Jellouli, M.
Osaka J. Math.
38 (2001), 619–647

ÉQUATION D'EULER SUR UN DOMAINE EXTÉRIEUR. EXISTENCE LOCALE ET APPARITION DE SINGULARITÉS

PAR MOHAMED JELLOULI

(Reçu le 21 mai, 1997)

Introduction

Dans ce travail, on étudie l'équation d'Euler pour un fluide parfait incompressible remplissant l'extérieur d'un borné de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on établit un résultat d'existence locale en temps (Théorème 2.1). Puis on prouve un critère d'explosion de la solution (Théorème 2.3).

L'existence locale a fait l'objet de nombreux travaux : C. Bardos et U. Frisch [3] pour un ouvert quelconque (borné ou non) avec des données hlderiennes, R. Temam [18] pour un ouvert borné avec des données Sobolev, et plus récemment J.Y. Chemin [9]. On pourra d'ailleurs consulter J.Y. Chemin [8] pour une bibliographie plus complète.

En 1986, K. Kikuchi [16], établit un résultat d'existence locale en temps, pour l'équation d'Euler, sur l'extérieur d'un ouvert borné. Il le fait dans $\mathcal{M}^p_{1,\delta}$ (voir définition au paragraphe 1) espace de Sobolev à poids, bien adapté à ce type de problème.

En utilisant la méthode des caractéristiques de J.Y. Chemin (qui profite complètement de la structure "champ de vecteurs" de l'équation), on établit le même résultat dans $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(s \geq 2)$ et on complète ainsi le théorème de K. Kikuchi.

De manière presque parallèle, l'étude des solutions maximales de l'équation d'Euler, a été, pendant de longues années, l'objet de recherches actives. Nous citerons essentiellement J.T. Beale, T. Kato et A. Majda [4] et H. Bahouri et B. Dehman [2]. Ces auteurs montrent, dans leurs cadres respectifs, que c'est le tourbillon qui gouverne l'existence ou l'explosion de la solution (tout au moins dans l'espace de régularité considèré).

Nous établissons dans ce travail un résultat analogue. La preuve repose sur une étude précise des champs de vecteurs à coefficients dans $\mathcal{M}^p_{s,\delta}$.

1. Préliminaires

1.1. Notations Dans tout le travail nous utiliserons les notations suivantes. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le point courant de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on posera $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha$. De plus $\triangle$ désignera l'opérateur de Laplace habituel : $\triangle = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$. D'autre part pour une fonction scalaire f, on notera $\nabla f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, et si u est un n-vecteur, $u = (u^1, \ldots, u^n)$, ∇u désignera la matrice $(\partial u^i/\partial x_j)_{1\leq i,j\leq n}$. En particulier, on définit $w = w(u)$ comme étant la matrice antisymétrique de ∇u. Nous l'appellerons le tourbillon de u. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, w est identifié au vecteur rot $u = \nabla \wedge u$.

1.2. Position du problème On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on désigne par D un ouvert borné régulier, c'est à dire, dont le bord $\partial D = \Gamma$ est une hypersurface de classe C^m (m assez grand), simplement connexe. On travaillera sur $\Omega = \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}$, on notera $n(x)$ la normale extérieure à Ω en un point $x \in \Gamma$.
Le mouvement des particules d'un fluide parfait (sans effets de viscosité) occupant l'ouvert Ω et non soumis à des forces extérieures est régi par le système d'équations aux dérivées partielles dite d'Euler

$$(E) \quad : \quad \begin{cases} \partial_t u + u.\nabla u = -\nabla p \\ \nabla.u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u.n|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

où $u(t,x) = (u^1, u^2, u^3)(t,x)$ et $p(t,x)$ représentent la vitesse et la pression (intérieure) au point x à l'instant t d'une particule du fluide,

$$\nabla.u = \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u^i}{\partial x_i}$$

et

$$\begin{aligned} u.\nabla u &= \frac{1}{2}\nabla|u|^2 + (\nabla \wedge u) \wedge u \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{3} u^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big) u \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{3} u^i \frac{\partial u^j}{\partial x_i}\Big)_{1\leq j\leq 3}. \end{aligned}$$

1.3. Les espaces de Sobolev à poids. Dans toute la suite on travaillera dans les espaces de Sobolev à poids dont la définition est la suivante

DÉFINITION 1.3.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $p > 1$, $s \in \mathbb{N}$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{M}^p_{s,\delta}(U) = \Big\{ u \in \mathcal{D}'(U); \quad \sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u \in L^p(U) \quad \forall |\alpha| \leq s \Big\}$$

où $\sigma = \sigma(x) = \sqrt{1+|x|^2}$.

Muni de la norme

$$|u|_{p,s,\delta} = \sum_{|\alpha|\leq s} |\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u|_{L^p}$$

c'est un espace de Banach.

Pour plus de détails sur ces espaces, on pourra consulter [6], [12] et [19].

Lemme 1.3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $p > 1$ et $\delta > 0$. Si $\sigma^\delta u \in L^p(U)$ alors $u \in L^h(U)$ $\forall h \in](3p)/(\delta p + 3), p]$, de plus*

$$|u|_{L^h} \leq C(p, \delta, h, U)|\sigma^\delta u|_{L^p}.$$

En particulier, pour un tel h, $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(U)$ s'injecte continûment dans $L^h(U)$.

Preuve**.** C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder.

2. Enoncés des résultats et commentaires

On commence par le théorème d'existence locale en temps.

Théorème 2.1. *Soient $p > 3$, $1 \leq \delta < 2 - 3/p$, $s \geq 2$ et $u_0 \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)$ tangentiel à divergence nulle. Il existe $T > 0$ et une unique fonction*

$$u \in L^\infty\Big([0, T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\Big) \bigcap C^0\Big([0, T], \mathcal{M}^p_{s-1,\delta}(\Omega)\Big)$$

solution de (E).

Commentaires. 1) Ce théorème est un analogue Sobolev au théorème de C. Bardos et U. Frisch [3] qui, lui, a été établi dans le cas des espaces de Hölder.
2) Il complète et généralise celui de K. Kikuchi [16] (Théorème 1.1).
3) On peut énoncer un théorème identique pour un fluide soumis à des forces extérieures, comme on peut aussi écrire le même résultat sur l'extérieur d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n > 3)$, sous réserve d'un bon choix de p et δ (cf M. Cantor [6] et [7]).
4) La preuve du Théorème 2.1 repose sur une méthode itérative classique : On linéarise l'équation sur la vitesse et on intègre selon les lignes de champ. Cela justifie la restriction sur l'indice de Sobolev, $s \geq 2$.

Théorème 2.2. *Soient $p > 3$, $1 \leq \delta < 2 - 3/p$ et $s \geq 2$. Notons $T^*(s)$ le temps maximal d'existence de la solution donnée par le* Théorème 2.1 *dans $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)$, alors $T^*(s) = T^*(2)$.*

Commentaires. 1) Ce théorème indique l'indépendance du temps maximal d'existence vis à vis de l'indice de régularité s.
2) La preuve de ce théorème utilise une inégalité d'interpolation du type

$$|u.v|_{p,s,\delta} \leq C\left(|u|_{L^\infty}|v|_{p,s,\delta} + |u|_{p,s,\delta}|v|_{L^\infty}\right).$$

qu'on démontrera en appendice (voir proposition [A])
On donne en fin un critère d'explosion pour l'évolution de ce fluide :

Théorème 2.3. *Soient* $p > 3$, $1 \leq \delta < 2 - 3/p$, $s \geq 3$ *et* $u \in C^0\Big([0, T^*[, \mathcal{M}^p_{s-1,\delta}(\Omega)\Big)$ *la solution maximale de l'équation d'Euler* (E)*. Soit* w *le tourbillon de* u *(ie* $w = \nabla \wedge u$*) alors*
- *ou bien* $T^* = +\infty$
- *ou bien* $T^* < +\infty$ *et* $\int_0^{T^*}\left(|w(s,.)|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + \left|w(s,.)|_\Gamma\right|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\right)ds = +\infty$

où $\alpha = (3-p)/(2p)$.

Commentaires. 1) Il suffit, en vertu du Théorème 2.2 d'établir ce dernier résultat pour $s = 3$.
2) Ce théorème est analogue pour l'ouvert extérieur à celui de J.T. Beale, T. Kato et A. Majda [4] à données Sobolev, et celui de H. Bahouri et B. Dehman [2] à données Hölderiennes, pour un fluide occupant tout l'espace.
3) Encore une fois le tourbillon apparait comme une quantité pertinente qui gouverne l'évolution d'un fluide parfait incompressible. En effet l'apparition de singularités pour la vitesse (au moins dans l'espace $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)$) est liée l'explosion du tourbillon.
4) Ce théorème admet une version identique lorsque $n > 3$.

3. Etude du flot d'un champ de vecteurs à coefficients dans $C([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega))$

Soient $u = (u^1, u^2, u^3)$ un champ de vecteur à coefficients dans $C([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega))$, $p > 3, s \geq 1, \delta \geq 0$ tangentiel à divergence nulle (u joue le rôle de la vitesse dans l'équation d'Euler). L'objet de ce paragraphe est d'établir quelques propriétés importantes des courbes intégrales de ce champ. Comme $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega) \subset C^{s-1+\lambda}(\overline{\Omega}), 0 < \lambda \leq 1 - 3/p$, (les injections sont algébriques et topologiques voir [1]), le champ u admet un flot η qui est solution de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t}(t,x) = u\big(t, \eta(t,x)\big) \\ \eta(0,x) = x. \end{cases}$$

Si de plus $s \geq 2$, ce flot est unique et vérifie

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \eta(t,.) : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega} \quad \text{est un } C^1 \text{ difféomorphisme.} \\ \text{ii)} \quad |\text{Jac } \eta(t,x)| = 1 \quad \forall t \in [0,T] \quad et \quad x \in \overline{\Omega}. \\ \text{iii)} \quad \eta, \eta^{-1} \in C^1\big([0,T], Id + C^{s-1+\lambda}(\overline{\Omega})\big). \end{cases}$$

Pour plus de détails, on pourra consulter [2], [3], [5], [8] et [9].

Lemme 3.1. *Soient $p > 3, s \geq 2, \delta \geq 0, u \in C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$, tangentiel à divergence nulle et η son flot, alors pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in \overline{\Omega}$ on a*

$$\frac{1}{\sqrt{2}m_u(t)} \leq \frac{\sigma\big(\eta(t,x)\big)}{\sigma(x)} \leq \sqrt{2}m_u(t)$$

où, $m_u(t) = 1 + \int_0^t |u(s,.)|_{L^\infty} ds$.

Preuve**.** On a $\eta(t,x) = x + \varepsilon(t,x)$ où $\varepsilon(t,x) = \int_0^t u\big(s, \eta(s,x)\big) ds$. Par suite

$$1 + |\eta(t,x)|^2 \leq 2\big(1 + |x|^2 + |\varepsilon(t,x)|^2\big).$$

D'où

$$(*) \qquad \frac{1 + |\eta(t,x)|^2}{1 + |x|^2} \leq 2\big(1 + |\varepsilon(t,x)|^2\big),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2\big(\eta(t,x)\big)}{\sigma^2(x)} &\leq 2\left(1 + \left(\int_0^t |u(s,.)|_{L^\infty} ds\right)^2\right) \\ &\leq 2m_u^2(t). \end{aligned}$$

On en déduit $$\frac{\sigma\big(\eta(t,x)\big)}{\sigma(x)} \leq \sqrt{2}m_u(t).$$

Pour l'autre inégalité, on applique $(*)$ η^{-1} au lieu de η et e au lieu de ε, où e vérifie : $\eta^{-1}(t,x) = x + e(t,x)$.

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses du* Lemme 3.1 *on a*

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\Omega} |\nabla_x \eta(t,x)| \leq \exp\left\{\int_0^t |\nabla u(s,.)|_{L^\infty} ds\right\} \quad \forall t \in [0,T].$$

Preuve**.** on écrit $\nabla_x \eta(t,x) = Id + \int_0^t \nabla_x u\big(s, \eta(s,x)\big).\nabla_x \eta(s,x) ds$ et on conclut par le lemme de Gronwall.

Lemme 3.3. *Soient $p > 3, s \geq 2, 1 \leq s' \leq s, \delta, \delta' \geq 0$, v un champ de vecteur appartenant à $C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ tangentiel à divergence nulle et η son flot. Soit u un champ de $\mathcal{M}^p_{s',\delta'}(\Omega)$ alors*

i) $u \circ \eta \in C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s',\delta'}(\Omega)\big)$

ii) $\|u \circ \eta\|_{T,p,s',\delta'} \leq C\big(\|v\|_{T,p,s,\delta}\big)|u|_{p,s',\delta'}$

iii) *Si $T' \leq T$ assez petit*

$$\|u \circ \eta\|_{T',p,s',\delta'} \leq C^{te}\Big(1 + C(\|v\|_{T',p,s,\delta})T'\Big)|u|_{T',p,s',\delta'}$$

où $C(M)$ est une fonction croissante en M et $\|u\|_{T,p,s,\delta} = \sup_{t\in[0,T]}|u(t,.)|_{p,s,\delta}$.

Preuve**.** Pour i) on pourra consulter [7]. On établit iii) par récurrence sur $1 \leq k < s'$ et on déduit ii) de cette démonstration. On rappelle que

$$|u \circ \eta(t,.)|_{p,k,\delta'} = \sum_{|\alpha|\leq k} |\sigma^{\delta'+|\alpha|}\partial^\alpha\big(u \circ \eta(t,.)\big)|_{L^p}$$

Pour $k = 1$

$$\begin{aligned}|\sigma^{\delta'}u\big(\eta(t,.)\big)|^p_{L^p} &= \int_\Omega \sigma^{p\delta'}(x)|u\big(\eta(t,x)\big)|^p dx\\ &\leq \sqrt{2}^{p\delta'} m_v^{p\delta'}(t)\int_\Omega \sigma^{p\delta'}\big(\eta(t,x)\big)|u\big(\eta(t,x)\big)|^p dx\\ &\qquad\qquad \text{(d'après le Lemme 3.1)}\\ &\leq \sqrt{2}^{p\delta'}\big(1 + \|v\|_{t,L^\infty}.t\big)^{p\delta'}\int_\Omega \sigma^{p\delta'}(x)|u(t,x)|^p dx\end{aligned}$$

d'où $$|\sigma^{\delta'}\big(u \circ \eta(t,.)\big)|_{L^p} \leq \sqrt{2}^{\delta'}\big(1 + \|v\|_{t,L^\infty}t\big)^{\delta'}|u|_{p,0,\delta'}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}|\sigma^{\delta'+1}\nabla(uo\eta)(t,.)|^p_{L^p} &\leq \int_\Omega \sigma^{p(\delta'+1)}(x)|\nabla u\big(\eta(t,x)\big)|^p|\nabla_x\eta(t,x)|^p dx\\ &\leq \sqrt{2}^{p(\delta'+1)}\big(1 + \|v\|_{t,L^\infty}t\big)^{p(\delta'+1)} \times\\ &\qquad \exp\left\{p\int_0^t |\nabla v(s,.)|_{L^\infty}ds\right\}|\sigma^{\delta'+1}\nabla u|^p_{L^p}\end{aligned}$$

(d'après le Lemme 3.2), d'où

$$|\sigma^{\delta'+1}\nabla(u \circ \eta)(t,.)|_{L^p} \leq \sqrt{2}^{\delta'+1}\big(1 + \|v\|_{t,L^\infty}t\big)^{\delta'+1} \times \\ \exp\left\{\int_0^t |\nabla u(s,.)|_{L^\infty}ds\right\}|\sigma^{\delta'+1}\nabla u(t,.)|_{L^p}.$$

Par conséquent $|u\big(\eta(t,.)\big)|_{p,1,\delta'} \leq \sqrt{2}^{\delta'+1}\big(1 + \|v\|_{t,L^\infty}t\big)^{\delta'+1}\exp\{\|\nabla v\|_{t,L^\infty}t\}\,|u|_{p,1,\delta'}.$

De plus il existe $T_1 \leq T$, tel que sur $[0, T_1]$ on a

$$\begin{aligned} |u(\eta(t,.))|_{p,1,\delta'} &\leq 4\sqrt{2}^{\delta'+1}\Big(1+\|v\|_{T_1,L^\infty}T_1\Big)^{1/2}\Big(1+\|\nabla v\|_{T_1,L^\infty}T_1\Big)^{1/2}|u|_{p,1,\delta'} \\ &\leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)|u|_{p,1,\delta'}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le lemme est vrai jusqu'a l'ordre $k < s'$; c'est à dire il existe une constante C^{te} telle que pour tout $u \in \mathcal{M}^p_{k,\delta'}(\Omega)$ on a :

$$\|u \circ \eta\|_{T_1,p,k,\delta'} \leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)|u|_{p,k,\delta'}.$$

Soit $u \in \mathcal{M}^p_{k+1,\delta'}(\Omega)$. Pour estimer $|u\circ\eta(t,.)|_{p,k+1,\delta'}$ il suffit d'estimer $|u\circ\eta(t,.)|_{p,k,\delta'}$ et $|\nabla(u\circ\eta)(t,.)|_{p,k,\delta'+1}$. Or $u \in \mathcal{M}^p_{k,\delta'}(\Omega)$, donc par hypothèse de récurrence on a

$$\|u \circ \eta\|_{T_1,p,k,\delta'} \leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)|u|_{p,k+1,\delta'}.$$

Quant $\nabla(uo\eta)$ on l'écrit $\nabla(u\circ\eta) = (\nabla u\circ\eta) + (\nabla u\circ\eta).\nabla\varepsilon$ avec $\varepsilon(t,x) = \int_0^t v(s,\eta(s,x))ds$. Encore une autre fois l'hypothèse de récurrence donne

$$\|\nabla u \circ \eta\|_{T_1,p,k,\delta'+1} \leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)|u|_{p,k+1,\delta'}.$$

Pour $(\nabla u\circ\eta).(\nabla\varepsilon)$ on a (cf [7]) et cette dérnière inégalité.

$$\begin{aligned} |(\nabla u\circ\eta).\nabla\varepsilon(t,.)|_{p,k,\delta'} &\leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big) \quad |u|_{p,k+1,\delta'}|\varepsilon(t,.)|_{p,s,\delta} \\ &\leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big) \quad |u|_{p,k+1,\delta'}C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1. \end{aligned}$$

En effet, $|\varepsilon(t,.)|_{p,s,\delta} \leq C\big(\|v\|_{T_1,p,s,\delta}\big)T_1 \quad \forall t \in [0,T_1]$. En conclusion

$$\begin{aligned} \|\nabla(u\circ\eta)\|_{T_1,p,k+1,\delta'} &\leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big) \quad |u|_{p,k+1,\delta'} \quad + \\ &\quad C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1|u|_{p,k+1,\delta'} \\ &\leq C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)^2 \quad |u|_{p,k+1,\delta'}. \end{aligned}$$

Si de plus $C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1 \leq 2$

$$\|\nabla(u\circ\eta)\|_{T_1,p,k+1,\delta'} \leq 2C^{te}\Big(1+C(\|v\|_{T_1,p,s,\delta})T_1\Big)|u|_{p,k+1,\delta'}$$

d'où le lemme.

Corollaire 3.4. *Soient p, s, δ donnés comme au* Lemme 3.3, *$(v_n)_n$ une suite bornée de $C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ tangentielle à divergence nulle et η_n le flot de v_n. Alors pour tout $u \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)$, la suite $(u\circ\eta_n)_n$ est bornée dans le même espace.*

4. Preuve du Théorème 2.1

On commence par exprimer et estimer la pression en fonction de la vitesse. C'est l'objet des deux résultats suivants.

Lemme 4.1. *Si* (u, p) *est solution de l'équation d'Euler* (E)*, alors* p *vérifie*

$$\begin{cases} -\triangle p = tr(\nabla u)^2 \\ \left.\dfrac{\partial}{p\partial n}\right|_{\Gamma} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} u^i u^j \frac{\varphi_{ij}}{|\nabla\varphi|}. \end{cases}$$

où φ *est une fonction de paramétrisation de* Γ *et* $\varphi_{ij} = \partial_{ij}\varphi$ (cf [18]).

Le linéarisé sur la vitesse de l'équation (E) nous conduit à résoudre à v donné dans $C\big([0, T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ tangentiel à divergence nulle, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + v.\nabla u = -\nabla p(u, v) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $p(u, v)$ est solution du problème de Neumann extérieur $(P.N.Ext)$

$$\begin{cases} -\triangle p(u, v) = tr(\nabla u.\nabla v) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \partial_i u^j \partial_j v^i = f(u, v) \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} u^i v^j \frac{\varphi_{i,j}}{|\nabla\varphi|} = g(u, v) \end{cases} \tag{$P.N.Ext$}$$

Proposition 4.2. *Pour* p, s, δ *du* Théorème 2.1*, il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u, v \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)$ *le problème* (*P.N.Ext*) *admet une unique solution* $p(u, v) \in \mathcal{M}^p_{s+1,\delta-1}(\Omega)$*. De plus :*

$$\begin{aligned} |\nabla p(u, v)|_{p,s,\delta} &\le C\big(|u|_{p,s,\delta}|v|_{p,2,\delta}+|u|_{p,2,\delta}|v|_{p,s,\delta}\big) \\ &\le C|u|_{p,s,\delta}|v|_{p,s,\delta} \end{aligned}$$

Preuve**.** Comme $\nabla u, \nabla v \in \mathcal{M}^p_{s-1,\delta+1}(\Omega)$ qui est une algèbre de Banach (cf [7]), alors $f(u, v) \in \mathcal{M}^p_{s-1,\delta+1}(\Omega)$ et $g(u, v) \in W^{s-1/p,p}(\Gamma)$, il existe une unique solution $p(u, v) \in \mathcal{M}^p_{s+1,\delta-1}(\Omega)$ de $(P.N.Ext)$ (cf [6]) de plus, en utilisant la proposition [A] (voir appendice)

$$\begin{aligned} |\nabla p(u, v)|_{p,s,\delta} &\le |p(u, v)|_{s+1,\delta-1} \\ &\le C\Big(|f(u, v)|_{p,s-1,\delta+1} + |g(u, v)|_{W^{s-1/p,p}(\Gamma)}\Big) \\ &\le C\Big(|u|_{p,s,\delta}|v|_{p,2,\delta}+|u|_{p,2,\delta}|v|_{p,s,\delta}\Big) \end{aligned}$$

Lemme 4.3. *Pour* p, s, δ *et* u_0 *du* Théorème 2.1 *et* $v \in C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ *tangentiel à divergence nulle, toute solution u de l'équation* (1) *est tangentielle à divergence nulle.*

Preuve. Il suffit d'écrire les équations de la divergence de u et de $u.\nabla\varphi$ selon les lignes de champ de v. □

En revenant maintenant l'équation (1), on a par une simple intégration

$$u(t,x) = u_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big) - \int_0^t \nabla p\big(u,v\big)\big(s, \eta\big(s, \eta^{-1}(t,x)\big)\big)ds.$$

On pose : $$F_v(u)(t,x) = u_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big) - \int_0^t \nabla p\big(u,v\big)\big(s, \eta\big(s, \eta^{-1}(t,x)\big)\big)ds$$

alors la solution de (1) n'est autre qu'un point fixe de F_v. D'après le Lemme 3.3 et la Proposition 4.2, F_v applique $C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ dans lui mme, de plus

$$\big(F_v(u) - F_v(u')\big)(t,x) = -\int_0^t \nabla p\big(u - u', v\big)\big(s, \eta\big(s, \eta^{-1}(t,x)\big)\big)ds$$

et donc $$\Big|F_v(u) - F_v(u')(t,.)\Big|_{p,s,\delta} \leq C\big(\|v\|_{T,p,s,\delta}\big) T \|u - u'\|_{T,p,s,\delta}$$

ce qui montre que pour T assez petit, F_v est contractante et admet un unique point fixe $u \in C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ solution de (1). D'après le Lemme 4.3, u est en plus tangentielle à divergence nulle et via le Lemme 3.3, u vérifie

$$\|u\|_{T,p,s,\delta} \leq C^{te}\Big(1 + C(\|v\|_{T,p,s,\delta})T\Big)|u_0|_{p,s,\delta} + C(\|v\|_{T,p,s,\delta})T\|u\|_{T,p,s,\delta}.$$

Choisissons T tel que $C(\|v\|_{T,p,s,\delta})T < 1$, on obtient

$$\|u\|_{T,p,s,\delta} \leq C^{te}\frac{1 + C(\|v\|_{T,p,s,\delta})T}{1 - C(\|v\|_{T,p,s,\delta})T}|u_0|_{T,p,s,\delta}.$$

On définit la suite $(u_n)_n$ dans $C\big([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$ tangentielle à divergence nulle comme suit : $u_0(t,x) = u_0(x)$ et u_{n+1} solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u_{n+1} + u_n.\nabla u_{n+1} = -\nabla p(u_n, u_{n+1}) \\ u_{n+1}|_{t=0} = u_0 \end{cases}.$$

Lemme 4.4. *Pour T assez petit, la suite* $(u_n)_n$ *est bornée dans* $C([0,T], \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega))$.

Preuve**.** Posons $M = 2|u_0|_{p,s,\delta}$ et supposons que $\|u_k\|_{T,p,s,\delta} \leq M \quad \forall 0 \leq k \leq n$, alors

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}\|_{T,p,s,\delta} &\le \frac{1+C(\|u_n\|_{T,p,s,\delta})T}{1-C(\|u_n\|_{T,p,s,\delta})T}|u_0|_{p,s,\delta}\\ &\le \frac{1+C(M)T}{1-C(M)T}|u_0|_{p,s,\delta} \le 2|u_0|_{p,s,\delta} \equiv M\end{aligned}$$

pour $T \le T_1$, T_1 est assez petit.

Lemme 4.5. *Pour T assez petit, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans* $C\big([0,T],\mathcal{M}^p_{s-1,\delta}(\Omega)\big)$.

Preuve**.** En effectuant la différence des équations on obtient

$$\begin{aligned}(u_{n+2}-u_{n+1})(t,x) = &-\int_0^t \nabla p\big(u_{n+1};u_{n+2}-u_{n+1}\big)\big(s,\eta_{n+1}\big(s,\eta^{-1}_{n+1}(t,x)\big)\big)ds\\ &-\int_0^t \nabla p\big(u_{n+1};u_{n+1}-u_n\big)\big(s,\eta_{n+1}\big(s,\eta^{-1}_{n+1}(t,x)\big)\big)ds\\ &-\int_0^t \big(u_{n+1}-u_n\big).\nabla u_{n+1}\big(s,\eta_{n+1}\big(s,\eta^{-1}_{n+1}(t,x)\big)\big)ds\end{aligned}$$

oú η_{n+1} désigne le flot de u_{n+1}. D'après le Corollaire 3.4 et le Lemme 4.4, on en déduit

$$\|u_{n+2}-u_{n+1}\|_{T,p,s-1,\delta} \le C(M)T\Big(\|u_{n+2}-u_{n+1}\|_{T,p,s-1,\delta}+\|u_{n+1}-u_n\|_{T,p,s-1,\delta}\Big)$$

ou encore

$$\|u_{n+2}-u_{n+1}\|_{T,p,s-1,\delta} \le \frac{C(M)T}{1-C(M)T}\|u_{n+1}-u_n\|_{T,p,s-1,\delta}$$

et pour $T \le T_2$ assez petit, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $C([0,T],\mathcal{M}^p_{s-1,\delta}(\Omega))$.

Fin de la preuve du Théorème 2.1**.** La suite $(u_n)_n$ converge vers u dans $L^\infty\big([0,T],\mathcal{M}^p_{s-1,\delta}(\Omega)\big)$, et comme elle est bornée dans $C\big([0,T],\mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)\big)$, cette limite est en fait dans cet espace et via l'équation, $u \in C^0\big([0,T],\mathcal{M}^p_{s-1,\delta}(\Omega)\big)$. L'unicité dans $\mathcal{M}^p_{1,\delta}(\Omega)$, (théorème de K. Kikuchi [16]), assure celle de u dans $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(\Omega)$. □

5. Preuve du Théorème 2.2

Dans ce paragraphe s désignera un entier ≥ 3, u la solution de l'équation d'Euler (E) et on travaillera dans un intervalle de temps $[0,T]$ où $0 < T < T^*(s)$. Soit $|\alpha| \le s$, alors

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}|\partial^\alpha u(t,x)|^p = |\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial^\alpha u(t,x).\partial^\alpha\partial_t u(t,x)$$

en multipliant par $\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}$ et en faisant la somme sur $|\alpha| \leq s$, on obtient

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{|\alpha|\leq s}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^p = \sum_{|\alpha|\leq s}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial^\alpha u(t,x).\partial^\alpha\partial_t u(t,x)$$

puis en remplacant $\partial^\alpha\partial_t u(t,x)$ par sa valeur dans l'équation (E), on obtient

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{|\alpha|\leq s}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^p = -X(t,x) - Y(t,x) \tag{2}$$

où $$X(t,x) = \sum_{|\alpha|\leq s}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial^\alpha u(t,x).\partial^\alpha\big(u.\nabla u\big)(t,x)$$

et $$Y(t,x) = \sum_{|\alpha|\leq s}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial^\alpha u(t,x).\partial^\alpha\nabla p(t,x).$$

Lemme 5.1. *Il existe une constante $C > 0$, indépendante du temps telle que*

$$\int_\Omega |Y(t,x)|dx \leq C|u(t)|^p_{p,s,\delta}|u(t)|_{p,2,\delta}.$$

Preuve**.**

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Y(t,x)|dx &\leq \sum_{|\alpha|\leq s}\int_\Omega |\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-1}|\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha\nabla p(t,x)|dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq s}\Big[\int_\Omega|\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x)|^p dx\Big]^{(p-1)/p}\Big[\int_\Omega|\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha\nabla p(t,x)|^p dx\Big]^{1/p} \\ &\leq |u(t)|^{p-1}_{p,s,\delta}|\nabla p(t)|_{p,s,\delta}\end{aligned}$$

et d'après la Proposition 4.2, $|\nabla p(t)|_{p,s,\delta} \leq C|u(t)|_{p,s,\delta}|u(t)|_{p,2,\delta}$.

Reprenons $X(t,x)$, la régle de Leibniz nous permet de le décomposer

$$X(t,x) = X_0(t,x) + X_1(t,x)$$

oú $$X_0(t,x) = \sum_{|\alpha|\leq s}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial^\alpha u(t,x).\big(u.\nabla\big)\partial^\alpha u(t,x)$$

(et) $$\begin{aligned}X_1(t,x) = \sum_{|\alpha|\leq s}\sum_{0<|\beta|\leq|\alpha|} & C_{\alpha,\beta}\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\times \\ & \partial^\alpha u(t,x).\big(\partial^\beta u.\nabla\big)\partial^{\alpha-\beta}u(t,x).\end{aligned}$$

Lemme 5.2. *Il existe une constante $C > 0$, indépendante du temps telle que*

$$\int_\Omega |X_1(t,x)|dx \leq C|u(t)|^p_{p,s,\delta}|u(t)|_{p,s-1,\delta}.$$

Preuve.

$$\int_\Omega |X_1(t,x)|dx \le C \sum_{|\alpha|\le s}\sum_{0<|\beta|\le|\alpha|} \underbrace{\int_\Omega \sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-1}|\big(\partial^\beta u.\nabla\big)\partial^{\alpha-\beta}u(t,x)|dx}_{I_{\alpha,\beta}}$$

i) Si $|\beta| = 1$, alors

$$I_{\alpha,\beta} \le \int_\Omega |\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-1}|\partial^\beta u(t,x).\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t,x)|dx,$$

et $\forall|\alpha| \le s$ on a :

$$\begin{cases} \partial^\beta u(t,.) \in \mathcal{M}^p_{s-1,\delta+1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \\ \sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t,.) \in L^p(\Omega) \end{cases},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\partial^\beta u(t).\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t)|_{L^p} &\le C|\partial^\beta u(t)|_{L^\infty}|\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t)|_{L^p} \\ &\le C|u(t)|_{p,2,\delta}|u(t)|_{p,s,\delta} \end{aligned}$$

et on applique l'inégalité de Hölder avec $p/(p-1)$ et p.
ii) Si $|\beta| = 2$, alors

$$I_{\alpha,\beta} \le \int_\Omega |\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-1}|\sigma^{\delta+2}\partial^\beta u(t,x).\sigma^{|\alpha|-2}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t,x)|dx,$$

et $\forall|\alpha| \le s$ on a :

$$\begin{cases} \sigma^{\delta+2}\partial^\beta u(t,.) \in L^p(\Omega) \\ \sigma^{|\alpha|-2}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t,.) \in \mathcal{M}^p_{s-|\alpha|+1,\delta+1}(\Omega) \subset L^\infty \end{cases} \quad \text{donc,}$$

$$\begin{aligned} |\sigma^{\delta+2}\partial^\beta u(t).\sigma^{|\alpha|-2}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t)|_{L^p} &\le C|\sigma^{\delta+2}\partial^\beta u(t)|_{L^p}|\sigma^{|\alpha|-2}\partial^{\alpha-\beta}\nabla u(t)|_{L^\infty} \\ &\le C|u(t)|_{p,2,\delta}|u(t)|_{p,s,\delta} \end{aligned}$$

iii) Si $|\beta| = |\alpha|$, on fait comme i).
iv) Si $|\beta| \ge 3$ et $|\beta| < |\alpha|$ (dans ce cas bien sûr $s \ge 4$), on fait comme ii). D'où le lemme.
Pour $X_0(t,x)$, on l'écrit :

$$\begin{aligned} X_0(t,x) &= \Big(\sum_{|\alpha|<s} + \sum_{|\alpha|=s}\Big)\Big(\sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial^\alpha u(t,x).\big(u.\nabla\big)\partial^\alpha u(t,x)\Big) \\ &= B(t,x) + A(t,x) \end{aligned}$$

Lemme 5.3. *Il existe une constante $C > 0$, indépendante du temps telle que*

$$\int_\Omega |B(t,x)|dx \leq C|u(t)|^p_{p,s,\delta}|u(t)|_{p,2,\delta}.$$

Preuve**.**

$$\int_\Omega |B(t,x)|dx \leq \sum_{|\alpha|<s} \int_\Omega \sigma^{p(\delta+|\alpha|)}|\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}|\partial^\alpha u(t,x).\big(u.\nabla\big)\partial^\alpha u(t,x)|dx$$

et chacune des intégrales de la somme se majore par :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-1}|\sigma^\delta u(t,x)||\sigma^{|\alpha|}\partial^\alpha \nabla u(t,x)|dx \\
&\leq C\Big[\int_\Omega |\sigma^{\delta+|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x)|^p dx\Big]^{(p-1)/p} \times \Big[\int_\Omega |\sigma^\delta u(t,x)|^p|\sigma^{|\alpha|}\partial^\alpha \nabla u(t,x)|^p dx\Big]^{1/p} \\
&\leq C|u(t)|^p_{p,s,\delta}|u(t)|_{p,2,\delta}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
2A(t,x) = &\underbrace{\sum_{|\alpha|=s}\sum_{i=1}^3 |\sigma^{\delta+s}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}\partial_i\Big[|\sigma^{\delta+s}\partial^\alpha u(t,x)|^2\Big]u^i(t,x)}_{I(t,x)} - \\
&\qquad \underbrace{\sum_{|\alpha|=s}\sum_{i=1}^3 |\sigma^{\delta+s}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}|\partial^\alpha u(t,x)|^2 u^i(t,x)\partial_i\sigma^{2(\delta+s)}}_{J(t,x)}
\end{aligned}$$

Lemme 5.4. *Il existe une constante $C > 0$, indépendante du temps telle que*

$$\int_\Omega |J(t,x)|dx \leq C|u(t)|^p_{p,s,\delta}|u(t)|_{p,2,\delta}.$$

Preuve**.**

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |J(t,x)|dx &\leq \sum_{|\alpha|=s}\sum_{i=1}^3 \int_\Omega |\sigma^{\delta+s}\partial^\alpha u(t,x)|^{p-2}|\partial^\alpha u(t,x)|^2|u(t,x)||\partial_i\sigma^{2(\delta+s)}|dx \\
&\leq C\sum_{|\alpha|=s}\int_\Omega \sigma^{(p-2)(\delta+s)}|\partial^\alpha u(t,x)|^p|u(t,x)|\sigma^{2(\delta+s)-1}dx \\
&\leq C|u(t)|_{L^\infty}|u(t)|^p_{p,s,\delta}.
\end{aligned}$$

Pour $I(t,x)$, on l'écrit :

$$I(t,x) = \frac{2}{p}\sum_{|\alpha|=s}\sum_{i=1}^{3}\partial_i\left[|\sigma^{\delta+s}\partial^\alpha u(t,x)|^p\right]u^i(t,x)$$

et par approximation de $|\sigma^{\delta+s}\partial^\alpha u(t,x)|^p$ par une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ et en utilisant le fait que $\operatorname{div} u(t,x) = 0$, on montre que $\int_\Omega I(t,x)dx = 0 \ \ \forall t \in [0,T]$.

Fin de la preuve du Théorème 2.2**.** Les Lemmes 5.1…5.4, montrent qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante du temps telle que

$$\left|\int_\Omega \big(X(t,x)+Y(t,x)\big)dx\right| \leq C|u(t)|^p_{p,s,\delta}\Big(|u(t)|_{p,2,\delta} + |u(t)|_{p,s-1,\delta}\Big)$$

en intégrant (2) entre 0 et $t \in [0,T]$, on obtient

$$|u(t)|^p_{p,s,\delta} \leq |u_0|^p_{p,s,\delta} + C\int_0^t |u(\tau)|^p_{p,s,\delta}\Big(|u(\tau)|_{p,2,\delta} + |u(\tau)|_{p,s-1,\delta}\Big)d\tau$$

et on en déduit par le lemme de Gronwall que

$$|u(t)|^p_{p,s,\delta} \leq |u_0|^p_{p,s,\delta}\exp\left\{C\int_0^t \big(|u(\tau)|_{p,2,\delta} + |u(\tau)|_{p,s-1,\delta}\big)d\tau\right\}.$$

En fin, une récurrence sur $s \geq 3$, montre que $|u(t)|_{p,s,\delta}$ reste finie dès que $|u(t)|_{p,2,\delta}$ reste finie, ce qui achève la preuve. □

6. Preuve du Théorème 2.3

En vertu du Théorème 2.2, on montrera ce dernier dans le cas $s = 3$. Pour cela on va raisonner par l'absurde, c'est à dire on suppose que

$$T^* < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{T^*}\Big(|w(s,.)|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + \big|w(s,.)|_\Gamma\big|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\Big)\,ds = M < +\infty$$

et on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|u(t,.)|_{p,2,\delta} \leq C \quad \forall t \in [0,T^*[$ ce qui contredit la maximalité de la solution.

REMARQUE 6.1. D'après le Lemme 2.10 de K. Kikuchi [16], il existe $C > 0$ telle que $|u|_{p,2,\delta} \leq C|\nabla\wedge u|_{p,1,\delta+1}$ pour tout $u \in \mathcal{M}^p_{2,\delta}(\Omega)$ tangentiel à divergence nulle; cela signifie que les trois normes $|u|_{p,2,\delta}$, $|\nabla u|_{p,1,\delta+1}$ et $|\nabla\wedge u|_{p,1,\delta+1}$ sont équivalentes sur le sous espace de $\mathcal{M}^p_{2,\delta}(\Omega)$ formé par les champs tangentiels à divergence nulle. Donc pour estimer $|u(t,.)|_{p,2,\delta}$ il suffit d'estimer $|w(t,.)|_{p,1,\delta+1} = |\nabla\wedge u|_{p,1,\delta+1}$, pour cela, on revient à l'équation du tourbillon :

$$\begin{cases} \partial_t w + u.\nabla w = w.\nabla u \\ w|_{t=0} = w_0 \end{cases}.$$

Si on désigne par η le flot de u, on en déduit

$$w(t,x) = w_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big) + \int_0^t (w.\nabla u)\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,x)\big)\big)ds$$

et donc $|w(t,.)|_{p,1,\delta+1} \leq |w_0\big(\eta^{-1}(t,.)\big)|_{p,1,\delta+1} + \int_0^t |w.\nabla u\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,.)\big)\big)|_{p,1,\delta+1} ds$

i) Estimation de $|w_0\big(\eta^{-1}(t,.)\big)|_{p,1,\delta+1}$

$$\begin{aligned}
&|w_0\big(\eta^{-1}(t,.)\big)|^p_{p,1,\delta+1} \\
&\quad = \int_\Omega \sigma^{p(\delta+1)}(x)|w_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big)|^p dx + \\
&\qquad \int_\Omega \sigma^{p(\delta+2)}(x)|\nabla\big(w_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big)\big)|^p dx \\
&\quad \leq m_u^{p(\delta+1)}(t) \int_\Omega \sigma^{p(\delta+1)}\big(\eta^{-1}(t,x)\big)|w_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big)|^p dx + \\
&\qquad m_u^{p(\delta+2)}(t) \int_\Omega \sigma^{p(\delta+2)}\big(\eta^{-1}(t,x)\big)|\nabla w_0\big(\eta^{-1}(t,x)\big)|^p |\nabla\eta^{-1}(t,x)|^p dx \\
&\quad \leq C m_u^{p(\delta+2)}(t)\Big(|\sigma^{\delta+1}w_0|^p_{L^p} + e^{p\int_0^t |\nabla u(s,.)|_{L^\infty} ds}|\sigma^{\delta+2}\nabla w_0|^p_{L^p}\Big)
\end{aligned}$$

(pour cette dernière inégalité (cf preuve du Lemme 1 de [2])), d'où

$$|w_0\big(\eta^{-1}(t,.)\big)|_{p,1,\delta+1} \leq C m_u^{\delta+2}(t) \exp\left\{\int_0^t |\nabla u(s,.)|_{L^\infty} ds\right\} |w_0|_{p,1,\delta+1}.$$

ii) Estimation de $|w.\nabla u\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,.)\big)\big)|_{p,1,\delta+1}$. On pose $g = w.\nabla u$, il vient

$$\begin{aligned}
&|g\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,.)\big)\big)|^p_{p,1,\delta+1} \\
&\quad = \int_\Omega \sigma^{p(\delta+1)}(x)|g\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,x)\big)\big)|^p dx + \\
&\qquad \int_\Omega \sigma^{p(\delta+2)}(x)|\nabla g\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,x)\big)\big)|^p dx \\
(*) &\quad \leq m_u^{p(\delta+2)}(t)\Big(\int_\Omega \sigma^{p(\delta+1)}(x)|g\big(s,\eta(s,x)\big)|^p dx + \\
&\qquad \exp\left\{p\int_s^t |\nabla u(\tau,.)|_{L^\infty} d\tau\right\} \int_\Omega \sigma^{p(\delta+2)}(x)|\nabla g\big(s,\eta(s,x)\big)|^p dx\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq m_u^{2p(\delta+2)}(t)\left(|\sigma^{\delta+1}g(s,.)|_{L^p}^p + \exp\left\{p\int_s^t |\nabla u(\tau,.)|_{L^\infty} d\tau\right\}|\sigma^{\delta+2}\nabla g(s,.)|_{L^p}^p\right).$$

Pour l'inégalité $(*)$, c'est encore le Lemme 1 de [2]. On a donc

$$\begin{aligned}&|w.\nabla u\big(s,\eta\big(s,\eta^{-1}(t,.)\big)\big)|_{p,1,\delta+1}\\ &\qquad \leq Cm_u^{2(\delta+2)}(t)\exp\left\{\int_s^t |\nabla u(\tau,.)|_{L^\infty} d\tau\right\}|w.\nabla u(s,.)|_{p,1,\delta+1}\end{aligned}$$

et par la proposition [A], on obtient

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}&|u(t,.)|_{p,2,\delta} \leq Cm_u^{\delta+2}(t)\Bigg[|w_0|_{p,1,\delta+1}\exp\left\{\int_0^t |\nabla u(\tau)|_{L^\infty(\Omega)} d\tau\right\} +\\ &\int_0^t \exp\left\{\int_s^t |\nabla u(\tau)|_{L^\infty(\Omega)} d\tau\right\}|u(s)|_{p,2,\delta}\Big(|w(s)|_{L^\infty(\Omega)} + |\nabla u(s)|_{L^\infty(\Omega)}\Big)ds\Bigg].\end{aligned}$$

Pour achever la preuve, on a besoin des deux propositions suivantes.

Proposition 6.2. *Sous les hypothèses du* Théorème 2.3*, pour tout* $k \in \big](3p)/\{(\delta+1)p+3\}, p\big]$*, il existe* $C(k)$ *telle que*

$$|w(t,.)|_{L^k(\Omega)} \leq C(k) \qquad \forall t \in [0, T^*[.$$

Preuve. On a

$$w(t,x) = w_0(\eta^{-1}(t,x)) + \int_0^t (w.\nabla u)(s,\eta^{-1}(s,x))ds$$

et donc

$$|w(t,.)|_{L^k(\Omega)} \leq |w_0|_{L^k(\Omega)} + \int_0^t |w(s,.)|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla u(s,.)|_{L^k(\Omega)}ds.$$

Maintenant en prolongeant $u(t,.)$ et $w(t,.)$ sur $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ par 0, et en faisant comme dans [8] (Paragraphe 3.2), on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\nabla u(s,.)|_{L^k(\Omega)} \leq C|w(s,.)|_{L^k(\Omega)} \qquad \forall s \in [0, T^*[.$$

D'où

$$|w(t,.)|_{L^k(\Omega)} \leq |w_0|_{L^k(\Omega)} + C\int_0^t |w(s,.)|_{L^\infty(\Omega)}|w(s,.)|_{L^k(\Omega)}ds$$

et par le lemme de Gronwall, on déduit $|w(t,.)|_{L^k(\Omega)} \leq |w_0|_{L^k(\Omega)}e^{CM} \quad \forall t \in [0, T^*[$.

Proposition 6.3. *Pour* $u \in \mathcal{M}^p_{2,\delta}(\Omega)$ $(p > 3,\ 1 \leq \delta < 2 - 3/p)$ *tangentiel à divergence nulle et* $w = \nabla \wedge u$*, il existe pour* $(3p)/\{(\delta+1)p+3\} < k < 3$ *une constante* $C > 0$ *indépendante de* u *telle que :*

i) $$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\Big(|w|_{L^\infty(\Omega)} + |w|_{L^k(\Omega)} + |w|_{L^p(\Omega)} + |w_{|\Gamma}|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\Big).$$

ii)
$$|\nabla u|_{L^\infty(\Omega)} \le C\Big[1 + |w|_{L^p(\Omega)} + |w|_{L^k(\Omega)} + \Big(|w|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + |w_{|\Gamma}|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\Big)\Big(1 + \mathrm{Log}\,\big(e + |u|_{p,2,\delta}\big)\Big)\Big].$$

Preuve. Voir appendice.
Tenant compte de la Proposition 6.2, l'inégalité (I) devient

$$\begin{aligned}
&|u(t,.)|_{p,2,\delta} \exp\left\{-\int_0^t |\nabla u(\tau)|_{L^\infty(\Omega)} d\tau\right\}\\
&\le C\Big[|w_0|_{p,1,\delta+1} + \\
&\quad \int_0^t |u(s)|_{p,2,\delta} \exp\left\{-\int_0^s |\nabla u(\tau)|_{L^\infty(\Omega)} d\tau\right\} \Big(|w(s)|_{L^\infty(\Omega)} + |\nabla u(s)|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\Big] ds\\
&\le C|w_0|_{p,1,\delta+1} \exp\left\{\int_0^t \big(|w(s)|_{L^\infty(\Omega)} + |\nabla u(s)|_{L^\infty(\Omega)}\big) ds\right\}\\
&\le C|w_0|_{p,1,\delta+1} \exp\left\{\int_0^t |\nabla u(s)|_{L^\infty(\Omega)} ds\right\}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre d'après les Propositions 6.2, 6.3 et les hypothèses, que

$$\begin{aligned}
|u(t)|_{p,2,\delta} &\le C|w_0|_{p,1,\delta} \exp\left\{2\int_0^t |\nabla u(s)|_{L^\infty(\Omega)} ds\right\}\\
&\le C_1 \exp\left\{2\int_0^t \big(|w(s)|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + |w_{|\Gamma}|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\big) \mathrm{Log}\,\big(e + |u(s)|_{p,2,\delta}\big) ds\right\}\\
&\le \beta \exp\left\{2\int_0^t \big(|w(s)|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + |w_{|\Gamma}|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\big) \mathrm{Log}\,\big(\beta + |u(s)|_{p,2,\delta}\big) ds\right\}
\end{aligned}$$
$$\text{où } \beta = \mathrm{Max}\,\big(C_1, e\big).$$

On pose $y(t) = \mathrm{Log}\,\big(\beta + |u(t)|_{p,2,\delta}\big)$, il vient alors que

$$\begin{aligned}
y(t) &\le \big(1 + \mathrm{Log}\,\beta\big) \exp\left\{2\int_0^t \big(|w(s)|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + |w_{|\Gamma}|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\big) ds\right\}\\
&\le C_2 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T^*[
\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse de la maximalité de la solution. □

7. Appendice

On rappelle tout à bord la loi de Biot et Savart :
Etant donné un champ $\widetilde{u}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ à divergence nulle et $\widetilde{w} = \mathrm{rot}\,\widetilde{u}$ identifié la

matrice

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{w}^3 & \widetilde{w}^1 \\ -\widetilde{w}^3 & 0 & -\widetilde{w}^2 \\ -\widetilde{w}^1 & \widetilde{w}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $\widetilde{u} = \nabla E \otimes \widetilde{w} = K * \widetilde{w}$, c'est dire

$$\widetilde{u}^i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^j - y^j}{|x-y|^3} \widetilde{\Omega}^i_j(y)dy.$$

Dans une première étape, nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 7.1. *On se donne $p > 3$, $1 \leq \delta < 2 - 3/p$ et on pose $\alpha = (p-3)/(2p)$, alors pour tout $k \in](3p)/\{(\delta+1)p+3\}, 3[$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\widetilde{w} \in \mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)$, on a :*

$$|\widetilde{u}|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)} \leq C\left[1 + |\widetilde{w}|_{L^k(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)}\left(1 + \mathrm{Log}\left(e + |\widetilde{w}|_{\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)}\right)\right)\right]$$

où $\widetilde{u} = \nabla E \otimes \widetilde{w}$.

Pour montrer ce théorème, il suffit en fait d'estimer les semies normes

$$|\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \quad , \quad |\nabla\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \quad \text{et} \quad \left[\nabla\widetilde{u}\right]_\alpha = \mathop{\mathrm{Sup}}_{h\neq 0} \frac{|\nabla\widetilde{u}(x+h) - \nabla\widetilde{u}(x)|}{|h|^\alpha}.$$

Or, d'après la démonstration de Beale, Kato and Majda [4], il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\nabla\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\left[1 + |\widetilde{w}|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\left(1 + \mathrm{Log}\left(|\widetilde{w}|_{\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)} + e\right)\right)\right].$$

Lemme 7.2. *Pour $(3p)/\{(\delta+1)p+3\} < k < 3$, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de k telle que*

$$|\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\left(|\widetilde{w}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{L^k(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Preuve**.** Rappelons tout à bord que si $\widetilde{w} \in \mathcal{M}^p_{0,\delta+1}(\mathbb{R}^3)$, alors $\widetilde{w} \in L^k(\mathbb{R}^3)$ pour $(3p)/\{(\delta+1)p+3\} < k \leq p$, et comme $1 \leq \delta < 2 - 3/p$, alors $1 < (3p)/\{(\delta+1)p+3\} < 3$. En écrivant maintenant

$$\widetilde{u}(x) = \chi K * \widetilde{w} + (1-\chi)K * \widetilde{w}$$

où χ est une fonction de troncature près de l'origine, on obtient (avec $k' = k/(k-1) > 3/2$)

$$|\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\Big(|\chi K|_{L^1(\mathbb{R}^3)}|\widetilde{w}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |(1-\chi)K|_{L^{k'}(\mathbb{R}^3)}|\widetilde{w}|_{L^k(\mathbb{R}^3)}\Big).$$

Le corollaire suivant, dont on aura besoin par la suite, est une conséquence du lemme précédent.

Corollaire 7.3. *Pour $\gamma = 1 - 3/p$ et $(3p)/\{(\delta+1)p+3\} < k < 3$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|\widetilde{u}|_{\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^3)} \leq C\Big(|\widetilde{w}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{u}|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{u}|_{L^k(\mathbb{R}^3)}\Big)$$

Preuve**.** Voir Hörmander [13].

Pour achever la démonstration du Théorème 7.1, on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\big[\nabla\widetilde{u}\big]_\alpha \leq C\left[1 + |\widetilde{w}|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)}\Big(1 + \mathrm{Log}\left(e + |\widetilde{w}|_{\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)}\right)\Big)\right].$$

Soit $h \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on se propose d'étudier $|\nabla\widetilde{u}(x+h) - \nabla\widetilde{u}(x)|/|h|^\alpha$.

On pose pour $0 < \rho < 1$, la fonction $\chi_\rho(x) = \chi(x/\rho)$ où χ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ valant 1 sur $\{|x| \leq 1\}$ et 0 sur $\{|x| \geq 2\}$. Il vient alors

$$\widetilde{u} = \chi_\rho K * \widetilde{w} + (1-\chi_\rho)K * \widetilde{w} = \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2.$$

Lemme 7.4. *Pour $\alpha = (p-3)/(2p)\ \big(\in]0, 1/2[\big)$, $\nabla\widetilde{u}_1 = \chi_\rho K * \nabla\widetilde{w} \in \mathcal{C}^\alpha$, de plus*

$$[\nabla\widetilde{u}_1]_\alpha \leq C\rho^\alpha|\nabla\widetilde{w}|_{L^p}$$

où C ne dépend ni de $\widetilde{w}$ ni de ρ

Preuve.

$$\begin{aligned}\nabla\widetilde{u}_1(x+h) - \nabla\widetilde{u}_1(x) &= \int \Big(\chi_\rho(y+h)K(y+h) - \chi_\rho(y)K(y)\Big)\nabla\widetilde{w}(x-y)dy \\ &= \int_{|y|\leq 2|h|} \Big(\chi_\rho(y+h)K(y+h) - \chi_\rho(y)K(y)\Big)\nabla\widetilde{w}(x-y)dy + \\ &\qquad \int_{|y|\geq 2|h|} \Big(\chi_\rho(y+h)K(y+h) - \chi_\rho(y)K(y)\Big)\nabla\widetilde{w}(x-y)dy.\end{aligned}$$

Or

$$\left(\int_{|y|\leq 2|h|} \Big|\chi_\rho(y)K(y)\Big|^{p'} dy\right)^{1/p'} \leq \begin{cases} \left(\int_{|y|\leq 2|h|} \frac{1}{|y|^{2p'}}dy\right)^{1/p'} & \text{si} \quad |h| \leq \rho \\ \left(\int_{|y|\leq 2\rho} \frac{1}{|y|^{2p'}}dy\right)^{1/p'} & \text{si} \quad |h| \geq \rho \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} C|h|^{(3-2p')/p'} = C|h|^{2\alpha} & \text{si} \quad |h| \leq \rho \\ C\rho^{(3-2p')/p'} = C\rho^{2\alpha} & \text{si} \quad |h| \geq \rho \end{cases}$$
$$\leq C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha}$$

de même, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{|y|\leq 2|h|} \left| \chi_\rho(y+h)K(y+h) \right|^{p'} dy \right)^{1/p'} & \leq \left(\int_{|y+h|\leq 3|h|} \left| \chi_\rho(y+h)K(y+h) \right|^{p'} dy \right)^{1/p'} \\ & \leq \left(\int_{|y|\leq 3|h|} \frac{|\chi_\rho(y)|^{p'}}{|y|^{2p'}} dy \right)^{1/p'} \\ & \leq C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \int_{|y|\leq 2|h|} \Big(\chi_\rho(y+h)K(y+h) - \chi_\rho(y)K(y) \Big) \nabla\widetilde{w}(x-y)dy \right| \leq C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha} \left| \nabla\widetilde{w} \right|_{L^p}.$$

Reste maintenant :

$$A(x) = \int_{|y|\geq 2|h|} \Big(\chi_\rho(y+h)K(y+h) - \chi_\rho(y)K(y) \Big) \nabla\widetilde{w}(x-y)dy$$

on remarque que $A(x)$ est nulle si $|h| > 2\rho$, en effet dans ce cas, on a

$$\begin{cases} |y| \geq 2|h| > 4\rho \ , \ \text{donc} \ \chi_\rho(y) = 0. \\ |y+h| \geq |y| - |h| \geq |h| > 2\rho \ , \ \text{donc} \ \chi_\rho(y+h) = 0. \end{cases}$$

donc on peut supposer dans $A(x)$ que $|h| \leq 2\rho$, et dans ce cas cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{2|h|\leq|y|\leq 4\rho} \Big(\chi_\rho(y+h)K(y+h) - \chi_\rho(y)K(y) \Big) \nabla\widetilde{w}(x-y)dy \\ &= \int_{2|h|\leq|y|\leq 4\rho} \chi_\rho(y+h)\Big(K(y+h) - K(y) \Big) \nabla\widetilde{w}(x-y)dy \ + \\ & \qquad \int_{2|h|\leq|y|\leq 4\rho} K(y)\Big(\chi_\rho(y+h) - \chi_\rho(y) \Big) \nabla\widetilde{w}(x-y)dy \\ &= a(x) + b(x). \end{aligned}$$

Pour $a(x)$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $|y| \geq 2|h|$ on a

$$\Big| K(y+h) - K(y) \Big| \leq C\frac{|h|}{|y|^3}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\left(\int_{2|h|\le|y|\le 4\rho}\left|\chi_\rho(y+h)\Big(K(y+h)-K(y)\Big)\right|^{p'}dy\right)^{1/p'} &\le C\left(\int_{|y|\ge 2|h|}\frac{|h|^{p'}}{|y|^{3p'}}dy\right)^{1/p'}\\ &\le C|h|\left(\int_{2|h|}^{+\infty} r^{2-3p'}dr\right)^{1/p'}\\ &\le C|h|\ |h|^{(3-3p')/p'} = C|h|^{2\alpha}\\ &\le C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha}\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$|a(x)| \le C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha}\left|\nabla\widetilde{w}\right|_{L^p}.$$

Quand-à $b(x)$, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_{2|h|\le|y|\le 4\rho}|K(y)|^{p'}|\chi_\rho(y+h)-\chi_\rho(y)|^{p'}dy\right)^{1/p'} &\le C\frac{|h|}{\rho}\left(\int_{2|h|}^{4\rho} r^{2-2p'}dr\right)^{1/p'}\\ &\le C\frac{|h|}{\rho}\rho^{2\alpha} = C|h|^{2\alpha}\left(\frac{|h|}{\rho}\right)^{1-2\alpha}\\ &\le C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha} \qquad \left(\text{car } \frac{|h|}{\rho}\le 2\right)\end{aligned}$$

d'où

$$|b(x)| \le C|h|^{\alpha}\rho^{\alpha}\left|\nabla\widetilde{w}\right|_{L^p}$$

et le lemme est démontré.
Passons maintenant à

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_2(x) &= (1-\chi_\rho)K*\widetilde{w}\\ &= \psi(1-\chi_\rho)K*\widetilde{w} + (1-\psi)(1-\chi_\rho)K*\widetilde{w}\\ &= \widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2\end{aligned}$$

oú $\psi(x) = \chi(2x)$. Pour $\widetilde{v}_2$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_2(x) &= (1-\psi)K*\widetilde{w}\\ D\widetilde{v}_2(x) &= (1-\psi)DK*\widetilde{w} - (D\psi)K*\widetilde{w}\end{aligned}$$

et $$D^2\widetilde{v}_2(x) = (1-\psi)(D^2K)*\widetilde{w} + (D^2\psi)K*\widetilde{w} - 2(D\psi)(DK)*\widetilde{w}.$$

ce qui montrer que $D^2\widetilde{v}_2 \in L^\infty$ et

$$\left|D^2\widetilde{v}_2\right|_{L^\infty} \le C|\widetilde{w}|_{L^\infty}$$

et par suite

$$\left|\nabla\widetilde{v}_2(x+h)-\nabla\widetilde{v}_2(x)\right|\le C|h||\widetilde{w}|_{L^\infty}.$$

Etudions maintenant

$$\widetilde{v}_1(x)=\psi(1-\chi_\rho)K*\widetilde{w}$$

On a

$$\begin{aligned}\nabla\widetilde{v}_1 &= \psi\big(1-\chi_\rho\big)\nabla K*\widetilde{w}-\psi\big(\nabla\chi_\rho\big)K*\widetilde{w}+\nabla\psi\big(1-\chi_\rho\big)K*\widetilde{w}\\ &= a(x)-b(x)+c(x).\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{w}\in\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)$, $p>3$, alors $\widetilde{w}\in\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ avec $\alpha=(p-3)/(2p)<1-3/p$ et on obtient : D'une part

$$\begin{aligned}|a(x+h)-a(x)| &\le \int\psi(y)\big(1-\chi_\rho(y)\big)|\nabla K(y)||\widetilde{w}(x+h-y)-\widetilde{w}(x-y)|dy\\ &\le C[\widetilde{w}]_\alpha|h|^\alpha\int_\rho^4\frac{1}{r}dr\\ &\le C[\widetilde{w}]_\alpha|h|^\alpha\left(-\operatorname{Log}\frac{\rho}{4}\right).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|b(x+h)-b(x)| &\le C[\widetilde{w}]_\alpha|h|^\alpha\int\psi(y)|\nabla\chi_\rho(y)|\frac{1}{|y|^2}dy\\ &\le C[\widetilde{w}]_\alpha|h|^\alpha\frac{1}{\rho}\int_\rho^{2\rho}dr\\ &\le C[\widetilde{w}]_\alpha|h|^\alpha.\end{aligned}$$

Pour $c(x)$, on a $|\nabla c|\le C|\widetilde{w}|_{L^\infty}$, ce qui montre que

$$|c(x+h)-c(x)|\le C|h||\widetilde{w}|_{L^\infty}.$$

D'où
$$[\nabla\widetilde{v}_1]_\alpha\le C\left(|\widetilde{w}|_{L^\infty}+[\widetilde{w}]_\alpha\left(1-\operatorname{Log}\frac{\rho}{4}\right)\right).$$

En fin :

$$\big[\nabla\widetilde{u}\big]_\alpha\le C\Big[\rho^\alpha|\nabla\widetilde{w}|_{L^p}+|\widetilde{w}|_{L^\infty}+\big[\widetilde{w}\big]_\alpha\big(1-C\operatorname{Log}\rho\big)\Big]$$

en choisissant $\rho=1$ si $|\nabla\widetilde{w}|_{L^p}\le 1$ et $\rho=1/|\nabla\widetilde{w}|^{1/\alpha}_{L^p}$ si $|\nabla\widetilde{w}|_{L^p}>1$, on obtient ainsi

$$\big[\nabla\widetilde{u}\big]_\alpha\le C\Big[1+|\widetilde{w}|_{L^\infty}+\big[\widetilde{w}\big]_\alpha\Big(1+C\operatorname{Log}|\nabla\widetilde{w}|_{L^p}\Big)\Big].\qquad\square$$

Preuve de la Proposition 6.3. Revenons maintenant à $u \in \mathcal{M}^p_{2,\delta}(\Omega)$ tangentiel à divergence nulle et $w = \operatorname{rot} u$, alors pour exprimer u à l'aide de w, nous allons prolonger (comme Kikuchi) w sur tout l'espace, puis retrouver u à l'aide de la loi de Biot et Savart.

On sait que $w = \operatorname{rot} u \in \mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\Omega)$ vérifit, $\operatorname{div} w = 0$ et $\int_\Gamma w.n d\sigma = 0$ et par suite, il existe $q_1 \in W^{2,p}(D)$ $(D = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ solution de l'équation

$$\begin{cases} \triangle q_1 = 0 & \text{dans} \quad D \\ \left.\dfrac{\partial q_1}{\partial n}\right|_\Gamma = w.n|_\Gamma & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

de plus il existe une constante $C > 0$ vérifiant

$$|\nabla q_1|_{W^{1,p}(D)} \leq C |\, w|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}.$$

Par ailleurs, il existe un champ $v \in W^{2,p}(D)$ vérifiant

$$\begin{cases} v|_\Gamma = 0 \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = \big(w - \nabla q\big)|_\Gamma \\ |v|_{W^{2,p}(D)} \leq C |\, \big(w - \nabla q\big)|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)} \leq C |\, w|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)} \end{cases}$$

On pose $w_0 = \operatorname{Rot}\big(\nabla\varphi \wedge v\big) - \nabla q \in W^{1,p}(D)$, alors $|w_0|_{W^{1,p}(D)} \leq C |\, w|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}$. Le champ $\widetilde{w} = \begin{cases} w & \text{dans} \quad \Omega \\ w_0 & \text{dans} \quad D \end{cases}$ appartient à $\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div}\widetilde{w} = 0$ et on a les estimations suivantes :

i) Pour tout $\dfrac{3p}{(\delta+1)p+3} < k \leq p$,

$$|\widetilde{w}|_{L^k(\mathbb{R}^3)} \leq C_k \left(|w|_{L^k(\Omega)} + |\, w|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\right).$$

ii) $$|\widetilde{w}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(|w|_{L^\infty(\Omega)} + |\, w|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\right).$$

iii) $$|\widetilde{w}|_{\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\mathbb{R}^3)} \leq C|w|_{\mathcal{M}^p_{1,\delta+1}(\Omega)}.$$

iv) Pour $\alpha = \dfrac{p-3}{2p}$,

$$|\widetilde{w}|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(|w|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} + |\, w|_\Gamma\, |_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\right).$$

Maintenant, on pose $\widetilde{u} = \nabla E \otimes \widetilde{w}$, il vient alors que $\operatorname{div}\widetilde{u} = 0$, $\operatorname{rot}\widetilde{u} = \widetilde{w}$ et $\widetilde{u} \in \mathcal{M}^p_{2,\delta}(\mathbb{R}^3)$. Pour retrouver u, on résout le problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} \triangle q_2 = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \left.\dfrac{\partial q_2}{\partial n}\right|_\Gamma = \widetilde{u}.n|_\Gamma & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

qui admet une unique solution dans $\mathcal{M}^p_{3,\delta-1}(\Omega)$ (puisque $\widetilde{u}.n|_\Gamma \in W^{2-1/p,p}(\Gamma)$), de plus on a la proposition suivante dont la preuve est laissée à la fin

Proposition 7.5. *Soient $p > 3$ et $g \in W^{2-1/p,p}(\Gamma)$, alors l'unique solution dans $\mathcal{M}^p_{3,\delta-1}(\Omega)$ du problème de Neumann extérieur*

$$\begin{cases} \triangle q = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \\ \left.\dfrac{\partial q}{\partial n}\right|_\Gamma = g \quad \textit{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

vérifie (*avec* $\alpha = (p-3)/(2p)$)
i) $|\nabla q|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)} \leq C|g|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Gamma)}$.
ii) $|\nabla q|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|g|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\Gamma)}$.

Cette proposition montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\nabla q_2|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)} \leq C|\widetilde{u}|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)} \quad \text{et} \quad |\nabla q_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|\widetilde{u}|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)}.$$

En fin, on retrouve le champ u par

$$u = \widetilde{u}|_\Omega - \nabla q_2.$$

De plus on a

1) Pour $(3p)/\{(\delta+1)p+3\} < k < 3$ on a
$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\Omega)} &\leq |\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |\nabla q_2|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C|\widetilde{u}|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{p-3}{2p} < \gamma = \frac{p-3}{p} \\ &\leq C_k\Big(|\widetilde{w}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{L^k(\mathbb{R}^3)} + |\widetilde{w}|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\Big) \ ; \quad \big(\text{voir Corollaire 7.3}\big) \\ &\leq C_k\Big(|w|_{L^\infty(\Omega)} + |w|_{L^k(\Omega)} + |w|_{L^p(\Omega)} + |\, w|_\Gamma\,|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}\Big) \end{aligned}$$
2)
$$\begin{aligned} |\nabla u|_{L^\infty(\Omega)} &\leq |\nabla\widetilde{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |\nabla q_2|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)} \\ &\leq |\widetilde{u}|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

et on en déduit, par le Théorème 7.1 et les estimations précédentes la Proposition 6.3. □

Preuve de la Proposition 7.5. Comme le problème de Neumann extérieur

$$\begin{cases} \triangle q = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \left.\dfrac{\partial q}{\partial n}\right|_\Gamma = g \in W^{2-1/p,p}(\Gamma) \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

admet une solution, alors cette solution s'exprime en potentiel de simple couche

$$q(x) = \int_\Gamma E(x-t)\mu(t)d\sigma(t)$$

et que

$$\frac{\partial q}{\partial n}\Big|_\Gamma (z) = \frac{-1}{2}\big(\mu(z) + J\mu(z)\big) = \frac{-1}{2}\big(I+J\big)\mu(z)$$

où $J\mu(z) = 2\int_\Gamma \nabla E(z-t).n(z)\mu(t)d\sigma(t)$ est un opérateur compact de $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ dans $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ et de $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Gamma)$ dans $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Gamma)$ ($k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$) (cf [10] et [15]). Ce qui montre que l'opérateur $I+J$ est de Fredholm.
Par ailleurs, comme Ω ne contient aucune composante connexe borné, alors $\ker\big(I+J\big) = \{0\}$ et par suite $I+J$ est un isomorphisme sur $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ et sur $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Gamma)$. Ce qui prouve

$$\mu = -2\big(I+J\big)^{-1}g$$

et qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant

$$|\mu|_{L^\infty(\Gamma)} \le C|g|_{L^\infty(\Gamma)} \qquad \text{et} \qquad |\mu|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Gamma)} \le C|g|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Gamma)}.$$

Or, on sait (cf [10]) que le potentiel de simple couche q définie par une densité μ de classe $\mathcal{C}^\alpha(\Gamma)$ est $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et vérifie

$$|\nabla q|_{L^\infty(\Omega)} \le C|\mu|_{\mathcal{C}^\alpha(\Gamma)} \le C|g|_{\mathcal{C}^\alpha(\Gamma)}$$

ce qui montre le deuxiemme point de la proposition.
Pour montrer i), on décompose la solution q comme suit

$$q = \psi q + (1-\psi)q = q_1 + q_2$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\psi(x) = 1$ si $|x| \le R$ et 0 si $|x| \ge 2R$ avec R un rayon assez grand.
1) q_1 est une solution de

$$\begin{cases} \triangle q_1 &= (\triangle\psi)q + 2(\nabla\psi).(\nabla q) \quad \text{dans} \quad \Omega_{2R} = \Omega \cap B(0,2R) \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial n}\Big|_\Gamma &= g \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial n}\Big|_{C_{2R}} &= 0 \quad \text{sur} \quad C_{2R} = C(0,2R) \end{cases}$$

et par suite il existe une constante C qui ne dépend que de R et α (cf [11]) telle que

$$|q_1|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(\Omega_{2R})} \le C\left(|(\triangle\psi)q|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega_{2R})} + |(\nabla\psi).(\nabla q)|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega_{2R})} + |g|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Gamma)} + |\psi q|_{L^\infty(\Omega_{2R})}\right)$$

$$\leq C\left(|q|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)} + |g|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Gamma)} + |q|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

2) Pour $q_2 = (1-\psi)q$, elle est définie sur tout $\mathbb{R}^3$ et vérifie

$$\triangle q_2 = (\triangle\psi)q - 2(\nabla\psi).(\nabla q) = f \in \mathcal{C}_0^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)$$

et par suite

$$q_2 = E * f = \int_{\mathbb{R}^3} E(x-y)f(y)dy = c\int_{|y|\leq 2R} \frac{1}{|x-y|} f(y)dy$$

d'où

$$|q_2|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |\nabla q_2|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C|f|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Par ailleurs, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ (cf [10] et [17]) telle que

$$[\partial_i\partial_j q_2]_\alpha = \operatorname*{Sup}_{x\neq y} \frac{|\partial_i\partial_j q_2(x) - \partial_i\partial_j q_2(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C[f]_\alpha \leq C|q|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)}.$$

et que

$$\partial_i\partial_j q_2(x) = c\int_{\substack{|x-y|\geq 1\\ y\in \mathrm{supp}(f)}} f(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\frac{1}{|x-y|}dy \quad + \\ c\int_{|x-y|\leq 1}\left(f(y)-f(x)\right)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\frac{1}{|x-y|}dy + \gamma_{i,j} f(x)$$

où $\gamma_{i,j}$ sont des constantes qui ne dépendent que de i et de j, ce qui montre que

$$|\partial_i\partial_j q_2|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C|f|_{\mathcal{C}^\alpha} \leq C|q|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)}.$$

En conclusion, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|q|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(\Omega)} \leq C\left(|q|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)} + |g|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Gamma)} + |q|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

Or, d'une part

$$|q(x)| \leq \int_\Gamma |E(x-t)||\mu(t)|d\sigma(t) \leq C|\mu|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C|g|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

Et d'autre part, la formule de Taylor montre qu'il existe une constante $A > 0$ telle pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $q \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\Omega)$, on a

$$|q|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\Omega)} \leq \varepsilon^{1-\alpha}|q|_{\mathcal{C}^{2+\alpha}(\Omega)} + \frac{A}{\varepsilon^{1+\alpha}}|q|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ce qui achéve la preuve. $\square$

On démontre à présent l'inégalité d'interpolation.

Proposition A. *Soient $p > 1$, $s \in \mathbb{N}$ et $\delta \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$|uv|_{p,s,\delta} \leq C\Big(|u|_{p,s,\delta}|v|_{L^\infty} + |u|_{L^\infty}|v|_{p,s,\delta}\Big).$$

Preuve. Pour montrer cette proposition, on a besoin de la caractérisation des espaces $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ suivante (cf [19]) : On pose $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 2\}$ et pour j entier ≥ 1, $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} < |x| < 2^{j+2}\}$. On désigne par Z l'ensemble des suites $(\zeta_j)_{j\geq 0}$ de fonctions vérifiants : $\zeta_j \in C^\infty_0(K_j), 0 \leq \zeta_j(x) \leq 1$ et $\sum_{j\geq 0}\zeta_j(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, de plus il existe pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, une constante $C(\alpha) > 0$ telle que $|D^\alpha\zeta_j(x)| \leq C(\alpha)2^{-j|\alpha|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall j \in \mathbb{N}$. On montre ainsi que

$$|u|^p_{p,s,\delta} \simeq \sum_{j\geq 0} 2^{j\delta p}|u\zeta_j|^p_{L^p} + \sum_{j\geq 0}\sum_{|\alpha|=s} 2^{j(\delta+s)p}|D^\alpha(u\zeta_j)|^p_{L^p} = \|u\|^p_{p,s,\delta}.$$

Soit $u \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{p,s,\delta} &= \sum_{j\geq 0} 2^{j\delta p}\Big(|u\zeta_j|^p_{L^p} + \sum_{|\alpha|=s} 2^{jsp}|D^\alpha(u\zeta_j)|^p_{L^p}\Big)\\
&= \sum_{j\geq 0} 2^{j\delta p+jn}\Big(|(u\zeta_j)(2^j.)|^p_{L^p} + \sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha\big((u\zeta_j)(2^j.)\big)|^p_{L^p}\Big)\\
&= \sum_{j\geq 0} 2^{j\delta p+jn}|(u\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}.
\end{aligned}$$

Soient maintenant $u, v \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}
\|uv\|^p_{p,s,\delta} &= \sum_{j\geq 0} 2^{j\delta p+jn}|(uv\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}\\
&= \sum_{j=0}^{2} 2^{j\delta p+jn}|(uv\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} + \sum_{j\geq 3} 2^{j\delta p+jn}|(uv\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}\\
&\leq C|uv|^p_{W^{s,p}} + \sum_{j\geq 3} 2^{j\delta p+jn}|(uv\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}.
\end{aligned}$$

Or pour $j \geq 3$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$(uv\zeta_j)(2^jx) = \left(\sum_{k=j-2}^{j+2}(\zeta_k u)(2^jx)\right)\Big((v\zeta_j)(2^jx)\Big), \text{ d'où}$$

$$|(uv\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} \leq C\left(|(v\zeta_j)(2^j.)|^p_{L^\infty}|\sum_{k=j-2}^{j+2}(u\zeta_k)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} + |(v\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}|\sum_{k=j-2}^{j+2}(u\zeta_k)(2^j.)|^p_{L^\infty}\right)$$

$$\leq C\left(|v|^p_{L^\infty}\sum_{k=j-2}^{j+2}|(u\zeta_k)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}+|(v\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}|u|^p_{L^\infty}\right)$$

et par suite

$$\sum_{j\geq 3}2^{j\delta p+jn}|(uv\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} \leq C\left(|v|^p_{L^\infty}\sum_{j\geq 3}\sum_{k=j-2}^{j+2}2^{j\delta p+jn}|(u\zeta_k)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} + |u|^p_{L^\infty}\sum_{j\geq 3}2^{j\delta p+jn}|(v\zeta_j)(2^j.)|^p_{W^{s,p}}\right)$$

$$\leq C\left(|v|^p_{L^\infty}\sum_{j\geq 3}\sum_{k=j-2}^{j+2}2^{j\delta p+jn}|(u\zeta_k)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} + |u|^p_{L^\infty}\|v\|^p_{p,s,\delta}\right).$$

Et pour $r\in\{-2,-1,1,2\}$ on a : $|(u\zeta_{j-r})(2^j.)|^p_{W^{s,p}} \leq C|(u\zeta_{j-r})(2^{j-r}.)|^p_{W^{s,p}}$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 3}\sum_{k=j-2}^{j+2}2^{j\delta p+jn}|(u\zeta_k)(2^j.)|^p_{W^{s,p}} &\leq C\sum_{j\geq 3}2^{j\delta p+jn}\sum_{r=-2}^{2}|(u\zeta_{j-r})(2^{j-r}.)|^p_{W^{s,p}}\\ &\leq C\sum_{r=-2}^{2}\sum_{i\geq 3-r}2^{i\delta p}2^{r\delta p}2^{in}2^{rn}|(u\zeta_i)(2^i.)|^p_{W^{s,p}}\\ &\leq C\|u\|^p_{p,s,\delta}.\end{aligned}$$

$$\|uv\|^p_{p,s,\delta} \leq C\Big(|u|^p_{L^\infty}\|v\|^p_{p,s,\delta}+\|u\|^p_{p,s,\delta}|v|^p_{L^\infty}\Big). \qquad \square$$

REMERCIEMENT. Je tiens à remercier le professeur B. DEHMAN pour le temps qu'il m'a consacré pour des discussions utiles et nésessaires.

Références

[1] R. Adams: Sobolev Spaces, Academic Press. New York San Francisco London 1975.

[2] H. Bahouri et B. Dehman: *Remarque sur l'apparition de singularités dans les écoulements Eulériens incompressibles donnée initiale Hölderinne*, J. Math. Pures Appl. **73** (1994), 335–346.

[3] C. Bardos et U. Frisch: Finite-Times Regularity for Bounded and Unbounded Ideal Incompressible Ffluids Using Hölder Estimates, Lecture notes. Springer-verlag in mathematics 565. Berlin. Heidelberg. New York. (1975).

[4] J.T. Beale, T. Kato and A. Majda: *Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions for the 3-D Euler Equations*, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 61–66.

[5] J.P. Bourguignon et H. Brezis: *Remarks on the Euler Equation*, Journal of functional analysis, **15** (1974), 341–363.

[6] M. Cantor: *Boundary Value Problems for Asymptotically Homogeneous Elliptic Second Order Operators*, Journal of differential equations **34** (1979), 102–113.

[7] M. Cantor: *Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds*, Compositio Mathematica **38** (1979), 3–35.

[8] J.Y. Chemin: Une facette mathématique de la mecanique des fluides I, Près Publication N1055 de l'école Polytechnique de Paris.

[9] J.Y. Chemin: *Régularité de la trajectoire des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace*, J. Math. Pures App. **71** (1992), 407–417.

[10] R. Dautray et J.L. Lions: Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les thechniques, Tome 1. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1984.

[11] Yu.V. Egorov and M.A. Shubin: Partial differential equations I, Encyclopaedia of Mathematical science Volume 30. Springer Verlag.

[12] B. Hanouzet: *Espaces de Sobolev poids. Application au problèmes de Dirichlet dans un demi espace*, Rend. del Sem. Math. della Univ. di Padova XLVI (19771), 227–272.

[13] L. Hörmander: The analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983.

[14] T. Kato: *On Classical Solutions of the Two Dimensionnal Non-Stationary Euler Equation*, Arch. Rational Mech. Anal **25** (1967), 188–200.

[15] C.E Kenig: Elliptic boundary value problems on lipschitz domains, Beijing lectures in harmonic analysis. Princeton University Press. Princeton, New Jersey 1986.

[16] K. Kikuchi: *The existance and uniqueness of nonstationary ideal incompressible flow in exterior domaines in* $\mathbb{R}^3$, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 575–597.

[17] O.A. Ladyzenskaja et N.N. Ural'ceva: Equations aux dérivées partielles de type elliptique, DUNOD PARIS 1968.

[18] R. Temam: *On the Euler Equations of Incompressible Perfect Fluids*, Journal of functional analysis **20** (1975), 32–43.

[19] H. Tribel: Interpolation theory. Function Spaces. Differential operateur, North-Holland Publishing Company Amsterdam. New York. Oxford 1978.

Mohamed JELLOULI
Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5019 Monastir-TUNISIE
E-mail: Mjellouli@excite.com