EINE KENNZEICHNUNG SEMI-PERFEKTER MODULN

FR. KASCH und E. A. MARES

Dem Gedenken an TADASI NAKAYAMA gewidmet

1. Ein projektiver Modul wird (in [1]) semi-perfekt genannt, wenn jedes epimorphe Bild von ihm eine projektive Hülle besitzt. Eine projektive Hülle eines Moduls C ist eine exakte Fole $P \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$, wobei P projektiv ist und der Kern $Ke(f)$ von f Klein (= small = superflous)* in P ist. In [1] wird gezeigt, daß ein projektiver Modul P dann und nur dann semi-perfekt ist, wenn das Radikal $Ra(P)$ von P klein in P ist, $\bar{P} = P/Ra(P)$ halbeinfach ist und jede direkte Zerlegung von $\bar{P}$ durch eine direkte Zerlegung von P induziert wird.

Dieses Resultat soll hier benutzt werden, um eine weitere Charakterisierung semi-perfekter Moduln zu beweisen, die ebenso einfach wie bemerkenswert ist und darüber hinaus durch Dualisierung eine einfache Konstruktion der injektiven Hülle liefert.

2. Es sei R ein Ring mit 1-Element und alle Moduln seien unitäre R-Rechtsmoduln. Ein Modul M heiße *komplementiert* (bezüglich der Addition), wenn zu jedem Untermodul $U \subset M$ in der Menge der Untermoduln $V \subset M$ mit $M = U + V$ (mindestens) ein minimaler existiert; jeder solche minimale Untermodul heiße ein *Komplement* von U und eines dieser Komplemente werde mit U' bezeichnet.

HILFSSATZ. *Ist U' ein Komplement von U in M, dann ist $U \cap U'$ klein in U'. Ist U'' ein Komplement von U' in M, dann ist $U'' \cap U'$ klein in U'.*

Beweis. Sei $U \cap U' + B = U'$ mit $B \subset U'$, dann folgt $M = U + U \cap U' + B = U + B$ und wegen der Minimalität von U' folgt $B = U'$, d.h. $U \cap U'$ ist klein in U'. Sei $U'' \cap U' + B = U'$ mit $B \subset U'$, dann folgt $M = U + U'' \cap U' + B$; da nach der schon bewiesenen ersten Aussage des Hilfssatzes $U'' \cap U'$ klein in U'' ist, ist

Received May 17, 1965.

* Ein Untermodul K von P heisst klein in P, wenn für jeden Untermodul $U \subseteq P$, $U \neq P$ auch $U + K \neq P$.

$U'' \cap U'$ auch klein in M, also folgt $M = U + B$ und daraus ergibt sich wieder $B = U'$.

3. Wir kommen nun zu der angekündigten Kennzeichnung semi-perfekter Moduln.

SATZ. *Ein projektiver Modul ist dann und nur dann semi-perfekt, wenn er komplementiert ist.*

Beweis.

"*Nur dann*". Sei P ein semi-perfekter Modul und $U \subset P$ ein Untermodul. Bezeichne $\overline{U}$ das Bild von U in $\overline{P} = P/Ra(P)$ bei dem natürlichen Epimorphismus $P \xrightarrow{\nu} \overline{P}$. Da $\overline{P}$ halbeinfach ist, existiert ein Untermodul $\Lambda \subset \overline{P}$ mit $\overline{P} = \overline{U} \oplus \Lambda$. Nach Voraussetzung existiert eine Zerlegung $P = U_1 \oplus V$ mit $\overline{U_1} = \overline{U}$, $\overline{V} = \Lambda$. Aus $\overline{U_1} = \overline{U}$ folgt $U_1 + Ra(P) = U + Ra(P)$ und daher gilt $P = U + Ra(P) + V$. Da $Ra(P)$ klein in P ist, folgt $P = U + V$. Angenommen $P = U + V_0$ mit $V_0 \subset V$, dann folgt $\overline{V_0} \subset \overline{V} = \Lambda$ und $\overline{P} = \overline{U} + \overline{V_0} = \overline{U} \oplus \overline{V_0} = \overline{U} \oplus \overline{V}$, also $\overline{V_0} = \overline{V} = \Lambda$. Daraus folgt $V_0 + Ra(P) = V + Ra(P)$ und da $Ra(P)$ klein in P ist und $V_0 \subset V$ ergibt sich

$$P = U_1 \oplus V = U_1 + V_0 + Ra(P) = U_1 + V_0 = U_1 \oplus V_0,$$

also $V_0 = V$, d.h. V ist ein Komplement von U.

"*Dann*". Sei P projektiv und komplementiert und sei $P \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ exakt. Wir können und wollen voraussetzen, daß $C = P/U$ und $f = \nu$ der natürliche Epimorphismus von P auf den Faktormodul P/U sind. Sei $P = U + U'$ mit einem Komplement U' von U. Wegen $P/U = (U + U')/U$ folgt dann, daß $\nu' = \nu | U'$ ($=$ Einschränkung von ν auf U') ein Epimorphismus von U' auf P/U ist, dessen Kern $Ke(\nu') = U \cap U'$ nach dem Hilfssatz klein in U' ist.

Bisher haben wir nicht benutzt, daß P projektiv ist. Mit dieser Voraussetzung kann nun gezeigt werden, daß U' direkter Summand von P und daher selbst wieder projektiv ist. Dann ist

$$U' \xrightarrow{\nu'} P/U \longrightarrow 0$$

offenbar eine projektive Hülle von P/U und der Beweis ist vollständig. Sei $P = U'' + U'$ mit einem Komplement U'' von U'. Seien

$$\mu : P \longrightarrow P/U'' \cap U', \qquad \mu' = \mu | U'$$

und sei π die Projektion von $P/U'' \cap U' = U''/U'' \cap U' \oplus U'/U'' \cap U'$ auf $U'/U'' \cap U'$. Dann existiert wegen der Projektivität von P ein Homomorphismus f so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi\mu"] \\ U' \arrow[r, "\mu'"'] & U'/U'' \cap U' \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Aus $\pi\mu = \mu' f$ folgt

$$\pi\mu(U') = U'/U'' \cap U' = \mu' f(U')$$

und daher gilt $f(U') + Ke(\mu') = U'$. Da $Ke(\mu') = U'' \cap U'$ nach dem Hilfssatz klein in U' ist, folgt $f(U') = U'$ und folglich gilt $P = Ke(f) + U'$. Wegen $Ke(f) \subset Ke(\pi\mu) = U''$ und wegen der Minimalität von U'' folgt $Ke(f) = U''$. Andererseits gilt

$$U'' = Ke(\pi\mu) = Ke(\mu' f) = f^{-1}(Ke(\mu')) = f^{-1}(U'' \cap U')$$

und da f ein Epimorphismus ist, folgt $0 = f(U'') = U'' \cap U'$, was zu zeigen war.

4. *Bemerkungen und Folgerungen.*

a) Der zweite Teil des Beweises kann so formuliert werden, daß für P nicht Projektivität sondern nur Selbstprojektivität vorausgesetzt wird. Dazu betrachte man bei sonst gleichen Bezeichnungen wie zuvor das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\hat{f}"'] \arrow[d, "\pi\mu"] \\ P \arrow[r, "\mu"'] & P/U'' \cap U', \end{tikzcd}$$

wobei $\hat{f}$ nach Voraussetzung existiert. Dann gilt $Bi(\hat{f}) \subset U'$ und man erhält die Abbildung f im Beweis des Satzes aus $\hat{f}$ durch Einschränkung des Zieles P von $\hat{f}$ auf U'.

b) *Existenz der injektiven Hülle*

Sei $U \subset Q$, dann gibt es in der Menge der Untermoduln $V \subset Q$ mit $U \cap V = 0$ nach dem Zornschen Lemma (mindestens) einen maximalen, der hier ein Komplement genannt und mit U^* bezeichnet werden soll. Ebenso gibt es ein Komplement U^{**} von U^* mit $U \subset U^{**}$. Der zum Begriff "klein" duale

Begriff ist "groß" (= large = essential). Damit kann der zweite Teil des Beweises dualisiert werden und liefert einen neuen Beweis für die Existenz der injektiven Hülle, bei dem das Zornsche Lemma *nur* zum Existenzbeweis von U^* und U^{**} benutzt wird. Da auch das Duale zur Bemerkung a) gilt, erhält man allgemeiner folgende Aussage: *Ist $U \subset Q$ und ist Q selbstinjektiv, dann ist U groß in U^{**} und U^{**} ist direkter Summand von Q. Ist Q injektiv, dann ist folglich U^{**} injektiv und daher eine injektive Hülle von U.*

c) *Hilfssatz. Ist A komplementiert und ist $f: A \to B$ ein Epimorphismus mit $Ke(f)$ klein in A, dann ist auch B komplementiert.*

Beweis. Seien $V \subset B$, $U = f^{-1}(V)$ und $A = U + U'$, dann zeigt man leicht, daß $V' = f(U')$.

FOLGERUNG. *Ist B ein Modul derart, daß jedes epimorphe Bild von B eine projektive Hülle besitzt*[1], *dann ist B komplementiert.*

Beweis. Nach [1] ist die projektive Hülle von B semi-perfekt also komplementiert und nach dem Hilfssatz gilt dies dann auch für B.

d) Ein Modul M heißt *endlich P-erzeugt*, wenn M epimorphes Bild einer endlichen direkten Summe von Kopien von P ist. Sei n eine natürliche Zahl und bezeichne $\mathfrak{G}_n(P)$ die Klasse der Moduln, die epimorphe Bilder einer direkten Summe von n Kopien von P sind. Ein Modul M heiße *regulär*, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul von M direkter Summand von M ist (dies stimmt für Ringe mit dem Begriff regulär im Sinne von Neumann überein). Sei

$$\delta = \delta(P, M) = \{f \mid f \in \mathrm{Hom}_R(P, M) \wedge Bi(f) \text{ klein in } M\};$$

sei $S = \mathrm{Hom}_R(P, P)$, dann ist $H = \mathrm{Hom}_R(P, M)$ S-Rechtsmodul und, wie leicht zu sehen, ist δ S-Untermodul von H. Für H und δ als S-Rechtsmoduln gilt dann der folgende Satz, dessen erster Teil auf F. Sandomierski zurückgeht (Spezialfall in [1]).

SATZ.

1) *Ist P $\mathfrak{G}_n(P)$-projektiv und ist $M \in \mathfrak{G}_n(P)$, dann gilt $\delta = Ra(\mathrm{Hom}_R(P, M))$.*

2) *Ist ausserdem M komplementiert, dann ist* $\mathrm{Hom}_R(P, M)/Ra(\mathrm{Hom}_R(P, M))$

[1] Es dürfte vielleicht zweckmäßig sein, anders als in [1] bereits derartige Moduln (die also nicht notwendig projektiv sind) als semi-perfekt zu bezeichnen.

regulär.

Die Voraussetzungen sind z.B. alle erfüllt, wenn P semi-perfekt und M endlich P-erzeugt ist.

Dualisiert man diesen Satz, so erhält man eine Verallgemeinerung eines Satzes von Johnson und Wong [2].

Beim Beweis, der hier nicht ausgeführt werden soll, ist es zweckmäßig, vom Begriff eines quasi-regulären Untermoduls U eines Moduls M Gebrauch zu machen, den wir, da er (wie bei Ringen) selbständiges Interesse besitzt, noch erwähnen wollen. U heiße quasi-regulärer Untermodul von M, wenn für jedes Erzeugendensystem $\{m_i \mid i \in \mathfrak{J}\}$ von M und jede Teilmenge $\{u_i \mid i \in \mathfrak{J}\}$ von U auch $\{m_i + u_i \mid i \in \mathfrak{J}\}$ Erzeugendensystem von M ist. Es gilt dann, daß ein Untermodul genau dann quasi-regulär ist, wenn er klein ist und daß daher das Radikal $Ra(M)$ von M Summe aller quasi-regulären Untermoduln ist.

Literatur

[1] Mares, E. A.: Semi-perfect modules. Math. Zeitschr. **82**, 347-360 (1963).
[2] Johnson, R. E. and E. T. Wong: Self-injective rings. Can. Math. Bull. **2**, 167-174 (1959).

München, Mathematisches Institut der Universität
Swarthmore College, Swarthmore, Pennsylvania