Osaka Mathematical Journal
Vol. 1, No. 2. July, 1949.

Allgemeine Algebra.

Von Kenjiro SHODA.

In der vorliegenden Arbeit soll die früher schnittweise publizierte Theorie der allgemeinen algebraischen Systeme [1]) zusammengefasst und weiter geführt werden. Wir betrachten dabei diejenigen Systeme mit, deren Verknüpfungen nicht notwendig eindeutig sind. Den Ausgangspunkt der Theorie bilden die verschiedenen Definitionen der Homomorphismen und die der entsprechenden Restklassensysteme. Wenn man die starkesten Definitionen annimmt, so kann man die in der Gruppentheorie bekannten Isomorphiesätze beweisen unter der Voraussetzung, daß das System ein Nullelement besitzt.

Wenn ein Meromorphismus, d. h. ein mehr-mehrdeutiger Isomorphismus zweier Systeme ein Isomorphismus zweier Restklassensysteme induziert, wie in der Gruppentheorie üblich ist, so heisst er ein Klassenmeromorphismus. Die ganze Theorie wird dann aufgebaut unter den folgenden Voraussetzungen:

Jedes vorkommende System $\mathfrak{A}$ genügt den Bedingungen

I. $\mathfrak{A}$ besitzt ein Nullelement.

II. Die Vereinigung zweier normalen Untersysteme von $\mathfrak{A}$ ist auch normal.

III. Der Meromorphismus zweier zu $\mathfrak{A}$ homomorphen Systeme ist stets ein Klassenmeromorphismus.

Aus II folgt, daß die sämtlichen normalen Untersysteme von $\mathfrak{A}$ einen modular-Verband bildet, der ein Unterverband des aus allen Untersystemen von $\mathfrak{A}$ gebildeten Verbandes ist. Aus III folgt, daß die sämtlichen Kongruenzen von $\mathfrak{A}$, d. h. Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$ einen modular-Verband bildet. Es ist dann leicht den Schreierschen Satz für Normalketten, den Jordan-Hölderschen Satz für Kompositionsreihen und den Remak-

[1]) K. Shoda, Über die allgemeinen algebraischen Systeme I-VIII, Proc. Imp. Aad. Tokyo, 17 (1941), 323-327; 18 (1942), 179-184, 227-232, 276-279; 19 (1943), 120-124, 259-263, 515-517; 20 (1944), 584-588. Dort haben wir uns auf eindeutige Systeme beschränkt.

Schmidtschen Satz für direkte Zerlegungen zu beweisen.

Ist jede Verknüpfung eindeutig und sind je zwei Elemente aus $\mathfrak{A}$ stets verknüpfbar, so stimmen die verschiedenen Definitionen der Homomorphismen überein. Wenn man ferner als Axiome für System $\mathfrak{A}$ nur gewisse Gleichungen betrachtet, die, wie Assoziativgesetz, Distributivgesetz, für alle Elemente aus $\mathfrak{A}$ gelten, so nennt man das System primitiv. Die Theorie der primitiven Systeme ist einfach und grundlegend. Vor allem kann man freie Systeme konstruieren. Die Erweiterung eines Systems und die Einbettung eines Systems in ein anderes werden mit Hilfe der freien Systeme aufgeklärt. Der in der Körpertheorie übliche Begriff der algebraischen Abhängigkeit wird in der Theorie der allgemeinen Systeme eingeführt und die von van der Waerden angegebenen Grundsätze werden bewiesen. Durch Spezialisierung erhält man den Begriff der linearen Abhängigkeit und den der allgemeinen linearen Algebra. Durch weitere Spezialisierung gelangen wir zu den Begriff der k-linearen Systeme, der eine direkte Verallgemeinerung des Begriffes des k-Moduls ist.

Die Grundsätze über die auflösbaren Gruppen, die nilpotenten Gruppen werden auch in die Theorie der primitiven Systeme übersetzt.

Die Galoissche Theorie d. h. die eineindeutige Zuordnung zwischen den Untersystemen zweier Systeme wird auch untersucht und der Krullsche Satz für die unendlichen Galoisschen Erweiterungskörper wird auch auf unseren allgemeinen Fall übertragen.

Wir betonen hier, daß der Begriff des Verbandes als Verband der Untersysteme oder als Verband der Kongruenzen in der allgemeinen Theorie auftreten, während der Begriff der Gruppe als Automorphismengruppe von der allgemeinen Theorie unentbehrlich ist. Der Begriff der Ringe sercheint als Endomorphismenring in der Theorie der Abelschen Gruppe. Also erhält man eine Verallgemeinerung des Ringes, wenn man den Bereich der Endomorphismen eines Systems axiomatisch betrachtet. Gewisse Ringtheorie findet sich ihre Analogon in solchen Systemen.

Um ein abstrakt angegebenes System darzustellen, ist es natürlich gewünscht, daß man das System durch ein besonderes System derselben Art darstellt, wodurch das System mit der allgemeinen Theorie in Beziehung steht. Zum Beispiel die Darstellung der Gruppe durch Permutationen (Automorphismen der Menge ohne Verknüpfungen), durch monomiale Substitutionen (Automorphismen des Systems mit einer Operatorgruppe), durch lineare Substitutionen (Automorphismen eines k-Moduls mit einem Körper k); die Darstelluug des Verbandes durch Untermenge, Kongruenzen einer Menge; die Darstellung des Ringes oder der Algebra durch Matrizen (Endomorphismen des k-Moduls). In dieser Note beschränken wir uns auf die Darstellungen eines Systems durch die Endomorphismen eines anderen. Die Theorie soll also eine Verallgemeinerung der Darstellungstheorie der Ringe oder der Algebren betrachtet werden.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in der vorliegenden Note auf Systeme mit Verknüpfungen, d. h. mit binären Operationen oder, anders gesagt, mit Funktionen zweier geordneten Elemente. Diese Einschränkung ist aber nicht wesentlich. Man kann wohl analog vorgehen auch, wenn man etwa Systeme mit Funktionen der halbgeordneten Menge betrachtet.[2])

Inhaltsverzeichnis

---

2) Dadurch kann man die topologischen Räume, die topologischen Gruppen u. s. w. mitbetrachten. Darauf hoffe ich an einer anderen Stelle einzugehen.

Kapitel I. Grundbegriffe

§ 1. **Homomorphismen.** Eine Menge $\mathfrak{A}$ mit den Verknüpfungen α, $\beta, \ldots$ heisst ein (algebraisches) System, wenn $a\,\alpha\,b$ für gewisses Paar a, b als eine nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{A}$ definiert ist. Die Menge der Verknüpfungen bezeichnen wir mit V. Besteht $a\,\alpha\,b$ nur aus einem einzigen Element, wenn es überhaupt definiert ist, so heisst $\mathfrak{A}$ ein eindeutiges System.

Ist eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von den Verknüpfungssystemen V, V' von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ vorgegeben, so kann man, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, die entsprechenden Verknüpfungen identifizieren. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ zwei Systeme mit einem Verknüpfungsbereich. Wenn eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$: a auf a', b auf b', eine Abbildung von $a\,\alpha\,b$ auf $a'\,\alpha\,b'$ induziert, d. h. wenn $(a\,\alpha\,b)' = a'\,\alpha\,b'$ für jedes α aus V, so heisst die Abbildung ein *Isomorphismus* von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$. Dabei soll $a\,\alpha\,b$ existieren, wenn $a'\,\alpha\,b'$ existiert, und umgekehrt.

Für eine eindeutige, nicht notwendig eineindeutige, Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ werden wir die folgenden Bedingungen voraussetzen.

Bedingungen für die Verknüpfbarkeit:

1. Aus der Existenz von $a\,\alpha\,b$ folgt die von $a'\,\alpha\,b'$.
2. Existiert $a'\,\alpha\,b'$, so existiert $a\,\alpha\,b$ mindestens für ein Paar a, b.
3. Existiert $a'\,\alpha\,b'$, so existiert $a\,\alpha\,b$ für jede Urbilder a, b.

Bedingungen für die Wertebereiche: Die Menge der Urbilder von a' bezeichnen wir mit A. Mit $A\,\alpha\,B$ bezeichnen wir die Menge derjenigen Elemente, die mindestens in einem $a\,\alpha\,b, a \in A, b \in B$, enthalten sind. Solange die Formeln Sinn haben, seien

I. $(A\,\alpha\,B)' \subset a'\,\alpha\,b'$.

II. $(A \alpha B)' = a' \alpha b'$.

III. $(a \alpha B)' = (A \alpha b)' = a' \alpha b'$ für jedes a aus A und jedes b aus B.

IV. $(a \alpha b)' = a' \alpha b'$ für jedes a aus A und jedes b aus B.

Im folgenden sprechen wir von dem *Homomorphismus*, [3]) wenn die Abbildung den Bedingungen 1 und I genügt. Besteht ferner etwa 2 und II, so mag die Abbildung ein (2, II)-Homomorphismus heissen.

Durch eine eindeutige Abbildung erhält man stets eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}$. Jede Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}$ definiert ein Restklassensystem, das aus den Klassen $A, B, \ldots$ besteht. Dabei bedeutet die Klassenverknüpfung $A \alpha B$ die Menge der Klassen, die mit $A \alpha B$ im früheren Sinne gemeinsame Elemente besitzen. Ist φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so erhält man ersichtlich einen eineindeutigen Homomorphismus $\bar{\varphi}$ des Restklassensystems $\mathfrak{A}_\varphi$ auf $\mathfrak{B}$, der nicht notwendig ein Isomorphismus zu sein braucht. Der Vollständgikeit halber werden wir nun den Einfluss der weiteren Bedingungen des Homomorphismus in diesem eineindeutigen Homomorphismus $\bar{\varphi}$ genau studieren.

Ein (2, II)-Homomorphismus φ von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ induziert ersichtlich einen Isomorphismus $\bar{\varphi}$ von $\mathfrak{A}_\varphi$ auf $\mathfrak{B}$. Umgekehrt ist jedes Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ (2, II)-homomorph. [4])

Eine Untermenge $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ heisst ein *Untersystem*, wenn $a \alpha b$ für jede Elemente a, b aus $\mathfrak{A}'$ stets in $\mathfrak{A}'$ enthalten ist, solange a und b durch α verknüpfbar sind. *Das (3, IV)-homomorphe Bild in $\mathfrak{B}$ eines Untersystems von $\mathfrak{A}$ ist ein Untersystem von $\mathfrak{B}$. Das Urbild eines Untersystems von $\mathfrak{B}$ ist für jeden Homomorphismus stets ein Untersystem von $\mathfrak{A}$.*

Ein Element heisst ein *Nullelement*, wenn es ein Untersystem (mit einem einzigen Element) bildet. Wir setzen nun die Existenz eines Nullelementes voraus, und wir setzen ein Nullelement fest, das mit 0 bezeichnet wird. Die Urbilder eines Nullelementes $0'$ von $\mathfrak{B}$ bei einem Homomorphismus φ von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ bilden ein Untersystem von $\mathfrak{A}$. Das Biid

3) Z. B. stetige Abbildung des topologischen Raumes, Homomorphismus der topologischen Gruppe.

4) (2, II)-oder (2, IV)-Homomorphismus ist nichts anderes als der offene Homomorphismus der topologischen Gruppe.

eines Nullelementes 0 von $\mathfrak{A}$ sei $0''$. Dann ist $0''$ auch ein Nullelement von $\mathfrak{B}$, wenn $0\,\alpha\,0$ existiert, solange $0''\,\alpha\,0''$ existiert, also natürlich wenn die Bedingung 3 gilt. Wenn die 0 enthaltende Restklasse ein Untersystem $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist, wie es immer der Fall ist, wenn IV und $0\,\alpha\,0=0$ für jedes α aus V oder, wenn 3. IV gelten, so spricht man von dem Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ modulo $\mathfrak{A}'$, welches mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ bezeichnet wird. Man beachte, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ im allgemeinen durch $\mathfrak{A}'$ nicht eindeutig bestimmt ist. Bei einer Kongruenz (Restklasseneinteilung) von $\mathfrak{A}$ seien a, b bzw. c, d miteinander kongruent. Wenn aus der Verknüpfbarkeit von a und c stets die von b und d folgt, so heisst das Restklassensystem ein (3, II)-Restklassensystem. Wenn ferner mit einem Element aus $a\,\alpha\,c$ mindestens ein Element aus $b\,\alpha\,d$ kongruent ist, so heisst das Restklassensystem ein (3, IV)-Restklassensystem. Nach der obigen Überlegung erhält man ohne Mühe:

Ein (3, II)-bzw. (3, IV)-Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, der 0 auf $0'$ abbildet, induziert einen Isomorphismus eines (3, II)-bzw. (3, IV)-Restklassensystems $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{B}$. Dabei besteht $\mathfrak{A}'$ aus den Urbilder von $0'$. Jedes (3, II)-bzw (3, IV)-Restklassensystem lässt sich in der Form $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ darstellen und es ist zu $\mathfrak{A}$ (3, II)-bzw. (3, IV)-homomorph. Dasselbe gilt auch für (2, II)-bzw. (2, IV)-Homomorphismus und (2, II)-bzw. (2, IV)-Restklassensystem, wenn die 0 enthaltende Restklasse ein Untersystem ist.

Ein das festgesetzte Nullelement 0 enthaltende Untersystem heisst *normal* ((3, II)-bzw. (3, IV)-normal), wenn es eine Restklasse eines Restklassensystems ((3, II)-bzw. (3, IV)-Restklassensystems) von $\mathfrak{A}$ ist.

Wir betrachten nun eine mehr-mehrdeutige Zuordnung zwischen zwei Systeme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ mit demselben Verknüpfungsbereich V, und die folgenden Bedingungen:

1'. Existiert $a\,\alpha\,b$ in $\mathfrak{A}$, so gibt es zwei zugeordnete Elemente a', b' aus $\mathfrak{A}'$, die durch α verknüpfbar sind, und umgekehrt.

2'. Existiert $a\,\alpha\,b$ in $\mathfrak{A}$, so sind jede zugeordnete Elemente a', b' aus $\mathfrak{A}'$ durch α verknüpfbar, und umgekehrt.

I'. $a\,\alpha\,b$ und $a'\,\alpha\,b'$ enthält mindestens ein Paar der zugeordneten Elemente.

II′. Jedem Element aus $a \alpha b$ entspricht mindestens ein Element aus $a' \alpha b'$, und umgekehrt.

Eine mehr-mehrdeutige Abbildung heisst ein *Meromorphismus*, wenn die Bedingungen $1', \mathrm{I}'$ erfüllt sind. Gilt II′, so beweist man leicht, daß *das Blid eines Untersystems von $\mathfrak{A}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}'$ ist und umgekehrt.*

Es seien zwei (3, I)-Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vorgegeben. Dann erhält man einen Meromorphismus zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, wenn man die Bilder in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ eines Elementes aus $\mathfrak{A}$ zuordnet. Existiert nämlich $b_1 \alpha b_2$ in $\mathfrak{B}$, so existiert $a_1 \alpha a_2$ nach 2 mindestens für ein Paar der Urbilder in $\mathfrak{A}$ und folglich existiert $c_1 \alpha c_2$ nach 1 für die Bilder von a_1, a_2 in $\mathfrak{C}$. Daher gilt $1'$. Aus 3 folgt ferner $2'$. Sind b_1, b_2 bzw. c_1, c_2 die Bilder von a_1, a_2 so folgt nach 3 aus der Existenz von $b_1 \alpha b_2$ die von $a_1 \alpha a_2$ und die Bilder b, c von a aus $a_1 \alpha a_2$ sind zugeordnete Elemente in $b_1 \alpha b_2$ und $c_1 \alpha c_2$. Damit ist I′ bewiesen. Wenn die Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der Bedingung II genügen, so gilt II′ für den induzierten Meromorphismus von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Man erhält also:

Die (3, I)-bzw. (3, II)-Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ induzieren einen $(2', I')$-bzw. $(2', II')$-Meromorphismus von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Es seien $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ isomorphe (3, IV)-Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Ordnet man jede Elemente a, b in den entsprechenden Klassen aus $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ zu, so erhält man einen $(2', \mathrm{II}')$-Meromorphismus von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Es seien nämlich A, A' zwei Restklassen aus $\overline{\mathfrak{A}}$ und B, B' die entsprechenden Restklassen aus $\overline{\mathfrak{B}}$. Existiert $a \alpha a'$ für a aus A und a' aus A', so existiert $A \alpha A'$, also $B \alpha B'$ und folglich $b \alpha b'$ für jedes b aus B und jedes b' aus B'. Nach IV ist es auch klar, daß II′ gilt. Ist im allgemeinen ein Meromorphismus von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch einen Isomorphismus der Restklassensysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vermittelt, so heisst er ein *Klassenmeromorphismus.*

Ein Meromorphismus von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Klassenmeromorphismus, wenn aus der Zuordnung $a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_1, a_2 \sim b_2, a_3 \sim b_2$ die Zuordnung $a_1 \sim b_2, a_3 \sim b_1$ folgt.

Mit C_a bzw. C_b bezeichnen wir die Gesamtheit der a bzw. b zugeordneten Elemente aus $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A}$. Ist $a_1 \sim b_2$, so ist jedes einem Element

a_2 aus C_{b_1} zugeordnete Element b_2 aus $\mathfrak{B}$ in C_{a_1} enthalten. Umgekehrt entspricht einem beliebigen Element b aus C_{a_1} sicher a_2, da $a_1 \sim b$, $a_1 \sim b_1$, $a_2 \sim b_1$ ist. Damit ist der Klassenmeromorphismus aufgestellt. Die Umkehrung ist klar.

Es sei noch bemerkt, daß ein (2′, II′)-Meromorphismus sich auf einen (3, IV)-Homomorphismus reduziert, falls die Abbildung ein-mehrdeutig ist. Ein (2 ,II)-Homomorphismus reduziert sich auf einen Isomorphismus, falls die Abbildung eineindeutig ist.

§ 2. **Isomorphiesätze.** In diesem Paragraphen betrachten wir Systeme mit demselben Verknüpfungsbereich. Wir setzen ein Nullelement in jedem System fest. Als Untersysteme betrachten wir nur diejenigen, die das festgesetzte Nullelement enthält und wir betrachten nur diejenigen Isomorphismen, Homomorphismen und Meromorphismen, die die Nullelemente zuordnen.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein normales (genauer (2, II)-normales) Untersystem von $\mathfrak{A}$. Die Menge aller Restklassensysteme $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$, ferner $[\mathfrak{A}/0]$ mit $[\mathfrak{A}]$. $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ heisst zu $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ *einseitig isomorph*, wenn zu jedem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mindestens ein $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ isomorph ist. Wenn ferner $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph ist, so spricht man von dem (gegenseitigen) Isomorphismus. Da wir uns jetzt mit der Relation zwischen den Homomorphismen und den Kongruenzen beschäftigen, so verstehen wir unter dem Homomorphismus bzw. dem Restklassensystem stets (2, II)-Homomorphismus bzw. (2, II)-Restklassensystem. Dann erhält man nach § 1

Homomorphiesatz. *Ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{A}'$ einem Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ modulo einem normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ isomorph, wo $\mathfrak{B}$ aus den sämtlichen dem Nullelement von $\mathfrak{A}'$ zugeordneten Elementen aus $\mathfrak{A}$ besteht. Also ist $[\mathfrak{A}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph. Ist $0\,\alpha\,0 = 0$ für jedes α und gilt IV, so lässt sich jedes Restklassensystem von $\mathfrak{A}$ in der Form $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mit einem normalen Untersytem $\mathfrak{B}$ darstellen und es ist zu $\mathfrak{A}$ homomorph.*[5]).

Der erste Teil dieses Satzes lässt sich bekanntlich folgendermassen verallgemeinern.

---

5) Dieser Satz enthält wesentlich den Homomorphiesatz der topologischen Gruppe.

Erster Isomorphiesatz. *Ist* $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ *homomorph und ist* $\mathfrak{B}'$ *ein normales Untersystem von* $\mathfrak{A}'$, *so ist* $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ *zu* $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ *einseitig isomorph, wo* $\mathfrak{B}$ *das* $\mathfrak{B}'$ *entsprechende normale Untersystem von* $\mathfrak{A}$ *ist.*

Ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$ und zwar dann und nur dann normal, wenn $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ normal in $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ ist. Als Zusatz des ersten Isomorphiesatzes erhält man unmittelbar: *Ist* $\mathfrak{C}$ *ein normales Untersystem von* $\mathfrak{A}$ *und ist* $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ *ein normales Untersystem eines* $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, *so ist* $[(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C})]$ *zu* $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ *einseitig isomorph.*

Es sei $\mathfrak{C}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}'$ ein $\mathfrak{C}$ enthaltendes Untersystem von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{C}$ normal in $\mathfrak{A}'$. Denn eine Kongruenz φ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ induziert eine Kongruenz von $\mathfrak{A}'$ nach $\mathfrak{C}$. Ist im allgemeinen M eine Untermenge von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit M^{φ} die Menge aller Elemente, die mit den Elementen aus M nach φ kongruent sind. $\mathfrak{B}^{\varphi}$ ist für ein Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$, wenn $((K \cap \mathfrak{B})\,\alpha\,(L \cap \mathfrak{B}))^{\varphi} = K\,\alpha\,L$ für jede Restklassen K, L aus $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, die mit $\mathfrak{B}$ gemeinsame Elemente besitzen. Dabei bedeutet $\cap$ den mengentheoretischen Durchschnitt. Gilt für jede Kongruenz φ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ $((K \cap \mathfrak{B})\,\alpha\,(L \cap \mathfrak{B}))^{\varphi} = K\,\alpha\,L$ für jede Restklassen K, L, so heisst $\mathfrak{C}$ *binormal.*[6]) Dabei bedeutet $\mathfrak{B}$ ein beliebiges Untersystem von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{C}$ binormal in $\mathfrak{A}$ und ist $\mathfrak{C}'$ ein $\mathfrak{C}$ enthaltendes Untersystem, so ist $\mathfrak{C}$ binormal in $\mathfrak{C}'$. Die durch φ induzierte Kongruenz von $\mathfrak{C}'$ sei φ' und K', L' seien die in K, L enthaltenen Restklassen von φ'. Ist $\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{C}'$, so ist $(K' \cap \mathfrak{B})\,\alpha\,(L' \cap \mathfrak{B}) = (K \cap \mathfrak{B})\,\alpha\,(L \cap \mathfrak{B})$. Wäre $((K' \cap \mathfrak{B})\,\alpha\,(L' \cap \mathfrak{B}))^{\varphi'} \neq K'\,\alpha\,L'$, so müsste gegen der Voraussetzung $((K \cap \mathfrak{B})\,\alpha\,(L \cap \mathfrak{B}))^{\varphi} \neq K\,\alpha\,L$ sein. Ein Restklassensystem nach einem binormalen Untersystem heisst ein *Birestklassensystem*; die zugehörige Kongruenz bzw. der Homomorphismus heisst *Bikongruenz* bzw. *Bihomomorphismus*. Sind $\mathfrak{B}/\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ Birestklassensysteme, so ist $\mathfrak{B}$ dann und nur dann binormal in $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ binormal in $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ ist. Dann gelten der Homomorphiesatz, der erste Isomorphiesatz und der Zusatz auch für binormale Untersysteme.

6) Wenn jeder Homomorphismus (2, II)-Homomorphismus ist, so ist jedes normale Untersystem binormal. Dies ist bekanntlich immer der Fall, wenn $\mathfrak{A}$ etwa eine kompakte Gruppe ist.

Zweiter Isomorphiesatz. *Es sei* $\mathfrak{B}$ *ein Untersystem,* $\mathfrak{C}$ *ein binormales Untersystem von* $\mathfrak{A}$. *Dann ist* $[\mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{C}/\mathfrak{C}]$ *zu* $[\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \bigwedge \mathfrak{C}]$ *einseitig isomorph.*

Dabei bedeutet $\bigvee$ bzw. $\bigwedge$ das kleinste $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ enthaltende Untersystem (Vereinigung) von $\mathfrak{A}$ bzw. das grösste in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ enthaltene Untersystem (Durchschnitt) von $\mathfrak{A}$. Zum Beweis des Satzes setzen wir ein $\mathfrak{B} \bigwedge \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ fest. Die Restklassen aus $\mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$, die mindestens ein Element aus $\mathfrak{B}$ enthalten, bilden nach der Voraussetzung ein Untersystem, das sich durch $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}$ darstellen lässt, da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ das vorgegebene Nullelement gemeinsam enthält. Dann ist $\mathfrak{N}$ ein Untersystem, das $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ enthält, daher ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{C}$. Damit ist eine eineindeutige Zuordnung zwischen $\mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \bigwedge \mathfrak{C}$ aufgestellt. Daß diese Zuordnung ein Isomorphismus ist, folgt aus der Voraussetzung des Satzes unmittelbar.

Die Gesamtheit der Untersysteme von $\mathfrak{A}$ bildet bekanntlich einen vollständigen Verband in Bezug auf $\bigvee$ und $\bigwedge$. Auf der anderen Seite bilden die sämtlichen Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ einen vollständigen Verband. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Kongruenzen von $\mathfrak{A}$, so sind die Restklassen nach $\varphi_1 \bigwedge \varphi_2 \bigwedge \ldots$ die nicht leeren Durchschnitte der Restklassen nach den φ_i. Die Vereinigung der Kongruenzen kann man bekanntlich folgendermassen konstruieren. Man setze die Restklassen C_1, D_1 nach φ_1 zusammen, wenn man endlichviele Restklassen $C_1, E_{i_1}, \ldots, E_{i_m}, D_1$ aus den φ_j annehmen kann, so daß die aufeinander folgenden Glieder mindestens ein Element gemeinsam haben.

Wenn die Kongruenzen φ_i nach demselben normalen Untersytem $\mathfrak{B}$ angegeben sind, so ist die Vereinigung auch eine Kongrueuz nach $\mathfrak{B}$, wie man sich leicht nach der obigen Konstruktion überzeugt. Daher bilden die sämtlichen Kongruenzen nach einem bestimmten normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ einen vollständigen Verband. Daher gibt es ein grösstes Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, so daß jedes Restklassensystem nach $\mathfrak{B}$ durch weitere Klasseneinteilung von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ erhältlich ist. Wir bezeichnen dieses grösste Reskiassensystem mit $\mathfrak{A}//\mathfrak{B}$, welches natürlich durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt ist. Bezeichnet man $\mathfrak{A}//\mathfrak{O}$ mit $|\mathfrak{A}|$, so ist ersichtlich $\mathfrak{A}//\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}/\mathfrak{B}|$ für jedes $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Sind $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ isomorph, so ist $\mathfrak{A}//\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}/\mathfrak{B}|$ zu $\mathfrak{A}'//\mathfrak{B}' = |\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'|$ isomorph. Aus dem einseitigen Isomorphismus von $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ zu $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ folgt ersichtlich der Isomorphismus von $\mathfrak{A}//\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}'//\mathfrak{B}'$. *Ersetzt man also in den Isomorphiesätzen* $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ *durch* $\mathfrak{A}//\mathfrak{B}$, *so kann man statt des einseitigen Isomorphismus den Isomorphismus behaupten, wie etwa in der Gruppentheorie üblich ist.*

Die in diesem Paragraphen angegebenen Sätze gelten auch, wenn man sich auf (3, II)-bzw. (3, IV)-Homomorphismen und (3, II)-bzw. (3, IV)-Restklassensysteme beschränkt. Man beachte dabei, daß (3, IV)-normale Untersysteme stets binormal sind. Wir haben nun zu beweisen, daß die Vereinigung der (3, II)-bzw. (3, IV)-Kongruenzen auch (3, II)-bzw. (3, IV)-Kongruenz ist. Es sei $C_1', Fj_1', \ldots, Fj_n', D_1'$ eine Reihe, die zwei Restklassen C_1' und D_1' verbindet und zwar $a \in C_1 \wedge Fi_1, a' \in Fj_n' \wedge D_1'$. Bezeichnet man die a bzw. a' enthaltende Restklasse nach φ_k mit G_k bzw. G_k', so sind

$$C_1, Gj_1, \ldots, Gj_n, Fi_1, \ldots, Fi_m, D_1$$
$$C', Fj_1', \ldots, Fj_n', Gi_1', \ldots, Gi_m', D_2'$$

auch Reihen mit der verlangten Eigenschaft. Ist ein Element aus C_1 mit einem Element aus C_1' durch α verknüpfbar, so ist jedes Element aus C_1 mit jedem Element aus C_1' verknüpfbar. Nach der Konstruktion der beiden obigen Reihen kann man endlich schließen, daß jedes Element aus D_1 mit jedem Element aus D_1' verknüpfbar ist. Damit ist die Bedingung 3 bewiesen. Die Bedingung IV für φ_1 besagt, daß jedes Element aus $C_1 \alpha C_1'$ mit einem Element aus $c \alpha c', c \in C, c' \in C'$, kongruent ist. Da c und c' beliebig angenommen werden können, so ist jedes Element aus $D_1 \alpha D_1'$ mit einem Element aus $c \alpha c'$ kongruent nach $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots$. Damit ist die Bedingung IV bewiesen.

§ 3. **Primitive Systeme.** Wir setzen nun voraus, daß die Verknüpfungen eindeutig sind. Dann stimmen die Bedingungen I bis IV miteinander überein. Existiert ferner $a \alpha b$ für jede a, b aus $\mathfrak{A}$ und für jedes α aus V, so stimmen die Bedingungen 1, 2, 3 überein. In diesem Fall heisst $\mathfrak{A}$ ein *homogenes* System bezüglich V. Eine durch Verknüpfungen aus V dargestellte Funktion heisst *v-Funktion*. Setzt man zwei v-Funktionen gleich, so mag man eine *v-Gleichung* erhalten. Es sei eine Menge A der v-Gleichungen vorgegeben. Ein homogenes System $\mathfrak{A}$ heisst ein *A-Sys-*

tem, wenn die Gleichungen aus A durch jede Elemente aus $\mathfrak{A}$ erfüllt sind. Sind die bestimmten v-Gleichungen nicht vorgegeben, so spricht man im allgemeinen von *primitiven* Systemen.[7]) Es gilt ersichtlich:

Jedes Untersystem eines A-Systems ist auch ein A-System. Ein zu einem A-System homomorphes System ist auch ein A-System.

Eine v-Funktion zweier Elemente eines homogenen Systems $\mathfrak{A}$ heisst eine *Folgeverknüpfung*[8]) von $\mathfrak{A}$. Besteht V' aus gewissen Folgeverknüpfungen von $\mathfrak{A}$, so kann man $\mathfrak{A}$ als ein System mit dem Verknüpfungsbereich V' auffassen. Eine v-Gleichung heisst eine *Folgegleichung* von A, wenn sie durch Anwendung der Gleichungen aus A beweisbar ist. Solche Gleichungen kann man freilich dem A hinzufügen. Ist A' eine Menge der Folgegleichungen von A, die durch die Folgeverknüpfungen aus V' dargestellt sind, so ist $\mathfrak{A}$ ersichtlich ein A'-System mit dem Verknüpfungsbereich V'. Besteht umgekehrt V aus den Folgeverknüpfungen von V' und A aus den Folgegleichungen von A', so sind die beiden Begriffe der A-Systeme und der A'-Systeme äquivalent. In dieser Weise kann man verschiedene Definionen eines Begriffes erhalten.

Ist eine v-Gleichung

$$F(x, a_1, \dots, a_n) = G(x, a_1, \dots, a_n)$$

für jede a_i aus A durch x lösbar und ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{A}'$. Ist $\mathfrak{A}''$ auch zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so kann man einen Meromorphismus zwischen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ aufstellen. Sind $a_1', \dots, a_n'$, und $a_1'', \dots, a_n''$ die zugeordneten Elemente aus $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$, so gibt es unter den zugehörigen Lösungen x' und x'' mindestens ein Paar x', x'' der zugeordneten Elemente. Es sei $\mathfrak{A}$ ein A-System bezüglich V. Wenn aus der Existenz der Lösung der obigen Gleichung die Eindeutigkeit der Lösung folgt, so kann man x als eindeutige Funktion von $a_1, \dots, a_n$ auffassen: $x = f(a_1, \dots, a_n)$. Dann ist $\mathfrak{A}$ als System bezüglich V und dieser Funktion f primitiv. Dabei soll A durch die Gleichung

$$F(f(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n) = G(f(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n)$$

---

7) Z. B. Gruppen, Ringe, Verbände.

8) Wenn man allgemeine Verknüpfung, vgl. die Einleitung, betrachtet, so kann man jede v-Funktion als Folgeverknüpfung annehmen.

ergänzt werden. In der Theorie der allgemeinen Systeme ist es wichtig zu entscheiden, ob ein System primitiv ist oder nicht. Dafür wird diese Überlegung brauchbar sein.

Kapitel II. Konstruktionstheorie

§ 4. **Freie Systeme.**[9]) In diesem Kapitel beschränken wir uns auf primitive Systeme. Es seien eine Menge $E=\{a_1, a_2, \dots\}$ und eine Menge V der Symbolen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ vorgegeben, die die Verknüpfungen darstellen sollen. Die sämtlichen formalen Ausdrücke, die durch endlichen a_i und α_j gebildet werden, bilden ein System bezüglich V. Dabei soll die Verknüpfung ganz formal definiert werden. Solches System heisst das durch E erzeugte *absolut freie* System und es wird mit $O^V(E)$ oder einfacher mit $O(E)$ bezeichnet.

Es sei nun eine Menge A der v-Gleichungen bezüglich V vorgegeben. Ist f' ein Element aus $O(E)$, das man durch endlichmalige Anwendungen der Gleichungen aus A auf einem Element f aus $O(E)$ erhält, so setzen wir $f\equiv f'$. Dadurch erhält man eine Klasseneinteilung von $O(E)$ und aus $f\equiv f', g\equiv g'$ folgt ersichtlich $f\alpha g\equiv f'\alpha g'$ für jedes α aus V. Dieses Restklassensystem von $O(E)$ heisst das durch E erzeugte *freie A-System* und es wird mit $A^V(E)$ oder einfacher mit $A(E)$ bezeichnet. Es ist ersichtlich, daß $A(E)$ ein A-System ist.

Die Gleichungen zwischen den Elementen aus $O(E)$ heissen *Relationen*. Es sei B eine Menge der Relationen. Dann kann man durch A und B eine Kongruenz in $O(E)$ definieren. Dieses Restklassensystem von $O(E)$ heisst das durch E erzeugte freie A-System mit den Relationen B. Es wird mit $A^V(E, B)$ oder mit $A(E, B)$ bezeichnet. B heisst die *definierende Relation* von $A(E, B)$. Bezeichnet man mit (a_i) die $a_i\in E$ enthaltende Restklasse aus $A(E, B)$, so wird $A(E, B)$ durch (a_i) erzeugt und die (a_i) genügen den Gleichungen aus B.

Wenn man zwei in $A(E, B)$ kongruente Elemente aus $O(E)$ gleich setzt, so erhält man alle Gleichungen, die durch endlichmalige Anwen-

---

[9]) Vgl. hierzu etwa K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig (1932).

dungen der Gleichungen aus A und B beweisbar sind. Diese Gleichungen heissen die *Folgerelationen* von B. Besteht B' aus den Relationen aus B und gewissen Folgerelationen, so ist ersichtlich $A(E, B) = A(E, B')$. Wir setzen $C > B$, falls jede Folgerelation von B eine von C ist. Sind $C > B$ und zugleich $C < B$, so heissen C und B äquivalent, in Zeichen $C \sim B$. Ist $C \sim B$, so ist ersichtlich $A(E, B) = A(E, C)$.

Gelten die Gleichungen aus B in einem durch E erzeugten A-System $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ zu $A(E, B)$ homomorph. Fasst man nämlich die ein Element aus $\mathfrak{A}$ darstellenden Elemente aus $O(E)$ in eine Klasse zusammen, so erhält man ein zu $\mathfrak{A}$ isomorphes System $\overline{\mathfrak{A}}$. Zwei in $A(E, B)$ kongruente Elemente aus $O(E)$ stellen kongruente Elemente nach $\overline{\mathfrak{A}}$ dar, da die Relationen aus B nach der Voraussetzung auch in $\overline{\mathfrak{A}}$ gelten. Daher ist $\overline{\mathfrak{A}}$ und folglich $\mathfrak{A}$ zu $A(E, B)$ homomorph. Wenn man die in $\mathfrak{A}$ kongruenten Elemente gleich setzt, so mag man eine Menge C der Relationen erhalten. Dann ist $\mathfrak{A} = A(E, C), C > B$. Ist umgekehrt $C > B$, so ist $A(E, C)$ zu $A(E, B)$ homomorph. Zusammenfassend erhält man den folgenden Hauptsatz für freie Systeme.

Ein durch E erzeugtes, die Relationen B genügendes A-System ist zu $A(E, B)$ homomorph und zu $A(E, C), C > B$, isomorph. Ist umgekehrt $C > B$, so ist $A(E, C)$ zu $A(E, B)$ homomorph. Insbesondere ist jedes durch E erzeugte A-System zum freien A-System $A(E)$ homomorph und einem $A(E, B)$ mit einem geeigneten B isomorph.

Da jedes A-System $\mathfrak{A}$ als ein freies A-System mit Relationen aufgefasst wird, so erhält man ein Restklassensystem $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{A}$, wenn man gewisse Gleichungen zwischen den Elementen voraussetzt; und die Bilder der Gleichungen beim Homomorphismus $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^*$ gelten in $\mathfrak{A}^*$. Wenn man insbesondere gewisse v-Gleichungen voraussetzt, die für jede Elemente gelten sollen, so erhält man ein Restklassensystem, welches ein A^*-System ist. Dabei besteht A^* aus den v-Gleichungen aus A und den neuen v-Gleichungen. Ferner ist jedes Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, welches ein A^*-System ist, zu diesem eben konstruierten Restklassensystem homomorph.

Wir werden nun den bekannten Tietzeschen Satz in der Theorie der freien Gruppen auf unseren allgemeinen Fall übertragen.

i) Aus $B \sim B'$ folgt $A(E,B)=A(E,B')$.

ii) Ist $E \subset E' \subset O(E)$, so ist $A(E,B)$ zu $A(E',B')$ isomorph, wo B' aus den Relationen B und den Relationen $b=f(E)$, besteht die die Elemente b aus E' durch die Elemente aus E darstellen.

iii) Ist $A(E,B)$ schon durch eine Untermenge E_1 von E erzeugt, so ist $A(E,B)$ zu $A(E_1,B_1)$ isomorph. Dabei erhält man B, wenn man die Relationen B durch E_1 ausdrückt. Wir können nämlich die Elemente a aus E durch E_1 ausdrücken: $a=g(E_1)$. Besteht B' aus B und den Relationen $a=g(E_1)$, so ist $A(E,B)=A(E,B')$, da $a=g(E_1)$ Folgerelation von B ist. Da aber B Folgerelationen von B_1 und den $a=g(E_1)$ ist, so ist nach ii) $A(E_1,B_1)$ zu $A(E,B')$, folglich zu $A(E,B)$ isomorph.

iv) Wenn es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Erzeugenden E, E' gibt, die die Zuordnung zwischen den Relationen B, B' induziert, so ist $A(E,B)$ zu $A(E',B')$ isomorph.

Der Tietzesche Satz lautet:

Die Isomorphie zwischen $A(\overline{E},\overline{B})$ *und* $A(E,B)$ *kann man stets nach den obigen vier Schlussweisen beweisen.* D.h. $A(E,B)$ und $A(\overline{E},\overline{B})$ sind dann und nur dann zueinander isomorph, wenn man $\overline{E}$ aus E und zugleich $\overline{B}$ aus B nach den in i) bis iv) angegebenen Isomorphismen ableiten kann.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, ist klar. Ist $A(E,B)$ zu $A(\overline{E},\overline{B})$ isomorph, so kann man nach iv) die zugerordneten Elemente identifizieren, so daß E durch $\overline{E}$ und umgekehrt $\overline{E}$ durch E ausgedrückt wird. Dann ist die Behauptung nach den folgenden Schlussen klar:

$$(E,B)\xrightarrow{\text{ii}}(E\cup\overline{E},C)\xrightarrow{\text{i}}(E\cup\overline{E},C\cup\overline{C})\xrightarrow{\text{i}}(E\cup\overline{E},\overline{C})\xrightarrow{\text{iii}}(\overline{E},\overline{B})$$

Wir führen nun den Begriff der freien Produkte ein. Es seien $A_1^{V_1}(E_1,B_1)$, $A_2^{V_2}(E_2,B_2),\ldots$ beliebige Systeme, V sei ein den sämtlichen V_i enthaltender Verknüpfungsbereich. Dann bilde man zunächst $O^V(E)$, $E=E_1\cup E_2\cup\ldots$. Unter dem absoluten freien Produkt von den $A_i^{V_i}(E_i,B_i)$ bezüglich V verstehen wir das Restklassensystem von $O^V(E)$, das man erhält, wenn man in $O^V(E)$ alle Gleichungen A_i, B_i voraussetzt. Jedes $A_i^{V_i}(E_i,B_i)$ ist im absoluten freien Produkt enthalen. Wenn man ferner gewisse v-Gleichungen A voraussetzt, so erhält man ein Restklassensystem des absoluten freien Produktes, welches das *freie A-Produkt* heisst. Wichtig ist der Fall, daß $V = V_1 = V_2 = \ldots, A = A = A = \ldots$ sind. In diesem Fall ist jedes $A^V(E_i, B_i)$ im freien A-Produkt enthalten. Besteht $A^V(E_i, B_i)$ für jedes i aus einem einzigen Element ohne Verknüpfung, oder ist es ein durch ein Element erzeugtes freies A-System, so ist das freie A-Produkt nichts anderes als das freie A-System $A^V(E)$.

§ 5. **Einbettung und Erweiterung der Systeme.** Es sei $\mathfrak{A}$ ein A-System bezüglich V, und V' sei eine Menge der Folgeverknüpfungen α', die durch

$$a\,\alpha'\,b = f\,(a, b)$$

angegeben sind. Dabei bedeuten die f v-Funktionen bezüglich V. Ist eine Untermenge $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ nach den Verknüpfungen aus V' abgeschlossen, so heisst $\mathfrak{A}'$ *eingebettet* in $\mathfrak{A}$. Ist dabei $\mathfrak{A}' = A'(E', B')$, wo A' aus den Folgegleichungen von A besteht, die durch V' dargestellt sind, so ist das durch E', nach V erzeugte Untersystem $\mathfrak{A}''$ zum freien A-System $A^V(E')$ homomorph. Wenn man in $A^V(E')$ die Relationen B' (ausgedrückt nach V) voraussetzt, so erhält man ein Restklassensystem $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{A}''$ ist zu $\mathfrak{A}$ homomorph nach dem Fundamentalsatz der freien Systeme. Da $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}''$ ist, so stellen zwei verschiedene Elemente aus $\mathfrak{A}'$ sicher zwei verschiedene Elemente aus $\mathfrak{A}$ dar. Es sei nun ein $A'(E', B')$ vorgegeben, dessen Verknüpfungen V' aus V und dessen Gleichungen A' aus A abgeleitet werden. Dann bilde man $A^V(E')$. Setzt man B' (ausgedrückt nach V) voraus, so erhält man ein Restklassensystem von $A^V(E')$. Wenn dabei zwei verschiedene Elemente aus $A'(E', B')$ zwei verschiedene Elemente des Restklassensystems darstellen, so kann man $A'(E', B')$ in einem A-System einbetten. Nach der obigen Überlegung kann man entscheiden, ob ein A'-System in einem A-System einbettbar ist oder nicht.[10])

Ist ein A-System $\mathfrak{B}$ Untersystem eines A-Systems $\mathfrak{A}$, so heisst $\mathfrak{A}$ eine *Erweiterung* von $\mathfrak{B}$. Man bilde nun das freie A-Produkt von $\mathfrak{B}$ und einer Menge M ohne Verknüpfung. Jede Erweiterung $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ ist,

---

[10]) Vgl. E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, J. f. reine u. angew. Math. 188 (1937); G. Birkhoff, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, Ann. Math. 33 (1937)

wie man sich leicht überzeugt, einem solchen freien A-Produkt homomorph. Setzt man dann geeignete Relationen voraus, so erhält man ein zu $\mathfrak{A}$ isomorphes System. Wenn zwei verschiedene Elemente aus $\mathfrak{B}$ verschiedene Elemente aus dem Restklassensystem des freien A-Produktes darstellen, so erhält man sicher ein System, welches ein zu $\mathfrak{B}$ isomorphes Untersystem besitzt.

In der Theorie der Erweiterung sind die folgenden beiden Fälle von Wichtigkeit. Erstens seien zwei A-Systeme $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vorgegeben. Wir betrachten das Problem die sämtlichen A-Systeme $\mathfrak{A}$ zu konstruieren, die $\mathfrak{B}$ als normales Untersystem enthalten, so daß ein Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{C}$ isomorph ist.[11] Ist $\mathfrak{C} = A(E, C)$, so bilde man das freie A-Produkt $\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{B}$ und E. Wir setzen jetzt voraus, daß für jedes A-System gilt: Das durch $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ induzierte Restklassensystem $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}$ eines $\mathfrak{B}$ enthaltendes (nicht notwendig normales) Untersystems $\mathfrak{F}$ ist ein Untersystem von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Dann erzeugen die Vertreter der Erzeugende von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ sicher das ganze System $\mathfrak{A}$. Also ist $\bar{\mathfrak{A}}$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph. Da $\bar{\mathfrak{A}}$ $\mathfrak{B}$ enthält, so reduziert sich das Problem auf die Bestimmung des Restklassensystems $\mathfrak{A}^*$ mit den folgenden Eigenschaften: i) Jede Restklasse enthält höchstens nur ein Element von $\mathfrak{B}$. ii) Die ein Element aus $\mathfrak{B}$ enthaltenden Restklassen bilden ein normales Untersystem $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{A}^*$. iii) Es gibt ein zu $\mathfrak{C}$ isomorphes Restklassensystem $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{B}^*$.

Zweitens sei eine Menge B der Gleichungen vorgegeben, die durch die Elemente $a_1, a_2 \ldots$ aus einem A-System $\mathfrak{A}$ und die Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots$ mittels der Verknüpfungen aus V ausgedrückt sind. Wir betrachten nun das Problem eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, die mindestens eine Lösung der Gleichungen aus B enthält.[12] Ein solches $\mathfrak{A}^*$ enthält das durch $\mathfrak{A}$ und die Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ erzeugte Untersystem. Daher nehmen wir an, daß $\mathfrak{A}^*$ schon durch $\mathfrak{A}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ erzeugt ist. $\mathfrak{A}^*$ ist dann zum freien A-Produkt $\mathfrak{A}[x_1, x_2, \ldots]$ von $\mathfrak{A}$ und $x_1, x_2, \ldots$ homomorph. Also ist $\mathfrak{A}^*$ zum durch B definierten Restklassensystem

---

[11]) Nach diesem Prinzip wurde das Schreiersche Erweiterungsproblem wieder gelöst in K. Shoda, Über den Schreierschen Erweiterungssatz, Proc. Jmp. Acad. Tokyo 17 (1941). Vgl. auch H. Nagao, Über die Beziehungen zwischen dem Erweiterungssatz von O. Schreier und dem von K. Shoda, ebenda (1949).

[12]) Dies ist in der Steinitzschen Körpertheorie wichtig.

$\mathfrak{A}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots]$ homomorph, wo $\bar{\mathfrak{A}}$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist. Umgekehrt ist ein zu diesem Restklassensystem homomorphes System einer verlangten Erweiterung isomorph, wenn der Homomorphismus den Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ induziert. Daher reduziert sich das Problem auf die Bestimmung der Kongrnenz von $\mathfrak{A}[x_1, x_2, \dots]$ derart, daß zwei verschiedene Elemente aus $\mathfrak{A}$ inkongruent bleiben.

Wir werden nun wie üblich den Begriff der direkten Produkte einführen. Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ allgemeine (nicht notwendig eindeutige) Systeme mit demselben Verknüpfungsbereich V. Wir betrachten die Symbolen $(a_1, a_2, \dots)$, $a_i \in \mathfrak{A}_i$, die der Einfachheit halbar mit (a_i) bezeichnet werden. Dann und nur dann existiert $(a_i)\,\alpha\,(b_i)$, wenn $a_i\,\alpha\,b_i$ für jedes i existiert, und $(a_i)\,\alpha\,(b_i)$ besteht aus (c_i), $c_i \in a_i\,\alpha\,b_i$. Dann heisst das System $\mathfrak{A}$ der Symbole (a_i) das *direkte Produkt* von den $\mathfrak{A}_i$.

Besitzen die $\mathfrak{A}_i$ Nullelemente 0_i, so ist (0_i) das Nullelement von $\mathfrak{A}$. Sind $0_i\,\alpha\,0_i = 0_i$ für jedes α aus V, so bilden die Elemente (a_i), $a_i = 0_i$, $i \neq k$, ein zu $\mathfrak{A}_k$ isomorphes System, das auch mit $\mathfrak{A}_k$ bezeichnet werden mag. Wenn man auf der anderen Seite (a_i) auf a_i abbildet, erweist es sich, daß $\mathfrak{A}_i$ zu $\mathfrak{A}$ (2, IV)-homomorph ist. Denn $(a_i)\,\alpha\,(b_i)$, $a_i = b_i = 0_i$, $i \neq k$, existiert, wenn $a_k\,\alpha\,b_k$ existiert, also gilt 2. IV ist nach der Definition des direkten Produktes ersichtlich.

Die von endlich vielen von 0_i verschiedenen Elementen a_i gebildeten Elemente (a_i) bilden ein Untersystem des direkten Produktes, welches das *eingeschränkte direkte Produkt* genannt wird. Es ist durch die Komponenten $\mathfrak{A}_i$ erzeugt, falls $0_i\,\alpha\,a_i = a_i\,\alpha\,0_i = a_i$ für jedes a_i und ein α ist.

Sind ferner die $\mathfrak{A}_i$ sämtlich A-Systeme, so ist das direkte Produkt auch A-System. Dasselbe gilt natürlich auch für das eingeschränkte direkte Produkt.

§ 6. **Algebraische Abhängigkeit.** Es sei L ein Verband. Wir betrachten die Abbildung d der Menge der Paare (a, b), $a > b$, $a, b \in L$ auf ein aus zwei Elementen ε, η bestehendes System, wobei $\varepsilon < \eta$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\varepsilon\eta = \eta^2 = \eta\varepsilon = \eta$ sind. Wenn dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind, so heisst L (nach der Vereinigung) *quasigraduiert*.

i) $d(a, a) = \varepsilon$ für jedes a.

ii) Aus $a > b > c$ folgen $d(a, b) < d(a, c)$, $d(b, c) < d(a, c)$, $d(a, c) < d(a, b)\, d(b, c)$.

iii) Aus $a, a' > b$ folgt $d(a \cup a', b) < d(a, b)\, d(a', b)$.

iv) $d(a \cup c, b \cup c) < d(a, b)$.

Es sei L ein quasigraduierter Verband, $[b]$ ein durch b erzeugtes Dualideal. Die Elemente a mit $d(a, b) = \varepsilon$ bilden ein Ideal L_b von $[b]$. Sind nämlich $d(a_1, b) = d(a, b) = \varepsilon$, so folgt aus iii) $d(a_1 \cup a, b) = \varepsilon$. Da $b < a \cap a' < a$ für jedes a' aus $[b]$ ist, so folgt aus ii) $d(a \cap a', b) = \varepsilon$. Nach i) ist die Menge von a nicht leer. Nach ii) ist $L_a < L_b$ und folglich $L_a = L_b \cap [a]$ für $a \in L_b$. Ist umgekehrt ein Ideal L_b in $[b]$ für jedes b so definiert, daß aus $a \in L_b$ stets $L_a = L_b \cap [a]$ folgt, so setze man $d(a, b) = \varepsilon$ für $a \in L_b$ und $d(a, b) = \eta$ sonst. Dann gelten die Bedingungen i), ii), iii).

Der Verband aller Untersysteme eines Systems Ω sei quasigraduiert. Ist $d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varepsilon$ für Untersysteme $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ von Ω, so heisst $\mathfrak{A}$ eine *endliche Erweiterung* von $\mathfrak{B}$. Ein Element a heisst endlich über $\mathfrak{B}$, wenn a mindestens in einer endlichen Erweiterung von $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Die sämtlichen endlichen Elemente über $\mathfrak{B}$ bilden nach iii) ein Untersystem.

Ein Element a heisst *endlich* über einer Untermenge B, wenn a endlich über dem durch B erzeugten System $\mathfrak{B}$ ist. Ist a endlich über einer endlichen Untermenge von B, so heisst a *algebraisch* über B. Die sämtlichen algebraischen Elemente über B bilden ein Untersystem. Man beweist leicht:

1) *Jedes Element aus B ist algebraisch über B.*

2) *Ist a algebraisch über B und ist jedes Element aus B algebraisch über C, so ist a algebraisch über C.*

a sei algebraisch über $b, \dots, b_n$ aus B und b_i sei algebraisch über $c_{i1}, \dots, c_{im_i}$ aus C. Bezeichnet man das durch a bzw. b_i bzw. c_{ij} erzeugte System mit $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$, so ist $d(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}, \mathfrak{C}) = \varepsilon$, da $d(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}, \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = \varepsilon$, $d(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}, \mathfrak{C}) = \varepsilon$ sind.

Wir nehmen jetzt an, daß Ω ein A-System ist. Wenn das durch eine Untermenge E erzeugte Untersystem das freie A-System $A(E)$ ist, so heisst E *unabhängig*. Ist E unabhängig, so ist jede Untermenge von E unabhängig. Ist E abhängig, so gibt es Relationen und man erkennt, daß E Untermenge mit endlich vielen Elementen besitzt, die schon abhängig ist.

Wenn a zu E gehört oder, wenn es eine Relation von a und einer endlichen Untermenge F von E gibt, die keine Folge der Relationen von F ist, so heisst a von E *abhängig*, sonst *unabhängig*. Bezeichnet man mit $\bar{c}$ das Komplement eines Elementes c in E, so ist E dann und nur dann unabhängig, wenn jedes Element c vom Komplement $\bar{c}$ unabhängig ist. Ist nämlich E unabhängig, so ist $\bar{c}$ sicher von c unabhängig. Ist E abhängig, so sei $\mathrm{f}(a_1, \ldots, a_r)$ eine Relation mit wenigsten Elementen a_ν. Ist $1 < r$, so ist a_1 von $a_2, \ldots, a_r$, also von $\bar{a}_1$ abhängig. Ist $1 = r$, so ist a_1 von der leeren Menge abhängig. Ist E wohlgeordnet, so ist E dann und nur dann unabhängig, wenn jedes Element vom Abschnitt unabhängig ist. Man beweist leicht:

1) *Jedes Element aus E ist von E abhängig.*

2) *Ist a von $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ abhängig und von $b_1, \ldots, b_{n-1}$ unabhängig, so ist b_n von $b_1, \ldots, b_{n-1}, a$ abhängig.*

3) *Ist a von E abhängig, so ist E von einer endlichen Untermenge von E abhängig.*

Da 1) und 3) klar sind, so beweisen wir nur 2). Falls a mit einem b_i übereinstimmt, ist 2) auch klar. Also betrachten wir eine Relation, die mit keiner Relation von den b_i nach A äquivalent ist. Da a von $b_1, \ldots, b_{n-1}$ unabhängig ist, so enthält die Relation sicher (a und) b_n. Daher ist b_n von $b_1, \ldots, b_{n-1}, a$ abhängig.

Wir nehmen jetzt an, daß der Verband aller Untersysteme von $\mathfrak{A}$ so quasigraduiert ist, daß a dann und nur dann endlich über E, wenn a von E abhängig ist. Dann spricht man von der *algebraischen Abhängigkeit*. In diesem Fall stimmen die drei Begriffe „endlich", „algebraisch", „abhängig" überein. Ist jedes Element aus E algebraisch abhängig von E', so heisst E algebraisch abhängig von E'. Sind $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untersysteme von Ω und ist $\mathfrak{A}$ algebraisch abhängig von $\mathfrak{B}$, so heisst $\mathfrak{A}$ algebraische Erweiterung von $\mathfrak{B}$. Jede endliche Erweiterung von $\mathfrak{B}$ ist eine *algebraische Erweiterung*, wenn die algebraische Abhängigkeit in Ω definiert ist.

Wenn in Ω die algebraische Abhängigkeit definiert ist, so gelten die folgenden Grundsätze, die von van der Waerden[13]) deutlich formuliert wurden.

1) *Jedes Element aus E ist von E algebraisch abhängig.*

2) *Ist a von E und E von F algebraisch abhängig, so ist a algebraisch abhängig von F.*

3) *Ist a von $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ algebraisch abhängig und von $b_1, \ldots, b_{n-1}$ algebraisch unabhängig, so ist b_n algebraisch abhängig von $b_1, \ldots, b_{n-1}, a$.*

4) *Ist a von E algebraisch abhängig, so ist a von einer endlichen Untermenge von E algebraisch abhängig.*

Auf dem Grund dieser vier Sätze kann man bekanntlich die Theorie der algebraischen Abhängigkeit aufbauen. Zwei von einander algebraisch abhängige Mengen heissen *äquivalent*. Ein von der leeren Menge algebraisch abhängiges Element heisst *algebraisches Element*, sonst *transzendentes Element.*

§ 7. **Lineare Abhängigkeit.** Wenn nur die Elemente aus dem durch eine nicht leere Menge E erzeugten System algebraisch abhängig von E, so spricht man von der *linearen Abhängigkeit.* Damit ist der Begriff der linearen Abhängigkeit als ein spezialer Fall der algebraischen Abhängigkeit eingeführt. Die lineare Abhängigkeit ist also die algebraische Abhängigkeit, die dadurch definiert ist, daß $d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varepsilon$ nur im Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist. Jedes von E algebraisch abhängige Element ist im durch E erzeugten System enthalten, wenn aus $d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varepsilon$ stets $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ folgt. Ist umgekehrt a von E linear abhängig, so ist a im durch E erzeugten System enthalten. Setzt man $d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varepsilon$ nur für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so wird der Verband aller Untersysteme quasigraduiert. Dadurch wird die vorgegebene lineare Abhängigkeit definiert. Ein System heisst *lineares System,* wenn die lineare Abhängigkeit definiert ist.

Besitzt ein lineares System Ω ein Nullelement 0, so stimmt jedes algebraische Element mit 0 überein, da es von 0 linear abhängig ist. Daher besitzt ein lineares System höchstens nur ein Nullelement. Ist E

[13]) van der Waerden, Moderne Algebra I. Den von ihm angegebenen Hauptsätzen 1, 2, 3, müssen wir 4 hinzufügen, wenn wir die unendlichen Erweiterungen betrachtet. Vgl. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper.

eine mit Ω äquivalente linear unabhängige Menge, so ist jedes Element aus Ω im durch E erzeugten System enthalten, da es von E linear abhängig ist. *Das lineare System ist daher das durch E erzeugte freie System,* wenn E nicht leer ist, also, wenn Ω mindestens ein transzendentes Element enthält. Im anderen Fall besteht Ω nur aus einem Nullelement, wenn Ω ein Nullelement hat.

Ein A-System Ω ist dann und nur dann linear, wenn jedes durch eine Menge E' erzeugte Untersystem schon durch jede maximale unabhängige Untermenge von E' erzeugt wird. Daß diese Bedingung notwendig ist, ist klar. Sie ist auch hinreichend. Ist nämlich a von F abhängig, so wird das durch a und F erzeugte Untersystem durch eine maximale unabhängige Untermenge von F erzeugt, also ist a im durch F erzeugten System enthalten. Daher kann man die algebraische Abhängigkeit definieren, wenn man $d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varepsilon$ für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ setzt. Daher ist Ω linear.

Auf lineare Systeme werden wir im nächsten Kapitel wieder zurückkommen.

§ 8. **Galoissche Theorie.**[14]) Ein Verband mit einer Abschliessungsoperation α heisst *topologisch,* wenn i) $a^{\alpha} > a$, ii) aus $a > a'$ folgt $a^{\alpha} > a'^{\alpha}$, 3) $a^{\alpha\alpha} = a^{\alpha}$.

Es sei φ eine eindeutige Abbildung eines topologischen Verbandes A in einen topologischen Verband B und ψ eine eindeutige Abbildung von B in A derart, daß

I.	Aus $a > a'$ folgt $a^{\varphi} < a'^{\varphi}$.	Aus $b > b'$ folgt $b^{\psi} < b'^{\psi}$.
II.	$a^{\varphi\psi\alpha} > a^{\alpha}$	$b^{\psi\varphi\alpha} > b^{\alpha}$
III.	$a^{\varphi\alpha} = a^{\alpha\varphi\alpha}$	$b^{\psi\alpha} = b^{\alpha\psi\alpha}$

für a aus A und b aus B. Bezeichnet man $\varphi\psi$ bzw. $\psi\varphi$ mit Φ bzw. Ψ, so ist A bzw. B ein topologischer Verband mit der Abschliessung $\Phi\alpha$ bzw. $\Psi\alpha$, wie man sich leicht überzeugt. Die zwei Abbildungen φ, ψ heissen *Galoissch* bezüglich α, wenn $a^{\Phi\alpha} = a^{\alpha}$ und $b^{\Psi\alpha} = b^{\alpha}$.

Die Abbildungen φ, ψ sind stets Galoissch bezuglich $\Phi\alpha$ und $\Psi\alpha$. Denn es ist $a^{\Phi\Phi\alpha} = a^{\Phi\alpha\Phi\alpha} = a^{\Phi\alpha}$ und analog $b^{\Psi\Psi\alpha} = b^{\Psi\alpha}$.

---

14) Ähnliche Überlegung findet sich in O. Ore, On Galois Correspondence, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1948), C. J. Everett, Closure operators and galois theory in lattices, ebenda 55 (1948).

Ein Element a aus A heisst *abgeschlossen*, wenn $a = a^{\alpha}$ und zwar *regulär abgeschlossen*, wenn $a = a^{\varphi\alpha\psi\alpha}$. a heisst *offen*, wenn $a = a^{\varphi\alpha\psi}$ und zwar *regulär offen*,[15]) wenn $a = a^{\varphi\alpha\psi\alpha}$. Nach III ist $a^{\varphi\alpha\psi} = a^{\alpha\varphi\alpha\psi}$, d. h. jede offene Ableitung ist eine regulär offene Ableitung. II besagt $a^{\varphi\alpha\psi\alpha} > a^{\alpha}$ und die Abbildungen φ, ψ sind dann nur dann Galoissch, wenn jede abgeschlossene Ableitung in A und B eine regulär abgeschlossene ist.

Bedeuten φ und ψ die Komplementierung, so ist $A = B$ ein üblicher topologischer Verband. Daher kann man die Galoissche Theorie als eine Verallgemeinerung des Satzes in der Topologie ansehen, daß jede abgeschlossene Ableitung regulär ist, wenn jede offene Ableitung regulär ist. Es sei noch bemerkt, daß die Abbildungen φ, ψ Galoissch bezüglich α sind, wenn sie Galoissch bezüglich der diskreten Topologie, $a^{\alpha} = a$, sind.

Ein Verband L heisst *reell-graduiert*, wenn eine reellwertige Funktion $d(a, b)$ für $a > b$ aus L vorgegeben ist, die den Bedingungen von § 6 genügt. Dabei soll noch vorausgesetzt werden:

vi) $d(a, a) = 1$.

v) Für die endlichen Werte d gelten:

$$d(a, b) \neq d(a, c) \text{ für } a > b \neq c; \quad d(b, c) \neq d(a, c) \text{ für } a \neq b > c.$$

Es seien A und B topologische Verbände mit I und $O = O^{\alpha}$, die so reell-graduiert sind, daß $d(I, O)$, daher jedes $d(a, a')$, $d(b, b')$ endlich ist. Dann sind die Abbildungen φ, ψ Galoissch, wenn

$$d(I, a^{\alpha}) = d(a^{\varphi\alpha}, O), \; d(I, b^{\alpha}) = d(b^{\psi\alpha}, O).$$

Denn aus $a^{\varphi\alpha} = a^{\varphi\psi\varphi\alpha}$ folgt $d(a^{\varphi\alpha}, O) = d(a^{\varphi\psi\varphi\alpha}, O)$, also $d(I, a^{\alpha}) = d(I, a^{\varphi\psi\alpha})$. Da $a^{\varphi\psi\alpha} > a$ ist, so folgt hieraus $a^{\varphi\psi\alpha} = a^{\alpha}$.

Es seien nunmehr $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei Systeme. Der Verband gewisser Untermenge von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sei A bzw. B. Definiert man eine Abschliessungsoperation α in A bzw. B, so wird A bzw. B ein topologischer Verband. Sind die Abbildungen φ, ψ Galoissch, so erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den abgeschlossenen Untermengen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die eine *Galoissche Zuordnung* genannt wird.

---

15) Vgl. H. Terasaka, Die Theorie der topologischen Verbände, Fund. Math. 33 (1939). Die hier angegebene Definition der regulär offenen Ableitung ist etwas anderes als die von Terasaka.

Wir nehmen jetzt an, daß A bzw. B der Verband aller Untersysteme von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ ist. Ein Untersystem a von $\mathfrak{A}$ heisst *Galoissch*, wenn a^{φ} ein normales Untersystem von $\mathfrak{B}$ ist. Ist $\overline{\mathfrak{B}}$ ein Restklassensytem nach a^{φ}, so versteht man unter $a'^{\overline{\varphi}}$ für $a' < a$ die Gesamtheit der mindestens ein Element aus a'^{φ} enthaltenden Restklassen, d. h. das Bild von a'^{φ} in $\overline{\mathfrak{B}}$. Mit $b^{\overline{\psi}}$ für $\overline{b} \subset \overline{\mathfrak{B}}$ bezeichnen wir das Untersystem $b^{\psi} \wedge a$, wo b aus den in $\overline{b}$ enthaltenen Elementen aus $\mathfrak{B}$ besteht. Dann bedeuten $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ Abbildungen zwischen den Verbänden $\overline{A}, \overline{B}$ der Untersysteme von $a, \overline{\mathfrak{B}}$. Sind A, B reell-graduiert, so kann man $\overline{A}, \overline{B}$ naturgemäss graduieren. Wir nehmen jetzt an: i) φ, ψ sind Galoissch, wenn $d(a, O), d(\overline{\mathfrak{B}}, O)$ endlich sind. ii) Der Durchschnitt der Kongruenzen von $\mathfrak{B}$, die $\overline{\mathfrak{B}}$ mit endlichen $d(\overline{\mathfrak{B}}, O)$ definieren, ist O. iii) Jedes Element λ aus $\mathfrak{A}$ ist in einem Galoisschen a mit endlichen $d(a, O)$ enthalten.

Die Gesamtheit der mit einem Element γ aus $\mathfrak{B}$ nach $\overline{\mathfrak{B}}$ kongruenten Elemente bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\gamma)$. Dann ist $\mathfrak{B}$ ein topologischer Raum mit den Umgebungen $\mathfrak{B}(\gamma)$. Dadurch kann man die Abschliessungsoperation α in B einführen. Setzt man $a^{\alpha} = a$ in A, so beweist man nach dem Vorbild von W. Krull, daß $b^{\Psi\varphi} = b^{\alpha}$ nnd $a^{\varphi} = a^{\varphi\varphi}$. Gilt auf der anderen Seite $a^{\Phi} = a$, so erhält man also die Galoissche Zuordnung zwischen den Untersystemen von $\mathfrak{A}$ und den abgeschlossenen Untersystemen von $\mathfrak{B}$.

Kapitel III. Strukturtheorie

§ 9. **Verband der normalen Untersysteme und der Kongruenzen.** In diesem Kapitel betrachten wir wieder ein allgemeines (nicht notwendig eindeutiges) System $\mathfrak{A}$. Wir beweisen zunächst:

Ist der durch die $(3, II)$*-bzw.* $(3, IV)$*-Homomorphismen von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *induzierte Meromorphismus zwischen* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$ *stets ein Klassenmeromorphismus, so bilden die sämtlichen* $(3, II)$*-bzw.* $(3, IV)$*-Kongruenzen von* $\mathfrak{A}$ *einen vollständigen modularen Verband.*

Wir wissen schon, das der Verband vollständig ist; also haben wir nur zu beweisen, daß er modular ist. Den Meromorphismus zwischen den durch zwei Kongruenzen φ, ψ bestimmten Restklassensystemen erhält man, wenn man die Restklassen mit gemeinsamen Elementen zuordnet. Nach unserer Voraussetzung erhält man die Restklassen K von $\varphi \bigcup \psi$, wenn man die Restklassen von φ in eine Klasse zusammensetzt, die mit einer Restklasse von ψ gemeinsame Elemente besitzen. Es seien φ^*, φ, ψ Kongruenzen von $\mathfrak{A}$. Um die Modularität des Verbandes zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß aus $\varphi^* \supset \varphi$, $\varphi^* \neq \varphi$, $\varphi^* \bigcup \psi = \varphi \bigcup \psi$ stets $\varphi^* \bigcap \psi \neq \varphi \bigcap \psi$ folgt. Da $\varphi^* \neq \varphi$ ist, so gibt es eine Restklasse C^* von φ^*, die eine Restklasse C von φ und noch andere Resklasse enthält. Ist C' eine Restklasse von ψ, die mit C gemeinsame Elemente besitzt, so enthält die C enthaltende Restklasse K von $\varphi \bigcup \psi$ nur Restklassen von φ, die mit C' gemeinsame Elemente besitzen. Aus $\varphi^* \bigcup \psi = \varphi \bigcup \psi$ folgt $K \supset C^*$ und $C^* \bigcap C' \neq C \bigcap C'$; also $\varphi^* \bigcap \psi \neq \varphi \bigcap \psi$.

Wir betrachten nun normale Untersysteme von $\mathfrak{A}$. Sind $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ Restklassensysteme nach φ, ψ, so erhält man nach $\varphi \bigcap \psi$ eine $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{C}$. Daher ist der Durchschnitt zweier normalen Untersysteme stets normal. Es sei $\mathfrak{B}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^*$ ein $\mathfrak{B}$ enthaltendes Untersystem von $\mathfrak{A}$. Ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ induziert ein $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}$, welches nicht notwendig Untersystem von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ zu sein braucht. Ist $\mathfrak{B}^*$ auch normal in $\mathfrak{A}$, so kann man $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ stets so annehmen, daß $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}$ Untersystem von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ist. Zum Beweis hat man nur den Durchschnitt der Kongruenzen zu bilden, die zwei beliebige Restklassensysteme $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}^*$ definieren.

Ist der durch zwei (3, II)-bzw, (3, IV)-Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ induzierte Meromorphisums zwischen zwei Systemen ein Klassenmeromorphismus und $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{B}$ (3, II)-bzw. (3, IV)-normale Untersysteme von $\mathfrak{A}$, so ist das durch ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ induzierte $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ durch die Kongruenz φ vermittelt, so bilde man die Vereinigung von φ mit einer Kongruenz ψ nach $\mathfrak{B}^*$. Nach der oben angegebenen Konstruktion der Vereinigung der Kongruenz erkennt man leicht, daß $\mathfrak{B}^*$ aus gewissen Restklassen aus $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ besteht.

Ist ferner die Vereinigung zweier (3, II)-bzw. (3, IV)-normalen Untersysteme $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ auch normal derselben Art und sind $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ die Restklassensysteme nach φ, ψ, so definiert $\varphi \bigcup \psi$ ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \bigcup \mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{B} \bigcup \mathfrak{C}$ normal in $\mathfrak{A}$ ist, so ist $\mathfrak{B} \bigcup \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ Untersystem von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Daher besteht $\mathfrak{B} \bigcup \mathfrak{C}$ aus den Restklassen aus $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, die mit $\mathfrak{C}$ gemeinsame Elemente besitzen. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Zusammenfassend erhält man:

Ist der durch zwei $(3, II)$*-bzw.* $(3, IV)$*-Homomorphismen von* $\mathfrak{A}$ *induzierte Meromorphismus zwischen zwei Systemen ein Klassenmeromorphismus und ist die Vereinigung zweier* $(3, II)$*-bzw.* $(3, IV)$*-normalen Untersysteme auch normal derselben Art, so ist der Verband aller* $(3, II)$*-bzw.* $(3, IV)$*-normalen Untersysteme vou* $\mathfrak{A}$ *zum Verband aller* $(3, II)$*-bzw.* $(3, IV)$*-Kongruenzen von* $\mathfrak{A}$ ***homomorph, also ist er modular.***

Da die Voraussetzungen dieses Satzes grundlegend für die folgenden Untersuchung sind, so werden wir sie ausdrücklich formulieren. [16])

(I) $\mathfrak{A}$ *besitzt das festgesetzte Nullelement.*

(II) *Die Vereinigung zweier* [$(3, \mathrm{II})$*-bzw.*] $(3, IV)$*-normalen Untersysteme von* $\mathfrak{A}$ *ist auch normal derselben Art in* $\mathfrak{A}$.

(III) *Die* [$(3, II)$*-bzw.*] $(3, IV)$*-Homomorphismen von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *induzieren stets ein Klassenmeromorphismus zwischen* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$.

Für die Bikongruenzen und die binormalen Untersysteme von $\mathfrak{A}$ kann man analog vorgehen, wenn man voraussetzt:

I. $\mathfrak{A}$ besitzt das festgesetzte Nullelement.

II. Die sämtlichen Bikongruenzen bilden einen vollständigen Verband.

II′. Die Vereinigung zweier binormalen Untersysteme von $\mathfrak{A}$ ist binormal.

III. Die Bihomomorphismen von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ induzieren stets ein Klassenmeromorphismus zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Aus II, II′ folgt, daß die sämtlichen binormalen Untersysteme einen vollständigen Verband bilden. Die Modularität beweist man auch unabhängig von III wie folgt. $\mathfrak{B}^*, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ seien binormale Untersysteme von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^* \neq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^* \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}$ enthält. Jede Restklasse aus $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ enthält mindestens ein Element aus $\mathfrak{C}$, wie man aus dem Beweis des zweiten Isomorphiesatzes ablesen kann. Da $\mathfrak{B}^*$ mindestens zwei Restklassen aus $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}/\mathfrak{B}$ enthält, so ist $\mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{C} \neq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Daher ist der Verband aller binormalen Untersysteme modular.

---

[16]) Diese Voraussetzungen gelten für "loops", komplementierte modular-Verbände, also natürlich für Gruppen, Ringe, Boolesche Algebra, aber nicht für allgemeine Verbände.

Es sei V' eine Untermenge des Verknüpfungsbereiches V von $\mathfrak{A}$. Wenn $\mathfrak{A}$, aufgefasst als System bezüglich V', der Bedingung III genügt, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{A}$ bezüglich V. Setzt man I, II, III voraus, so kann man II' aus demselben für V' ableiten. Ist φ bzw. ψ Bikongruenz von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ und ist $\varphi \bigvee \psi$ die Kongruenz von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{D}$, so ist ersichtlich $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{C}$. Auf der anderen Seite wird $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ mittels V' erzeugt. Daher ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{C}$, also gilt II'. Die Bedingungen (II), (III) folgen also aus (II), (III) für V', wenn man (I) voraussetzt.

§ 10. **Normalkette und Kompositionsreihe.**[17]) Eine Kette der $r+1$ Untersysteme von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_r = 0$$

heisst eine *Binormalkette,* wenn $\mathfrak{A}_{i+1}$ binormal in $\mathfrak{A}_i$ ist. r heisst die Länge der Kette. Die r Birestklassensysteme

$$\mathfrak{A} // \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 // \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{r-1} // \mathfrak{A}_r$$

heisst *Birestkette.* Zwei Birestketten heissen zueinander isomorph, wenn sie bis auf die Reihenfolge zueinder isomorph sind.

Schreierscher Satz. *Aus zwei Binormalketten kann man stets durch Verfeinerung zwei Binormalketten konstruieren, deren Birestketten zueinander isomorph sind.*

Es seien

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_r = 0, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_s = 0$$

die vorgegebenen Binormalketten. Man bilde

$$\mathfrak{A}_j \supset \mathfrak{A}_j \bigwedge \mathfrak{B}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_j \bigwedge \mathfrak{B}_s = 0,$$
$$\mathfrak{B}_i \supset \mathfrak{A}_1 \bigwedge \mathfrak{B}_i \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_r \bigvee \mathfrak{B}_i = 0.$$

Diese Reihen sind Binormalketten von $\mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{B}_i$, da $\mathfrak{A}_{k+1} \bigwedge \mathfrak{B}_i$ binormal in $\mathfrak{A}_k \bigwedge \mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{A}_j \bigwedge \mathfrak{B}_{k+1}$ binormal in $\mathfrak{A}_j \bigwedge \mathfrak{B}_k$ sind. Wenn φ_i das $\mathfrak{B}_i / \mathfrak{B}_{i+1}$ vermittelt, so erhält man

$$\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_{0i} \supset \mathfrak{B}_{1i} \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_{ri} = \mathfrak{B}_{i+1}, \mathfrak{B}_{ki} = (\mathfrak{A}_k \bigwedge \mathfrak{B}_i)^{\varphi_i}.$$

Dann ist $\mathfrak{B}_{k+1, i}$ binormal in $\mathfrak{B}_{ki}$. Denn $\mathfrak{C}_{ki} = (\mathfrak{A}_k \bigwedge \mathfrak{B}_{i+1}) \bigvee (\mathfrak{A}_{k+1} \bigwedge \mathfrak{B}_i)$

[17]) In diesem Paragraphen gebrauchen wir die Bedingungen III nicht.

ist binormal in $\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_i$, da $\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ und $\mathfrak{A}_{k+1} \frown \mathfrak{B}_i$ beides binormal in $\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_i$ sind. Daher ist ein $\mathfrak{C}_{ki}/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ binormal in $\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_i/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ und $\mathfrak{C}_{ki}$ beseteht aus den mit den Elementen aus $\mathfrak{A}_{k+1} \frown \mathfrak{B}_i$ kongruenten Elementen. Nach der Definition von $\mathfrak{B}_{ki}$ ist aber $\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_i/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ zu $\mathfrak{B}_{ki}/\mathfrak{B}_{i+1}$ isomorph. Einer Restklasse aus $\mathfrak{C}_{ki}/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ entspricht dabei eine Restklasse aus $\mathfrak{B}_{ki}/\mathfrak{B}_{i+1}$, die aus den mit den Elementen aus $\mathfrak{B}_{k+1,i}$ kongruenten Elementen besteht. Daher entsprechen $\mathfrak{C}_{ki}/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ und $\mathfrak{B}_{k+1,i}/\mathfrak{B}_{i+1}$ miteinander. Da $\mathfrak{C}_{ki}/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ binormal in $\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_i/\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}$ ist, so ist $\mathfrak{B}_{k+1,i}/\mathfrak{B}_{i+1}$ binormal in $\mathfrak{B}_{ki}/\mathfrak{B}_{i+1}$, also ist $\mathfrak{B}_{k+1,i}$ binormal in $\mathfrak{B}_{ki}$.

Unter Benützung der Binormalkette von $\mathfrak{A}_j$ definieren wir analog

$$\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_{j0} \supset \mathfrak{A}_{j1} \supset \dots \supset \mathfrak{A}_{js} = \mathfrak{A}_{j+1}.$$

Um den Schreierschen Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{A}_{ki}//\mathfrak{A}_{k,i+1}$ und $\mathfrak{B}_{ki}//\mathfrak{B}_{k+1,i}$ isomorph sind. Wir wissen aber schon die Isomorphie:

$$\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_i//\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1} \sim \mathfrak{B}_{ki}//\mathfrak{B}_{i+1}$$
$$(\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}) \frown (\mathfrak{A}_{k+1} \frown \mathfrak{B}_i)//\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1} \sim \mathfrak{B}_{k+1,i}//\mathfrak{B}_{i+1}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}//(\mathfrak{A}_k \frown \mathfrak{B}_{i+1}) \smile (\mathfrak{A}_{k+1} \frown \mathfrak{B}_i) \sim \mathfrak{B}_{ki}//\mathfrak{B}_{k+1,i}.$$

Die linke Seite ist analog zu $\mathfrak{A}_{ki}//\mathfrak{A}_{k,i+1}$ isomorph. Damit ist die Isomorphie von $\mathfrak{A}_{ki}//\mathfrak{A}_{k,i+1}$ und $\mathfrak{B}_{ki}//\mathfrak{B}_{k+1,i}$ bewiesen.

Wenn man eine Binormalkette nicht weiter verfeinern kann, so spricht man von der *Bikompositionsreihe*. Dann folgt aus dem Schreierschen Satz.

Jordan-Hölderscher Satz. *Besitzt $\mathfrak{A}$ eine Bikompositionsreihe, so sind die Birestketten zweier Bikompositionsreihen zueinander isomorph.*

Wenn man nur die binormalen Untersysteme von $\mathfrak{A}$ betrachtet, so kann man analog vorgehen und den Schreierschen Satz, den Jordan-Hölderschen Satz beweisen. Dabei spricht man von der *Bihauptreihe* statt Bikompositionsreihe.

Wenn man sich auf (3, II)-bzw. (3, IV)-normalen Untersysteme beschränkt, so kann man natürlich analog vorgehen und zwar im Fall (3, IV) unter den Voraussetzungen (I), (II).

§ 11. **Direktes Produkt und direkte Vereinigung.** Wir betrachten nun das direkte Produkt endlich vieler, etwa n Systeme $\mathfrak{A}_i$ mit einem Verknüpfungsbereich V:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n).$$

Jedes Element a aus $\mathfrak{A}$ lässt sich in der Form

$$a = (a_1 a_2 \ldots a_n), \quad a_i \in \mathfrak{A}_i$$

darstellen. Durchläuft a alle Elemete eines Untersystems $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, so durchläuft a_i ein Untersystem $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{A}_i$. Das Untersystem $\overline{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n)$ heisst die *Hülle* von $\mathfrak{B}$ in bezug auf die direkte Zerlegung von $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$ heisst ein *subdirektes Produkt* von den $\mathfrak{B}_i$. Die Kongruenz φ_i von $\mathfrak{B}$ sei definiert durch den Homomorphismus, der a auf a_i abbildet. Dann ist ersichtlich

$$\varphi_1 \frown \cdots \frown \varphi_n = O$$

Sind umgekehrt $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (3, IV)-Kongruenzen von $\mathfrak{B}$, deren Durchschnitt O ist, so ist $\mathfrak{B}$ das subdirekte Produkt von den durch φ_i definier, ten zu $\mathfrak{B}$ (3, IV)-homomorphen Systemen $\mathfrak{B}_i$.

Ein System heisst (3, IV)-*irreduzibel*, wenn es keine (3, IV)-Kongruenzen φ, ψ mit $\varphi \frown \psi = O$ besitzt. Da nach (III) der Verband aller (3, IV)-Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ modular ist, so erhält man bekanntlich:

Gilt der aufsteigende Kettensatz im Verband aller (3, IV)-Kongruenzen von $\mathfrak{A}$, so ist die Anzahl der (3, IV)-irreduziblen Faktoren der unverkürzbaren subdirekten Produktdarstellung von $\mathfrak{A}$ unabhängig von der Darstellung.

Unter derselben Voraussetzung ist die Darstellung dann und nur dann, bis auf die Reihenfolge, eindeutig, wenn der Verband aller (3, IV)-Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ distributiv ist.

Im folgenden beschränken wir uns auf die direkte Produktzerlegung $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n)$ derart, daß $\mathfrak{A}_i$ zu $\mathfrak{A}$ (3, IV)-homomorph ist. Daher werden wir (3, IV) auslassen. Eine subdirekte Produktdarstellung eines Untersystems $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ nach $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$ sei vorgegeben. Wenn man zwei Elemente b_1, b_2 mit $(b_1 b_2) \in \mathfrak{B}$ zuordnet, so erhält man einen Meromorphismus von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Nach (III) gibt es isomorphe Restklassensysteme von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die aus den Restklassen $C_1, D_1, \ldots; C_2, D_2, \ldots$ bestehen, so daß je zwei Elemente aus C_1 und C_2, u. s. w. zugeordnet sind. Wenn $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ durch die Kongruenz φ_1 bzw. φ_2 definiert ist, so definiert $\psi = \varphi_1 \bigvee \varphi_2$ das aus $(C_1\, C_2), (D_1\, D_2), \ldots$ bestehende Restklassensystem. Ist $\varphi_1 \bigvee \varphi_2 = I$, so ist $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2)$. Die Umkehrung ist klar. Nach Induktion erhält man also

Es seien $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *die durch die* $(3, IV)$*-Kongruenzen* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *definierten zu* $\mathfrak{B}$ *homomorphen Systeme.* $\mathfrak{B}$ *ist dann und nur dann zum direkten Produkt* $(\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n)$ *isomorph, wenn* $\varphi_1 \bigwedge \ldots \bigwedge \varphi_n = O$, $(\varphi_1 \bigwedge \ldots \bigwedge \varphi_k) \bigvee \varphi_{k+1} = I$ *für* $k = 1, \ldots, n\text{-}1$ *sind.*

Man erkennt leicht, daß solche direkte Produktzerlegung von $\mathfrak{A}$ nur im Fall auftreten kann, wo je zwei Elemente aus $\mathfrak{A}$ durch jedes α aus V verknüpfbar sind. Ist 0_i das Nullelement von $\mathfrak{A}_i$ und ist $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n)$, so ist $0 = (0_1 \ldots 0_n)$ ein Nullelement von $\mathfrak{A}$. Die $(0_1 \ldots 0_{i-1}\, a_i\, 0_{i+1} \ldots 0_n)$ bilden ein zu $\mathfrak{A}_i$ isomorphes normales Untersystem von $\mathfrak{A}$; es wird auch mit $\mathfrak{A}_i$ bezeichnet. Nach der üblichen Schreibweise gebrauchen wir dann den Ausdruck $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$.

Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ und φ_1, φ_2 seien die zugehörigen Kongruenzen nach $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1$ Dann muss $I = \varphi_1 \bigvee \varphi_2$ eine Kongruenz nach $\mathfrak{A}_1 \bigvee \mathfrak{A}_2$ sein. Daher ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \bigvee \mathfrak{A}_2$. Diese Tatsache kann man unabhängig von (II) beweisen, wie folgt. Die Hülle von $\mathfrak{A}_1 \bigvee \mathfrak{A}_2$ ist ersichtlich gleich $\mathfrak{A}$. Wie im Beweis des vorigen Satzes kann man $\mathfrak{A}_1 \bigvee \mathfrak{A}_2$ erhalten mit Hilfe der isomorphen Restklassensysteme von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Da aber $\mathfrak{A}_1 \bigvee \mathfrak{A}_2$ alle Elemente von der Gestalt $(0\, b_2), (b_1\, 0)$ enthält, so muss $\mathfrak{A}_1 \bigvee \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ sein. Nach Induktion erhält man also: Aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \bigvee \ldots \bigvee \mathfrak{A}_n$. Dabei ist ersichtlich

$$(\mathfrak{A}_1 \bigvee \ldots \bigvee \mathfrak{A}_k) \bigwedge \mathfrak{A}_{k+1} = 0.$$

Dies kann man folgendermassen formulieren:

Ist $\mathfrak{A}$ *das direkte Produkt der normalen Untersysteme* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, *so ist* $\mathfrak{A}$ *die direkte Vereinigung derselben.*

Ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ und ist $\mathfrak{B}$ ein $\mathfrak{A}_1$ enthaltendes Untersystem von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{A}_2 \bigwedge \mathfrak{B})$. Denn die Hülle $\overline{\mathfrak{B}}$ enthält $\mathfrak{A}$, also ist $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}_2$. Nach der oben angegebenen Konstruktion von $\mathfrak{B}$ aus $\bar{\mathfrak{B}}$ überzeugt man sich leicht, daß $\mathfrak{B}=\bar{\mathfrak{B}}=\mathfrak{A}_1\times(\mathfrak{A}_2\frown\mathfrak{B})$ ist.

Ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}'$, *so sind* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{C}'$ *isomorph.* Denn jedes Restklassensystem aus $[\mathfrak{C}]$ bestimmt ein Restklassensystem aus $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$. Da aber $\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\smile\mathfrak{C}$ ist, so ist nach dem zweiten Isomorphiesatz $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ zu $[\mathfrak{C}]$ einseitig isomorph. Folglich sind $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{C}']$ zueinander gegenseitig isomorph. Dann müssen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ als die feinsten Restklassensysteme zueinander isomorph sein.

Mit Hilfe der von Ore[18]) angegebenen Verbandtheoretischen Formulierung des Remak-Schmidtschen Satzes kann man nun ohne Mühe behaupten :

Remak-Schmidtscher Satz I. *Hat der Verband aller (3, IV)-Kongruenzen von* $\mathfrak{A}$ *endliche Länge, so ist die Zerlegung von* $\mathfrak{A}$ *in das direkte Produkt der direkt (3, IV)-unzerlegbaren Faktoren bis auf die Anordnung der Faktoren und bis auf die Isomorphie eindeutig. Dabei kann man jeden Faktor einer Zerlegung durch den entsprechenden Faktor einer anderen ersetzen.*

Betrachtet man den Verband aller binormalen Untersysteme von $\mathfrak{B}$, so folgt aus der Modularität des Verbandes unmittelbar

Remak-Schmidtscher Satz II. *Sind*

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\smile\mathfrak{B}_2\smile\dots\smile\mathfrak{B}_n=\mathfrak{B}_1'\smile\mathfrak{B}_2'\smile\dots\mathfrak{B}_{n'}'$$

zwei Zerlegung eines Syetems $\mathfrak{B}$ *mit einer Bihauptkette in die direkte Vereinigung der direkt unzerlegbaren Faktoren, so ist* $n=n'$ *und* $|\mathfrak{B}_i|$, $|\mathfrak{B}_j|$ *sind nach einer geeigneten Reihenfolge isomorph. Dabei kann man* $\mathfrak{B}_i$ *durch das entsprechende* $\mathfrak{B}_j'$ *ersetzen.*

Dafür dual kann man behaupten :

Remak-Schmidtscher Satz III. *Sind*

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\frown\mathfrak{B}_2\frown\dots\frown\mathfrak{B}_n=\mathfrak{B}_1'\frown\mathfrak{B}_2'\frown\dots\frown\mathfrak{B}_{n'}'$$

zwei Zerlegungen eines binormalen Untersystems $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{A}$ *in den direkten Durchschnitt der direkt unzerlegbaren Faktoren und hat* $\mathfrak{A}//\mathfrak{B}$ *eine Bihauptreihe, so ist* $n=n'$ *und* $\mathfrak{A}//\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}//\mathfrak{B}_j'$ *sind nach einer geeigneten*

---

18) O. Ore. On the foundation of abstract algebra I, II, Ann. Math. 36, 37 (1935-36).

Reihenfolge isomorph. Dabei kann man $\mathfrak{B}_i$ durch das entsprechende $\mathfrak{B}_j'$ ersetzen. [19])

Wir beweisen nun:

Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ die direkte Vereinigung der (3, IV)-normalen Untersysteme $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Sind $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ die Bilder von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in $\overline{\mathfrak{A}} = |\mathfrak{A}|$, so ist $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}} \times \overline{\mathfrak{C}}$. Ist umgekehrt $|\mathfrak{A}|$ das direkte Produkt von $|\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}|$, so ist $\mathfrak{A}$ die direkte Vereinigung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ folgt die direkte Vereinignng $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}} \cup \overline{\mathfrak{C}}$. Nach dem zweiten Isomorphiesatz ist $\overline{\mathfrak{A}}//\overline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}//\overline{\mathfrak{C}}$ zn $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{B}$ isomorph. Die Vereinigung der $\overline{\mathfrak{A}}//\overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{A}}//\overline{\mathfrak{C}}$ definierenden Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ ist I, da $\overline{\mathfrak{B}} \cup \overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{A}}$ ist. Der Durchschnitt ist O, da $\overline{\mathfrak{B}} \cap \overline{\mathfrak{C}} = O$ ist. Daher ist $\overline{\mathfrak{A}}$ zu $(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ isomorph und zwar $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}} \times \overline{\mathfrak{C}}$, wie man sich leicht überzeugt. Ist umgekehrt $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \times |\mathfrak{C}|$, so bilden die in $|\mathfrak{B}|$ bzw. $|\mathfrak{C}|$ enthaltenen Elemente aus $\mathfrak{A}$ ein normales Untersystem $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$. Da $|\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}|$ nur das Nullelement gemeinsam hat, so ist $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = O$. $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ ist normal in $\mathfrak{A}$ und es hat mit jeder Restklasse aus $|\mathfrak{A}$ gemeinsame Elemente. Daher ist $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{A}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß $|\mathfrak{B}| = \overline{\mathfrak{B}}$, $|\mathfrak{C}| = \overline{\mathfrak{C}}$ sind und, daß aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ stets $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \times |\mathfrak{C}|$ folgt. Ist insbesondere das Restklassensystem durch das normale Untersystem eindeutig bestimmt, so ist $|\mathfrak{A}| = \mathfrak{A}$ und folglich ist der Begriff der direkten Vereinigung mit dem des direkten Produktes äquivalent. Wenn man sich ferner auf A-Systeme beschränkt, so ist der Begriff der direkten Vereinigung mit dem des freien Produktes äquivalent, falls jedes Untersystem stets normal ist.

§ 12. **Lineare Systeme.** Ein System $\mathfrak{A}$ heisst einfach (genauer (3, IV)-einfach), wenn es keine von I und O verschiededne (3, IV)-Kongruenz hat. Das direkte Produkt der einfachen Systeme heisst *vollständig reduzibel.* Der modulare Verband aller Kongruenzen eines vollständig reduziblen Systems $\mathfrak{A}$ ist komplementiert. Also erhält man bekanntlich:

Ein zu einem vollständig reduziblen System $\mathfrak{A}$ homomorphes System $\mathfrak{B}$ ist vollständig reduzibel und $\mathfrak{A}$ ist dem direkten Produkt von $\mathfrak{B}$ und

---

19) Der Satz I gilt unabhängig von der Bedingung (II), während die Sätze II und III unabhängig von (III) gelten.

einem anderen $\mathfrak{C}$ isomorph.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_n$ mit einfachen $\mathfrak{P}_i$, so ist nach § 11 $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{P}_n$ und umgekehrt, da $|\mathfrak{P}_i| = \mathfrak{P}_i$ ist. Also ist $|\mathfrak{A}| = \mathfrak{A}$. Damit ist gezeigt:

Ein Restklassensystem eines vollständig reduziblen Systems wird durch das normale Untersystem eindeutig bestimmt.

Nach der bekannten Schlussweise kann man ferner behaupten:

Jede Kompositionsreihe eines vollständig reduziblen Systems ist eine Hauptreihe.

Es sei $\mathfrak{A}$ vollständig reduzibel und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$. Besitzt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ keine isomorphen direkten Faktoren, so ist jedes normale Untersystem von $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der normalen Untersysteme von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Fasst man die zueinander isomorphen Faktoren $\mathfrak{P}_i$ eines vollständig reduziblen Systems $\mathfrak{A}$ in ein System zusammen, so mag man die *ideale Zerlegung* von $\mathfrak{A}$ erhalten:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n.$$

Dann ist jedes normale Untersystem von $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der normalen Untersysteme von den $\mathfrak{A}_i$. Die ideale Zerlegung wird eindeutig bestimmt.

Wir beschränken uns von jetzt an auf die A-Systeme. Es sei $\mathfrak{P}$ ein einfaches A-System, dessen Untersystem stets normal ist. Dann besitzt $\mathfrak{A}$ kein von 0 und $\mathfrak{P}$ verschiedenes Untersystem. Also wird $\mathfrak{P}$ durch jedes von 0 verschiedene Element a erzeugt. Ist ferner $\mathfrak{P}$ das durch a erzeugte freie A-System, so definiert jede Abbildung von a auf $b \neq 0$ aus $\mathfrak{P}$ einen Automorphismus von $\mathfrak{P}$, der mit f_b bezeichnet wird. Mit f_0 bezeichnen wir die Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf 0. Dann kann man $\mathfrak{P}$ als ein durch a erzeugtes System mit dem Operatorbereich $F = \{f_b\}$ auffassen. Nach

$$(f_b \,\alpha\, f_c)(a) = f_b(a) \,\alpha\, f_c(a) \doteq b \,\alpha\, c$$

bilden die Operatoren f_b ein zu $\mathfrak{P}$ isomorphes System. Setzt man

$$f_b f_c(a) = f_b(f_c(a)),$$

so wird die Multiplikation definiert, die ersichtlich das Distributivgesetz für jedes α aus V erfüllt.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ ein vollständig reduzibles System, dessen Untersystem stets normal ist. Ist $\mathfrak{A}$ ferner ein freies A-System, so ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der $\mathfrak{P}_i$ von der obigen Beschaffenheit. Da alle $\mathfrak{P}_i$ isomorph sind, so bezeichnen wir den aus den f_b bestehenden Operatorbereich für jedes $\mathfrak{P}_i$ mit K. Dann kann man $\mathfrak{A}$ in der Form

$$\mathfrak{A} = (K(a_1) \ldots K(a_n))$$

darstellen. Wir beweisen, daß $\mathfrak{A}$ ein lineares System ist. Es sei E eine Untermenge von $\mathfrak{A}$ und $K(E)$ sei das durch E erzeugte Untersystem. Da $K(a)$ für jedes Element a einfach ist, so ist $K(a) \frown K(E) = 0$ oder $K(a) \subset K(E)$. Da aber jedes Untersystem von $\mathfrak{A}$ normal ist, so ist der Begriff der direkten Vereinigung mit dem des freien Produktes äquivalent. Daher ist a dann und nur dann von E abhängig, wenn a in $K(E)$ enthalten ist. Also ist $\mathfrak{A}$ ein lineares System. Wir sagen, daß $\mathfrak{A}$ ein K-*lineares* System ist.

Zusammenfassend erhält man also:

Ein vollständig reduzibles freies A-System ist ein K-lineares System, wenn jedes Untersystem normal ist.

Wir beweisen nun

Ein durch endlich viele Elemente erzeugtes lineares System $\mathfrak{A}$, dessen Restklassensystem durch das normale Untersystem eindeutig bestimmt ist, ist ein K-lineares System, wenn jedes Untersystem normal ist.

Ein lineares System ist nach § 7 ein freies System mit einem einzigen Nullelement. Jedes von 0 verschiedene Element erzeugt ein freies System. Besitzt ein lineares System kein wesentliches Untersystem, so lässt es sich in der Form $K(a)$ darstellen und umgekehrt. Wenn $\mathfrak{A}$ durch endlich viele Elemente erzeugt ist so ist $\mathfrak{A}$ das freie Produkt von den $K(a_i)$. In diesem Fall ist aber das freie Produkt mit dem direkten Produkt gleichbedeutend. Daher ist $\mathfrak{A}$ ein K-lineares System.

§ 13. **Auflösbare Systeme und nilpotente Systeme.** Es sei $\mathfrak{A}$ ein A-System. Einem Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ordnen wir je eine Untermenge $\mathfrak{B}'$ und ein $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ enthaltendes Untersystem $\mathfrak{B}^*$ zu. Zunächst werden wir diese Zuordnungen festsetzen und sie mit θ bezeichnen. Besteht B aus den v-Gleichungen von den Elementen $x_1, \ldots, x_m, x_1', \ldots, x_n'$, so betrachten wir $B = B(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ mit x aus $\mathfrak{B}$ und x' aus $\mathfrak{B}'$ als Relationen in $\mathfrak{B}^*$. Dadurch erhält man ein Restklassensystem $\mathfrak{B}(\theta) = \mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta$ von $\mathfrak{B}^*$ und folglich ein von $\mathfrak{B}$. Bestehen die Gleichungen $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ für die homomorphen Bilder von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ in einem Restklassensystem $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{C}$ nach dem Fundamentalsatz der freien Systeme zu $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta$ homomorph und folglich $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}^\theta$. D. h. $\mathfrak{B}^\theta$ ist der Durchschnitt aller solchen $\mathfrak{C}$.

Wir setzen nun voraus, daß $\mathfrak{B}_1' \supset \mathfrak{B}_2', \mathfrak{B}_1^* \supset \mathfrak{B}_2^*$ für $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2$ ist und, daß $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}^\theta$ ist. Dann ist $\mathfrak{B}_1^\theta \supset \mathfrak{B}_2^\theta$. Definitionsgemäss besteht $\mathfrak{B}_1^\theta$ bzw. $\mathfrak{B}_2^\theta$ nämlich aus den mit dem Nullelement kongruenten Elementen aus $\mathfrak{B}_1^*$ bzw. $\mathfrak{B}_2^*$. Es ist aber $B(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1') \supset B(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2')$, woraus die Behauptung folgt. Aus $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}^\theta$ folgt also $\mathfrak{B}^\theta \supset \mathfrak{B}^{\theta^2} = (\mathfrak{B}^\theta)^\theta$ und man erhält eine Reihe

$$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}^\theta \supset \ldots \supset \mathfrak{B}^{\theta^r} \supset \ldots.$$

Ist $\mathfrak{B}^{\theta^r} = 0$ fur ein r, so heisst diese Reihe die absteigende (θ, B)-Reihe. Ist $\mathfrak{B}^{\theta^{r-1}} \neq 0$, so heisst r die Länge der Reihe. Ein Untersystem $\mathfrak{B}$ mit der absteigenden (θ, B)-Reihe heisst *(θ, B)-auflösbar*.

$\mathfrak{A}_1$ sei zu $\mathfrak{A}$ homomorph, $\mathfrak{B}$ sei das Urbild eines Untersystems $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_1^*$ seien die Bilder von $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}^*$. Dann mag man die Zuordnung θ_1 erhalten. *$\mathfrak{B}_1(\theta_1)$ ist zu $\mathfrak{B}(\theta)$ homomorph.* Ist nämlich $\bar{\mathfrak{B}}^*$ das zu $\mathfrak{B}_1^*$ isomorphe Restklassensystem von $\mathfrak{B}^*$, so ist die durch B definierte Kongruenz in $\mathfrak{B}_1^*$ gleichbedeutend mit der durch B definierten Kongruenz in $\mathfrak{B}^*$ nach $\bar{\mathfrak{B}}^*$. D. h. $\mathfrak{B}_1(\theta_1)$ ist zu $\mathfrak{B}(\theta)$ homomorph.

$\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ ist zu $\mathfrak{B}^\theta$ homomorph. $\bar{\mathfrak{B}}^*$ sei nämlich zu $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$ isomorph. Berücksichtigt man den Isomorphismus, so erkennt man den Isomorphismus von $\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ auf $\mathfrak{B}^\theta \cup \mathfrak{D}/\mathfrak{D}$, also auf $\mathfrak{B}^\theta/\mathfrak{B}^\theta \cap \mathfrak{D}$. Damit ist der Homomorphismus von $\mathfrak{B}^\theta$ auf $\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ bewiesen. Wir beweisen nunmehr

$\mathfrak{A}_1$ sei zu $\mathfrak{A}$ homomorph. Das Bild eines (θ, B)-auflösbaren Untersystems $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ist (θ_1, B)-auflösbar. Die Länge der absteigenden (θ_1, B)-Reihe von $\mathfrak{B}_1$ ist nicht grösser als die Länge der absteigenden (θ, B)-Reihe von $\mathfrak{B}$.

Denn aus $\mathfrak{B}^{\theta^r} = 0$ folgt $\mathfrak{B}_1^{\theta_1^r} = 0$, da $\mathfrak{B}_1^{\theta_1^r}$ zu $\mathfrak{B}^{\theta^r}$ homomorph ist.

Jedes Untersystem $\mathfrak{C}$ eines (θ, B)-auflösbaren Untersystems $\mathfrak{B}$ ist

(θ, B)-*auflösbar*.

Denn aus $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{C}^{\theta} \subset \mathfrak{B}^{\theta}, \ldots, \mathfrak{C}^{\theta^r} \subset \mathfrak{B}^{\theta^r}$.

Eine Normalkette von $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_r = 0$$

heisst eine (θ, B)-Reihe, wenn $\mathfrak{B}_{i+1} \supset \mathfrak{B}_i^{\theta}$ und $\mathfrak{B}_{i+1}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{B}_i^*$ ist.

$\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann (θ, B)-auflösbar, wenn $\mathfrak{B}$ eine (θ, B)-Reihe besitzt. Die Länge der (θ, B)-Reihe ist nicht kleiner als die Länge der absteigenden (θ, B)-Reihe.

Denn $\quad \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}^{\theta}, \mathfrak{B}_2 \supset \mathfrak{B}_1^{\theta} \supset \mathfrak{B}^{\theta^2}, \ldots, \mathfrak{B}_r \supset \mathfrak{B}^{\theta^r} = 0.$

Es sei $\bar{\theta}$ eine andere Zuordnung $\mathfrak{B}$-$\bar{\mathfrak{B}}'$-$\bar{\mathfrak{B}}^*$. Sind $\mathfrak{B}' \subset \bar{\mathfrak{B}}', \mathfrak{B}^* \subset \bar{\mathfrak{B}}^*$, so ist $\mathfrak{B}^{\bar{\theta}} \supset \mathfrak{B}^{\theta}$; also ist jedes $(\bar{\theta}, B)$-auflösbare Untersystem stets (θ, B)-auflösbare. Ist $\mathfrak{A}_1$ zu $|\mathfrak{A}|$ isomorph und, ist $\mathfrak{B}_1$ ein (θ_1, B)-auflösbares Untersystem von $\mathfrak{A}_1$, so ist $\mathfrak{B}\,(\theta, B)$-auflösbar. Bezeichnet man mit $\bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mathfrak{B}}'$, $\bar{\mathfrak{B}}^*$ die Urbilder von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_1^*$ bei dem Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$, so sind $\bar{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{B}}' \supset \mathfrak{B}', \bar{\mathfrak{B}}^* \supset \mathfrak{B}^*$. Ordnet man $\mathfrak{B}$ auch $\bar{\mathfrak{B}}', \bar{\mathfrak{B}}^*$ zu, so ist $\bar{\mathfrak{B}}$ und folglich $\mathfrak{B}\,(\bar{\theta}, B)$-auflösbar. Daher ist $\mathfrak{B}\,(\theta, B)$-auflösbar.

Es sei φ eine Kongruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_{\varphi} = \mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ das zugehörige Restklassensystem. Setzt man $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{\varphi} = \mathfrak{B}^{\varphi}/\mathfrak{C}$ für ein $\mathfrak{C}$ enthaltendes Untersystem $\mathfrak{B}$, so gilt: Dann und nur dann ist $\mathfrak{B}$ (θ, B)-auflösbar, wenn $\mathfrak{B}_1$ (θ_1, B)-auflösbar und $\mathfrak{C}$ (θ, B)-auflösbar sind. Ist nämlich

$$\mathfrak{B}^{\varphi}/\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_1^{\varphi}/\mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{B}_r^{\varphi}/\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_r^{\varphi} = \mathfrak{C}$$

eine (θ_1, B)-Reihe von $\mathfrak{B}_1$ und ist

$$\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s = 0$$

eine (θ, B)-Reihe von $\mathfrak{C}$, so ist

$$\mathfrak{B}^{\varphi}, \mathfrak{B}_1^{\varphi}, \ldots, \mathfrak{B}_r^{\varphi} = \mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{C}_s = 0$$

eine (θ, B)-Reihe von $\mathfrak{B}^{\varphi}$. Daher ist $\mathfrak{B}^{\varphi}$ und folglich $\mathfrak{B}$ (θ, B)-auflösbar. Die Umkehrung ist klar.

Eine (θ, B)-Reihe

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_m \supset \ldots \supset \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_0 = 0$$

heisst *aufsteigende (θ, B)-Reihe,* wenn es keine (θ, B)-Reihe

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_n' \supset \ldots \mathfrak{b}_1' \supset \mathfrak{b}_0' = 0$$

gibt derart, daß $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i'$, $\mathfrak{b}_{i+1} \subsetneqq \mathfrak{b}_{i+1}$ für ein i gelten.

Setzt man die Maximalbedingung für den Verband aller Untersysteme von $\mathfrak{B}$ voraus, so ist $\mathfrak{B}$ dann und nur dann (θ, B)-auflösbar, wenn $\mathfrak{B}$ eine aufsteigende (θ, B)-Reihe besitzt.

Zum Beweis genügt es $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$ stets maximal anzunehmen.

Man beweist auch leicht: Ist $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{B}$, so ist jedes in einer (θ, B)-Reihe auftretende System normal in $\mathfrak{A}$. Dann gibt es eine (θ, B)-Reihe, deren Länge mit dem der absteigenden übereinstimmt.

Im Fall $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}$ spricht man von dem *auflösbaren System* bzw. von dem *nilpotenten System.*

Kapitel IV. Darstellungstheorie.

§ 14. **Endomorphismen.** Es sei $\mathfrak{A}$ ein eindeutiges System mit dem Verknüpfungsbereich V. Definiert man die Verknüpfung $\theta\alpha\theta'$ zweier Abbildungen θ, θ' von $\mathfrak{A}$ in sich durch $\theta(a)\alpha\theta'(a) = (\theta\alpha\theta')(a)$, so bilden die sämtlichen Abbildungen ein System Δ mit V. Dabei soll $\theta\alpha\theta'$ dann und nur dann existieren, wenn $\theta(a)\alpha\theta'(a)$ für jedes a existiert. Definiert man ferner die Multiplikation durch $(\theta\theta')(a) = \theta(\theta'(a))$, so gilt das rechtsseitige Distributivgesetz für jedes α aus V.

Ist die Abbildung θ ein Homomorphismus, so spricht man von dem *Endomorphismus.* Die sämtlichen Endomorphismen von $\mathfrak{A}$ bilden eine Untermenge Γ von Δ, die bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist. Wir betrachten im folgenden nur die Endomorphismen von $\mathfrak{A}$, die das festgesetzte Nullelement 0 in sich abbilden. Bezeichnet man mit 0 die Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf 0, so ist $0\,\theta = \theta\,0 = 0$ für jedes θ und $0\,\alpha\,0 = 0$, wenn es existiert. Ist $\mathfrak{A}$ homogen, so ist die Abbildung 0 ein Endomorphismus und man erhält:

Die Gesamtheit der Endomorphismen eines homogenen Systems $\mathfrak{A}$ bildet ein System Γ (nicht notwendig ein Untersystem von Δ) bezgülich V, welches noch eine Verknüpfung (Multiplikation) besitzt. Dabei gilt das zweiseitige Distributivgesetz und Γ besitzt ein Nullelement 0, *welches der Gleichung* $0\,\theta = \theta\,0 = 0$ *für jedes* θ *aus* Γ *genügt.*

Es sei nunmhr $\mathfrak{A}$ ein A-System. Sind zwei Endomorphismen von $\mathfrak{A}$ durch jedes α aus V stets verknüpfbar, so bilden die sämtlichen Endomorphismen ein A-System. Ist ferner $\mathfrak{A}$ das durch $E = \{a_i\}$ erzeugte freie A-System, so wird ein Endomorphismus durch die Bilder der Erzeugende eindeutig bestimmt. Umgekehrt erhält man stets einen Endomorphismus, wenn man den Erzeugenden je ein beliebiges Element zuordnet.

Besitzt ein einfaches System $\mathfrak{A}$ kein zu $\mathfrak{A}$ isomorphes Untersystem, so ist jeder von 0 verschiedene Endomorphismus ein Automorphismus. Ist $\mathfrak{A}$ das durch ein Element erzeugte freie A-System, so bilden die Endomorphismen ein zu $\mathfrak{A}$ isomorphes System.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ vollständig reduzibel:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n)$$

und die Faktoren $\mathfrak{A}_i$ seien alles zueinander isomorph. Da $\mathfrak{A}$ durch die $\mathfrak{A}_i$ erzeugt ist, so wird ein Endomorphismus von $\mathfrak{A}$ durch den Homomorphismus von $\mathfrak{A}_i$ in $\mathfrak{A}$ bestimmt. Wir setzen den Isomorphismus von den $\mathfrak{A}_i$ fest; $a_1, \ldots a_n$ seien die isomorph zugeordneten Elemente. Ist

$$\theta\,(a_i) = (b_{i1} \ldots b_{in}),$$

so ist die Abbildung $a_k \longrightarrow b_{ik}$ ein Endomorphismus θ_{ik} von $\mathfrak{A}$ und man kann θ durch die Matrix

$$\Theta = \begin{Vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \ldots \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \ldots \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ \theta_{n1} & \theta_{n2} \ldots \theta_{nn} \end{Vmatrix}$$

darstellen. Ist $\mathfrak{A}$ zugleich das freie A-Produkt von den $\mathfrak{A}_i$, wie es immer der Fall ist, wenn die Kongruenz von $\mathfrak{A}$ durch das normale Untersystem eindeutig bestimmt ist, und wenn jedes Untersystem normal ist, so stellt jede Matrix einen Endomorphismus dar.

Da die $\mathfrak{A}_i$ zueinander isomorph sind, so kann man annehmen, daß θ_{in} aller Elemente aus demselben System sind. Wir definieren:

$$(\theta_{ij})\,\alpha\,(\theta_{ij}') = (\theta_{ij}\,\alpha\,\theta_{ij}') \text{ für } \alpha \in V$$
$$(\theta_{ij})(\theta_{ij}') = (\theta^*_{ij}) \qquad \text{falls } \theta\theta'(a_i) = (\theta^*_{i1}(a) \ldots \theta^*_{in}(a))$$

Dann bilden die Matrizen ein zum System der Endomorphismen isomorphes System. Über die Multiplikation der Matrizen bemerken wir nur das Folgende. Wenn man die Matrizen Θ durch

$$\begin{Vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{21} \ldots \Theta_{1m} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \ldots \Theta_{2m} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \Theta_{m1} & \Theta_{m2} \ldots \Theta_{mm} \end{Vmatrix}$$

darstellt, wo Θ_{ij} Matrizen des Grades $m_i, \sum m_i = n$, sind, so sind die Produkte je zweier Matrizen mit $\Theta_{ij} = 0, i < j$, auch von derselben Form. Denn solche Matrizen bedeuten die Endomorphismen von $\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{A}^{(k)} = (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{t_k}\, 0 \ldots 0)$, $t_k = \sum_1^k m_i$, $k = 1, \ldots, m$, in sich abbilden. Ist Θ ein Automorphismus, so bedeutet Θ_{ii} ein Automorphismus von $\mathfrak{A}^{(i)}/\mathfrak{A}^{(i-1)}$.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein K-lineares System

$$\mathfrak{A} = (K(a_1) \ldots K(a_r)).$$

Da $\mathfrak{A}$ das durch die a_i erzeugte freie System ist, so gibt es eine v-Funktion f derart, daß

$$a = f(a_1, \ldots, a_r) \text{ für } a = (a_1 \ldots a_r).$$

Ist $b = (b_1 \ldots b_r)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$, so bestimmen die Endomorphismen $a_i \rightarrow b_i$ von $K(a_i)$ einen Endomorphismus von $\mathfrak{A}$, der a auf b abbildet. Daher ist $b = f(b_1, \ldots, b_r)$.

Ausser der Darstellung eines Endomorphismus θ von $\mathfrak{A}$ durch Matrizen mit Koeffizienten aus K erhält man eine Darstellung

$$\theta(a_i) = f(\theta_{i1}(a_1), \ldots, \theta_{i1}(a_r)) = (\theta_{i1}(a_1) \ldots \theta_{ir}(a_r)),\ \ \theta_{ij} \in K,$$

durch die Funktion f. Dann erkennt man leicht

$$(\theta\,\alpha\,\theta')(a_i) = f((\theta_{i1}\,\alpha\,\theta_{i1}')(a_1), \ldots, (\theta_{ir}\,\alpha\,\theta_{ir}')(a_r))$$
$$(\theta\theta')(a_i) = f(\ldots, f(\theta_{k1}\theta_{i1}'(a_1), \ldots, \theta_{kr}\theta_{ir}(a_r)), \ldots).$$

Besitzt $\mathfrak{A}$ eine Verknüpfung $+$ derart, daß $0 + a = a + 0$ für jedes a gilt, so ist

$$a = a_1 + \ldots + a_r = (a_1 \ldots a_r).$$

Dies ist der in der Literatur übliche Fall.

§ 15. **Verallgemeinerte Ringe.** [20]) Ein eindeutiges System $\mathfrak{A}$ mit einem Verknupfüngsbereich V heisst ein *verallgemeinerter Ring*, kurz v-Ring, wenn es noch eine andere Verknüpfung (Multiplikation) besitzt, die den folgenden Bedingungen genügt: 1) Assoziativgesetz, 2) zweiseitiges Distributivgesetz für jedes α aus V, 3) $0\,a = a\,0 = 0$ für das Nullelement 0. Die Gesamtheit der Endomorphismen eines Systems bildet dann einen v-Ring mit Einselement e (bezüglich der Multiplikation). Wenn man $\mathfrak{A}$ als ein System bezüglich V, welches $\mathfrak{A}$ als Linksoperatorbereich besitzt, auffasst, so ist $\mathfrak{A}$ zum Endomorphismensystem des Systems isomorph. Dabei setzen wir die Existenz des Einselementes voraus.

Ein normales Untersystem $\mathfrak{B}$ eines v-Ringes $\mathfrak{A}$ heisst *Ideal* von $\mathfrak{A}$. Ein normales Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, aufgefasst als ein System bezüglich V mit dem Links- bzw. Rechtsoperatorbereich $\mathfrak{A}$, heisst *Links-* bzw. *Rechtsideal* von $\mathfrak{A}$. Für Links- bzw. Rechtsideal $\mathfrak{B}$ gilt $a\,\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}\,a \subset \mathfrak{B}$ für jedes $a \in \mathfrak{A}$. Wenn ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, als System bezüglich V, durch das normal Untersystem eiudeutig bestimmt ist, so ist ein Links- und Rechtsideal stets Ideal von $\mathfrak{A}$.

Ein v-Ring $\mathfrak{A}$ heisst *regulär*, wenn i) das Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, aufgefasst als System bezüglich V, durch das normale Untersystem eindeutig bestimmt ist und ii) Links- bzw. Rechtsideal durch $a\,\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}\,a \subset \mathfrak{B}$ charakterisiert wird. Ein v-Ring mit Einselement heisst ein *v-Körper*, wenn jedes von 0 verschiedene Element Einheit, d. h. Element mit reziprokem Element ist. Ein regulärer v-Ring $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ein v-Körper, wenn $\mathfrak{A}$ kein von $\mathfrak{A}$ und 0 verschiedenes Linksideal oder Rechtsideal besitzt.

Da wir im folgenden nur die Thhorie der Ringe etwas modifizieren, so werden wir die Theorie kurz skizieren.

Ist ein v-Ring $\mathfrak{A}$, aufgefasst als ein System bezüglich V mit dem Rechtsoperatorbereich $\mathfrak{A}$, das direkte Produkt von Rechtsidealen:

---

[20]) Vgl. hierzu E. Noether, Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. 30 (1929).

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_n)$$

und ist

$$e = (e_1 \ldots e_n)$$

das Einselement, so sind die e_i orthogonale Idempotente und $\mathfrak{R}_i = e_i \mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}$ ein regulärer v-Ring mit Einselement und sind $e_1, \ldots, e_n$ orthogonale Idempotente, so ist $e_1 \mathfrak{A} \cup \ldots \cup e_n \mathfrak{A}$ die direkte Vereinigung (direktes Produkt) von den $e_i \mathfrak{A}$.

Hieraus folgt:

Ist ein regulärer v-Ring mit Einelement e das direkte Produkt von Rechtsideale $\mathfrak{R}_i$, so ist $\mathfrak{R}_i = e_i \mathfrak{A}$ mit orthogonalen Idempotenten e_i und $\mathfrak{A}$ ist das direkte Produkt von Linksidealen $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{A} e_i$. Denn man beweist leicht, daß $\mathfrak{A} e_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{A} e_n$ das Einselement e enthält.

Ist ein v-Ring $\mathfrak{A}$ mit Einselement das direkte Produkt von Idealen $\mathfrak{A}_i$, so sind $\mathfrak{A}_i^2 = \mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k = 0$ $(i \neq k)$. Sind umgekehrt die $\mathfrak{A}_i$ Ideale von $\mathfrak{A}$, die Einselemente e_i enthält und sind $\mathfrak{A}_i^2 = \mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k = 0$ $(i \neq k)$, so ist die Vereinigung von den $\mathfrak{A}_i$ die direkte Vereinigung.

Die Gesamtheit der mit jedem Element aus $\mathfrak{A}$ vertauschbaren (nach Multiplikation) Elemente bildet wegen des Distributivgesetzes ein Untersystem, das das Zentrum heisst.

Ist die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n)$$

eines v-Ringes $\mathfrak{A}$ mit Einselement auch eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{A}$, aufgefasst als ein System mit Links- und Rechtsoperatorbereich $\mathfrak{A}$, so lässt sich das Zentrum in

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_n), \quad \mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{Z}$$

zerlegen und $\mathfrak{A}\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_i$. Sind die $\mathfrak{A}\mathfrak{Z}_i$ für die Ideale $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{Z}$ stets Ideale von $\mathfrak{A}$, so gilt auch die Umkehrung.

Ist $\mathfrak{A}$ homogen bezüglich V, so kann man die Resultate von § 13 in unseren Fall anwenden, indem man als B die Relation $ab = 0$ annimmt. Man beweist ferner, daß jeder auflösbare v-Ring stets nilpotent ist. Ein regulärer v-Ring $\mathfrak{A}$ mit Maximalbedingung für nilpotente Ideale besitzt das grösste nilpotente Ideal (Radikal) $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ ist halbeinfach, d. h.

$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ besitzt kein nilpotentes Ideal. $\mathfrak{N}$ enthält alle nilpotenten Links- bzw. Rechtsideale von $\mathfrak{A}$.

Man beweist ferner: Ein Rechtsideal eines regulären v-Ring mit Doppelkettensatz für Rechtsideale ist dann und nur dann nilpotent, wenn er kein Idempotent enthält.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein regulärer v-Ring, c ein Idempotent. Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}$ das Rechtsideal, das aus den Elementen x mit $cx = 0$ besteht, so ist

$$\mathfrak{A} \supset c\,\mathfrak{A} \times \mathfrak{R}.$$

Gilt dabei das Gleichzeichen für jedes c, so heisst $\mathfrak{A}$ ein rechtsseitiger Peircescher v-Ring. Ist $\mathfrak{A}$ gleichzeitig rechtsseitiger und linksseitiger Peircescher v-Ring, so heisst $\mathfrak{A}$ ein *Peircescher v-Ring.* Dann beweist man:

In einem Peirceschen v-Ring mit Einselement, der den Doppelkettensatz für Rechts- und Linksideale genügt, sind die folgenden vier Begriffe äquivalent: rechtsseitige vollständige Reduzibilität, linksseitige vollständige Reduzibilität, zweiseitige vollständige Reduzibilität, Halbeinfachheit.

Die ideale Zerlegung eines vollständig reduziblen Peirceschen v-Ringes $\mathfrak{A}$, aufgefsst als ein System bezüglich V mit den Rechtsoperatorbereich $\mathfrak{A}$, ist nichts anderes als die Zerlegung in das direkte Produkt der einfachen Ideale. Daher ist ein einfacher v-Ring $\mathfrak{A}$ mit Einselement das direkte Produkt

$$\mathfrak{A} = (e_1\,\mathfrak{A} \ldots e_r\,\mathfrak{A})$$

der zueinander operatorisomorphen einfachen Rechtsideale $e_i\,\mathfrak{A}$. Daher erhält man nach § 14: Es sei $\mathfrak{A}$ ein einfacher Peircescher v-Ring mit Einselement, der dem Doppelkettensatz für Rechts- und Linksideale genügt. Ist $\mathfrak{A}$ ein freies System bezüglich V, so ist $\mathfrak{A}$ einem Matrizensystem mit Koeffizienten aus einem v-Körper K isomorph. Daher ist der Rang von $\mathfrak{A}$, als K-lineares System, gleich einer Quadratzahl.

§ 16. **Darstellungen durch Endomorphismen.** In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß $\mathfrak{M}$ ein A-System mit dem Verknüpfungsbereich $V_{\mathfrak{M}}$ ist, und daß das System der Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ auch ein A-System $\mathfrak{A}^*$ bildet. Dann ist $\mathfrak{A}^*$ ein A^*-System bezüglich V^*, wo A^* aus

A, dem Assoziativgesetz und dem Distributivgesetz der Multiplikation besteht. V^* besteht aus V und der Multiplikation. Besteht der Verknüpfungsbereich V eines homogenen System $\mathfrak{A}$ aus den Folgeverknüpfungen von V^*, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $V \subset V^*$ ist. $\bar{A}$ sei das System der Folgegleichungen von A^* die durch V ausgedrückt werden, und $\bar{\mathfrak{A}}$ sei das Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, das man erhält, wenn man $\bar{A}$ in $\mathfrak{A}$ voraussetzt. Dann ist die Darstellung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}^*$ nichts anderes als die von $\bar{\mathfrak{A}}$. Daher kann man annehmen, daß $\mathfrak{A}$ ein $\bar{A}$-System, $V \subset V^*$, $\bar{A} \subset A^*$, ist.

Besitzt $\mathfrak{M}$ das Rechtsoperatorbereich $\mathfrak{A}$ und gelten dabei

$$(a \alpha b)\, m = am \,\alpha\, bm, \quad (ab)\, m = a\,(bm)$$

für $\alpha \in V$, $a, b \in A$, $m \in M$ so heisst $\mathfrak{M}$ ein (Rechts) *darstellungssystem* von $\mathfrak{A}$. Ordnet man jedem Element a den zugehörigen Endomorphismus $m \to am$ zu, so erhält man eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch die Endomorphismen von $\mathfrak{M}$. Ist umgekehrt eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch die Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ vorgegeben, so kann man annehmen, daß $\mathfrak{M}$ ein Darstellungssystem von $\mathfrak{A}$ ist.

Enthält V das $V_{\mathfrak{M}}$, welches nicht leer ist, so ist $0m$ für das Nullelement 0 von $\mathfrak{A}$ stets ein Nullelement, welches auch mit 0 bezeichnet wird. Denn

$$0m = (0 \,\alpha\, 0)\, m = 0m \,\alpha\, 0m.$$

Dann ist die Darstellung von $\mathfrak{A}$ einem Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ isomorph, wobei $\mathfrak{B}$ aus den a mit $am = 0$ für alle m aus $\mathfrak{M}$ besteht.

Ist η ein Automorphismus von $\mathfrak{M}$, so erhält man eine sogennante äquivalente Darstellung, wenn man einem Element a aus $\mathfrak{A}$ den Endomorphismus $m \to \eta^{-1}\, a\, \eta\, m$ zuordnet. Wenn $E = \{m_1, m_2 \ldots\}$ die Erzeugende von $\mathfrak{M}$ sind, so gibt es v-Funktionen a_i, so daß

$$am_i = a_i\,(m_{i1}, \ldots m_{ir}).$$

$E^\eta = \{\eta m_1, \eta m, \ldots\}$ sind natürlich auch die Erzeugende von $\mathfrak{M}$. Ist

$$a\, \eta\, m_i = a_i^\eta\,(\eta m_{i1}, \ldots, \eta\, m_{ir}),$$

so beweist man leicht, daß die beiden Funktionen a_i und a_i^η für eine feste Erzeugende E äquivalente Darstellung bestimmen.

Es sei nunmehr $\mathfrak{M}$ ein K-lineares System

$$\mathfrak{M} = (Km_1 \dots Km_r).$$

Wenn man die Erzeugende festsetzt, so wird der Endomorphismus von $\mathfrak{M}$ durch Matrix in K eindeutig bestimmt. Also erhält man eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Matrizen, wenn man einem Element a die Matrix (a_{ij}):

$$am_i = (a_{i1}\, m_1 \dots a_{ij} m_r), \quad a_{ij} \in K,$$

zuordnet. Sind

$$m_i' = \eta\, m_i, \quad am_i' = (a_{i1}'\, m_1' \dots a_{ir}' m_r'), \quad a_{ij}' \in K,$$

so erweist man sich leicht

$$(a_{ij}') = (\eta_{ij})^{-1}\, (a_{ij})\, (\eta_{ij}),$$

wo (η_{ij}) die durch η bestimmte Matrix bedeutet. Die beiden Darstellungen durch Matrizen (a_{ij}), (a_{ij}') heissen *ähnlich*. Die ähnlichen Darstellungen durch Matrizen werden durch eine Darstellung durch Endomorphismen mit zwei Erzeugenden E, E' oder durch äquivalente Darstellungen mit einer festen Erzeugende bestimmt.

Wir sind nun in der Lage die Darstellungstheorie der Ringe wörtlich in unseren Fall zu übertragen, was wir jetzt auslassen möchten.

(Eingegangen 8. Februar, 1949)