathfrak{A}$.[12] Da $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=0$ ist, so ist $\mathfrak{C}$ die direkte Vereinigung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, also ist es nach IV das direkte Produkt $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$,[13] das die *direkte Erweiterung* von $\mathfrak{A}$ genannt wird. Damit ist bewiesen

Satz 7. *Ist jedes Untersystem normal, so sind die drei Begriffe "schwach zerfallende", "zerfallende", "direkte" Erweiterungen äquivalent.*

Wir beweisen nun[14]

Satz 8. *Jedes Untersystem sei normal. Ist Ω eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ und ist $\mathfrak{A}$ algebraisch abgeschlossen, so ist $\Omega=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}^*\supseteq\mathfrak{B}$.*

Bewei: Es genügt, den Satz für eine einfache algebraische Erweiterung $\Omega=\mathfrak{C}(\gamma)$ zu beweisen. Das Restklassensystem nach $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ ist einem System $\mathfrak{B}(\beta)$ bzw. $\mathfrak{A}(\alpha)$ isomorph, wo β bzw. α das betreffende Bild von γ ist. Da $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=0$, also der Durchschnitt der beiden Kongruenzen gleich 0 ist, so kann man Ω als ein Untersystem von $\mathfrak{A}(\alpha)\times\mathfrak{B}(\beta)$ annehmen. Zum Nullelement von $\mathfrak{B}(\beta)$ bzw. $\mathfrak{A}(\alpha)$ entspricht gerade $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Daher ist $\Omega\cap\mathfrak{A}(\alpha)=\mathfrak{A}$, $\Omega\cap\mathfrak{B}(\beta)=\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}(\alpha)/\mathfrak{A}$ ist zu $\mathfrak{B}(\beta)/\mathfrak{B}$ isomorph. Ω besteht aus den Elementen (a, b) von $\mathfrak{A}(\alpha)\times\mathfrak{B}(\beta)$ derart, dass a, b Elemente aus den entsprechenden Restklassen von $\mathfrak{A}(\alpha)/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}(\beta)/\mathfrak{B}$ sind. Da aber $\mathfrak{A}$ algebraisch abgeschlossen ist, so ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ nach Satz 4 schwach zerfallend über $\mathfrak{A}$, also nach Satz 7 direkte Erweiterung $\mathfrak{A}(\alpha)=\mathfrak{A}\times\mathfrak{K}$ mit einem zu $\mathfrak{A}(\alpha)/\mathfrak{A}$ isomorphen $\mathfrak{K}$. Also ist Ω ein $\mathfrak{A}$ enthaltendes Untersystem von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{K}\times\mathfrak{B}(\beta)$ und folglich ist $\Omega=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}^*\subseteq\mathfrak{K}\times\mathfrak{B}(\beta)$.

---

11) Für die algebraischen Erweiterungen des Körpers gelten bekanntlich diese beiden Bedingungen. Vgl. auch Satz 10, der besagt, als einen spezialen Fall, die Gültigkeit dieser Bedingungen für die algebraischen Erweiterungen der Abelschen Gruppen mit Operatoren. Vgl. T. Szele, a. a. O.

12) Vgl. III, § 11.

13) Vgl. IV, § 14; AA, § 11.

14) T. Szele, a. a. O. Lemma 11.

Satz 9.[15] *Jedes Untersystem sei normal. Ein System ist dann und nur dann algebraisch abgeschlossen, wenn jede Erweiterung direkte ist.*

Dieser Satz für einfache Erweiterung ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 4 und Satz 7. Daraus folgt dieser Satz nach Satz 8.

Satz 10. *Ist jedes Untersystem normal, so gelten die Bedingungen a), b).*

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ sei algebraisch über $\mathfrak{A}'$. Ist $\mathfrak{A}''$ nicht algebraisch über $\mathfrak{A}$, so besitzt $\mathfrak{A}''$ nach Satz 1 und Satz 7 ein Untersystem von der Form $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ ist und das System $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\frown\mathfrak{A}')$ enthält, so ist $\mathfrak{B}\frown\mathfrak{A}'=0$, d. h. $\mathfrak{A}''$ ist gegen der Voraussetzung nicht algebraisch über $\mathfrak{A}'$. Damit ist a) bewiesen.

Ist α ein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$ und ist γ ein nicht algebraisches Element aus $\mathfrak{A}(\alpha)$, so besitzt $\mathfrak{A}(\gamma)$ ein Untersystem von der Form $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{A}(\alpha)$ gegen der Voraussetzung, dass α algebraisch über $\mathfrak{A}$ ist. Damit ist b) bewiesen.

§ 2 **Polynom.** Ist x ein transzendentes Element über $\mathfrak{A}$, so heisst eine Kongruenz von $\mathfrak{A}(x)$ ein *Polynom*, wenn je zwei Elemente aus $\mathfrak{A}$ inkongruent bleiben. Ein Polynom ist also nichts anderes als eine Kongruenz von $\mathfrak{A}(x)$ nach einem normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$. Ein maximales Polynom heisst *irreduzibel*, sonst *reduzibel*.

Satz 11. *Ein Polynom ist dann und nur dann irreduzibel, wenn es eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ definiert, die man durch Adjunktion eines algebraischen Elementes erhält.*

Beweis: $\mathfrak{A}(\alpha)$ ist für jedes α zu $\mathfrak{A}(x)$ homomorph, also zu einem Restklassensystem $\overline{\mathfrak{A}(x)}$ von $\mathfrak{A}(x)$ isomorph. α ist nach der Definition dann und nur dann algebraisch, wenn die Kongruenz $\overline{\mathfrak{A}(x)}$ maximales, also irreduzibles Polynom ist.[16]

Es sei nun Ω eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}(\alpha)\subseteq\Omega$ zu $\overline{\mathfrak{A}(x)}\neq\mathfrak{A}(x)$ homomorph, so heisst α eine Wurzel des Polynoms $\overline{\mathfrak{A}(x)}$. Ein transzendentes Element ist keine Wurzel eines Polynoms. Ein Element α ist dann und nur dann algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn es eine Wurzel eines irreduziblen Polynoms ist.

Satz 12. *Wenn ein irreduzibles Polynom $p(x)$ und ein Polynom $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ eine Wurzel α gemeinsam haben, so ist $p(x)\geq f(x)$ und folglich ist jede Wurzel von $p(x)$ auch eine von $f(x)$.*

15) T. Szele, a. a. O. Satz 6. R. Baer, a. a. O. Theorem 1.

16) Wir gebrauchen für das Restklassensystem dieselbe Bezeichnung wie für die Kongruenz, die das Restklassensystem definiert.

Beweis: $\mathfrak{A}(\alpha)$ ist zu $p(x)$ isomorph und zu $f(x)$ homomorph, also ist $p(x) \geq f(x)$.

Ist $p(x)$ ein irreduzibles Polynom von $\mathfrak{A}(x)$ mit einer Wurzel α in $\mathfrak{A}$, so ist α die einzige Wurzel von $p(x)$. Denn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\alpha)$ ist zu $p(x)$ isomorph. Ist β eine Wurzel von $p(x)$, so ist $\beta \in \mathfrak{A}$ und $\alpha = \beta$. In der Tat ist dann $p(x)$ ein durch die Relation $x = \alpha$ definiertes Polynom. Solches Polynom heisst *linear*.

Es sei $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}'$. Ist $f(x)$ ein Polynom in $\mathfrak{A}(x)$, so definieren die Kongruenzrelationen von $f(x)$ eine Kongruenz von $\mathfrak{A}'(x)$, die wir die *Erweiterung* von $f(x)$ in $\mathfrak{A}'$ nennen.

Satz 13. *Die Erweiterung $f'(x)$ in $\mathfrak{A}'$ eines Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ ist ein Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$ und besitzt genau dieselbe Wurzeln wie $f(x)$.*

Beweis: Ist α eine Wurzel von $f(x)$, so ist $\mathfrak{A}'(\alpha)$ zu $f'(x)$ homomorph, da jede Kongruenzrelation von $f'(x)$ durch α erfüllt ist. Also ist $f'(x)$ ein Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$ und α ist eine Wurzel von $f'(x)$. Jede Wurzel von $f'(x)$ ist umgekehrt auch eine von $f(x)$, da jede Kongruenzrelation von $f(x)$ auch eine von $f'(x)$ ist.

Ist eine Menge der Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$ von $\mathfrak{A}(x)$ vorgegeben, so heisst ein Element α eine Wurzel der Menge, wenn α Wurzel mindestens eines Polynoms $p(x)$ ist. Sind die $p_i(x)$ die ein Polynom $f(x)$ enthaltenden irreduziblen Polynome, so ist jede Wurzel von $p_i(x)$ auch eine von $f(x)$. Umgekehrt ist jede Wurzel von $f(x)$, die algebraisch über $\mathfrak{A}$ ist, ist eine der Menge von den $p_i(x)$.

Zwei Menge der Polynome von $\mathfrak{A}(x)$ heissen *äquivalent* bezüglich einer algebraischen Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$, wenn sie dieselben Wurzeln in Ω besitzen.

Satz 14. *Ist ein Polynom $f(x)$ äquivalent mit einer Menge der irreduziblen Polynome $p_i(x)$, so ist $f(x)$ mit dem Durchschnitt $\bigwedge p_i(x)$ äquivalent.*

Beweis: Da $p_i(x)$ irreduzibel ist, so ist nach Satz 12 $p_i(x) \geq f(x)$ und folglich $\bigwedge p_i(x) \geq f(x)$. Also ist jede Wurzel von $\bigwedge p_i(x)$ auch eine von $f(x)$. Die Umkehrung ist ersichtlich. Damit ist auch gezeigt, dass die Existenz solches Polynoms $f(x)$ mit der folgenden Bedingung äquivalent ist: $\bigwedge p_i(x)$ besitzt nur die Wurzeln der Menge von den $p_i(x)$.

Eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ heisst ein *Zerfällungssystem* eines Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$, wenn jede Wurzel von $f(x)$ in einer $\mathfrak{Z}$ enthaltenden algebraischen Erweiterung $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{A}$ schon in $\mathfrak{Z}$ enthalten ist.

Satz 15. *Eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein Zerfällungssystem eines Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$, wenn jedes* *lineare Polynom* $p(x)$ *von* $\mathfrak{Z}'(x)$ *mit* $p(x) \geq f(x)$, $f(x)$ *aufgefasst als eine Erweiterung von* $f(x)$ *in* $\mathfrak{Z}'$, *eine Erweiterung eines linearen Polynoms von* $\mathfrak{Z}(x)$ *ist.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{Z}$ ein Zerfällungssystem von $f(x)$ und $p(x)$ sei linear in $\mathfrak{Z}'(x)$. Dann besitzt $p(x)$ eine einzige Wurzel α in $\mathfrak{Z}'$, die nach der Voraussetzung in $\mathfrak{Z}$ liegen muss. Also ist $p(x)$ die Erweiterung des Polynoms von $\mathfrak{Z}(x)$, das durch $x=\alpha$ definiert wird. Ist $\mathfrak{Z}$ kein Zerfällungssystem, so kann man eine Wurzel α von $f(x)$ in einem geeigneten $\mathfrak{Z}'$ annehmen, die in $\mathfrak{Z}$ nicht enthalten ist. Dann ist α Wurzel eines linearen Polynoms von $\mathfrak{Z}'(x)$, die keine Erweiterung eines Polynoms von $\mathfrak{Z}(x)$ ist.

Satz 16. *Unter den Voraussetzungen a), b) ist eine algebraische Erweiterung* $\mathfrak{Z}$ *von* $\mathfrak{A}$ *dann und nur dann ein Zerfällungssystem eines Polynoms* $f(x)$ *von* $\mathfrak{A}(x)$, *wenn jedes irreduzible Polynom* $p(x)$ *von* $\mathfrak{Z}(x)$ *mit* $p(x) \geq f(x)$ *linear ist.*

Beweis: Ist α eine Wurzel von $f(x)$ in einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{Z}' \geq \mathfrak{Z}$, so ist α eine Wurzel eines $p(x)$, also liegt α in $\mathfrak{Z}$, da $p(x)$ linear ist. Daher ist $\mathfrak{Z}$ ein Zerfällungssystem von $f(x)$. Die Umkehrung ist nach a), b) klar.

Wenn man nicht nur ein Polynom, sondern eine Menge von Polynomen betrachtet, so kann man analog vorgehen. Dadurch erhält man den Begriff des Zerfällungssystems einer Menge von Polynomen. Die Sätze 15, 16 lassen sich dann ohne Mühe auf den allgemeineren Fall übertragen.

Zum Schluss dieses Paragraphen betrachten wir wieder den spezialen Fall, das jedes Untersystem normal ist. Dann ist $\mathfrak{A}(x)$ das direkte Produkt von $\mathfrak{A}$ und dem durch x erzeugten freien System $\mathfrak{X}=(x)$. Der Kern eines Polynoms $f(x)$ ist ein Untersystem $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}=0$. Daher wird $\mathfrak{F}$ durch eine homomorphe Abbildung φ eines Untersystems $\mathfrak{F}_x$ von $\mathfrak{X}$ in das System $\mathfrak{A}$ bestimmt, so dass $\mathfrak{F}$ aus den (a, y) mit den zugeordneten $a \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{X}$ besteht.

Satz 17. *Jedes Untersystem sei normal. Ein durch eine homomorphe Abbildung* φ *eines Untersystems* $\mathfrak{F}_x$ *von* $\mathfrak{X}$ *in das System* $\mathfrak{A}$ *bestimmtes Polynom* $f(x)$ *von* $\mathfrak{A}(x)$ *ist dann und nur dann irreduzibel, d. h.* $f(x)$ *definiert dann und nur dann eine algebraische Erweiterung, wenn man die Abbildung* φ *nicht erweitern kann.*[17]

Beweis: Denn die Erweiterung der Abbildung φ ist gleichbedeutend mit der Erweiterung des Untersystems $\mathfrak{F}$, also mit der

17) R. Baer, a. a. O. Theorem 1. Vgl. auch K. Shoda, Ein Satz über die Abelsche Guppen mit Operatoren, Proc. Jap. Acad. (1952).

Erweiterung der Kongruenz nach $\mathfrak{F}$, da jedes Untersystem normal ist.

§ 3. **Algebraisch abgeschlossene Erweiterung.**[18] Wir studieren nun die Existenz und die Eindeutigkeit der algebraisch abgeschlossenen algebraischen Erweiterung Ω eines Systems $\mathfrak{A}$.

Zwei Erweiterungen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ von $\mathfrak{A}$ heissen *äquivalent*, wenn es ein $\mathfrak{A}$ elementweise festlassender Isomorphismus von $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{A}''$ gibt.

Satz 18. *Die algebraisch abgeschlossene algebraische Erweiterungen Ω von $\mathfrak{A}$ werden bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt, wenn sie existieren. Jede algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist mit einem Untersystem von Ω äquivalent.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}'$ eine beliebige algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Wir betrachten die Menge der äquivalenten Abbildungen $\varphi, \psi, \cdots$ von einem Untersystem in $\mathfrak{A}'$ auf ein Untersystem in Ω und wir definieren die Ordnung $\varphi \geq \psi$, falls ψ eine Erweiterung von φ ist. Dann erhält man eine halbgeordnete Menge der äquivalenten Abbildungen. Nach dem Zornschen Lemma beweist man leicht die Existenz eines maximalen Abbildung, etwa ψ. Sind $\mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{K} \subseteq \Omega$ die nach ψ zegeordnete Systeme und ist α' ein in $\mathfrak{K}'$ nicht liegendes Element aus $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{K}'(\alpha')$ nach Satz 3 algebraisch über $\mathfrak{K}'$, also ist α' eine Wurzel eines irreduziblen Polynoms $p'(x)$ von $\mathfrak{K}'(x)$. Bezeichnet man das zu $p'(x)$ entsprechende Polynom in $\mathfrak{K}(x)$ mit $p(x)$, so kann man beweisen, dass Ω eine Wurzel α von $p(x)$ besitzt. Wir betrachten nämlich die Erweiterung $p_\Omega(x)$ von $p(x)$ in Ω. Da Ω algebraisch abgeschlossen ist, so ist $p_\Omega(x)$ nach Satz 4 eine schwach zerfallende Erweiterung von Ω, also gibt es ein zu Ω isomorphes Restklassensystem $\overline{p_\Omega(x)}$. Das durch $p_\Omega(x)$ induzierte Polynom von $\mathfrak{K}(x)$ ist gleich $p(x)$, da $p(x)$ irreduzibel ist. Das Restklassensystem $\overline{p_\Omega(x)}$ induziert ein Restklassensystem $\overline{p(x)}$, welches ein Polynom über $\mathfrak{K}$ ist. Da aber $p(x)$ irreduzibel ist, so ist $\overline{p(x)} = p(x)$. Damit ist gezeigt, dass $p(x)$ einem Untersystem vou Ω äquivalent ist, oder, was dasselbe ist, dass $p(x)$ eine Wurzel α in Ω besitzt. Die äquivalente Abbildung ψ von $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{K}$ kann man daher gegen der Maximalität von ψ zu der Abbildung von $\mathfrak{K}'(\alpha')$ auf $\mathfrak{K}(\alpha)$ erweitern. Ist $\mathfrak{A}'$ auch algebraisch abgeschlossen, so ist $\mathfrak{A}'$ zu Ω äquivalent. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 19. *Für die Existenz der algebraisch abgeschlossenen algebraischen Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ sind notwendig und hinreichend, dass die*

18) Vgl. hierzu T. Szele, a. a. O. Satz 7 und R. Baer, a. a. O. Theorem 3.

Bedingungen a), b) gelten und, dass jedes Polynom $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ ein Zerfällungssystem besitzt.

Beweis: Eine algebraisch abgeschlossene algebraische Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ ist sicher Zerfällungssystem aller Polynome von $\mathfrak{A}(x)$. Eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist mit einem Untersystem von Ω äquivalent. Daher kann man $\mathfrak{A}' \leq \Omega$ annehmen. Dann ist Ω eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $\mathfrak{A}'$, also ist jede algebraische Erweiterung $\mathfrak{A}''$ von $\mathfrak{A}'$ wieder nach Satz 18 mit einem Untersystem von Ω äquivalent. Damit ist a) bewiesen. Ist α ein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$ und zwar eine Wurzel eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$, so ist jedes irreduzible Polynom $p(x) \geq f(x)$ von $\Omega(x)$ linear, da Ω algebraisch abgeschlossen ist. Daher besitzt Ω eine Wurzel von $f(x)$. Daher ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ mit einem Untersystem von Ω äquivalent, also ist $\mathfrak{A}(\alpha)$ algebraisch über $\mathfrak{A}$, da Ω algebraisch über $\mathfrak{A}$ ist.

Wir beweisen nun die Umkehrung. Die sämtlichen irreduziblen Polynome von $\mathfrak{A}(x)$ seien wohlgeordnet:

$$f_1(x)\,,\ f_2(x)\,, \cdots, f_\lambda(x)\,, \cdots .$$

Wir konstruieren die algebraischen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2 \leq \cdots \leq \mathfrak{A}_\lambda \leq \cdots$$

folgendermassen. $\mathfrak{A}_\lambda$ ist ein Zerfällungssyetem von $f_\lambda(x)$, aufgefasst als Polynom von $\mathfrak{B}_\lambda(x)$, $\mathfrak{B} = \bigvee_{\mu<\lambda} \mathfrak{A}_\mu$. Dann ist $\mathfrak{A}_\lambda$ nach a) algebraisch über $\mathfrak{A}$. Dann ist die Vereinigung $\Omega = \bigvee \mathfrak{A}_\lambda$ eine algebraisch abgeschlossene algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Denn $\Omega(\alpha)$ für ein algebraisches Element α über Ω ist nach b) eine algebraische Erweiterung über Ω, also nach a) algebraisch über $\mathfrak{A}$. D. h. α ist algebraisch über $\mathfrak{A}$ und folglich ist α eine Wurzel eines $f_\lambda(x)$. Daher ist α nach Satz 16 oder direkt nach der Definition des Zerfällungssystem in $\mathfrak{A}_\lambda$ in Ω enthalten.

Die Polynome $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ bilden ersichtlich eine halbgeordnete Menge. Die Dimension von $f(x)$, aufgefasst als ein Polynom in einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$, bezeichnen wir mit $N(f, \mathfrak{A}')$. Das Maximum $N(f)$ von $N(f, \mathfrak{A}')$ für alle Erweiterungen $\mathfrak{A}'$ heisst die *absolute Dimension* von $f(x)$.

Satz 20. *Wir setzen a), b) voraus. Ist die absolute Dimension von $f(x)$ endlich, so besitzt $f(x)$ ein Zerfällungssystem.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinenheit nehmen wir an, dass $f(x)$ irreduzibel ist. Dann definiert $f(x)$ nach b) eine algebraische

Erweiterung $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(\alpha)$ von $\mathfrak{A}$, wo α eine Wurzel von $f(x)$ ist. Die Erweiterung $f_{\mathfrak{A}'}(x)$ von $f(x)$ in $\mathfrak{A}'$ ist nicht mehr irreduzibel. Die absolute Dimension von $p(x)$ mit $p(x) > f(x)$ in $\mathfrak{A}'(x)$ ist also kleiner als $N(f)$: $N(p) < N(f)$. Daher kann man den Satz nach Induktion wie folgt beweisen. Ist $N(f) = 1$, so ist $N(p) = 0$, also ist $p(x)$ linear; d. h. $\mathfrak{A}'$ ist ein Zerfällungssystem von $f(x)$. Wir nehmen den Satz für $g(x)$ mit $N(g) < N(f)$ an. Dann besitzen die $p(x)$ Zerfällungssysteme. Wenn man die $p(x)$ wohlordnet, so kann man, wie beim Beweis des Satzes 19, schliessen, dass ein Zerfällungssystem $\mathfrak{Z}$ der Menge von den $p(x)$ existiert. Dann ist $\mathfrak{Z}$ ein Zerfällungssystem von $f(x)$, wie man sich leicht überzeigt.

Zum Schluss betrachten wir wieder den Fall, das jedes Untersystem normal ist.

Satz 21. *Jedes Untersystem sei normal. Es seien ferner $\mathfrak{X}$ das durch Element x erzeugte freie System und $\mathfrak{F}$ ein Untersystem von $\mathfrak{X}$. Gilt der Doppelkettensatz für Untersysteme des Restklassensystems $\mathfrak{X}/\mathfrak{F}$, so besitzt jedes durch den Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{A}$ definierte Polynom ein Zerfällungssystem.*[19]

Beweis: Aus dem Doppelkettensatz folgt bekanntlich die Existenz der Kompositionsreihe. Die Länge der Kompositionsreihe von $\mathfrak{X}/\mathfrak{F}$ ist aber nicht kleiner als die absolute Dimension des durch $\mathfrak{F}$ definiertes Polynom. Unser Satz folgt daher aus Satz 20.

Die Bedingungen von Satz 21 sind nach Satz 10, 19 hinreichend dafür, dass eine algebraisch abgeschlossene algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ existiert.

(Eingegangen 23 Juli, 1952)

---

19) Vgl. Satz 17, § 2.