Osaka Mathematical Jounal
Vol. 1, No. 2. July, 1949.

Zur Arithmetik in Schiefringen. I.

Von Keizo ASANO.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich die arithmetische Idealtheorie in Schiefringen untersucht. Dort habe ich die Idealtheorie in hyperkomplexen Systemen von SPEISER, BRANDT, ARTIN und HASSE [2]) axiomatisch begründet. Die vorliegende Arbeit besteht aus den Ergänzungen und den weiteren Untersuchungen der früheren Arbeit.

S sei ein Schiefring mit Einselement. Wir nennen die Einheiten von S reguläre Elemente. Ein Teilring $\mathfrak{o}$ von S heisst eine Ordnung, wenn $\mathfrak{o}$ 1 enthält und wenn es für jedes $x \in S$ reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $x\alpha \in \mathfrak{o}$ und $\beta x \in \mathfrak{o}$ ist. Ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ist definiert als ein reguläre Elemente enthaltender $\mathfrak{o}$-Linksmodul ($\mathfrak{o}$-Rechtsmodul) $\mathfrak{a}$ aus S, so dass $\mathfrak{a}\lambda \subseteq \mathfrak{o}$ ($\lambda\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$) für ein reguläres λ ist. Zwei Ordnungen $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ von S heissen einander äquivalent, wenn es reguläre Elemente λ, μ, λ', μ' gibt, so dass $\lambda\mathfrak{o}'\mu \subseteq \mathfrak{o}$ und $\lambda'\mathfrak{o}\mu' \subseteq \mathfrak{o}'$ ist. Eine Maximalordnung ist eine Ordnung, die unter den einander äquivalenten Ordnungen maximal ist. Ist $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S, so gibt es nicht immer ein beliebiges Element $x \in S$ enthaltendes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Wenn dies immer der Fall ist, d. h. wenn es für jedes $x \in S$ reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $x\mathfrak{o}\alpha \subseteq \mathfrak{o}$ und $\beta\mathfrak{o}x \subseteq \mathfrak{o}$ ist, so heisst $\mathfrak{o}$ eine reguläre Ordnung. Nach einigen Vorbereitungen in § 1 über Ordnungen und Ideale werden wir in § 2 zweiseitige Ideale bezüglich einer Maximalordnung $\mathfrak{o}$ untersuchen. Zwei zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heissen quasigleich, wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ ist. Die Klassen quasigleicher Ideale bilden eine archimedische Verband-geordnete Gruppe. Sie ist also als eine Gruppe abelsch und als ein Verband distributiv. Der Artinsche Verfeinerungssatz ist eine unmittelbare Folgerung des Jordan-Hölder-Schreierschen Satzes in Verbandtheorie. Die Hen-

---

[1]) K. ASANO, Arithmetische Idealthorie in nichtkommutativen Ringen, Japan. Journ. Math. **16** (1939), S. 1-36. Vgl. auch N. JACOBSON, Theory of rings (1943).

[2]) Vgl. M. DEURING, Algebren, Ergebnisse d. Math. (1935)

ckesche Idealtheorie in hyperkomplexen Systemen[3]) wird somit verallgemeinert und verfeinert. Dann und nur dann bilden alle zweiseitigen Ideale bezüglich einer regulären Ordnung $\mathfrak{o}$ eine Gruppe, wenn die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

P_1: $\mathfrak{o}$ ist eine reguläre Maximalordnung.

P_2: Es gilt der Teilerkettensatz für ganze zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale.

P_3: Jedes Primideal ist (zweiseitig) teilerlos.

Es sei $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S, für die die obigen drei Axiome erfüllt sind. In § 3 werden wir alle Teilringe $\mathfrak{o}'$ mit $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}' \subset S$ bestimmen. P sei eine Menge von Primidealen von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_P$ bedeute den Ring aller zu P ganzen Elemente. Dann ist $\mathfrak{o}_P$ ein $\mathfrak{o}$ umfassender Teilring von S und umgekehrt stimmt jeder $\mathfrak{o}$ umfassende Teilring von S mit einem $\mathfrak{o}_P$ überein. Ferner gelten für $\mathfrak{o}_P$ die obigen drei Axiome.

In § 4 wird das Gruppoid der normalen Ideale untersucht. Man kann nun die Arithmetik in Algebren durch die folgenden drei Axiome begründen.

I. $\{\mathfrak{o}\}$ ist ein System aller einander äquivalenten Maximalordnungen von S.

II. In jeder Maximalordnung $\mathfrak{o}$ gilt der Teilerkettensatz für ganze zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale.

III. In jeder Maximalordnung $\mathfrak{o}$ ist jedes Primideal $\mathfrak{p}$ stark teilerlos, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ist ein einfacher Ring.

Daranschliessend werden wir in § 5 die gegebene Arithmetik in S auf den Matrizenring S_n erweitern. In § 6 wird schliesslich der Zusammenhang unserer Arithmetik mit der gewöhnlichen Arithmetik in Algebren erklärt.

Im Teil II dieser Arbeit werden wir die Arithmetik in allgemein halbeinfachen Ringen näher untersuchen. Ein Schiefring mit Einselement heisst ein allgemein einfacher Ring, wenn er zweiseitig einfach ist und sein jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist. Die direkte Summe von endlich vielen allgemein einfachen Ringen heisst ein

[3]) K. HENCKE, Zur arithmetischen Idealtheorie hyperkomplexer Zahlen. Abh. Hamburg. Univ. **11** (1936), S. 311-332.

allgemein halbeinfacher Ring. S sei nun ein allgemein halbeinfacher Ring und $\mathfrak{o}$ sei eine Ordnung von S mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt ein System $\{\mathfrak{o}_\tau\}$ von regulären Ordnungen von S, so dass $\mathfrak{o} = \bigwedge_\tau \mathfrak{o}_\tau$ ist.

2. Die zweiseitigen $\mathfrak{o}_\tau$-Ideale bilden eine unendliche zyklische Gruppe.

3. Das (einzige) Primideal $\mathfrak{P}_\tau$ von $\mathfrak{o}_\tau$ ist stark teilerlos, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}_\tau/\mathfrak{P}_\tau$ ist ein einfacher Ring.

4. Für jedes reguläre Element α aus S gilt $\mathfrak{o}_\tau \alpha \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau$ bis auf endlich viele $\mathfrak{o}_\tau$.

5. Für zwei $\mathfrak{o}_\tau$, $\mathfrak{o}_\sigma$ gibt es ein $\mathfrak{o}$-Element a, so dass $a \equiv 1$ $(\mathfrak{P}_\tau)$, $a \equiv 0$ $(\mathfrak{P}_\sigma)$ sind.

Dann gelten für $\mathfrak{o}$ die Bedingungen P_1, P_2, P_3^*:

P_3^*. Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist stark teilerlos.

$\{\mathfrak{o}_\tau\}$ ist nichts anderes als $\{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\}$. Jedes $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Links- sowie $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Rechtsideal ist ein Hauptidealring. Die obigen fünf Bedingungen sind äquivalent mit den drei Bedingungen P_1, P_2, P_3^*. Daraus folgt eine bemerkenswerte Tatsache: Ist $\mathfrak{o}_0$ eine feste Maximalordnung von S, für welche die drei Axiome P_1, P_2, P_3^* gelten, so gelten sie auch für jede mit $\mathfrak{o}_0$ äquivalente Maximalordnung.

§ 1 ORDNUNGEN, IDEALE.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Schiefring mit Nichtnullteilern und H sei eine Halbgruppe, welche aus gewissen Nichtnullteilern von $\mathfrak{o}$ besteht. Ein Erweiterungsring S von $\mathfrak{o}$ heisst ein linksseitiger Quotientenring von $\mathfrak{o}$ nach H, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. S hat das Einselement 1.
2. Die Elemente von H sind Einheiten von S.
3. Es gibt für jedes x aus S ein Element α aus H, so dass $\alpha x \in \mathfrak{o}$ ist.

Jedes Element x aus S lässt sich also in der Form $\alpha^{-1}a$ $(\alpha \in H, a \in \mathfrak{o})$ darstellen. Dann und nur dann gibt es den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) linksseitigen Quotientenring S von $\mathfrak{o}$ nach H, wenn es für jedes $a \in \mathfrak{o}$ und jedes $\lambda \in H$ Elemente $a' \in \mathfrak{o}, \lambda' \in H$ mit $a'\lambda = \lambda' a$

gibt.[4]) Es gibt für endlich viele Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus H ein Element λ aus H, so dass $\lambda = c_1 \lambda_1 = \ldots = c_n \lambda_n$ $(c_i \in \mathfrak{o})$ ist. Für endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n$ aus S gibt es also ein Element α aus H, so dass $\alpha x_i \in \mathfrak{o}$, $i = 1, \ldots, n$. Besteht H aus den sämtlichen Nichtnullteilern von $\mathfrak{o}$, so heisst S ein linksseitiger Quotientenring von $\mathfrak{o}$.

S sei nun ein vorgegebener Schiefring mit 1. Die Menge der sämtlichen regulären Elemente, d. h. Einheiten von S werde mit S^* bezeichnet. S^* bildet eine multiplikative Gruppe.

DEFINITION. Ein Teilring $\mathfrak{o}$ von S heisst eine *Ordnung* von S, wenn $\mathfrak{o}$ 1 enthält und S der (links- sowie rechtsseitige) Quotientenring von $\mathfrak{o}$ nach $S^* \wedge \mathfrak{o}$ ist.

Wenn ein Teilring $\mathfrak{o}'$ von S 1 enthält und wenn es reguläre Elemente λ, μ gibt, so dass $\lambda\, \mathfrak{o}\, \mu \subseteq \mathfrak{o}'$ ist, so ist $\mathfrak{o}'$ eine Ordnung. Es gibt nämlich für jedes $x \in S$ ein $\alpha \in S^* \wedge \mathfrak{o}$ mit $a = \alpha \mu x \mu^{-1} \in \mathfrak{o}$, also $\alpha' x = a'$, $\alpha' = \lambda \alpha \mu \in S^* \wedge \mathfrak{o}'$, $a' = \lambda a \mu \in \mathfrak{o}'$.

DEFINITION. $\mathfrak{o}$ sei eine *Ordnung* von S. Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von S heisst ein $\mathfrak{o}$-*Linksideal* ($\mathfrak{o}$-*Rechtsideal*), wenn 1. $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksmodul ($\mathfrak{o}$-Rechtsmodul) ist, 2. $\mathfrak{a}$ ein reguläres Element μ enthält, 3. es ein reguläres Element λ gibt, so dass $\mathfrak{a}\lambda$ $(\lambda\mathfrak{a})$ in $\mathfrak{o}$ enthalten ist.[5])

Sind $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei Ordnungen von S und ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Links- sowie $\mathfrak{o}'$-Rechtsideal, so heisst $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal. Ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}$-Ideal heisst ein *zweiseitiges* $\mathfrak{o}$-*Ideal*. Für jedes Element x aus S gibt es ein x enthaltendes $\mathfrak{o}$-Linksideal ($\mathfrak{o}$-Rechtsideal), z. B. $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}x)$ $((\mathfrak{o}, x\mathfrak{o}))$. Aber es gibt nicht immer ein x enthaltendes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal.

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ $\mathfrak{o}$-Linksideale ($\mathfrak{o}$-Rechtsideale), so ist die Summe $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sowie der Durchschnitt $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ auch ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ($\mathfrak{o}$-Rechtsideal). Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal und $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{o}'$-$\mathfrak{o}''$-Ideal, so ist das Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}''$-Ideal. Insbesondere ist das Produkt zweier zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal.

DEFINITION. Zwei Teilmoduln $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ von S heissen einander *äquivalent*,

---

4) Vgl. K. ASANO, Über die Quotientenbildung von Schiefringen. Journ. Math. Soc. Japan. **1** (1949)

5) Man kann λ, μ als Elemente von $\mathfrak{o}$ annehmen.

wenn es reguläre Elemente λ, μ, λ', μ' gibt, so dass $\lambda\,\mathfrak{n}\,\mu \subseteq \mathfrak{m}$, $\lambda'\,\mathfrak{m}\,\mu' \subseteq \mathfrak{n}$ sind.

Sind zwei Ordnungen $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ von S als Teilmoduln äquivalent, so heissen sie einander *äquivalent*. In diesem Fall können Elemente λ, μ mit $\lambda\,\mathfrak{o}'\,\mu \subseteq \mathfrak{o}$ aus $\mathfrak{o}$ ebenso Elemente λ', μ' mit $\lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu' \subseteq \mathfrak{o}'$ aus $\mathfrak{o}'$ gewählt werden.

SATZ 1. 1. *Es seien* $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ *zwei Ordnungen von S. Gibt es ein* $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-*Ideal* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{o}$ *mit* $\mathfrak{o}'$ *äquivalent. Sind umgekehrt* $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{o}'$ *äquivalent, so gibt es ein* $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-*Ideal.*

Beweis. Weil es reguläre Elemente λ, λ', μ mit $\mathfrak{a}\,\lambda \subseteq \mathfrak{o}$, $\lambda'\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}'$, $\mu \in \mathfrak{a}$ gibt, so gilt $\lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu \subseteq \lambda'\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}'$, $\mu\,\mathfrak{o}'\,\lambda \subseteq \mathfrak{a}\,\lambda \subseteq \mathfrak{o}$; d. h. $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ sind äquivalent. Es seien umgekehrt $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ äquivalent. Es gibt reguläre Elemente $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ mit $\lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu' \subseteq \mathfrak{o}'$ $(\lambda', \mu' \in \mathfrak{o}')$, $\lambda\,\mathfrak{o}'\,\mu \subseteq \mathfrak{o}$ $(\lambda, \mu \in \mathfrak{o})$. Setzt man $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\,\lambda\,\mu'\,\mathfrak{o}'$ so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}\,\mu'\,\mathfrak{o}'$ und $\subseteq \mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{o}'$, also

$$\lambda'\,\mathfrak{a} \subseteq \lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu'\,\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}'\,\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}', \qquad \mathfrak{a}\,\mu \subseteq \mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{o}'\,\mu \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{o} = \mathfrak{o},$$

d. h. $\mathfrak{a}$ ist ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal. Damit ist der Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, so bildet $\mathfrak{o}_l = \{\, x \mid x\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a},\ x \in S \,\}$ eine $\mathfrak{o}$ umfassende, mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung und $\mathfrak{o}_l$ ist ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. Ferner bildet $\mathfrak{o}_r = \{\, x \mid \mathfrak{a}\,x \subseteq \mathfrak{a},\ x \in S \,\}$ eine mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung und $\mathfrak{a}$ ist ein $\mathfrak{o}_l$-$\mathfrak{o}_r$-Ideal. Denn $\mathfrak{o}_l$ und $\mathfrak{o}_r$ sind Schiefringe mit 1 und bedeuten λ, μ reguläre Elemente mit $\mathfrak{a}\,\lambda \subseteq \mathfrak{o}$, $\mu \in \mathfrak{a}$, so gilt $\mathfrak{o}_l\,\mu\,\lambda \subseteq \mathfrak{o}_l\,\mathfrak{a}\,\lambda = \mathfrak{a}\,\lambda \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_l$; es gilt ferner $\mathfrak{a}\,\lambda\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, folglich $\mathfrak{a}\,\lambda \subseteq \mathfrak{o}_l$, $\lambda\,\mathfrak{o}\,\mu \subseteq \lambda\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_r$, d. h. $\mathfrak{o}_l$, $\mathfrak{o}_r$ sind Ordnungen und $\mathfrak{a}$ ist ein $\mathfrak{o}_l$-$\mathfrak{o}_r$-Ideal. Die Ordnungen $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_l$, $\mathfrak{o}_r$ sind einander äquivalent. Analog ist es für ein $\mathfrak{o}$-Rechtsideal.

DEFINITION. $\mathfrak{o}_l$ bzw. $\mathfrak{o}_r$ heisst die *Linksordnung* bzw. *Rechtsordnung* von $\mathfrak{a}$.

Es ist ersichtlich $\quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_l \rightleftarrows \mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{a} \rightleftarrows \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_r.$

DEFINITION. Ein $\mathfrak{o}$-Linksideal heisst *ganz*, wenn es einen Ring bildet, d. h. wenn es in seiner Links- oder Rechtsordnung (und als Folge davon in beiden Ordnungen) enthalten ist.

DEFINITION. Eine Ordnung von S heisst eine *Maximalordnung*, wenn sie unter den mit ihr äquivalenten Ordnungen maximal ist.

SATZ. 1. 2. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine Ordnung von S. Die folgenden Bedin-*

gungen sind einander äquivalent:

1. $\mathfrak{o}$ *ist eine Maximalordnung.*

2. *Es gibt kein ganzes* $\mathfrak{o}$*-Links- sowie* $\mathfrak{o}$*-Rechtsideal, das* $\mathfrak{o}$ *umfasst, aber nicht gleich* $\mathfrak{o}$ *ist.*

3. *Die Linksordnung eines beliebigen* $\mathfrak{o}$*-Linksideals ist* $\mathfrak{o}$ *und die Rechtsordnung eines beliebigen* $\mathfrak{o}$*-Rechtsideals ist* $\mathfrak{o}$.

4. *Die Links- sowie Rechtsordnung eines beliebigen zweiseitigen* $\mathfrak{o}$*-Ideals ist* $\mathfrak{o}$.

Beweis. Es gilt ersichtlich (1)→(2)→(3)→(4). Wir zeigen (4)→(1). Ist zunächst $\mathfrak{m}$ ein in S enthaltenes $\mathfrak{o}$-Linksmodul und gilt $\lambda\,\mathfrak{m} \leq \mathfrak{o}$ ($\lambda \in S^* \wedge \mathfrak{o}$), so ist $\mathfrak{m}\,\lambda \leq \mathfrak{o}$; denn es ist $\mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{o}\mathfrak{m}\,\lambda = \mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{m}\,\lambda \leq \mathfrak{o}\mathfrak{o}\,\lambda \leq \mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{o}$ und da $\mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{o}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal mit der Rechtsordnung $\mathfrak{o}$ ist, ist $\mathfrak{m}\,\lambda \leq \mathfrak{o}$. Es sei nun $\mathfrak{o}'$ eine Ordnung mit $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{o}'$, $\lambda\,\mathfrak{o}'\,\mu \leq \mathfrak{o}$ ($\lambda, \mu \in S^* \wedge \mathfrak{o}$). Nach dem voraufgehenden ist $\mathfrak{o}'\,\mu\,\lambda \leq \mathfrak{o}$; ebenso ist $\mu\,\lambda\,\mathfrak{o}' \leq \mathfrak{o}$. $\mathfrak{o}'$ ist also ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, dessen Linksordnung gleich $\mathfrak{o}$ ist. Da aber $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'$ ist, ist $\mathfrak{o}' \leq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$.

Nach diesem Satz ist ein einseitiges Ideal bezüglich einer Maximalordnung $\mathfrak{o}$ dann und nur dann ganz, wenn es in $\mathfrak{o}$ enthalten ist. Ferner ist jeder mit einer Maximalordnung $\mathfrak{o}$ äquivalente $\mathfrak{o}$-Linksmodul $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, weil aus $\lambda\,\mathfrak{a}\,\mu \leq \mathfrak{o}$ ($\lambda, \mu \in S^* \wedge \mathfrak{o}$) $\mathfrak{a}\,\mu\,\lambda \leq \mathfrak{o}$ folgt.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein einseitiges Ideal bezüglich einer Ordnung $\mathfrak{o}$, dessen Links- bzw. Rechtsordnung $\mathfrak{o}_l$ bzw. $\mathfrak{o}_r$ ist. Wegen

$$\mathfrak{a}\,c \leq \mathfrak{o}_l \rightleftarrows \mathfrak{a}\,c\,\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a} \rightleftarrows c\,\mathfrak{a} \leq \mathfrak{o}_r$$

wird die Menge $\mathfrak{a}^{-1}$ aller c aus S mit $\mathfrak{a}\,c\,\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}$ auch als die Menge aller c mit $\mathfrak{a}\,c \leq \mathfrak{o}_l$ ($c\,\mathfrak{a} \leq \mathfrak{o}_r$) bestimmt. $\mathfrak{a}^{-1}$ ist ein $\mathfrak{o}_r$-$\mathfrak{o}_l$-Ideal.

Definition. $\mathfrak{a}^{-1}$ heisst das zu $\mathfrak{a}$ *inverse Ideal.* $\mathfrak{a}$ heisst *umkehrbar,* wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}_l$ und $\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_r$ ist.

Sind $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zwei Ideale mit derselben Linksordnung (Rechtsordnung), so folgt aus $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}^{-1} \geq \mathfrak{b}^{-1}$.

Satz. 1. 3. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine Maximalordnnng und* $\mathfrak{a}$ *sei ein* $\mathfrak{o}$*-Linksideal. Die Linksordnung von* $\mathfrak{a}^{-1}$ *ist eine Maximalordnung.*

Beweis. Die Rechtsordnung von $\mathfrak{a}$ sei $\mathfrak{o}'$ und die Linksordnung von $\mathfrak{a}^{-1}$ sei $\mathfrak{o}''$. Dann ist $\mathfrak{o}'' \geq \mathfrak{o}'$. Ferner sei $\mathfrak{o}_1$ eine $\mathfrak{o}''$ umfassende, mit $\mathfrak{o}''$ äquivalente Ordnung: $\mathfrak{o}_1 \geq \mathfrak{o}''$. Dann ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1}$ ein mit $\mathfrak{o}_1$, also mit

$\mathfrak{o}$ äquivalente $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}$-Doppelmodul; ist nämlich λ bzw. μ ein reguläres Element aus $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}^{-1}$, so ist $\mathfrak{c} \supseteq \lambda\, \mathfrak{o}_1\, \mu$, $\mu\, \mathfrak{c}\, \lambda \subset \mathfrak{o}' \mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}' = \mathfrak{o}_1$. Da $\mathfrak{o}$ maximal ist, ist $\mathfrak{c}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Wegen

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{a}\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{c}$$

ist $\mathfrak{c}$ sogar ganz, also $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}$. Demnach ist $\mathfrak{o}_1\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{o}_1 \subseteq \mathfrak{o}''$ und wir erhalten $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}''$. Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ. 1.4. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine Maximalordnung und* $\mathfrak{t}$ *sei ein Teilring von* S *mit* $\lambda\, \mathfrak{t}\, \mu \subseteq \mathfrak{o}\ (\lambda, \mu \in S^*)$. *Dann gibt es eine mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalente Maximalordnung, die* $\mathfrak{t}$ *umfasst.*

Beweis. $\mathfrak{a} = (\mathfrak{o}\,\lambda, \mathfrak{o}\,\lambda\,\mathfrak{t})$ ist ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, dessen Rechtsordnung $\mathfrak{t}$ umfasst. Die Linksordnung von $\mathfrak{a}^{-1}$ ist eine $\mathfrak{t}$ umfassende Maximalordnung.

KOROLLAR. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine Maximalordnung. Jede mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalente Ordnung ist in einer mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalenten Maximalordnung enthalten.*

DEFINITION. $\mathfrak{p}$ sei ein in einer Ordnung $\mathfrak{o}$ enthaltenes, von $\mathfrak{o}$ verschiedenes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal.

$\mathfrak{p}$ heisst ein *Primideal* von $\mathfrak{o}$, wenn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ $\mathfrak{a} \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ oder $\mathfrak{b} \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ folgt, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ enthaltene zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale sind.

$\mathfrak{p}$ heisst (zweiseitig) *teilerlos*, wenn der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ kein echtes zweiseitiges Ideal hat.

$\mathfrak{p}$ heisst *stark teilerlos*, wenn der Resklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein einfacher Ring ist.

Jedes stark teilerlose Ideal ist teilerlos und jedes teilerlose Ideal ist ein Primideal. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann stark teilerlos, wenn in $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ der Vielfachenkettensatz für Linksideale (Rechtsideale) gilt.

DEFINITION. Eine Ordnung $\mathfrak{o}$ von S heisst *regulär*,[6] wenn es für jedes $x \in S$ reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $x\,\mathfrak{o}\,\alpha \subseteq \mathfrak{o}$, $\beta\,\mathfrak{o}\,x \subseteq \mathfrak{o}$ sind. Man erhält leicht:

SATZ 1.5. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine Ordnung von* S. *Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1. $\mathfrak{o}$ *ist regulär.*
2. *Für jedes* x *aus* S *gibt es ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal, das* x *enthält.*
3. *Jeder Modul* $\mathfrak{o}\,\mu\,\mathfrak{o}\ (\mu \in S^*)$ *ist ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal.*

---

[6]) In meiner früheren Arbeit nenne ich "beschränkt".

4. *Ist M eine Teilmenge von S und ist $\lambda M \mu \subseteq \mathfrak{o}\,(\lambda, \mu \in S^*)$, so gibt es reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$, so dass $\alpha M \subseteq \mathfrak{o}$, $M \beta \subseteq \mathfrak{o}$.*

5. *Es gibt für jedes reguläre α aus $\mathfrak{o}$ reguläre Elemente α', α'' aus $\mathfrak{o}$, so dass $\mathfrak{o}\,\alpha \supseteq \alpha'\,\mathfrak{o}$, $\alpha\,\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{o}\,\alpha''$.*

6. *Jedes einseitige $\mathfrak{o}$-Ideal enthält ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal.*

SATZ 1.6. *Ein Teilring $\mathfrak{o}'$ von S ist eine reguläre Ordnung, wenn $\mathfrak{o}'$ 1 enthält und mit einer regulären Ordnung $\mathfrak{o}$ äquivalent ist.*

Beweis. Es gibt reguläre Elemente $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ mit $\lambda\,\mathfrak{o}'\,\mu \subseteq \mathfrak{o}$, $\lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu' \subseteq \mathfrak{o}'$. Es gibt ferner für jedes x aus S ein $\alpha \in S^* \frown \mathfrak{o}$ mit $\alpha\,\mu'\,\mathfrak{o}'\,x\,\mu'^{-1} \subseteq \mathfrak{o}$, da $\mu'\,\mathfrak{o}'\,x\,\mu'^{-1}$ in $\mu'\,\lambda^{-1}\,\mathfrak{o}\,\mu^{-1}\,x\,\mu'^{-1}$ enthalten ist. $\alpha' = \lambda'\,\alpha\,\mu'$ ist ein reguläres Element aus $\mathfrak{o}'$ und es ist $\alpha'\,\mathfrak{o}'\,x \subseteq \lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu' \subseteq \mathfrak{o}'$. Ebenso gibt es ein $\beta' \in S^* \frown \mathfrak{o}'$ mit $x\,\mathfrak{o}'\,\beta' \subseteq \mathfrak{o}'$.

SATZ 1.7. *Der Durchschnitt $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{o}'$ zweier äquivalenten regulären Ordnungen $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ ist eine mit $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ äquivalente reguläre Ordnung.*

Beweis. Es gibt reguläre Elemente α, β mit $\alpha\,\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}\,(\alpha \in \mathfrak{o})$, $\beta\,\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}'$ $(\beta \in \mathfrak{o}')$. Da $\beta^{-1}\alpha$ in der Form $\mu\,\lambda^{-1}\,(\lambda, \mu \in S^* \frown \mathfrak{o})$ dargestellt wird, ist $\gamma = \alpha\lambda = \beta\,\mu \in \mathfrak{o}$, $\gamma\,\mathfrak{o} = \beta\,\mu\,\mathfrak{o} \subseteq \beta\,\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}'$. Wegen $\gamma\,\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}$ ist $\gamma\,\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o} \frown \mathfrak{o}'$, andererseits ist $\mathfrak{o} \frown \mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}$.

SATZ 1.8. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine reguläre Ordnung. Die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent:*

1. *$\mathfrak{o}$ ist eine reguläre Maximalordnung.*

2. *Es gibt kein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, das $\mathfrak{o}$ umfasst, aber nicht gleich $\mathfrak{o}$ ist.*

SATZ 1.9. *Ein Teilring $\mathfrak{o}$ von S mit den folgenden Eigenschaften ist eine reguläre Maximalordnung.*

1. *$\mathfrak{o}$ enthält Eins 1.*

2. *Es gibt für jedes $x \in S$ ein reguläres Element α aus $\mathfrak{o}$ mit $\alpha\,x \in \mathfrak{o}$.*

3. *Es gibt für jedes α aus $S^* \frown \mathfrak{o}$ ein β aus $S^* \frown \mathfrak{o}$, so dass $\mathfrak{o}\,\alpha \supseteq \beta\,\mathfrak{o}$ ist.*

4. *Es gibt (ausser $\mathfrak{o}$) keinen $\mathfrak{o}$ umfassenden Teilring $\mathfrak{o}'$ von S, so dass $\lambda\,\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}$ mit einem regulären λ ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass aus $\mathfrak{o}\,\alpha \supseteq \beta\,\mathfrak{o}$ $\alpha\,\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{o}\,\beta$ folgt. Es ist $\mathfrak{o}\,\alpha = \mathfrak{o}^2\,\alpha \supseteq \mathfrak{o}\,\beta\,\mathfrak{o} = \mathfrak{b}$. $\mathfrak{o}' = \{\, x \mid \mathfrak{b}\,x \subseteq \mathfrak{b}, x \in S \}$ ist ein $\mathfrak{o}$ umfassender Teilring von S und es gilt $\beta\mathfrak{o}' \leq \mathfrak{b}\mathfrak{o}' = \mathfrak{b} \leq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$. Aus $\mathfrak{o}\alpha \geq \mathfrak{b}$ folgt

$$\alpha^{-1}\mathfrak{o} = \{ x \mid \mathfrak{o}\alpha x \leq \mathfrak{o}, x \in S \} \leq \{ x \mid \mathfrak{b} x \leq \mathfrak{o}, x \in S \} = \mathfrak{a}$$

Wegen $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \leq \mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leq \mathfrak{o}$, $\alpha^{-1}\mathfrak{o}\beta \leq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \leq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}\beta \leq \alpha\mathfrak{o}$.

KOROLLAR 1. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung. Wenn es für jedes reguläre α aus $\mathfrak{o}$ ein reguläres β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $\mathfrak{o}\alpha \geq \beta\mathfrak{o}$ ist, so ist $\mathfrak{o}$ regulär.*

KOROLLAR 2. *Für eine reguläre Maximalordnung $\mathfrak{o}$ gilt*

$$\mathfrak{o}\alpha \geq \beta\mathfrak{o} \rightleftarrows \alpha\mathfrak{o} \geq \mathfrak{o}\beta \qquad (\alpha,\ \beta \in S^* \wedge \mathfrak{o})$$

SATZ 1. 10. *Es seien $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ zwei äquivalente Maximalordnungen. Das Produkt $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ ist dann und nur dann ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal, wenn es ganze $\mathfrak{o}'$-$\mathfrak{o}$-Ideale gibt. Die Summe aller ganzen $\mathfrak{o}'$-$\mathfrak{o}$-Ideale ist $(\mathfrak{o}\mathfrak{o}')^{-1}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{o}\mathfrak{o}' \geq \mathfrak{o}$ ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal, so ist $(\mathfrak{o}\mathfrak{o}')^{-1} \leq \mathfrak{o}$, $(\mathfrak{o}\mathfrak{o}')^{-1}$ ist also ein ganzes $\mathfrak{o}'$-$\mathfrak{o}$-Ideal. Wenn es ein ganzes $\mathfrak{o}'$-$\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ gibt, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{o}\mathfrak{o}' \leq \mathfrak{a}^{-1}$. $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ ist somit ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes $\mathfrak{o}'$-$\mathfrak{o}$-Ideal, so ist $(\mathfrak{o}\mathfrak{o}')\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mathfrak{a} \leq \mathfrak{o}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a} \leq (\mathfrak{o}\mathfrak{o}')^{-1}$.

SATZ 1. 11. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung. Wenn es für jede mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung $\mathfrak{o}'$ ein ganzes $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal gibt, so ist $\mathfrak{o}$ regulär.*

Beweis. $\mathfrak{o}' = \lambda^{-1}\mathfrak{o}\lambda$ ist für jedes reguläre Element λ ein mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung. Nach Satz 1. 10 ist $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}$ ein $\mathfrak{o}$-Rechtsideal, also $\mu\lambda^{-1}\mathfrak{o}\lambda\mathfrak{o} \leq \mathfrak{o}$ mit einem regulären Element μ. Damit ist $\mathfrak{o}\lambda\mathfrak{o}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal.

§2 ZWEISEITIGE IDEALE BEZÜGLICH EINER MAXIMALORDNUNG

S sei ein Schiefring mit Eiselement und $\mathfrak{o}$ sei eine feste Maximalordnung von S. Die deutschen Buchstaben bezeichnen im folgenden zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale. Wir definieren: $\mathfrak{a}$ ist *quasigleich* $\mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ ist. Zeichen: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$.

Wie beim kommutativen[7]) erhält man:

1. $\mathfrak{a} \sim (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$. $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} \geq \mathfrak{a}$.

$(\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ ist das umfassendste zu $\mathfrak{a}$ quasigleiche Ideal. Wir bezeichnen es mit $\bar{\mathfrak{a}}$.

[7]) Vgl. die in (3) zitierte Arbeit von K. HENCKE.

2. Ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \sim \mathfrak{b}\mathfrak{d}$.
3. $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \sim \mathfrak{o}$.
4. $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \rightleftarrows \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{d} \sim \mathfrak{o}$.
5. Alle einem ganzen Ideal quasigleichen Ideale sind wieder ganz.
6. Ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b} \vee \mathfrak{d}$.
7. Ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}$.

Beweis. Es genügt zu beweisen $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$. Denn es ist dann $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}$. Es gilt

$$\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{o} \wedge \mathfrak{o}\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c},$$

also $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}(\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}$. Wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \sim \mathfrak{o}, \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} \sim \mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} \sim \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$.

Vereinigt man alle einem Ideal quasigleichen Ideale zu einer Klasse, so bildet die Gesamtheit der Klassen eine Gruppe G. Das Einselement I von G ist die Klasse derjenigen Ideale, die zu $\mathfrak{o}$ quasigleich sind. Die inverse Klasse A^{-1} einer Klasse A ist die $\mathfrak{a}^{-1}$ $(\mathfrak{a} \in A)$ enthaltende Klasse. Andererseits bildet G einen Verband. Die Klassen $A \vee B$ bzw. $A \wedge B$ ist die Klasse, die $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ $(\mathfrak{a} \in A,\ \mathfrak{b} \in B)$ umfasst. Dann und nur dann ist $A \leqq B$ $(A, B \in G)$, wenn $\mathfrak{a}^{-1} \supseteq \mathfrak{b}^{-1}$, d. h. $\bar{\mathfrak{a}} \subseteq \bar{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{a} \in A, \mathfrak{b} \in B)$ ist. Eine Klasse $A \leqq I$ heisst *ganz*; sie ist die Klasse, die aus lauter ganzen Idealen besteht. Ist $A \leqq B$, so gilt $CA \leqq CB$, $AC \leqq BC$. G ist ferner archimedisch; d. h. ist $C^{\nu} \leqq A$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so ist $C \leqq I$. Beweis. Bedeutet $\mathfrak{a}$ das umfassendste Ideal in A, so ist $\mathfrak{c}^{\nu} \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} \in C$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Der von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{c}$ erzeugte Ring $\mathfrak{o}'$ ist in $\mathfrak{o} \vee \mathfrak{a}$ enthalten. Es gibt also ein reguläres Element λ mit $\mathfrak{o}'\lambda \subseteq \mathfrak{o}$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{o}$, d. h. $C \leqq I$. Eine archimedische Verband-geordnete Gruppe ist bekanntlich als eine Gruppe kommutativ und als ein Verband distributiv. Das Produkt von Idealen ist somit im Sinne von Quasigleichheit kommutativ.

SATZ 2. 1. *Die Klassen quasigleicher Ideale bilden eine archimedische Verband-geordnete Gruppe. Sie ist also als eine Gruppe kommutativ und als ein Verband distributiv.*

KOROLLAR. *Das Produkt von Idealen ist bis auf Quasigleichheit kommutativ.*

Man erhält ohne Mühe:

8. Ist $A_i \cup B_k = I$ $(i=1, \ldots, n; k=1, \ldots, m)$, so ist $\Pi_{i=1}^{n} A_i \cup \Pi_{k=1}^{m} B_k = I$.

9. $(A \cap B)(A \cup B) = AB$. Ist $A \cup B = I$, so ist $A \cap B = AB$.

10. Ist $A \leq B$, so gebt es ein $C \leq I$ mit $A = BC$ und umgekehrt.

11. Sind zwei Verband-quotienten A/AC und B/BD $(C, D \leq I)$ projektiv, so ist $C = D$.

Beweis. Es genügt den Satz zu beweisen im Falle, wo A/AC zu B/BD transponierbar ist. Es sei also $A = B \cup AC, BD = B \cap AC$. Dann ist $B = AC', C' \leq I$ und $I = A^{-1}(B \cup AC) = C' \cup C, C'D = A^{-1}(B \cap AC) = C' \cap C = C'C$, also $D = C$.

Nach dem voraufgehenden und nach dem Satz von Jordan-Hölder-Schreier erhält man leicht:

SATZ 2. 2. *Verfeinerungssatz.* (1. *Fassung*) *Wenn zwei Faktorzerlegungen eines ganzen Elements A aus G gegeben sind*:

$$A = A_1 \ldots A_n = B_1 \ldots B_m \, (A_i, B_j \leq I),$$

so kann man die beiden Produkte derart weiter zerlegen, dass diese Zerlegungen übereinstimmen.

SATZ 2. 3. *Verfeinerungssatz.* (2. *Fassung*) *Wenn zwei Faktorzerlegungen eines ganzen Ideals $\mathfrak{a}$ gegeben sind*:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n \sim \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m,$$

so kann man die beiden Produkte derart weiter zerlegen, dass diese Zerlegungen bis auf Quasigleichheit übereinstimmen.

DEFINITION. P sei ein von I verschiedenes ganzes Element aus G.

P heisst *unzerlegbar*, wenn in jeder Produktdarstellung $P = AB$ $(A, B \leq I)$ notwendig ein Faktor gleich I ist.

P heisst *teilerlos*, wenn es kein Element A mit $P < A < I$ gibt.

P heisst ein *Primelement*, wenn aus $AB \leq P \, (A, B \leq I)$ $A \leq P$ oder $B \leq P$ folgt.

Man kann leicht zeigen, dass die obigen drei Eigenschaften einander äquivalent sind.

Ist P ein Primelement von G, so ist das umfassendste Ideal $\mathfrak{p}$ in P ein Primideal $\not\sim \mathfrak{o}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{p} \not\sim \mathfrak{o}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist $\bar{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}^{-1})^{-1} = \mathfrak{p}$; denn es ist $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\mathfrak{d}, \mathfrak{c} \sim \mathfrak{o}, \mathfrak{d} \sim \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{p}} \equiv 0\,(\mathfrak{p}), \mathfrak{c} \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, folglich ist $\bar{\mathfrak{p}} \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ und $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Die $\mathfrak{p}$ enthaltende Klasse ist ersichtlich ein Primelement von G.

SATZ 2.4. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist entweder $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}$ oder $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Ein Element P von G ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn P ein Primideal $\not\sim \mathfrak{o}$ enthält.*

Es gilt ferner:

SATZ 2.5. *Dann und nur dann wird jedes Element $A < I$ aus G als ein Produkt von unzerlegbaren Elementen dargestellt, wenn der Teilerkettensatz für ganze Elemente von G gilt. Nach dem Verfeinerungssatz ist diese Zerlegung eindeutig. G ist somit eine abelsche Gruppe, die das direkte Produkt von den Primelementen erzeugten unendlichen Zyklen ist.*

SATZ 2.6. *Wenn der Teilerkettensatz für ganze Ideale im Sinn der Quasigleichheit gilt, so ist jedes ganze Ideal quasigleich einem Produkt von eindeutig bestimmten Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, die nicht quasigleich $\mathfrak{o}$ sind.*

BEMERKUNG. In der Gruppe von Klassen quasigleicher Ideale sind die folgenden Bedingungen einander äquivalent:

1. Teilerkettensatz für ganze Elemente.

2. Eingeschränkter Vielfachenkettensatz fur ganze Elemente, d. h. Vielfachenkettensatz für ganze Elemente, welche Teiler eines beliebigen festen ganzen Elements sind.

3. Die ganzen Teiler eines beliebigen festen ganzen Elements sind endlich viel.

Man kann also im Satz 2.5 sowie Satz 2.6 den Teilerkettensatz durch den eingeschränkten Vielfachenkettensatz ersetzen.

SATZ 2.7. *Alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale bilden eine Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es gilt der Teilerkettensatz (oder der eingeschränkte Vielfachenkettensatz) für die ganzen Ideale im Sinn der Quasigleichheit.*

2. *Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist teilerlos.*

3. *Jedes Primideal umfasst ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$; bedeutet $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r$ $(\mathfrak{p}_i \not\sim \mathfrak{o}, i = 1, \ldots, r)$ die Primfaktorzerlegung im Sinn der Quasigleichheit, so ist $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r$, also gilt für ein $\mathfrak{p}_i$ $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$, folglich $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \not\sim \mathfrak{o}$. Kein Primideal ist somit quasigleich $\mathfrak{o}$. Da jedes ganze Ideal $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ durch ein Primideal teilbar ist,[8]) so kann $\mathfrak{a}$ nicht quasigleich $\mathfrak{o}$ sein. Aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{o}$ folgt somit $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Quasigleichheit und Gleichheit sind also gleichbedeutend. Mithin bilden alle Ideale eine Gruppe.

SATZ 2. 8. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S. Dafür, dass alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

1. *$\mathfrak{o}$ ist eine Maximalordnung.*

2. *Es gilt der Teilerkettensatz (oder der eingeschränkte Vielfachenkettensatz) für die ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale.*

3. *Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist teilerlos.*

4. *Jedes Primideal umfasst ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.*

Beweis. Nach Satz 2. 7 sind die Bedingungen des Satzes hinreichend. Wir beweisen nun, dass die Bedingungen notwendig sind. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Bedeutet $\mathfrak{o}'$ die Linksordnung von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{o}' \supseteq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' = (\mathfrak{o}'\mathfrak{a})\mathfrak{a}' = \mathfrak{o}'(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = \mathfrak{o}'\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$, d. h. die Linksordnung von $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{o}$; ebenso ist die Rechtsordnung von $\mathfrak{a}$ gleich $\mathfrak{o}$. Nach Satz 1. 2 ist $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung. Die anderen Bedingungen sind leicht zu beweisen.

Ist $\mathfrak{o}$ ferner regulär, so ist die Bedingung 4 im vorigen Satz sicher erfüllt. Es sei nämlich $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ ein ganzes Ideal und α sei ein reguläres Element aus $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{o}\,\alpha$ umfasst ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{o}\,\alpha \supseteq \mathfrak{c}$, also ist $(\mathfrak{o}\,\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{c}^{-1}$, $\mathfrak{o}\,\alpha = (\alpha^{-1}\mathfrak{o})^{-1} \supseteq (\mathfrak{c}^{-1})^{-1} = \bar{\mathfrak{c}}$. Somit ist $\mathfrak{a} \supseteq \bar{\mathfrak{c}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{c}}} = \bar{\mathfrak{c}}$.

SATZ 2. 9. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine reguläre Ordnung von S. Dafür, dass alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden, sind die folgenden drei Bedingungen notwendig und hinreichend:*

A_1. *$\mathfrak{o}$ ist eine reguläre Maximalordnung.*

A_2. *Es gilt der Teilerkettensatz für die ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale.*

A_3'. *Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist teilerlos.*

---

[8]) Es gibt ein maximales Ideal unter den von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Teilern von $\mathfrak{a}$, und dieses ist teilerlos, also prim.

Man kann die Bedingung A_2 durch die folgende Bedingung A_4 ersetzen:

A_4. *Es gilt der Vielfachenkettensatz für die ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale, die ein beliebiges festes reguläres Element enthalten.*

Nach Satz 2.1 und Satz 2.5 gilt:

SATZ 2.10. *Wenn alle zweiseitigen Ideale bezüglich einer Maximalordnung eine Gruppe bilden, so ist sie abelseh und das direkte Produkt von den Primidealen erzeugten unendlichen Zyklen.*

Man erhält ohne Mühe:

SATZ 2.11. *S sei ein Schiefring mit Einselement. In S sei ein System G von reguläre Elemente enthaltenden Teilmoduln definiert, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:*

B_1. *G bildet eine Gruppe. Die in G definierte Kompositionsregel stimmt mit der üblichen Multiplikation von Moduln überein.*

B_2. *Das Einselement $\mathfrak{o}$ von G ist eine Ordnung von S.*

B_3. *Jedes in $\mathfrak{o}$ enthaltene zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal ist ein Element von G. Dann ist G die Gruppe aller zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale.*

SATZ 2.12. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine Ordnung und $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{a}$ bedeute ein Links-, Rechts- bzw. zweiseitiges Ideal. Wenn alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden, so gilt*

$$\mathfrak{l} \leq \mathfrak{a} \rightleftarrows \mathfrak{l} = \mathfrak{a}\mathfrak{l}' \qquad (\mathfrak{l}' \leq \mathfrak{o})$$
$$\mathfrak{r} \leq \mathfrak{a} \rightleftarrows \mathfrak{r} = \mathfrak{r}'\mathfrak{a} \qquad (\mathfrak{r}' \leq \mathfrak{o})$$

Wenn umgekehrt die obigen beiden Bedingungen erfüllt sind, so bilden alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe.

SATZ 2.13. *Wenn alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden, so gilt*

$$\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1} = \mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{r} = \mathfrak{o},$$

wobei $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{r}$ ein $\mathfrak{o}$-Links- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsideal bedeutet.

Beweis. $\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1}$ ist ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal: $\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1} \leq \mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1}(\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1})^{-1} \leq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{l}^{-1}(\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1})^{-1} \leq \mathfrak{l}^{-1}$, da $\mathfrak{o}$ die Rechtsordnung von $\mathfrak{l}^{-1}$ ist, ist $(\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1})^{-1} \leq \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1}$ ist quasigleich $\mathfrak{o}$, also $\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^{-1} = \mathfrak{o}$.

Wir beweisen nun einige Hilfssätze über teilerfremde Ideale. Dabei ist R ein Schiefring mit Einselement und Ideale von R bedeuten gewöhnliche Ideale.

HILFSSATZ 1. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *und* $\mathfrak{b}$ *seien Linksideale von* R. *Ist* $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}) = R$, $i = 1, \ldots, n$, *so ist* $(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}) = R$.

Beweis. Es gibt Elemente $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $b_i \in \mathfrak{b}$ mit $a_i + b_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, also $a_1 \ldots a_n = (1 - b_1) \ldots (1 - b_n) = 1 - b$ $(b \in \mathfrak{b})$. $(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b})$ enthält somit Eins 1 und $(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}) = R$.

HILFSSATZ 2. $\mathfrak{a}$ *sei ein zweiseitiges Ideal von* R. *Wenn* a *eine Einheit von* R *modulo* $\mathfrak{a}$, *so ist die Kongruenz*

$$ax \equiv b\,(\mathfrak{a}^n) \quad \text{bzw.} \quad ya \equiv b\,(\mathfrak{a}^n)$$

durch ein x *bzw.* y *aus* R *lösbar.*

Beweis. Da es ein a' mit $aa' \equiv a'a \equiv 1\,(\mathfrak{a})$ gibt, so ist $(aR, \mathfrak{a}) = (Ra, \mathfrak{a}) = R$. Nach Hilfssatz 1 ist also $(aR, \mathfrak{a}^n) = (R\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^n) = R$.

HILFSSATZ 2. *Sind* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *einander teilerfremde zweiseitige Ideale von* R *und ist* $\mathfrak{l}$ *ein Linksideal von* R, *so ist*

$$(\mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n, \mathfrak{l}) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{l}) \wedge \ldots \wedge (\mathfrak{a}_n, \mathfrak{l})$$

Beweis. $(\bigwedge \mathfrak{a}_i, \mathfrak{l}) \leq \bigwedge (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{l})$ ist klar. Sei jetzt $x \in \bigwedge (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{l})$, also $x \in (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{l})$, $i = 1, \ldots, n$, d. h.

$$x \equiv c_i\,(\mathfrak{a}_i),\ c_i \in \mathfrak{l}\ (i = 1, \ldots, n)$$

Setzt man $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i-1} \wedge \mathfrak{a}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) = R$. Es gibt also Elemente $e_1, \ldots, e_n$ mit $e_1 + \ldots + e_n = 1$ $(e_i \in \mathfrak{b}_i)$. Dann ist $c = e_1 c_1 + \ldots + e_n c_n$ ein Element von $\mathfrak{l}$ und $x \equiv c_i \equiv c\,(\mathfrak{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, somit ist $x \equiv c\,(\bigwedge \mathfrak{a}_i)$, und $x \in (\bigwedge \mathfrak{a}_i, \mathfrak{l})$, folglich $\bigwedge (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{l}) \leq (\bigwedge \mathfrak{a}_i, \mathfrak{l})$.

SATZ 2. 14. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine Maximalordnung von* S, *so dass alle zweiseitigen* $\mathfrak{o}$*-Ideale eine Gruppe bilden, und* $\mathfrak{a}$ *sei ein ganzes zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal. Dann und nur dann ist ein Element* a *aus* $\mathfrak{o}$ *eine Einheit von* $\mathfrak{o}$ *modulo* $\mathfrak{a}$, *wenn* a *eine Einheit modulo jedem Primteiler von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Beweis. $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ sei die Primfaktorzerlegung von $\mathfrak{a}$. Ist a eine Einheit modulo $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, so gibt es nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{o}$-Elemente x_i mit $a x_i \equiv 1\,(\mathfrak{p}_i^{e_i})$, $i = 1, \ldots, r$. Da die Kongruenzen $x \equiv x_i\,(\mathfrak{p}_i^{e_i})$, $i = 1, \ldots, r$, durch ein $x \in \mathfrak{o}$ lösbar sind, so ist $a x \equiv 1\,(\mathfrak{p}_i^{e_i})$, $i = 1, \ldots, r$, also $a x \equiv 1\,(\mathfrak{a})$. Ebenso ist die Kongruenz $y a \equiv 1\,(\mathfrak{a})$ lösbar.

SATZ 1. 15. *Wir setzen für* $\mathfrak{o}$ *die Bedingungen* A_1, A_2, A_3' *voraus. Ein reguläres Element* α *aus* $\mathfrak{o}$ *ist dann und nur dann eine Einheit von*

$\mathfrak{o}$, *wenn* α *eine Einheit modulo jedem Primideal ist.*

Beweis. $\mathfrak{o}\,\alpha$ ist ein $\mathfrak{o}$-Linksideal und enthält ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{o}\,\alpha \supseteqq \mathfrak{a}$. Nach Satz 2. 14 ist α eine Einheit modulo $\mathfrak{a}$; es gibt also Elemente $x \in \mathfrak{o}, y \in \mathfrak{a}$ mit $x\,\alpha + y = 1$. Es ist dann $\mathfrak{o}\,\alpha = (\mathfrak{o}\,\alpha, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$. Ebenso ist $\alpha\,\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$. α ist somit eine Einheit von $\mathfrak{o}$.

Von jetzt an setzen wir die folgenden Bedingungen A_1, A_2, A_3 voraus:

A_1. $\mathfrak{o}$ *ist eine reguläre Maximalordnung.*

A_2. *Es gilt der Teilerkettensatz für die ganzen zweiseitigen* $\mathfrak{o}$-*Ideale.*

A_3. *Jedes Primideal von* $\mathfrak{o}$ *ist stark teilerlos.*

DEFINITION. $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal von $\mathfrak{o}$. Ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein κ-reihiger Matrizenring uber einem Schiefkörper, so heisst κ die *Kapazität* von $\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\rho_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{\rho_r}$ ein Primidealprodukt, so ist der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ die direkte Summe der zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_i^{-\rho_i})$ und $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}$ ist mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{\rho_i}$ ringisomorph. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho$ ein primärer Ring, also ein voller Matrizenring in einem vollständig primären Ring $\bar{\mathfrak{o}}_0$: $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} \bar{\mathfrak{o}}_0\, \bar{c}_{ij}$, der Grad κ der Matrizen ist die Kapazität von $\mathfrak{p}$. Das Radikal von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\rho$ nnd das von $\bar{\mathfrak{o}}_0$ ist $\bar{\mathfrak{p}}_0 = \bar{\mathfrak{p}} \frown \bar{\mathfrak{o}}_0$ und $\bar{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} \bar{\mathfrak{p}}_0\, \bar{c}_{ij}$. Der Ring $\bar{\mathfrak{o}}_0$ besitzt nur zweiseitige Ideale und $\bar{\mathfrak{o}}_0$, $\bar{\mathfrak{p}}_0, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_0^\rho = \bar{0}$ sind die einzigen Ideale von $\bar{\mathfrak{o}}_0$. Bedeutet $\bar{\pi}$ ein Element aus $\bar{\mathfrak{p}}_0$, aber nicht aus $\bar{\mathfrak{p}}_0^2$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}_0 = \bar{\mathfrak{o}}_0\,\bar{\pi} = \bar{\pi}\,\bar{\mathfrak{o}}_0$; jedes Element von $\bar{\mathfrak{o}}_0$ ist in der Form $\bar{\pi}^\nu \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}' \bar{\pi}^\nu$ $(0 \leqq \nu \leqq \rho,\ \bar{\pi}^0 = 1)$ mit Einheiten $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$ aus $\bar{\mathfrak{o}}_0$ darstellbar.[9]) Der Restklassenring von $\mathfrak{o}$ nach dem ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideal ist demnach ein einreihiger Ring im Sinne von G. KÖTHE, also ein Hauptidealring.[10])

Da $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ein Ring mit Doppelkettensatz fur Links- sowie Rechtsideale ist, so folgt:

A_5. *Es gilt der Teilerkettensasz für die ganzen* $\mathfrak{o}$-*Linksideale.*

A_5'. *Es gilt der Teilerkettensatz für die ganzen* $\mathfrak{o}$-*Rechtsideale.*

A_6. *Es gilt der Vielfachenkettensatz für die ganzen* $\mathfrak{o}$-*Linksideale,*

9) Vgl. die in (1) zitierte Arbeit von K. ASANO. Vgl. auch K. ASANO, Über Hauptidealringe mit Kettensatz, Osaka Math. Journ. **1** (1949).

10) G. KOETHE, Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring. Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 31-44. Vgl. die in (9) zitierte Arbeit von K. ASANO.

die ein beliebiges festes reguläres Element enthalten.

A_6'. *Es gilt der Viefachenkettensatz für die ganzen* $\mathfrak{o}$*-Rechtsideale, die ein beliebiges festes reguläres Element enthalten.*

Nach A_5 bzw. A_5' ist jedes $\mathfrak{o}$-Links- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsideal ein endlicher $\mathfrak{o}$-Links- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul. Umgekehrt ist jeder reguläre Elemente enthaltende, endliche $\mathfrak{o}$-Lnks- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul aus S ein $\mathfrak{o}$-Links- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsideal.

SATZ 2. 16. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine reguläre Ordnung von* S. *Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1) A_1, A_2, A_3. 2) A_1, A_3, (A_6') 3) A_1, A_4, A_5.

Beweis. Es glit (1)→(2)→(3)→(1).

SATZ 2. 17. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine reguläre Ordnung von* S. *Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1. *Alle zweiseitigen* $\mathfrak{o}$*-Ideale bilden eine Gruppe.*
2. *Jeder Restklassenring von* $\mathfrak{o}$ *nach einem zweiseitigen* $\mathfrak{o}$*-Ideal ist einreihig.*
3. *Es gilt der Teilerkettensatz für in* $\mathfrak{o}$ *enthaltene zweiseitige* $\mathfrak{o}$*-Ideale und für beliebige Primideale* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *von* $\mathfrak{o}$ *ist der Restklassenring* $\mathfrak{o}/(\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{q})^2$ *einreihig.*
4. *Es gilt der Teilerkettensatz für in* $\mathfrak{o}$ *enthaltene zweiseitige* $\mathfrak{o}$*-Ideale. Das Produkt von Primidealen ist kommutativ und für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist der Restklassenring* $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^2$ *einreihig.*

Beweis. Wir zeigen (1)→(2)→(3)→(4)→(1). (1)→(2)→(3) ist klar. (3)→(4). Da $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/(\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{q})^2$ einreihig, also direkte Summe von primären Ringen ist, so ist das Produkt von Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{q})^2$ und $\bar{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}/(\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{q})$ von $\bar{\mathfrak{o}}$ kommutativ.[11]) Da aber $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ beide $(\mathfrak{p}\wedge\mathfrak{q})^2$ umfassen, ist $\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Wir beweisen endlich (4)→(1). Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho$ einreihig, da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^2$ einreihig ist.[12]) Sind $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ verschiedene Primideale, so sind sie einander kommutativ und teilerfremd und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\dots\mathfrak{p}_r^{\rho_r}$ ist mit der direkten Summe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{\rho_i}$ ringisomorph, also ist er einreihig. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und α sei ein reguläres Element

11) 12) Vgl. die in (9) zitierte Arbeit von K. ASANO.

aus $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{o}\,\alpha$ enthält ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{c}$ und nach dem Teilerkettensatz enthält $\mathfrak{c}$ ein Produkt von Primidealen, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r \subseteq \mathfrak{o}\,\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. Eines von $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ stimmt also mit $\mathfrak{p}$ überein und $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{b}$. Da $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ einreihig, also ein Hauptidealring ist, ist $\bar{\mathfrak{o}}\,\bar{\alpha} = \overline{\mathfrak{p}\mathfrak{l}}$ mit einem Linksideal $\bar{\mathfrak{l}}$ von $\bar{\mathfrak{o}}$. Daher ist

$$\mathfrak{o}\,\alpha = (\mathfrak{p}\mathfrak{l}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{p}\,(\mathfrak{l}, \mathfrak{b}),\ \mathfrak{o} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\ (\mathfrak{q} = (\mathfrak{l}, \mathfrak{b})\,\alpha^{-1}\,\mathfrak{o})$$

Ebenso ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ ist also umkehrbar. Nach dem Teilerkettensatz beweist man leicht, dass ein beliebiges zweiseitiges $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{o}$ als ein Produkt von endlich vielen Primidealen darstellbar ist. $\mathfrak{c}$ ist demnach umkehrbar. Daraus folgt, dass alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden.

§ 3 $\mathfrak{o}$ UMFASSENDE TEILRINGE VON S

In diesem Paragraphen sei S ein Schiefring mit Einselement und $\mathfrak{o}$ sei eine Maximalordnung von S. Wir setzen voraus, dass alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden.

Es sei P eine Menge von Primidealen. Ein ganzes einseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ heisst zu P prim, wenn $\mathfrak{a} \bigvee \mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für jedes $\mathfrak{p} \in P$ ist. Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ($\mathfrak{o}$-Rechtsideal), so bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_P$ die Menge aller $c \in S$ derart, dass es ein ganzes zu P primes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}\,c \subseteq \mathfrak{a}$ ($c\,\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{a}$) gibt. Ist $\mathfrak{a}$ zweiseitig, so folgt aus $\mathfrak{n}\,c \subseteq \mathfrak{a}$ $c \in \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1}$, d. h. $c\,\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{a}$ und umgekehrt. $\mathfrak{a}_P$ ist ein Teilmodul von S. Insbesondere ist $\mathfrak{o}_P$ ein $\mathfrak{o}$ umfassender Teilring von S. $\mathfrak{a}_P$ heisst die *P-Komponente* von $\mathfrak{a}$. Wenn P aus einem einzigen Primideal $\mathfrak{p}$ besteht, so heisst $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ die *$\mathfrak{p}$-Komponente* von $\mathfrak{a}$.

Man sieht leicht, dass $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_P$ ist, jenachdem $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Links- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsideal ist. Ist $\mathfrak{a}$ sogar zweiseitig, so ist $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_P = \mathfrak{o}_P\,\mathfrak{a}\mathfrak{o}_P$. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ $\mathfrak{o}$-Linksideale ($\mathfrak{o}$-Rechtsideale), so gilt

$$(\mathfrak{a} \bigvee \mathfrak{b})_P = \mathfrak{a}_P \bigvee \mathfrak{b}_P, \qquad (\mathfrak{a} \bigwedge \mathfrak{b})_P = \mathfrak{a}_P \bigwedge \mathfrak{b}_P.$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale, so ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_P = \mathfrak{a}_P\mathfrak{b}_P$.

HILFSSATZ 1. *$\mathfrak{o}_P$ ist eine $\mathfrak{o}$ umfassende Ordnung von S. Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Links- bzw. $\mathfrak{o}$-Rechtsideal, so ist $\mathfrak{a}_P$ ein $\mathfrak{o}_P$-Links- bzw. $\mathfrak{o}_P$-Rechtsideal.*

HILFSSATZ 2. *Ist $\mathfrak{o}$ regulär, so ist $\mathfrak{o}_P$ auch regulär.*

Beweis. Es gibt für jedes $x \in S$ ein reguläres α aus $\mathfrak{o}$, so dass $\alpha\,\mathfrak{o}\,x \subseteq$

$\mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{o}x \subseteqq \mathfrak{o}$ ist. Da $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{o}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal ist, so ist

$$\mathfrak{o}_P\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_P\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{o}\mathfrak{o}_P = \mathfrak{o}_P\alpha\mathfrak{o}_P, \quad \mathfrak{o}_P\alpha\mathfrak{o}_P x \subseteqq \mathfrak{o}_P$$

Es ist daher $\alpha\mathfrak{o}_P x \subseteqq \mathfrak{o}_P$, $\alpha \in \mathfrak{o} \subseteqq \mathfrak{o}_P$. Ebenso gibt es ein regulares $\beta \in \mathfrak{o}_P$, so dass $x\mathfrak{o}_P\beta \subseteqq \mathfrak{o}_P$ ist.

HILFSSATZ 3. *Ist* $\mathfrak{a}^* \subseteqq \mathfrak{o}_P$ *ein* $\mathfrak{o}_P$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}_P$*-Rechtsideal*), *so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{o}$ *ein* $\mathfrak{o}$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}$*-Rechtsideal*) *und es gilt* $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_P$.

Beweis. $\mathfrak{a}^*$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. $\mathfrak{a}$ ist dann ein $\mathfrak{o}$-Linksmodul und enthält reguläre Elemente; ist α nämlich ein reguläres Element aus $\mathfrak{a}^*$, so ist $\mathfrak{n}\alpha \subseteqq \mathfrak{o}$ für ein ganzes zu P primes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{n}$, wegen $\mathfrak{n}\alpha \subseteqq \mathfrak{a}^*$ ist $\mathfrak{n}\alpha \subseteqq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ enthält sicher reguläre Elemente. Damit ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. Es ist $\mathfrak{a}^* \supseteqq \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{o}_P\mathfrak{a}^* \supseteqq \mathfrak{o}_P\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_P$. Andererseits ist $\mathfrak{a}^* \subseteqq \mathfrak{a}_P$; denn ist $a \in \mathfrak{a}^*$, so ist wie oben $\mathfrak{n}a \subseteqq \mathfrak{a}$ und $a \in \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{o}_P\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_P$, also $\mathfrak{a}^* \subseteqq \mathfrak{a}_P$. Es gilt daher $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_P$.

SATZ 3. 1. *Die zweiseitigen* $\mathfrak{o}_P$*-Ideale bilden eine Gruppe.*

Beweis. G sei die Gruppe aller zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale. Die Menge G^* aller $\mathfrak{a}_P$ ($\mathfrak{a} \in G$) bildet eine Gruppe, weil G^* das homomorphe Bild von G durch die Abbildung $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}_P$ ist. G^* erfüllt de Bedingungen B_1, B_2; B_3 von Satz 2. 10. G^* ist also die Gruppe aller zweiseitigen $\mathfrak{o}_P$-Ideale.

HILFSSATZ 4. $\mathfrak{l}$ *sei ein ganzes* $\mathfrak{o}$*-Linksideal, das ein zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *umfasst. Dann und nur dann ist* $\mathfrak{l}$ *zu* P *prim, wenn* $\mathfrak{l}$ *ein zu* P *primes zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal enthält.*

Beweis. $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{e_r}$ sei die Primfaktorzerlegung von $\mathfrak{a}$ und es seien $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{l}) \neq \mathfrak{o}$ $(i = 1, \ldots, s)$, $(\mathfrak{p}_j, \mathfrak{l}) = \mathfrak{o}$ $(j = s+1, \ldots, r)$. Ist $\mathfrak{l}$ zu P prim, so ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_s^{e_s}$ zu P prim. Nach Hilfssatz 3 § 2 ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{l} &= (\mathfrak{a}, \mathfrak{l}) = \left(\bigcap\nolimits_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i}, \mathfrak{l}\right) = \bigcap\nolimits_{i=1}^{r} (\mathfrak{p}_i^{e_i}, \mathfrak{l}) = \bigcap\nolimits_{i=1}^{s} (\mathfrak{p}_i^{e_i}, \mathfrak{l}) \\ &= \left(\bigcap\nolimits_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i^{e_i}, \mathfrak{l}\right) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{l}), \text{ also } \mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{l}.\end{aligned}$$

Die Umkehrung ist klar.

SATZ 3. 2. $\mathfrak{a}$ *sei ein ganzes einseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal. Dann und nur dann ist* $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P$, *wenn* $\mathfrak{a}$ *ein zu* P *primes zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal umfasst.*

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, das ein zu P primes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{c}$ umfasst. Es ist $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{o} \subseteqq \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{o}_P\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_P$, also $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P$, so ist $\mathfrak{n} \cdot 1 \subseteqq \mathfrak{a}$ mit einem zu P primen Ideal $\mathfrak{n}$.

KOROLLAR, $\mathfrak{a}$ *sei ein ganzes zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal. Dann und nur dann ist* $\mathfrak{o}_P = \mathfrak{a}_P$, *wenn* $\mathfrak{a}$ *zu* P *prim ist.*

SATZ 3. 3. *Wenn ein ganzes einseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *ein Produkt* $\mathfrak{c}$ *von Primidealen aus* P *umfasst, so ist* $\mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$.

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. Ist $c \in \mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{n}\, c \subseteq \mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{n}$ zu P prim, also mit $\mathfrak{c}$ teilerfremd ist: $(\mathfrak{n}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{o}$. Es ist also

$$c \in \mathfrak{o}\, c = (\mathfrak{n}\, c, \mathfrak{c}\, c) \subseteq (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{a}$$

Da aber $\mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{a}$ ist, gilt $\mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$.

SATZ 3. 4. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein ganzes zweiseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal, das ein Produkt von zu* P *gehörigen Primidealen ist. Jede Restklasse* C *von* $\mathfrak{o}_P/\mathfrak{a}_P$ *enthält eine einzige Restklasse* C_0 *von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. *Nach der Zuordnung* $C \rightarrow C_0$ *ist* $\mathfrak{o}_P/\mathfrak{a}_P$ *mit* $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ *ringisomorph.*

Beweis. Liegen a, b in $\mathfrak{o}$, so ist wegen $\mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$

$$a \equiv b\, (\mathfrak{a}) \quad \rightleftarrows \quad a \equiv b\, (\mathfrak{a}_P)$$

Daher genügt es zu beweisen, dass jede Restklasse C $\mathfrak{o}$-Elemente hat. Ist $c \in \mathfrak{o}_P$, so ist $\mathfrak{n}\, c \subseteq \mathfrak{o}$ mit einem zu P primen Ideal $\mathfrak{n}$. Es ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{o}$, d. h. es gibt Elemente $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{n}$ mit $a + b = 1$, also

$$c = ac + bc \equiv bc\, (\mathfrak{a}_P), \quad bc \in \mathfrak{o}.$$

SATZ 3. 5. *Wenn ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}$ *zu* P *gehört, so ist* $\mathfrak{p}_P$ *ein Primideal von* $\mathfrak{o}_P$, *und* $\mathfrak{p}_P \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$. *Ist umgekehrt* $\mathfrak{p}^*$ *ein Primideal von* $\mathfrak{o}_P$, *so ist* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \frown \mathfrak{o}$ *ein zu* P *gehöriges Primideal und* $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_P$. *Demnach bestehen die Primideale von* $\mathfrak{o}_P$ *aus den* P*-Komponenten der zu* P *gehörigen Primideale.*

Beweis. Nach Satz 3. 4 ist $\mathfrak{o}_P/\mathfrak{p}_P$ $(\mathfrak{p} \in P)$ mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ringisomorph; $\mathfrak{p}_P$ ist also ein teilerloses Ideal von $\mathfrak{o}_P$. Nach Satz 3. 3 ist $\mathfrak{p}_P \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p}^*$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_P$, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \frown \mathfrak{o}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden und $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_P$. $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal von $\mathfrak{o}$, denn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a}_P \mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{p}_P$, also ist entweder $\mathfrak{a}_P \subseteq \mathfrak{p}^*$ oder $\mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{p}^*$, folglich $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_P \frown \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}_P \frown \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}$. Natürlich gehört $\mathfrak{p}$ zu P (sonst wäre $\mathfrak{p}_P = \mathfrak{o}_P$).

HILFSSATZ 5. *M sei ein* $\mathfrak{o}$*-Linksmodul, welcher ein Teilmodul eines* S*-Linksmodul ist. (Das Einselement von* S *sei der Einheitsoperator des Moduls.) Dann ist*

$$M = \bigcap \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} M,$$

wobei $\mathfrak{p}$ *auf alle Primideale von* $\mathfrak{o}$ *durchläuft. Allgemeiner gilt:*

$$\mathfrak{o}_P M = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} M.$$

Beweis. Es ist ersichtlich $\bigcap \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} M \supseteq \mathfrak{o}_P M \; (\mathfrak{p} \in P)$. Ist $u \in \bigcap \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} M$, so gibt es für jedes $\mathfrak{p} \in P$ ein $\mathfrak{n}(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{n}(\mathfrak{p})\, u \in M$, $(\mathfrak{n}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$. Bedeutet $\mathfrak{n}_0$ der g. g. T. aller $\mathfrak{n}(\mathfrak{p})$, so ist $\mathfrak{n}_0$ zu P prim und $\mathfrak{n}_0 u \subseteq M$, also $u \in \mathfrak{n}_0^{-1} M \subseteq \mathfrak{o}_P M$, folglich $\bigcap \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} M \subseteq \mathfrak{o}_P M$.

Aus Hilfssatz 5 fort sofort:

SATZ 3. 6. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein einseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal, so ist* $\mathfrak{a}$ *der Durchschnitt aller* $\mathfrak{p}$*-Komponenten* $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$: $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. *Allgemeiner ist* $\mathfrak{a}_P = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

Bis hierher haben wir die Regularität von $\mathfrak{o}$ nicht vorausgesetzt. Von jetzt an sei $\mathfrak{o}$ regulär. Also setzen wir die Bedingungen A_1, A_2, A_3' voraus.

Nach dem voraufgehenden gilt:

SATZ 3. 7. *Wenn die Bedingungen* A_1, A_2, A_3' (A_3) *für* $\mathfrak{o}$ *gelten, so gelten sie für* $\mathfrak{o}_P$ *auch.*

SATZ 3. 8. $\mathfrak{a}$ *sin ein ganzes einseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal. Dann und nur dann ist* $\mathfrak{o}_P = \mathfrak{a}_P$, *wenn* $\mathfrak{a}$ *zu* P *prim ist.*

SATZ 3. 9. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein einseitiges* $\mathfrak{o}$*-Ideal, so ist die* $\mathfrak{p}$*-Komponente* $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ *bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$ *gleich* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$.

Bewpis. $\mathfrak{a}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. Es gibt ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{c}$, so dass $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ ganz ist. Bedeutet $\mathfrak{b}$ ein in $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ enthaltenes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}\mathfrak{a}$, so gilt für jedes zu $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ prime $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{c}\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{c}\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

SATZ 3. 10. *Es sei* $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ *ein* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$*-Rechtsideal*), *wo* $\mathfrak{p}$ *auf alle Primideale von* $\mathfrak{o}$ *durchläuft, und* $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ *sei bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$ *gleich* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. *Dann gibt es ein* $\mathfrak{o}$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}$*-Rechtsideal*) $\mathfrak{a}$, *dessen* $\mathfrak{p}$*-Komponente gleich* $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ *ist.*

Beweis. Diejenigen Primideale, für die $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ sind, seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$. Bezeichnet man $\mathfrak{p}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}_i^{\lambda}\, \mathfrak{a}(\mathfrak{p}_i) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$ $(i = 1, \dots, r)$ für ein $\lambda > 0$. $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{P}_i^{\lambda}\, \mathfrak{a}(\mathfrak{p}_i) \cap \mathfrak{o}$ ist dann ein ganzes $\mathfrak{o}$-Linksideal und $\mathfrak{a}_{i\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{P}_i^{\lambda}\, \mathfrak{a}(\mathfrak{p}_i)$. Da $\mathfrak{P}_i^{\lambda}\, \mathfrak{a}(\mathfrak{p}_i)$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$-Ideal, also eine Potenz von $\mathfrak{P}_i$ enthält: $\mathfrak{P}_i^{\lambda}\, \mathfrak{a}(\mathfrak{p}_i) \supseteq \mathfrak{P}_i^{\rho_i}$, so ist $\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{a}_i \supseteq \mathfrak{p}_i^{\rho_i}$, und $\mathfrak{a}_{i\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$. Setzt man

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_1 \ldots, \mathfrak{p}_r)^{-\lambda} (\mathfrak{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}_r),$$

so ist ersichtlich $\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}_i} = \mathfrak{P}_i^{-\lambda} \mathfrak{a}_i \mathfrak{P}_i = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, \ldots, r$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}, \ldots, \mathfrak{p}_r)$.

HILFSSATZ 6. *Es sei $\mathfrak{o}'$ ein $\mathfrak{o}$ umfassender Teilring von S: $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}' \subset S$. Ist $\mathfrak{o}'$ nicht in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ enthalten, so ist $\mathfrak{o}' \supset \mathfrak{p}^{-1}$.*

Beweis. Es gibt ein in $\mathfrak{o}'$, aber nicht in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ enthaltenes Element c. $\mathfrak{c} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o} c \mathfrak{o})^{-1}$ ist ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal und $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}$. Denn sonst wäre $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{c}^{-1} \ni c$. Es ist also $\mathfrak{o}' \supseteq (\mathfrak{o}, \mathfrak{o} c \mathfrak{o}) = \mathfrak{c}^{-1} \supseteq \mathfrak{p}^{-1}$.

SATZ 3. 11. *$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ist ein $\mathfrak{o}$ umfassender, maximaler Teilring von S. Ein beliebiger $\mathfrak{o}$ umfassender, maximaler Teilring von S stimmt mit einem von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ überein.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o}'$ ein Teilring mit $S \supseteq \mathfrak{o}' \supset \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$. Nach Hilfssatz 6 ist $\mathfrak{o}' \supset \mathfrak{p}^{-1}$, also $\mathfrak{o}' \supset \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1}$. $\mathfrak{o}'$ enthält somit alle zweiseitigen $\mathfrak{o}_{\mathfrak{r}}$-Ideale, nämlich alle Potenzen von $\mathfrak{P}$, also $S = \mathfrak{o}'$. Jetzt sei $\mathfrak{o}'$ ein Ring mit $S \supset \mathfrak{o}' \supseteq \mathfrak{o}$. $\mathfrak{o}'$ ist in einem $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ enthlten; $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{o}'$, sonst wäre $\mathfrak{o}' \supset \mathfrak{p}^{-1}$ für jedes $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}'$ würde also alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale umfassen; es wäre somit $\mathfrak{o}' = S$. Ist $\mathfrak{o}'$ maximal, so ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}'$.

SATZ 3. 12. *Ein Teilring $\mathfrak{o}'$ von S mit $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}' \subset S$ stimmt mit einem $\mathfrak{o}_P$ überein.*

Beweis. $P = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{o}'\}$ sei die Menge aller Primideale mit $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} \supseteq \mathfrak{o}'$. Dann ist $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}_P$. Wir nehmen jetzt an, es sei $\mathfrak{o}' \neq \mathfrak{o}_P$, also $\mathfrak{o}_P \supset \mathfrak{o}'$. Es gibt ein in $\mathfrak{o}_P$, aber nicht in $\mathfrak{o}'$ enthaltenes Element a. $\mathfrak{a} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o} a \mathfrak{o})^{-1}$ ist ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, und $\mathfrak{o}_P \supseteq (\mathfrak{o}, \mathfrak{o} a \mathfrak{o}) = \mathfrak{a}^{-1} \supset \mathfrak{o}$. Wegen $\mathfrak{a}^{-1} \nsubseteq \mathfrak{o}'$ ist $\mathfrak{q}^{-1} \nsubseteq \mathfrak{o}'$ für mindestens einen Primteiler $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$. Aus $\mathfrak{q}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_P$ folgt $\mathfrak{q}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_P \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ fur jedes $\mathfrak{p} \in P$. Da aber $\mathfrak{q}^{-1} \nsubseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}$ ist, ist $\mathfrak{q}$ nicht in P enthalten, d. h. $\mathfrak{o}' \nsubseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}$. Nach Hilfssatz 6 ist $\mathfrak{o}' \supseteq \mathfrak{q}^{-1}$. Es ergibt sich also ein Widerspruch.

Aus diesem Satz folgt sofort:

SATZ 3. 13. *Wenn die Bedingungen A_1, A_2, A_3 (A_3') für $\mathfrak{o}$ gelten, so gelten sie auch für jeden Ring $\mathfrak{o}'$ mit $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}' \subset S$.*

§ 4 NORMALE IDEALE

S sei ein Schiefring mit Einselement und $\mathfrak{o}_0$ sei eine feste Ordnung von S. Im folgenden sollen die Ordnungen, falls nicht anders gesagt, immer die mit $\mathfrak{o}_0$, also einander äquivalenten Ordnungen bedeuten.

DEFINITION. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit der Linksordnung $\mathfrak{o}$ und der Rechtsordnung $\mathfrak{o}'$ heisst ein *normales Ideal*, wenn $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ Maximalordnungen sind.

Es sei $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung und $\mathfrak{a}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ($\mathfrak{o}$-Rechtsideal). Nach Satz 1. 3 ist $\mathfrak{a}^{-1}$ normal. Ist $\mathfrak{a}$ weiter umkehrbar, so ist $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^{-})^{-1}$ normal.

DEFINITION. Ein Produkt $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ der Teilmoduln von S heisst *eigentlich*, wenn aus $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ $(\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}', \mathfrak{n} \leq \mathfrak{n}')$ $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ folgen, wo $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ Teilmoduln von S bedeuten.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit der Rechtsordnung $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal mit der Linksordnung $\mathfrak{o}'$. Ist das Prodnkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ eigenlich, so ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ weiter umkehrbar, so gilt auch die Umkehrung. Denn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ $(\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}', \mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}')$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$; wegen $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{o}$ ist also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}'\mathfrak{o} \geq \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$; ebenso ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$.

Man erhält leicht:

SATZ 4. 1. *Dann und nur dann bilden alle normalen Ideale bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid mit den Maximalordnungen als Einheiten, wenn jedes normale Ideal umkehrbar ist.*

Nach Satz 2. 13 gilt:

SATZ 4. 2. *Dann und nur dann bilden alle normalen Ideale bei ber eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid, wenn für jede Maximalordnung $\mathfrak{o}$ alle zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden.*

G sei das Gruppoid der normalen Ideale. Dann und nur dann ist $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in G)$, wenn es eigentliche Produktdastellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{c}'$ mit ganzen $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ aus G gibt; nämlich sei etwa $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a})^{-1}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{c}$ aus G ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal, so werden die zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale durch die Zuordnung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ auf die zweiseitigen $\mathfrak{o}'$-Ideale isomorph (bezüglich der Multiplikation gruppenisomorph und bezüglich der Anordnung verbandisomorph) bezogen, dieser Isomorphismus hängt von der besonderen Wahl von $\mathfrak{c}$ nicht ab. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ heissen *zusammengehörig*.

HILFSSATZ 1. *$\mathfrak{p}$ sei ein stark teilerloses Primideal einer Maximalordnung $\mathfrak{o}$, so dass $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ ist. Ist $\mathfrak{l}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{l} \subset \mathfrak{o}$,* *so ist* $\mathfrak{l}^{-1}$ *nicht ganz.*

Beweis. Da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein einfacher Ring ist, gilt

$$\mathfrak{r} = \{x \mid x \in \mathfrak{o}, \mathfrak{l}\, x \equiv 0\ (\mathfrak{p})\}, \quad \mathfrak{l} = \{y \mid y \in \mathfrak{o}, \quad y\, \mathfrak{r} \equiv 0\ (\mathfrak{p})\}.$$

Es ist ersichtlich $\mathfrak{r} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{p}^{-1}$ ist nicht ganz; da $\mathfrak{l}^{-1} \supseteqq \mathfrak{r}\mathfrak{p}^{-1}$ ist, ist $\mathfrak{l}^{-1}$ nicht ganz.

SATZ 4. 3. *Für jede Maximalordnung* $\mathfrak{o}$ *seien die Bedingungen* A_1, A_2, A_3 *erfüllt. Jedes* $\mathfrak{o}$*-Links- sowie* $\mathfrak{o}$*-Rechtsideal ist dann umkehrbar, also normal und alle normalen Ideale bilden bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid.*

Beweis. $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{o}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal mit der Rechtsordnung $\mathfrak{o}'$. Es ist $\mathfrak{l}\mathfrak{l}^{-1} = \mathfrak{o}$. Bedeutet $\mathfrak{q}$ ein maximales $\mathfrak{o}$-Linksideal mit $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{o}$, so ist das in $\mathfrak{q}$ enthaltene maximale zweiseitige Ideal, d. h. das annullierende Ideal des einfachen $\mathfrak{o}$-Linksmoduls $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ ein Primideal. Nach Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{q}^{-1}$ nicht ganz, also $\mathfrak{l}^{-1} \supseteqq \mathfrak{q}^{-1}$ nicht ganz.

Die Rechtsordnung $\mathfrak{o}'$ von $\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l}$ ist die von $\mathfrak{l}$, da aus $\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l}\, x \subseteqq \mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l}$ $\mathfrak{l}\, x \subseteqq \mathfrak{l}$ folgt. Die Linksordnung $\mathfrak{o}''$ von $\mathfrak{l}^{-1}$ ist maximal und es ist $(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l})^{-1} \subseteqq \mathfrak{o}''$, denn es ist $(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l})^{-1}\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{o}'$, $(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l})^{-1}\mathfrak{l}^{-1} \subseteqq \mathfrak{l}^{-1}$, $(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l})^{-1} \subseteqq \mathfrak{o}''$. Daraus folgt $\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l} = \mathfrak{o}'' = \mathfrak{o}'$, sonst wäre $(\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l})^{-1}$ nicht ganz.

SATZ 4. 4. *S sei ein Schiefring mit Einselement. In S sei ein System von reguläre Elemente enthaltenden Teilmoduln gegeben, die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

C_1. *G bildet ein Gruppoid. Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *aus G komposierbar, so stimmt das Produkt* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *in G mit dem üblichen Modulprodukt überein.*

C_2. *Jede Einheit* $\mathfrak{o}$ *von G ist eine reguläre Ordnung von S.*

C_3. *Ist* $\mathfrak{o}$ *eine Einheit von G, so ist jedes in* $\mathfrak{o}$ *enthaltene* $\mathfrak{o}$*-Linksideal ein Element von G mit der Linkseinheit* $\mathfrak{o}$ *und jedes in* $\mathfrak{o}$ *enthaltene* $\mathfrak{o}$*-Rechtsideal ein Element von G mit der Rechtseinheit* $\mathfrak{o}$.

Dann gelten für jede Einheit $\mathfrak{o}$ *von G die Bedingungen* A_1, A_2, A_3. *Das Einheitensystem von G ist die Menge aller einander äquivalenten Maximalordnungen und G ist nichts anderes als das Gruppoid aller normalen Ideale.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o}$ eine Einheit von G. Die Menge aller Elemente von G, deren Links- und Rechtseinheit beide $\mathfrak{o}$ sind, bildet eine Gruppe H.

H erfüllt die Bedingungen von Satz 2. 11. Es gelten also für $\mathfrak{o}$ die Bedingungen A_1, A_2, A_3'. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Element von G mit der Linkseinheit $\mathfrak{o}$ und der Rechtseinheit $\mathfrak{o}'$: $\mathfrak{o}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}' = \mathfrak{a}$. Bedeutet $\mathfrak{a}^{-1}$ das Inverse von $\mathfrak{a}$ in G, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}'$. $\mathfrak{a}$ ist ersichtlich ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal, dessen Links- bzw. Rechtsordnung $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}'$ ist, und $\mathfrak{a}^{-1}$ ist das inverse Ideal von $\mathfrak{a}$. Da es für zwei Einheiten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ von G ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}'$-Ideal gibt, so sind sie als Ordnungen einander äquivalent. Ferner ist jede mit einer Einheit $\mathfrak{o}$ von G äquivalente Maximalordnung $\mathfrak{o}^*$ eine Einheit von G, da ein ganzes $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}^*$-Ideal ein Element von G ist. Ist $\mathfrak{o}$ eine Einheit von G und ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, so gibt es ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ in G enthalten sind, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \in G$.

Es bleibt noch übrig, die Bedingung A_3 zu beweisen. $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$ sei eine Kette von ganzen $\mathfrak{o}$-Rechtsidealen. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}_i$ ist auch ein ganzes $\mathfrak{o}$-Rechtsideal. Es gilt $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}'$. $\mathfrak{o}'$ ist die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}^{-1}$. Eines von $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}^{-1}$, etwa $\mathfrak{a}_n\mathfrak{a}^{-1}$ enthält also 1. Dann ist $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}' \; (i \geq n)$ und $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \; (i \geq n)$. D. h. es gilt der Teilerkettensatz für ganze $\mathfrak{o}$-Rechtsideale. Ist nun $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}$ eine Vielfachenkette von ganzen $\mathfrak{o}$-Linksidealen, die sämtlich Teiler eines zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideals $\mathfrak{a}$ sind, so ist $\mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_2^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ eine Teilerkette von ganzen $\mathfrak{o}$-Rechtsidealen. Nach dem Teilerkettensatz erhält man also den eingeschränkten Vielfachenkettensatz für $\mathfrak{o}$-Linksideale. Daraus folgt sofort A_4.

Nach Satz 1. 11 gilt.

SATZ 4. 5. *Die Bedingungen* C_1, C_2, C_3 *sind mit den Bedingungen* C_1, C_2', C_3, C_4 *äquivalent*:

C_2'. *Jede Einheit von* G *ist eine Oranang von* S.

C_4, *Für zwei Einheiten* $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ *von* G *gibt es ein in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenes Element* $\mathfrak{a}$ *von* G *mit der Linkseinheit* $\mathfrak{o}$ *und der Rechtseinheit* $\mathfrak{o}'$.

Es sei nnn $\mathfrak{o}_1$ eine Maximalordnung von S. Wir setzen voraus, dass jedes $\mathfrak{o}_1$-Links- sowie $\mathfrak{o}_1$-Rechtsideal umkehrbar ist. Dann ist, wie leicht gezeigt wird, für jede mit $\mathfrak{o}_1$ äquivalente Maximalordnung $\mathfrak{o}$ jedes $\mathfrak{o}$-Links- sowie $\mathfrak{o}$-Rechtsideal auch umkehrbar. Die einseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale sind also normal und alle normalen Ideale bilden ein Gruppoid.

Der Einfachheit halber unterscheiden wir die verschiedenen Maximalordnungen durch Indizen: $\mathfrak{o}^i$, $\mathfrak{o}^j, \ldots$. Ein normales Ideal mit der Linksordnung $\mathfrak{o}^i$ und der Rechtsordnung $\mathfrak{o}^j$ soll mit $\mathfrak{a}^{ij}, \mathfrak{b}^{ij}, \ldots$ bezeichnet werden. Insbesondere werde ein zweiseitiges $\mathfrak{o}^i$-Ideal mit $\mathfrak{a}^{ii}$, $\mathfrak{b}^{ii}, \ldots$ bezeichnet. Im folgenden untersuchen wir über die Zerlegung von ganzen normalen Idealen. Kleine deutsche Buchstaben bedeuten ganze normale Ideale.

DEFINITION. Ein ganzes normales Ideal heisst *unzerlegbar*, wenn es nicht als eigentliches Produkt von echten Teilern darstellbar ist.

Ein ganzes normales Ideal $\mathfrak{a}^{ij}$ ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn der Restklassenmodul $\mathfrak{o}^i/\mathfrak{a}^{ij}$ $(\mathfrak{o}^j/\mathfrak{a}^{ij})$ ein einfacher $\mathfrak{o}^i$-Linksmodul ($\mathfrak{o}^j$-Rechtsmodul) ist.

DEFINITION. Ein ganzes normales Ideal $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^{ij}$ heisst zu einem ganzen normalen Ideal $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^{kl}$ *transponierbar*, wenn es ein ganzes Ideal $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^{ik}$ gibt, so dass $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}^{-1}(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{c})$ und $\mathfrak{a}\smile\mathfrak{c}=\mathfrak{o}^i$ ist. Wenn es für zwei normale Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ endlich viele nornmale Ideale $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots,$ $\mathfrak{a}_n=\mathfrak{b}$ gibt, so dass $\mathfrak{a}_i$ zu $\mathfrak{a}_{i+1}$ oder $\mathfrak{a}_{i+1}$ zu $\mathfrak{a}_i$ transponierbar ist, so heisst $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{b}$ *projektiv*.

Man erhält ohne Mühe:

HILFSSATZ 2. *$\mathfrak{o}$ sei eine Maximalordnung. Alle $\mathfrak{o}$-Linksideale bilden einen modularen Verband. Wenn zwei Verband-quotienten $\mathfrak{a}^{ij}/\mathfrak{a}^{ij}\mathfrak{c}^{jk}$ und $\mathfrak{b}^{il}/\mathfrak{b}^{il}\mathfrak{d}^{lm}$ projektiv sind, so ist $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{d}$ projektiv.*

SATZ 4. 6. *Jede ganze normale Ideal $\mathfrak{a}$ ist ein eigentliches Produkt von unzerlegbaren Idealen. Die Faktoren sind bis auf Reihenfolge und bis auf Projektivität eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es gilt ersichtlich der Teilerkettensatz für ganze normale Ideale mit derselben Links- bzw. Rechtsordnung. Daraus folgt die Darstellbarkeit von $\mathfrak{a}$ als ein eigentliches Produkt von unzerlegbaren Idealen. Nach dem Jordan-Hölderschen Satz erhält man den Satz.

Von nun an setzen wir die Regularität der Maximalordnung voraus. [13]) Der g. g. T. aller durch $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^{ij}$ teilbaren zweitigen $\mathfrak{o}^i$-Ideale ($\mathfrak{o}^j$-Ideale) heisst die *Linkshülle* (*Rechtshülle*) von $\mathfrak{a}$. Die Linkshülle ist mit der

[13]) Für die folgenden vgl. die in (1) zitierte Arbeit von K. ASANO.

Rechtshülle zusammengehörig. Die Hülle des unzerlegbaren Ideals $\mathfrak{q}$ ist ein Primideal, das das *zugehörige Primideal* von $\mathfrak{q}$ heisst. Gibt es für ganze normale Ideale $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^{ij}$, $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_1^{kl}$ ganze normale Ideale $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^{ri}$, $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{b}_1^{rk}$ derart, dass zwei $\mathfrak{o}^r$-Linksmoduln $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1$ isomorph sind, so sind für beliebige ganze normale $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^{si}$, $\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}_1^{sk}$ zwei $\mathfrak{o}^s$-Linksmoduln $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1$ isomorph. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ heissen dann *linksseitig gleichartig*. Analog definiert man auch die rechtsseitige Gleichartigkeit. Die linksseitige Gleichartigkeit stimmt mit der rechtsseitigen überein. Ferner sind projektive Ideale gleichartig. Die Hüllen gleichartiger Ideale sind zusammengehörig. Zwei unzerlegbare Ideale sind dann und nur dann gleichartig, wenn die zugehörigen Primideale zusammengehörig sind. Zwei ganze zweiseitige Ideale sind dann und nur dann gleichartig, wenn sie zusammengehörig sind.

Der Hauptsatz über die Zerlegung von ganzen normalen Idealen lautet nun:

SATZ 4.7. *Jedes ganze normale Ideal ist ein eigentliches Produkt von unzerlegbaren Idealen. Die Faktoren sind bis auf Reihenfolge und bis auf Gleichartigkeit eindeutig bestimmt und die Reihenfolge des Faktoren kann bis auf Gleichartigkeit beliebig vorgeschrieben werden.*

§5 ÜBERGANG ZUR ARITHMETIK IM MATRIZENSYSTEM[14])

S sei ein Schiefring mit Einselement und $\mathfrak{o}$ sei eine Ordnung von S. $S_n=\sum_{i,j=1}^n Se_{ij}$ sei der volle Matrizenring vom Grade n über S und sei $\mathfrak{O}=\sum_{i,j=1}^n \mathfrak{o}\, e_{ij}$. Ferner sei das Einselement von S_n mit dem Einselement 1 von S identifiziert.

HILFSSATZ 1. *$\mathfrak{O}$ ist eine Ordnung von S. Isi $\mathfrak{o}$ regulär, so ist $\mathfrak{O}$ auch regulär.*

Beweis. $x=\sum_{i,j} x_{ij}\, e_{ij}$ sei ein Element von S_n. Da es ein reguläres Element α aus $\mathfrak{o}$ mit $x_{ij}\,\alpha\in\mathfrak{o}$ $(i,j=1,\dots,n)$ gibt, so ist $x\,\alpha\in\mathfrak{O}$. Ebenso gibt es ein reguläres Element β aus $\mathfrak{o}$ mit $\beta\,x\in\mathfrak{O}$. Ist $\mathfrak{o}$ regulär, so gibt es ein α mit $x_{ij}\,\mathfrak{o}\,\alpha\leq\mathfrak{o}\,(i,j=1,\dots,n)$, also $x\,\mathfrak{O}\,\alpha\leq\mathfrak{O}$. Ebenso

---

14) Vgl. für §5 CL. CHEVALLEY, L'Arithmétique dans les algèbres de Matrices, Actualités 323 (1936)

gibt es ein β mit $\beta \mathfrak{O} x \subseteq \mathfrak{O}$.

HILFSSATZ 2. *Jedes $\mathfrak{O}$-Linksidesl ($\mathfrak{O}$-Rechtsideal) $\mathfrak{A}$ hat ein reguläres Element aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ hat ein reguläres λ. Da es ein reguläres Element α aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $\alpha \lambda^{-1} \in \mathfrak{O}$ ist, so ist $\alpha = \alpha \lambda^{-1}. \lambda \in \mathfrak{A}$.

HILFSSATZ 3. *Ist $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}\mathfrak{a} = \sum'_{i,j} \mathfrak{a}\, e_{ij}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{O}$-Ideal und es gilt $\mathfrak{A} \wedge S = \mathfrak{a}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \wedge S$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal und es gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}\mathfrak{a} = \sum'_{i,j} \mathfrak{a}\, e_{ij}$.*

Man erhält leicht:

SATZ 5. 1. *Die zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}$ werden durch die Zuordnung*

$$\mathfrak{a} \leftrightarrow \mathfrak{A} \quad (\mathfrak{A} = \textstyle\sum' \mathfrak{a}\, e_{ij}, \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{A} \wedge S)$$

eineindeutig auf die zweiseitigen $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathfrak{A}$ bezogen. Ist $\mathfrak{a} \leftrightarrow \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{B}$, so gilt

$$\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{O}$ und umgekehrt. Bilden die zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe G, so bilden die zweiseitigen $\mathfrak{O}$-Ideale eine zu G isomorphe Gruppe.

SATZ 5. 2. *Wenn die Bedingungen A_1, A_2, A_3 (A_3') für $\mathfrak{o}$ gelten, so gelten sie auch für $\mathfrak{O}$.*

Von jetzt an setzen wir voraus, dass $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung ist und jedes $\mathfrak{o}$-Linksideal umkehrbar ist. Alle normalen Ideale bilden also bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid mit $\mathfrak{o}$ als eine Einheit.

HILFSSATZ 4. *$\mathfrak{M} = Su_1 + \ldots + Su_m$ sei ein S-Linearformenmodul und M sei ein Teilmodul von $\mathfrak{M}$, welcher ein $\mathfrak{o}$-Linksmodul ist. Wenn es $\mathfrak{o}$-Linksideale $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{c}_i'$ gibt, so dass*

$$\mathfrak{c}_1 u_1 + \ldots + \mathfrak{c}_m u_m \subseteq M \subseteq \mathfrak{c}_1' u_1 + \ldots + \mathfrak{c}_m' u_m$$

ist, so ist

$$M = \mathfrak{a}_1 v_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m v_m,$$

wobei $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ $\mathfrak{o}$-Linksideale sind und $v_1, \ldots, v_m$ eine S-Basis von $\mathfrak{M}$ bedeutet.

Beweis. Stellt man jedes Element u von M in der Form $x_1 u_1 + \ldots$

$+ x_m u_m$ dar, so bilden die Koeffizienten x_1 einen $\mathfrak{o}$-Linksmodul $\mathfrak{a}_1$. Da $\mathfrak{c}_1 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{c}_1'$ ist, ist $\mathfrak{a}_1$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. Bedeutet $\mathfrak{o}'$ die Rechtsordnung von $\mathfrak{a}_1$, so ist $\mathfrak{a}_1^{-1} M$ ein $\mathfrak{o}'$-Linksmodul und die Gesamtheit von y_1, $y_1 u_1 + \ldots + y_m u_m \in \mathfrak{a}_1^{-1} M$, ist $\mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}'$. Es gibt also ein Element v_1 aus $\mathfrak{a}_1^{-1} M$ von der Form

$$v_1 = u_1 + c_{12} u_2 + \ldots + c_{1m} u_m.$$

Dann ist $\mathfrak{a}_1 v_1 \subseteq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1^{-1} M = \mathfrak{o} M = M$ und wegen $\sum_{i=1}^m x_i u_i = x_1 v_1 + \sum_{i=2}^m x_i' u_i$ ist $M = \mathfrak{a}_1 v_1 + M'$, dabei ist $M' = Su_2 + \ldots + Su_m \cap M$ und

$$\mathfrak{c}_2 u_2 + \ldots + \mathfrak{c}_m u_m \subseteq M' \subseteq \mathfrak{c}_2' u_2 + \ldots + \mathfrak{c}_m' u_m$$

v, u, $\ldots$, u_m bilden eine S-Basis von $\mathfrak{M}$. Nach Induktion erhält man den Satz.

Im folgenden nehmen wir oft die Bedingung A_7 an:

A_7. *In jeder $\mathfrak{o}$-Linksidealklasse*[15]) *gibt es ein ganzes Ideal, das zum vorgegebenen ganzen $\mathfrak{o}$-Linksideal teilerfremd ist.*[16])

HILFSSATZ 5. *Setzt man im Hilfssatz 4 noch die Bedingung A_7 voraus, so ist M in der folgenden Form darstellbar:*

$$M = \mathfrak{o} v_1 + \ldots + \mathfrak{o} v_{m-1} + \mathfrak{a} v_m \quad (m \geq 2).$$

Beweis. Indukion für m. Zunächst sei $m = 2$. Es ist $M = \mathfrak{a}_1 v_1 + \mathfrak{a}_2 v_2$. Man kann reguläre Elemente λ_1, λ_2 so wählen, dass $\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_1 \lambda_1$ und $\mathfrak{a}_2' = \mathfrak{a}_2' \lambda_2$ ganz und teilerfremd sind: $(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2') = \mathfrak{o}$. Dann ist $M = \mathfrak{a}_1' v_1' + \mathfrak{a}_2' v_2'$ $(v_1' = \lambda_1^{-1} v_1,\ v_2' = \lambda_2^{-1} v_2)$. Setzt man $w_2 = v_1' + v_2'$, so ist

$$x_1 v_1' + x_2 v_2' = (x_1 - x_2)\, v_1' + x_2 w_2 \quad (x_1 \in \mathfrak{a}_1',\ x_2 \in \mathfrak{a}_2')$$

Wegen $(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2') = \mathfrak{o}$ gibt es also ein Element $w_1 = v_1' + c w_2 \in M$. Dann ist ersichtlich $M = \mathfrak{o} w_1 + \mathfrak{a} w_2$. Im allgemeinen Fall ist nach Induktionsvoraussetzung

$$M = \mathfrak{a}_1 v_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m v_m = \mathfrak{o} w_1 + \ldots + \mathfrak{o} w_{m-2} + \mathfrak{a}' v'_{m-1} + \mathfrak{a}_m v_m,$$

und nach dem voraufgehenden ist

---

15) Zwei $\mathfrak{o}$-Linksideale $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ gehören dann und nur dann zur selben Idealklasse, wenn es ein reguläres Element γ mit $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\gamma$ gibt.

16) Wie wir im Teil II beweisen werden, gilt die Bedingung A_7, wenn S allgemein halbeinfach ist.

$$\mathfrak{a}' v'_{m-1} + \mathfrak{a}_m v_m = \mathfrak{o}\, w_{m-1} + \mathfrak{a}\, w_m.$$

Satz 5. 3. *Es sei $\mathfrak{o}$ eine Maximalordnung und jedes $\mathfrak{o}$-Linksideal sei umkehrbar. Jedes $\mathfrak{O}$-Linksideal $\mathfrak{A}$ ist in der Form darstellbar:*

$$\mathfrak{A} = \left(\textstyle\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_{ik}\right) \varphi = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n \end{matrix} \right\| \varphi$$

wobei $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ $\mathfrak{o}$-Linksideale sind und φ ein reguläres Element von S_n ist. Das inverse Ideal von $\mathfrak{A}$ ist dann

$$\mathfrak{A}^{-1} = \varphi^{-1} \left(\textstyle\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_i^{-1} e_{ik}\right) = \varphi^{-1} \left\| \begin{matrix} \mathfrak{a}_1^{-1} & \mathfrak{a}_1^{-1} \dots \mathfrak{a}_1^{-1} \\ \mathfrak{a}_2^{-1} & \mathfrak{a}_2^{-1} \dots \mathfrak{a}_2^{-1} \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_n^{-1} & \mathfrak{a}_n^{-1} \dots \mathfrak{a}_n^{-1} \end{matrix} \right\|$$

Jedes $\mathfrak{O}$-Linksideal ist also umkehrbar.

Beweis. Es ist als $\mathfrak{o}$-Linksmodul

$$\mathfrak{A} = e_{11}\mathfrak{A} + e_{22}\mathfrak{A} + \dots + e_{nn}\mathfrak{A},$$

$e_{1i}\mathfrak{A} = e_{11}\mathfrak{A}$ $(i = 1, \dots, n)$, weil $e_{1i}\mathfrak{A} = e_{11} e_{1i}\mathfrak{A} \subseteq e_{11}\mathfrak{A}$, $e_{11}\mathfrak{A} = e_{1i} e_{i1}\mathfrak{A} \subseteq e_{1i}\mathfrak{A}$. Setzt man $e_{11}\mathfrak{A} = M$, so ist $e_{ii}\mathfrak{A} = e_{i1} e_{1i}\mathfrak{A} = e_{i1} M$ und $\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{n} e_{i1} M$. M ist ein $\mathfrak{o}$-Linksmodul und, da es $\mathfrak{o}$-Linksideale $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ mit $\mathfrak{O}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{O}\mathfrak{c}'$ gibt, ist

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{c}\, e_{1k} \subseteq M \subseteq \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{c}'\, e_{1k}$$

Nach Hilfssatz 4 ist

$$M = \mathfrak{a}_1 v_1 + \dots + \mathfrak{a}_n v_n,\ v_i = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, e_{1k}\ (i = 1, \dots, n)$$

Weil die Matrix (a_{ik}) invertierbar ist, ist $\varphi = \sum_{i,k} a_{ik} e_{ik}$ ein reguläres Element von S_n und $v_j = e_{1j}\varphi$ $(j = 1, \dots, n)$. Demnach ist $M = (\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j e_{1j})\,\varphi$, also $\mathfrak{A} = (\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_{ik})\,\varphi$.

Es sei nun $\mathfrak{A} = (\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_{ik})\,\varphi$, $\mathfrak{A}' = \varphi^{-1}(\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_i^{-1} e_{ik})$. Dann ist $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{O}$. Ist $x = \varphi^{-1}\sum_{i,k} x_{ik} e_{ik}$ ein Element aus S_n mit $\mathfrak{A}\, x \subseteq \mathfrak{O}$, so gilt

$$(\mathfrak{a}_1 x_{1k}, \mathfrak{a}_2 x_{2k}, \ldots, \mathfrak{a}_n x_{nk}) \subseteq \mathfrak{o}\ (k=1, \ldots, n),$$

also $\mathfrak{a}_i x_{ik} \in \mathfrak{o}$, $x_{ik} \in \mathfrak{a}_i^{-1}$ $(i, k=1, \ldots, n)$. Daher ist $x \in \mathfrak{A}'$, Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1}$ ist.

SATZ 5.4. *Wenn die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}$ $e_{ii}\ (i=1, \ldots, n)$ enthält, so gilt*

$$\mathfrak{A} = \sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_{ik}$$

Beweis. Hat die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}$ $e_{ii}\ (i=1, \ldots, n)$, so ist $\mathfrak{A} e_{ii} \subseteq \mathfrak{A}$, $M e_{ii} \subseteq M$. Aus $\sum_{k=1}^{n} x_k e_{1k} \in M$ folgt also $x_i e_{1i} \in M\ (i=1, \ldots, n)$, folglich ist $M = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_{1k}$, $\mathfrak{A} = \sum_{i,k} \mathfrak{a}_k e_{ik}$.

Nach Hilfssatz 5 gilt weiter:

SATZ 5.5. *Wenn die Bedingung A_7 gilt, so ist $\mathfrak{A}$ in der folgenden Form darstellbar:*

$$\mathfrak{A} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{o} & \ldots & \mathfrak{o} & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{o} & \ldots & \mathfrak{o} & \mathfrak{a} \\ & \ldots\ldots & & \\ \mathfrak{o} & \ldots & \mathfrak{o} & \mathfrak{a} \end{matrix} \right\| \varphi$$

SATZ 5.6. *Ist jedes $\mathfrak{o}$-Linksideal ein Hauptideal, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}\varphi$.*

Nach dem voraufgehenden gilt:

SATZ 5.7. *Ist jedes $\mathfrak{o}$-Linksideal umkehrbar, so ist jedee $\mathfrak{O}$-Linksideal umkehrar. Die mit $\mathfrak{o}$ äquivalenten Maximalordnungen von S_n werden durch $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}$ gegeben uud die normalen Ideale werden durch $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ gegeben, wobei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ beliebige $\mathfrak{O}$-Linksideale bedeuten. Alle normalen Ideale in S_n bilden bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid.*

SATZ 5.8. *Jede (mit $\mathfrak{O}$ äquivalente) Maximalordnung von S_n hat die folgende Form:*

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_i^{-1} \mathfrak{a}_k e_{ik}\right) \varphi = \varphi^{-1} \left\| \begin{matrix} \mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a}_n \\ \mathfrak{a}_2^{-1}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2^{-1}\mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_2^{-1}\mathfrak{a}_n \\ & \ldots\ldots & & \\ \mathfrak{a}_n^{-1}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_n^{-1}\mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_n^{-1}\mathfrak{a}_n \end{matrix} \right\| \varphi$$

wobei $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ $\mathfrak{o}$-*Linksideale sind und* φ *ein reguläres Element von* S_n *ist. Gilt für* $\mathfrak{o}$ *noch die Bedingung* A, *so hat sie sogar die Form*

$$\varphi^{-1} \begin{Vmatrix} \mathfrak{o} & \dots & \mathfrak{o} & \mathfrak{a} \\ & \dots\dots & & \\ \mathfrak{o} & \dots & \mathfrak{o} & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1} & \dots & \mathfrak{a}^{-1} & \mathfrak{o}' \end{Vmatrix} \varphi \qquad (\mathfrak{o}' = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a})$$

SATZ 5. 9. *Wenn eine (mit* $\mathfrak{O}$ *äquivalente) Maximalordnung* $\mathfrak{O}'$ *von* S_n *die Elemente* e_{ii} $(i = 1, \dots, n)$, *so hat* $\mathfrak{O}'$ *die Foru* $\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_i^{-1} \mathfrak{a}_k$.

Beweis. Bedutet $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{O}$-$\mathfrak{O}'$-Ideal, so enthält die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}$, nämlich $\mathfrak{O}'$, e_{ii} $(i = 1, \dots, n)$, also $\mathfrak{A} = \sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_{ik}$ und $\mathfrak{O}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \sum_{i,k} \mathfrak{a}_i^{-1}\mathfrak{a}_k e_{ik}$.

SATZ 5. 10. *Wenn in* S *für jede mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalente Maximalordnung die Bedingungen* A_1, A_2, A_3 *gelten, so gelten sie auch in* S_n *für jede mit* $\mathfrak{O}$ *äquivalente Maximalordnung. Die Arithmetik in* S *wird also auf* S_n *erweitert.*

§ 6 ARITHMETIK IN EINFACHEN RINGEN

Es sei S ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen Radikal N nilpotent ist: $N^\rho = 0$. Der Restklassenring S/N ist halbeinfach. Dann enthält jede reguläre Maximalordnung $\mathfrak{o}$ von S das Radikal N. Ist nämlich c ein Element aus N, so ist $\mathfrak{o}' = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}c\mathfrak{o}, \dots, (\mathfrak{o}c\mathfrak{o})^{\rho-1})$ ein $\mathfrak{o}$ umfassender Schiefring und es gibt ersichtlich ein reguläres Element λ mit $\lambda\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}$. Also ist $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$ und $c \in \mathfrak{o}$. Es ist somit $\mathfrak{o} \supset N$. Da für jedes reguläre Element $\lambda\lambda N = N\lambda = N$ ist, enthält jedes einseitige $\mathfrak{o}$-Ideal das Radikal N. Geht man in S/N über, so sieht man leicht, dass die Arithmetik in S im wesentlichen die Arithmetik im halbeinfachen Ring S/N ist. Ist S ein halbeinfacher Ring, also die direkie Summe von einfachen Ringen: $S = S_1 + \dots + S_n$, so wird die Arithmetik in S auf die Arithmetik in einzelnen Komponenten S_i reduziert.

S sei nun ein einfacher Ring, also ein voller Matrizenring in einem Schiefkörper $K: S = \sum_{i,k=1}^{n} Ke_{ik}$. Gilt in S unsere Arithmetik, so hat S eine die Matrizeneinheiten e_{ik} $(i, k = 1, \dots, n)$ enthaltende Maximalordnung $\mathfrak{o}$: z. B. die Rechtsordnung des $\mathfrak{o}_1$-Linksideals $(\mathfrak{o}_1 e_{11}, \ldots, \mathfrak{o}_1 e_{ik}, \ldots, \mathfrak{o}_1 e_{nn})$, wo $\mathfrak{o}_1$ eine Maximalordnung von S bedeutet. Es ist dann $\mathfrak{o} = \sum_{i,k} \mathfrak{o}_0 e_{ik}$ und $\mathfrak{o}_0$ ist eine reguläre Maximalordnung von K. Denn ist $x \in K$, so gibt es ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$, so dass $x\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ ist; da $\mathfrak{a} = \sum_{i,k} \mathfrak{a}_0 e_{ik}$ mit einem $\mathfrak{o}_0$-Ideal $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{o}_0$ ist, ist $x\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{o}_0$, also $x\mathfrak{o}_0\alpha \subseteq x\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{o}_0$ $(0 \neq \alpha \in \mathfrak{a})$. Ebenso gibt es ein $\beta \neq 0$ aus $\mathfrak{o}_0$, so dass $\beta\mathfrak{o}_0 x \subseteq \mathfrak{o}_0$ ist. Ist $\mathfrak{o}_0$ nicht maximal, so ist $\mathfrak{o}$ nicht maximal. Bedeutet $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ $(\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_{i+1})$ eine Teiler- bzw. Vielfachenkette von $\mathfrak{o}_0$-Linksidealen in K, so bilden $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{o}\mathfrak{a}_2, \ldots (\mathfrak{o}\mathfrak{a}_{i-1} \neq \mathfrak{o}\mathfrak{a}_i)$ eine Teiler- bzw. Vielfachenkette von $\mathfrak{o}$-Linksidealen in S. Es gilt daher der Teilerkettensatz sowie der eingeschränkte Vielfachenkettensatz für $\mathfrak{o}_0$-Linksideale in K. Ist $\mathfrak{o}_0'$ eine mit $\mathfrak{o}_0$ äquivalente Maximalordnung von K, so ist $\mathfrak{o}' = \sum_{i,k} \mathfrak{o}_0' e_{ik}$ eine mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung von S. Demnach gilt in K unsere Arithmetik und die gegebene Arithmetik in S die Erweiterung der in K im Sinne von § 5.

Zusammenfassend gilt:

SATZ 6. 1. *Die Arithmetik in halbprimären Ringen wird auf die in einfachen Ringen reduziert, und die Arithmetik in einfachen Ringen ist die Erweiterung der in Schiefkörpern.*

HILFSSATZ 1. *Es sei K ein kommutativer Körper und I sei ein Integrtätsbereich, dessen Quotientenkörper K ist. S sei eine Algebra mit Einselement über K. Ist $\mathfrak{o}$ eine I umfassende Ordnung von S, so gibt es für jedes reguläre Element λ aus $\mathfrak{o}$ ein reguläres Element μ aus $\mathfrak{o}$, so dass $\lambda\mu = \mu\lambda \in I$ ist. Jedes Elemeut x aus S ist in der Form $x = \alpha^{-1}y$ $(\alpha \in I, y \in \mathfrak{o})$ darstellbar. Jede I umfassende Ordnung ist also regulär.*

Beweis. Da λ algebraisch über K ist, gilt

$$\alpha_0 \lambda^t + \alpha_1 \lambda^{t-1} + \ldots + \alpha_t = 0 \quad (\alpha_i \in I)$$

Wenn t minimal gewählt wird, so ist $\alpha_t \neq 0$ (sonst multipliziere man λ^{-1}). Setzt man $\mu = -(\alpha_0 \lambda^{t-1} + \ldots + \alpha_{t-1})$ so ist $\alpha_t = \lambda\mu = \mu\lambda \in I$. Für jedes x aus S gibt es ein reguläres λ aus $\mathfrak{o}$ mit $x\lambda \in \mathfrak{o}$. Da es ein $\mu \in \mathfrak{o}$ mit $\alpha = \lambda\mu \in I$ gibt, so ist $x\alpha = x\lambda\mu \in \mathfrak{o}\mu \subseteq \mathfrak{o}$.

S sei nun eine separable Algebra über K und das Einselement von S

sei mit dem von K identifiziert. Es sei in K eine gewöhnliche Arithmetik definiert, d. h. K habe eine Ordnung I, so dass die I-Ideale eine Gruppe bilden.

DEFINITION. Eine Ordnung $\mathfrak{o}$ von S heisst eine *I-Ordnung*, wenn sie ein endlicher I-Modul ist. Eine I-Ordnung heisst eine *I-Maximalordunng*, wenn sie unter den I-Ordnungen maximal ist.

HILFSSATZ 2. *Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent*:

1. *$\mathfrak{o}$ ist eine I-Ordnung.*

2. *$\mathfrak{o}$ ist ein I umfassender Teilring von S, welcher aus lauter ganzen Elementen (bezüglich I) besteht und welcher eine K-Basis von S enthält.*

Der Beweis wird wie bei Deuring durchgeführt.[17])

Man erhält ohne Mühe:

HILFSSATZ 3. *Eine I umfassende Ordnung von S, die mit einer I-Ordnung äquivalent ist, ist eine I-Ordnung. Die I-Ordnungen von S sind einander äquivalent.*

HILFSSATZ 4. *Jede I-Maximalordnnng von S ist eine Maximalordnung in unserem Sinne. Jede mit einer I-Ordnung äquivalente Maximalordnung ist eine I-Maximalordnung.*

Es gibt bekanntlich eine I-Maximalordnung von S und für jede I-Maximalordnung gelten die Bedingungen A_1, A_2, A_3. Die Gesamtheit von I-Maximalordnungen ist ein System aller einander äquivalenten Maximalordnungen. Es gilt also unsere Arithmetik.

SATZ 6. 2. *S sei eine einfache Algebra mit dem Zentrum K, in dem die gewöhnliche Arithmetik mit I als Hauptordnung definiert ist, und $\mathfrak{o}$ sei eine I umfassende Ordnung von S. Dann und nur dann ist $\mathfrak{o}$ eine I-Ordnung, wenn $\mathfrak{o} \frown K = I$ ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{o}$ eine I-Ordnung, so ist $\mathfrak{o} \frown K = I$, weil I ganz abgeschlossen ist. Jetzt sei $\mathfrak{o}$ eine I umfassende Ordnung mit $\mathfrak{o} \frown K = I$. Es sei $\mathfrak{o}_0$ eine I-Maximalordnung. Da $\mathfrak{o}_0$ ein endlicher I-Modul ist, so gibt es ein I-Element $\alpha \neq 0$, so dass $\mathfrak{o}_0 \alpha \leqq \mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{o}\mathfrak{o}_0$ ist also ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, dessen Rechtsordnung sei $\mathfrak{o}'$. Es ist $\mathfrak{o}' \geqq \mathfrak{o}_0$. Wir nehmen jetzt an, es sei $\mathfrak{o}_0 \neq \mathfrak{o}'$. Dann gibt es ein Element a, das in $\mathfrak{o}'$ aber nicht in $\mathfrak{o}_0$

[17]) Vgl. M DEURING, Algebren.

liegt. $\mathfrak{a} = (\mathfrak{o}_0, \mathfrak{o}_0\, a\, \mathfrak{o}_0)$ ist ein zweiseitiges $\mathfrak{o}_0$-Ideal. Wegen $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{o}_0$ ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}$ ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}_0$-Ideal $\neq \mathfrak{o}_0$. Bedeutet $\mathfrak{p}$ einen Primteiler von $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{o}' \geqq \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1} \geqq \mathfrak{p}^{-1}$. Es gilt bekanntlich $\mathbf{p}\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{p}^e\, (\mathbf{p} = \mathfrak{p} \frown K)$; also $\mathfrak{o}' \geqq \mathfrak{p}^{-e} \supset \mathbf{p}^{-1}$. Ferner ist $I = \mathfrak{o}_0 \frown K \leqq \mathfrak{o}' \frown K = I'$. Da aber $\mathfrak{o}'\alpha \leqq \mathfrak{o}\mathfrak{o}_0\, \mathfrak{o}'\alpha = \mathfrak{o}\mathfrak{o}_0\, \alpha \leqq \mathfrak{o}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ ist, so ist $I'\, \alpha = \mathfrak{o}'\, \alpha \frown K \leqq \mathfrak{o} \frown K = I$. Es ist somit $I \leqq I'$, $I'\, \alpha \leqq I$. Da I die Hauptordnung von K ist folgt daraus $I = I'$, also $I = \mathfrak{o}' \frown K \supset \mathbf{p}^{-1}$. Es ergibt sich ein Widerspruch. Es muss daher $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}_0$ sein. Da $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ äquivalent sind, so ist $\mathfrak{o}$ eine I-Ordnung.

Wir beweisen nun:

SATZ 6. 3. *S sei eine einfache Algebra mit dem Zentrum K und $\mathfrak{o}$ sei eine Ordnung von S, so dass die zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale eine Gruppe bilden. Dann ist K der Quotientenkörper von $I = K \frown \mathfrak{o}$ und es glit in K die gewöhnliche Arithmetik mit I als die Hauptordnung,* d. h. *die I-Ideale in K bilden eine Gruppe. Ferner ist $\mathfrak{o}$ eine I-Maximalordnung.*

Beweis. $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal von $\mathfrak{o}$ und wir bilden $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Es ist $I_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \frown K \neq K$ (sonst wäre $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = S$). Ist $\alpha \neq 0$ ein K-Element, so ist $\alpha\, \mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\, \alpha$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Ideal, also $\alpha\, \mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\rho$. Durch

$$\varphi(\alpha) = c^\rho \quad (0 < c < 1), \quad \varphi(0) = 0$$

wird eine nichtarchimedische, diskrete Bewertung von K definiert. Da $I_\mathfrak{p} = \{\alpha \mid \varphi(\alpha) \leqq 1,\ \alpha \in K\}$ ist, so ist $I_\mathfrak{p}$ der Bewertungsring von φ in K, K ist also der Quotientenkörper von $I_\mathfrak{p}$ und $I_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptidealring. Nach Satz 6. 2 ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ eine $I_\mathfrak{p}$-Maximalordnung.

Es sei λ ein reguläres Element aus $\mathfrak{o}$ und $\lambda^t + \alpha_1 \lambda^{t-1} + \ldots + \alpha_t = 0$ $(\alpha_i \in K)$ sei das Minimalpolynom von λ; es ist $\alpha_t \neq 0$. Da λ als ein $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Element ganz bezuglich $I_\mathfrak{p}$ ist, so ist $\alpha_i \in I_\mathfrak{p}$ $(i = 1, \ldots, t)$ für jedes $\mathfrak{p}$. Wegen $\frown_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p} = \frown_\mathfrak{p} (K \frown \mathfrak{o}_\mathfrak{p}) = K \frown \mathfrak{o} = I$ ist $\alpha_i \in I$. Setzt man $\mu = \lambda^{t-1} + \alpha_1 \lambda^{t-2} + \ldots + \alpha_{t-1}$, so ist $\mu \in \mathfrak{o}, \lambda\mu = -\alpha_t \in I$. Da es für jedes K-Element $\alpha \neq 0$ ein reguläres Element $\lambda \in \mathfrak{o}$ mit $\alpha\lambda \in \mathfrak{o}$ gibt und da für λ ein $\mu \in \mathfrak{o}$ mit $\lambda\mu = \beta \in I$ existiert, so ist $\gamma = \alpha\beta \in \mathfrak{o}$ und $\in K$, also $\gamma \in I$, $\alpha = \gamma/\beta$. Damnach ist K der Quotientenkörper von I.

Es genügt zu beweisen, dass die I-Ideale in K eine Gruppe bilden. $\boldsymbol{a}$ sei ein beliebiges I-Ideal. Setzt man $\mathfrak{b} = (\boldsymbol{a}\, \mathfrak{o})^{-1}$, so ist $\boldsymbol{a}\, \mathfrak{b} = (\boldsymbol{a}\, \mathfrak{o})(\boldsymbol{a}\, \mathfrak{o})^{-1} = \mathfrak{o}$. Es gilt also

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r = 1, \quad \alpha_i \in \boldsymbol{a}, \quad b_i \in \mathfrak{b}$$

Bedeutet $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \boldsymbol{a}\,\mathfrak{b}\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}\,\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ $(\boldsymbol{a}_\mathfrak{p} = \boldsymbol{a}\,I_\mathfrak{p})$ und, da $\boldsymbol{a}_\mathfrak{p}\boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-1} = I_\mathfrak{p}$ ist, ist $\mathfrak{b}_\mathfrak{p} = \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ hat eine Minimalbasis $u_1, \ldots, u_n$ bezuglicn $I_\mathfrak{p}$. also

$$\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}\,u_1 + \ldots + I_\mathfrak{p}\,u_n, \quad \mathfrak{b}_\mathfrak{p} = \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-1}\,u_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-1}\,u_n.$$

Bildet man eine reguläre Darstellung von S mit $u_1, \ldots, u_n$ als Basis, so sind die Koeffizienten der zu b_i entsprechenden Matrix B_i Elemente aus $\boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-1}$, Es ist also

$$\begin{aligned} N(x_1 b_1 + \ldots + x_r b_r) &= \text{Det.}\,(x_1 B_1 + \ldots + x_r B_r) \\ &= \sum \gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} x_1^{\nu_1} \ldots x_r^{\nu_r}, \; (\nu_1 + \ldots + \nu_r = n), \; \gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} \in \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-n}, \end{aligned}$$

wobei $x_1, \ldots, x_r$ r Unbestimmte bedeuten. Da die K-Elemente $\gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r}$ von der Wahl der K-Basis unabhängig durch $b_1, \ldots, b_r$ eindeutig bestimmt sind, so ist $\gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} \in \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-n}$ für jedes $\mathfrak{p}$, also $\gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} \in \bigcap_\mathfrak{p} \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-n} = \boldsymbol{c}$. Wenn man $x_1, \ldots, x_r$ durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ersetzt, so ist

$$\begin{aligned} &1 = \sum \gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} \alpha_1^{\nu_1} \ldots \alpha_r^{\nu_r} \in \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}^n, \\ &I \leq \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}^n \leq \bigcap_\mathfrak{p} \boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^{-n}\,\boldsymbol{a}_\mathfrak{p}^n = \bigcap_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p} = I, \end{aligned}$$

Es ist also $\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}^{n-1}.\,\boldsymbol{a} = I$, d. h. $\boldsymbol{a}$ ist umkehrbar. Die I-Ideale in K bilden also eine Gruppe.

Aus Satz 6. 3. erhält man sofort:

SATZ 6. 4. *S sei eine einfache Algebra mit dem Zentrum K und in S sei ein Gruppoid G mit den folgenden Eigenschaften definiert:*

1. *Die Elemente von G sind reguläre Elemente enthaltende Teilmoduln von S. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus G komposierbar, so stimmt das Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in G mit dem üblichen Modulprodukt überein.*

2. *Jede Einheit $\mathfrak{o}$ von G ist eine Ordnung von S.*

3. *Ist $\mathfrak{o}$ eine Einheit von G, so ist jedes in $\mathfrak{o}$ enthaltene $\mathfrak{o}$-Linksideal ein Element von G mit der Linkseinheit $\mathfrak{o}$.*

Dann ist der Durchschnitt $I = K \cap \mathfrak{o}$ für jede Einheit von G der gleiche. K ist der Quotientenkörper von I und es gilt in K die gewöhnliche Arithmetik mit I als die Hauptordnung. Die Gesamtheit der Ein-

heiten von G ist die Menge aller I-Maximalordnungen und G ist das Gruppoid aller normalen Ideale.

(Eingegangen 3. Februar, 1949)