KLEINE STUDIE ZUR KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE DER SPHÄRE

von H. HADWIGER in Bern

Es bezeichne S_n die n-dimensionale *Sphäre*. Eine solche ist der Rand einer $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Vollkugel vom Radius 1.

Sind P und Q zwei Punkte von S_n, so bedeute $d(P, Q)$ die sphärische *Distanz*; es ist $0 \leqq d \leqq \pi$. Die Menge aller Punkte Q, für die bei einem fest gewählten P stets $d(P, Q) \leqq \pi/2$ ausfällt, ist ein *Halbraum* H; P heisst Pol von H. Eine Punktmenge A, welche als nichtleerer Durchschnitt einer Menge von Halbräumen H darstellbar ist, nennen wir einen *konvexen Körper* im S_n. Die Menge der Pole derjenigen Halbräume, welche einen konvexen Körper A enthalten, ist wieder ein konvexer Körper; es ist der dem Körper A *polar* zugeordnete Körper A^*.

Die Menge der Punkte Q, für die mit einem festgewählten Punkt P und einem festen s, $0 \leqq s \leqq \pi$, stets $d(P, Q) \leqq s$ gilt, ist eine sphärische *Kugel* vom *Radius* s. P ist das Zentrum (Pol) der Kugel. *Umkugelradius* R bzw. *Inkugelradius* r eines konvexen Körpers A ist der Radius einer kleinsten Kugel, welche A enthält, bzw. der Radius einer grössten Kugel, welche in A enthalten ist.

In der vorliegenden Studie handelt es sich um die beiden sich polar entsprechenden Sätze:

SATZ A. *Zu jeder Menge konvexer Körper der Sphäre S_n, welche alle der Nebenbedingung sin $R \leqq 1/(n+1)$ genügen sollen, gibt es $n+2$ Halbräume, so dass jeder Körper der Menge durch wenigstens einen Halbraum bedeckt wird.*

SATZ B. *Zu jeder Menge konvexer Körper der Sphäre S_n, welche alle der Nebenbedingung cos $r \leqq 1/(n+1)$ genügen sollen, gibt es $n+2$ Punkte, so dass jeder Körper der Menge wenigstens einen Punkt bedeckt.*

In beiden durch die Voraussetzungen der beiden Sätze gegebenen Fällen lassen sich mit den konvexen Körpern $n+2$ Klassen so bilden, dass die Vereini-

Received September 3, 1954.

gungsmenge, bzw. der Durchschnitt der Körper, ein und derselben Klasse in einem Halbraum enthalten ist, bzw. einen Punkt enthält.

Die beiden Sätze lassen sich nicht verschärfen. Die Grössenschranke $1/(n+1)$ der Nebenbedingung kann nicht durch einen grösseren Wert und die Anzahl $n+2$ nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden, ohne dass die Aussage falsch wird. Den Beweis vorbereitend, formulieren wir einen einfachen

Hilfssatz. Sind $n+2$ Punkte P_i $(i=0, 1, \ldots, n+1)$ auf S_n fest gegeben, so gilt

$$\operatorname*{Max}_P \, [\operatorname*{Min}_i \, d(P, P_i)] \geqq \arccos [1/(n+1)].$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann, wenn die P_i ein regelmässiges Punktsystem bilden, das durch $d(P_i, P_k) = \arccos [-1/(n+1)]$ $(0 \leqq i, k \leqq n+1, \; i \neq k)$ charakterisiert werden kann. Die P_i bilden die Eckpunkte eines $(n+1)$-dimensionalen euklidischen regulären Simplex.

Zum Nachweis dieses Hilfssatzes betrachten wir die P_i als Eckpunkte eines euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Simplex T. Sind alle P_i in einem Halbraum H enthalten, so bestätigt sich die Behauptung dadurch, dass man den antipodischen Punkt $\overline{P}$ des Pols P von H in Betracht zieht; es ist dann offenbar $d(\overline{P}, P_i) \geqq \pi/2$ für alle i. Andernfalls ist das euklidische Zentrum Z von S_n ein innerer Punkt von T. Beachten wir, dass der Umkugelradius von $T=1$ ist, so folgt nach einem bekannten Satz der Elementargeometrie,[1] dass der Inkugelradius von $T \leqq 1/(n+1)$ sein muss. Folglich gibt es eine n-dimensionale Seitenfläche von T, deren Abstand von $Z \leqq 1/(n+1)$ ausfällt. Wir legen jetzt die zu dieser Seitenfläche parallele n-dimensionale Tangentialebene an S_n, welche mit dieser auf der gleichen Seite von Z liegt; P sei der Berührungspunkt. Man bestätigt leicht, dass jetzt $d(P, P_i) \geqq \arccos [1/(n+1)]$ für alle i gilt, wodurch die Behauptung wieder verifiziert ist.

Dass in der Ungleichung des Hilfssatzes für das beschriebene regelmässige Punktsystem das Gleichheitszeichen gilt, kann direkt nachgeprüft werden.

Nach diesen Vorbereitungen ist der Beweis der Sätze A und B sehr einfach.

A: Wir wählen $n+2$ Halbräume, deren Pole ein regelmässiges Punktsystem P_i $(i=0, 1, \ldots, n+1)$ mit $d(P_i, P_k) = \arccos [-1/(n+1)]$ bilden. Es sei A

---

[1] Bezeichnen r und R Inkugel- und Umkugelradius eines k-dimensionalen euklidischen Simplex, so gilt $R/r \geqq k$; vgl. den Fall $k=3$ z.B. bei *L. Fejes-Toth*, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, 1953, V, § 6.

ein konvexer Körper, welcher wohl der Voraussetzung, nicht aber der Behauptung von Satz A entspricht. Das Zentrum P seiner Umkugel muss der mit der Gegenannahme gleichwertigen Bedingung genügen, dass $d(P, P_i) > (\pi/2) - R$ für alle i gilt. Dies ist aber wegen $\sin R \leqq 1/(n+1)$ mit der Ergänzung des Hilfssatzes betreffend die Gültigkeit des Gleichheitszeichens unverträglich.

B: Ist die Nebenbedingung von Satz B erfüllt, so wird für die Menge der polaren Körper die Nebenbedingung von Satz A erfüllt. Es gibt demnach $n+2$ Halbräume, so dass jeder polare Körper von wenigstens einem Halbraum bedeckt ist. Für die $n+2$ Pole dieser Halbräume ist die Behauptung von Satz B erfüllt.

Wir zeigen jetzt noch, dass sich die Aussagen der Sätze A und B im oben erwähnten Sinne nicht verschärfen lassen.

Dass sich $1/(n+1)$ nicht durch einen grösseren Wert ersetzen lässt, ergibt die folgende Ueberlegung: Wir betrachten die Menge aller Kugeln der S_n mit dem festen Radius R, wobei $R > \arcsin 1/(n+1)$ gewählt wird. Wir nehmen jetzt an, dass sich immer noch $n+2$ Halbräume finden lassen, so dass der mit Satz A verlangte Erfolg eintritt. Sind P_i $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ die Pole dieser Halbräume, so gibt es nach dem Hilfssatz einen Punkt P, so dass $d(P, P_i) \geqq \arccos [1/(n+1)]$ für alle i ausfällt. Die Kugel um P als Zentrum vom Radius R kann in keinem Halbraum enthalten sein; die getroffene Annahme ist als falsch erkannt.

Die Anzahl $n+2$ kann auch nicht verkleinert werden, auch dann nicht, wenn man die Nebenbedingung beliebig verstärkt. In der Tat: Wir betrachten die Menge aller Kugeln der S_n vom festen Radius R, wo $R > 0$ ist. Wir nehmen an, dass im Sinne von Satz A bereits $n+1$ Halbräume genügen. Die $n+1$ Pole dieser Halbräume liegen auf einer S_{n-1}, welche S_n in die beiden Halbräume H und $\bar{H}$ zerlegt. Die Kugel vom Radius R um den Pol P von H als Zentrum wird von keinem der $n+1$ Halbräume überdeckt. Die Annahme ist wieder falsch.

Dass sich auch Satz B nicht verschärfen lässt, folgt einfach daraus, dass er das polare Spiegelbild von Satz A ist.

Zum Schluss wollen wir uns einer noch offenen Frage zuwenden!

Wenn man bei Satz A zusätzlich verlangt, dass die konvexen Körper der in Betracht gezogenen Menge paarweise disjunkt sind, so könnte es wohl sein, dass nunmehr die Nebenbedingung weggelassen werden darf. Man hätte dann einen für mannigfache Anwendungen nützlichen Satz, dass eine beliebige Menge paarweise fremder konvexer Körper der n-dimensionalen Sphäre durch $n+2$ Halbräume so überdeckt werden könnte, dass jeder Körper von wenigstens einem Halbraum ganz bedeckt ist.

Entsprechend ergäbe sich auch der polare Satz. Für $n=1$ ist dies, wie man auf triviale Weise bestätigt, zutreffend. Dem Verfasser gelang es indessen nicht, diese Frage für $n>1$ abzuklären.