SUR LE PROLONGEMENT D'UN PSEUDOGROUPE D'ISOMORPHISMES LOCAUX D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

YOZÔ MATSUSHIMA

Dans leurs mémoires classiques sur les groupes de transformations continus et infinis, MM. É. Cartan et E. Vessiot ont introduit la notion de prolongement des groupes de transformations pour définir l'isomorphisme et l'homomorphisme entre deux groupes de transformations.

Cette note est consacrée à l'étude des prolongements d'un pseudogroupe d'isomorphismes locaux d'une variété différentiable. Dans le § 1 nous introduisons la notion de prolongement et utilisant cette notion nous définissons l'isomorphisme et l'homomorphisme entre deux pseudogroupes. Dans le § 2 nous vérifions la transitivité des relations d'isomorphismes et d'homomorphismes. Dans le § 3 nous associons à chaque groupe de Lie un pseudogroupe sur la variété de ce groupe et nous montrons que les pseudogroupes associés à deux groupes de Lie sont isomorphes (resp. homomorphes) si et seulement si les groupes abstraits sous-jacents de ces groupes de Lie sont isomorphes (resp. homomorphes). Dans une autre note nous étudierons le prolongement d'un pseudogroupe de Lie et compléterons le théorème du § 3.

§ 1. Soient M une variété différentiable[1] et f une application d'une sous-variété ouverte U de M sur une sous-variété ouverte V de M. L'application f sera appelée un isomorphisme local de M, lorsque f est un isomorphisme[2] entre les deux variétés U et V.[3] Les sous-variétés ouvertes U et V seront appelées la source et le but de f respectivement. Si f est un isomorphisme local de M, l'application réciproque f^{-1} est aussi un isomorphisme local de M. Soient f et

Received May 17, 1954.

[1] Dans la suite nous traiterons exclusivement le cas d'une variété infiniment différentiable. Les definitions et les résultats s'appliquent aussi au cas r fois continûment différentiable et au cas analytique réel ou complexe.

[2] L'application f d'une variété différentiable sur une variété différentiable s'appelle un isomorphisme, si f est un homéomorphisme et f et f^{-1} sont différentiables.

[3] Nous n'excluons pas le cas où U et V sont vides.

g des isomorphismes locaux de M. Il est clair que le produit $f\cdot g$ est aussi un isomorphisme local de M. On dit que le produit $f\cdot g$ est *défini*, s'il est défini sur une partie non vide de M. Lorsque g est une restriction de f, nous posons $f > g$.

DÉFINITION 1. Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble d'isomorphismes locaux d'une variété M vérifiant les conditions suivantes:

1) un isomorphisme local g de M qui est une restriction d'un $f \in \mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{G}$;

2) si $f \in \mathfrak{G}$, alors $f^{-1} \in \mathfrak{G}$;

3) si f et g sont deux isomorphismes locaux appartenant à $\mathfrak{G}$, alors leur produit $f\cdot g$ appartient à $\mathfrak{G}$. L'ensemble $\mathfrak{G}$ vérifiant ces conditions sera appelé un pseudogroupe sur M.[4)]

Soient E et M des variétés différentiables. On dit que E est un espace fibré différentiable *au sens large* de base M, lorsqu'il existe une application différentiable π de E sur M, en tout point de rang égal à dim M. L'application π sera appelée la projection de E sur M et les sous-ensembles $\pi^{-1}(p)$, $(p \in M)$, de E seront appelés les fibres de E. Soit E_1 un espace fibré différentiable au sens large de base E_2 et de projection π_1 et soit E_2 un espace fibré différentiable au sens large de base E_3 et de projection π_2. On voit alors que E_1 est un espace fibré au sens large de base E_3 et de projection $\pi_2 \circ \pi_1$.

DÉFINITION 2. Soit E un espace fibré différentiable au sens large de base M et de projection π et soient $\tilde{f}$ et f des isomorphismes locaux de E et de M respectivement. On dit que $\tilde{f}$ est un prolongement de f, s'il satisfait les conditions suivantes:

1) soient $\tilde{U}$ et U les sources de $\tilde{f}$ et de f respectivement; alors $\pi(\tilde{U}) = U$;

2) $\pi(\tilde{f}(x)) = f(\pi(x))$ pour $x \in \tilde{U}$.

Lorsque $\tilde{f}$ est un prolongement de f, nous désignons f par le symbole $f = \pi(\tilde{f})$.

LEMME 1. *Soient E un espace fibré différentiable au sens large de base M et $\tilde{f}$ un isomorphisme local de E. Si $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$ sont des applications qui préservent les fibres de E,*[5)] *$\tilde{f}$ est le prolongement d'un isomorphisme local de M.*

---

4) Notre définition de pseudogroupe est un peu différente de celle d'Ehresmann [3].

5) On dit qu'un isomorphisme local de E preserve les fibres de E, s'il applique tous les points d'une même fibre en lesquels il est défini sur des points d'une même fibre.

Nous omettons la démonstration.

DÉFINITION 3. Soit E un espace fibré différentiable au sens large de base M et de projection π et soient $\tilde{\mathfrak{G}}$ et $\mathfrak{G}$ des pseudogroupes sur E et M respectivement. On dit que $\tilde{\mathfrak{G}}$ est un prolongement de $\mathfrak{G}$, s'il vérifie les conditions suivantes:

1) chaque $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ est un prolongement d'un $f \in \mathfrak{G}$;

2) pour chaque $f \in \mathfrak{G}$, il existe au moins un $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ tel que $\tilde{f}$ soit un prolongement de f.

DÉFINITION 4. Les notations étant celles de la Définition 3, on dit que $\tilde{\mathfrak{G}}$ est un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}$, s'il vérifie les conditions suivantes:

1) $\tilde{\mathfrak{G}}$ est un prolongement de $\mathfrak{G}$;

2) pour chaque $f \in \mathfrak{G}$, il existe un $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ qui possède les propriétés suivantes: $\tilde{f}$ est un prolongement de f et tout élément de $\tilde{\mathfrak{G}}$ qui est un prolongement de f est une restriction de $\tilde{f}$; on dit que $\tilde{f}$ est le prolongement maximal de f dans $\tilde{\mathfrak{G}}$;

3) soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements maximaux dans $\tilde{\mathfrak{G}}$ d'éléments f et g de $\mathfrak{G}$; alors, si le produit $f \cdot g$ est *défini*, le produit $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ est aussi *défini* et $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ est un prolongement de $f \cdot g$; si g est une restriction de f, $\tilde{g}$ est une restriction de $\tilde{f}$;

4) si $f \in \mathfrak{G}$ est l'isomorphisme identique d'une partie ouverte de M, le prolongement maximal $\tilde{f}$ de f dans $\tilde{\mathfrak{G}}$ est aussi l'isomorphisme identique d'une partie ouverte de E.

On vérifie facilement la transitivité de la relation de prolongement.

Nous allons maintenant définir les notions d'isomorphisme et d'homomorphisme entre pseudogroupes.

Définition 5. Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$ des pseudogroupes sur des variétés différentiables M et M' respectivement. Lorsqu'il existe un pseudogroupe $\tilde{\mathfrak{G}}$ sur une variété différentiable E tel que $\tilde{\mathfrak{G}}$ soit un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}$ et de $\mathfrak{G}'$, on dit que $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$ sont isomorphes et on écrit $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$. Dans les conditions ci-dessus si $\tilde{\mathfrak{G}}$ est un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}$ et un prolongement (non nécessairement isomorphe) de $\mathfrak{G}'$ on dit que $\mathfrak{G}'$ est homomorphe à $\mathfrak{G}$ et on écrit $\mathfrak{G} \gtrsim \mathfrak{G}'$.

La relation d'isomorphisme est évidemment symétrique et reflexive.

§ **2.** Nous allons maintenant démontrer la transitivité des relations d'isomorphisme et d'homomorphisme.

LEMME 2. *Soient* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe sur une variété différentiable* M *et* N *une sous-variété*[6] *de* M *telle que l'espace topologique sous-jacent de* N *soit un sous-espace de celui de* M. *Supposons que, pour chaque* $f \in \mathfrak{G}$ *et chaque* $x \in U \cap N$, *où* U *est la source de* f, *l'image* $f(x)$ *appartienne à* N. *Soit* $\bar{f}$ *la restriction de* f *à* $U \cap N$. *Alors l'ensemble* $\bar{\mathfrak{G}}$ *de tous les* $\bar{f}$, $f \in \mathfrak{G}$, *est un pseudogroupe sur la variété* N.

LEMME 3. *Soient* E *et* E' *des espaces fibrés différentiables au sens large de base* M, $\tilde{\mathfrak{G}}$, $\tilde{\mathfrak{G}}'$ *et* $\mathfrak{G}$ *des pseudogroupes sur les variétés* E, E' *et* M *respectivement. Supposons que* $\tilde{\mathfrak{G}}$ *et* $\tilde{\mathfrak{G}}'$ *soient des prolongement de* $\mathfrak{G}$. *Il existe alors un pseudogroupe* $\mathfrak{H}$ *sur une variété différentiable* $\tilde{E}$ *qui vérifie les conditions suivantes:*

1) $\mathfrak{H}$ *est un prolongement de* $\tilde{\mathfrak{G}}$ *et* $\tilde{\mathfrak{G}}'$,

2) *si* $\tilde{\mathfrak{G}}'$ *(resp.* $\tilde{\mathfrak{G}}$*) est un prolongement isomorphe de* $\mathfrak{G}$, *alors* $\mathfrak{H}$ *est un prolongement isomorphe de* $\tilde{\mathfrak{G}}$ *(resp. de* $\tilde{\mathfrak{G}}'$*).*

Soit $\tilde{E}$ l'ensemble de tous les points (x, y) dans $E \times E'$ tels que $\pi(x) = \pi'(y)$, où π et π' sont les projections de E et de E' respectivement. Alors $\tilde{E}$ est une sous-variété fermée de $E \times E'$. Soient η l'application identique de $\tilde{E}$ dans $E \times E'$, ϖ_1 et ϖ_2 les projections canoniques de $E \times E'$ sur E et sur E' respectivement. Posons $\varpi = \varpi_1 \circ \eta$ et $\varpi' = \varpi_2 \circ \eta$. Alors ϖ et ϖ' sont des applications différentiables de $\tilde{E}$ sur E et sur E' respectivement. On voit que leurs rangs sont égaux à dim E et à dim E' respectivement. Il en résulte que $\tilde{E}$ est un espace fibré différentiable au sens large de base E et de projection ϖ. De même $\tilde{E}$ est un espace fibré au sens large de base E' et de projection ϖ'. Soit maintenant $\mathfrak{K}$ l'ensemble de tous les isomorphismes locaux $(\tilde{f}, \tilde{g})$ de $E \times E'$ tels que $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ et $\tilde{g} \in \tilde{\mathfrak{G}}'$ et qu'il existe un élément $h \in \mathfrak{G}$ possédant la propriété que $\pi(\tilde{f})$ et $\pi'(\tilde{g})$ sont les restrictions de h. En particulier, si $x \in \pi(\tilde{U}) \cap \pi'(\tilde{U})$, alors $(\pi(\tilde{f}))(x) = (\pi'(\tilde{g}))(x) = h(x)$, où $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont les sources de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$ respectivement. Soit $\tilde{\mathfrak{K}}$ l'ensemble de tous les isomorphismes locaux de $E \times E'$ qui sont des restrictions d'éléments de $\mathfrak{K}$. On peut voir sans difficulté que $\tilde{\mathfrak{K}}$ est un pseudogroupe sur $E \times E'$. Soient $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathfrak{K}$ et $(x, y) \in (\tilde{U} \times \tilde{V}) \cap \tilde{E}$, où $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont les sources de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$ respectivement. Alors $\pi(x) = \pi'(y) \in \pi(\tilde{U}) \cap \pi'(\tilde{V})$.

[6] Voir Chevalley [2], P. 85.

Donc $(\pi(\tilde{f}))(\pi(x)) = (\pi'(\tilde{g}))(\pi'(y))$, par suite $\pi(\tilde{f}(x)) = \pi'(\tilde{g}(y))$, et $(\tilde{f}(x), \tilde{g}(y)) \in \tilde{E}$. Soit maintenant $\mathfrak{H}$ l'ensemble des restrictions à $\tilde{E}$ d'éléments de $\tilde{\mathfrak{K}}$. Il résulte du Lemme 2 que $\mathfrak{H}$ est un pseudogroupe sur $\tilde{E}$. Chaque élément de $\mathfrak{H}$ préserve les fibres de $\tilde{E}$ par rapport à la structure d'espaces fibré au sens large de $\tilde{E}$ définie au-dessus. En effet, soit h un élément de $\mathfrak{H}$. On peut supposer que h est la restriction à $\tilde{E}$ d'un élément $(\tilde{f}, \tilde{g})$ de $\mathfrak{K}$. Supposons que h soit défini en des points (x, y) et (x', y') tels que $\varpi(x, y) = \varpi(x', y')$. Alors $x = x'$, $\varpi(h(x,y)) = \varpi(\tilde{f}(x), \tilde{g}(y)) = \tilde{f}(x)$ et $\varpi(h(x',y')) = \varpi(\tilde{f}(x'), \tilde{g}(y')) = \tilde{f}(x')$. Donc $\varpi(h(x,y)) = \varpi(h(x',y'))$. De plus, puisque $\mathfrak{H}$ est un pseudogroupe, pour chaque $h \in \mathfrak{H}$, h^{-1} appartient aussi à $\mathfrak{H}$. Donc tout $h \in \mathfrak{H}$ est un prolongement d'un isomorphisme local $\tilde{f}_1$ de E par le Lemme 1. Supposons que h soit la restriction à $\tilde{E}$ d'un élément $\tilde{h} \in \tilde{\mathfrak{K}}$ et que $\tilde{h}$ soit la restriction d'un élément $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathfrak{K}$. Soient $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ les sources de $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ respectivement. Il résulte de la définition de $\tilde{f}_1$ que $\tilde{U}_1 \subset \varpi((\tilde{U} \times \tilde{V}) \cap \tilde{E}) \subset \tilde{U}$. Soit $x \in \tilde{U}_1$; il existe alors un point (x, y) dans la source de h et on a $h(x,y) = (\tilde{f}(x), \tilde{g}(y))$. Donc $\tilde{f}_1(x) = \varpi(h(x, y)) = \tilde{f}(x)$. On voit donc que $\tilde{f}_1$ est une restriction de $\tilde{f}$. Puisque $\tilde{\mathfrak{G}}$ est un pseudogroupe et $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{G}}$, il en résulte que $\tilde{f}_1$ appartient à $\tilde{\mathfrak{G}}$. Réciproquement soit $\tilde{f}$ un élément dans $\tilde{\mathfrak{G}}$. Il existe alors un élément $\tilde{g}$ de $\tilde{\mathfrak{G}}'$ tel que $\pi(\tilde{f}) = \pi'(\tilde{g})$. Soit h la restriction à $\tilde{E}$ d'un élément $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathfrak{K}$. Alors $h \in \mathfrak{H}$ et on voit facilement que h est un prolongement de $\tilde{f}$. Il résulte de là que $\mathfrak{H}$ est un prolongement de $\tilde{\mathfrak{G}}$. On peut démontrer de manière analogue que $\mathfrak{H}$ est un prolongement de $\tilde{\mathfrak{G}}'$. Supposons maintenant que $\tilde{\mathfrak{G}}'$ soit un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}$. Nous allons montrer que $\mathfrak{H}$ est un prolongement isomorphe de $\tilde{\mathfrak{G}}$. Soit $f \in \mathfrak{G}$ et soit $g \in \tilde{\mathfrak{G}}'$ le prolongement maximal dans $\tilde{\mathfrak{G}}'$ de l'élément $\pi(f) \in \mathfrak{G}$. Soit h la restriction à $\tilde{E}$ de l'élément $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathfrak{K}$. Alors $h \in \mathfrak{H}$ et est un prolongement de $\tilde{f}$. Nous démontrerons que tout élément $h_1 \in \mathfrak{H}$ qui est un prologement de $\tilde{f}$ est une restriction de h. Soit h_1 la restriction à $\tilde{E}$ d'un élément $\tilde{h}_1 \in \tilde{\mathfrak{K}}$. Supposons que $\tilde{h}_1$ soit lui-même une restriction d'un élément $(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1) \in \mathfrak{K}$. Soient $\tilde{U}, \tilde{U}_1$, $\tilde{V}$ et $\tilde{V}_1$ les sources de $\tilde{f}, \tilde{f}_1$, $\tilde{g}$ et $\tilde{g}_1$ respectivement. On voit alors que $\varpi((\tilde{U} \times \tilde{V}) \cap \tilde{E}) = \tilde{U}$, $\tilde{U}_1 \supset \varpi((\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1) \cap \tilde{E}) \supset \tilde{U}$. Donc $\tilde{f}$ est une restriction de $\tilde{f}_1$. Soit $\tilde{W}$ la source de $\tilde{h}_1$. Alors $\tilde{W}$ est contenu dans $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$ et h_1 est défini sur l'ensemble $\tilde{W} \cap \tilde{E}$. Soit $\tilde{V}' = \varpi'(\tilde{W} \cap \tilde{E})$. Puisque $\pi \circ \varpi = \pi' \circ \varpi'$ et $\tilde{U} = \varpi(\tilde{W} \cap \tilde{E})$, on voit que $\pi(\tilde{U}) = \pi'(\tilde{V}')$. Évidemment $\tilde{V}'$ est un sous-ensemble de $\tilde{V}_1$. Soit $\tilde{g}_1'$ la restriction de $\tilde{g}_1$ à $\tilde{V}'$. Nous montrons que $\tilde{g}_1'$

est un prolongement de $\pi(\tilde{f})$. En effet, posons $f=\pi(\tilde{f})$ et soit y un point de $\tilde{V}'$. Il suffit de montrer que $\pi'(\tilde{g}_1'(y))=f(\pi'(y))$. Puisque $\pi(\tilde{U})=\pi'(\tilde{V}')$, il existe un élément $x\in\tilde{U}$ tel que $\pi(x)=\pi'(y)$. Donc $(x,y)\in(\tilde{U}\times\tilde{V}')\cap\tilde{E}$ et $(\tilde{f}_1(x),\ \tilde{g}_1(y))=(\tilde{f}(x),\ \tilde{g}_1'(y))\in\tilde{E}$. On voit donc que $\pi(\tilde{f}(x))=\pi'(\tilde{g}_1'(y))$. Puisque $\pi(\tilde{f}(x))=f(\pi(x))=f(\pi'(y))$, il en résulte que $\pi'(\tilde{g}_1'(y))=f(\pi'(y))$. Maintenant puisque $\tilde{g}$ est le prolongement maximal de $\pi(\tilde{f})$ dans $\tilde{\mathfrak{G}}'$, il résulte de ce que nous avons démontré que $\tilde{g}_1'$ est une restriction de $\tilde{g}$. Donc $(\tilde{f},\tilde{g}_1')$ est une restriction de $(\tilde{f},\tilde{g})$. De plus $(\tilde{f},\tilde{g}_1')$ est aussi une restriction de $(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1)$. Puisque $\tilde{W}\subset\tilde{U}\times\tilde{V}'$ et $\tilde{h}_1$ est la restriction de $(\tilde{f}_1,\ \tilde{g}_1)$ à $\tilde{W}$, il en résulte que $\tilde{h}_1<(\tilde{f},\tilde{g}_1')<(\tilde{f},\tilde{g})$. On a donc $h_1<h$, et h est le prolongement maximal dans $\mathfrak{H}$ de $\tilde{f}$. On peut vérifier facilement les autres conditions de la définition 4 utilisant notre construction des prolongements maximaux dans $\mathfrak{H}$ des élément de $\tilde{\mathfrak{G}}$. On voit donc que $\mathfrak{H}$ est un prolongement isomorphe de $\tilde{\mathfrak{G}}$. Supposant que $\tilde{\mathfrak{G}}$ soit un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}$, on peut démontrer de manière analogue que $\mathfrak{H}$ est un prolongement isomorphe de $\tilde{\mathfrak{G}}'$. Le Lemme 3 est donc démontré.

Utilisant le Lemme 3, on peut démontrer facilement le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soient $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{G}_3$ des pseudogroupes sur des variétés différentiables. Alors*

a) si $\mathfrak{G}_1\cong\mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{G}_2\cong\mathfrak{G}_3$, alors $\mathfrak{G}_1\cong\mathfrak{G}_3$;

b) si $\mathfrak{G}_1\precsim\mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{G}_2\precsim\mathfrak{G}_3$, alors $\mathfrak{G}_1\precsim\mathfrak{G}_3$.

§3. Soit maintenant G un groupe de Lie. Désignons par $L(g)$ la translation à gauche de G par l'élément g de G. On désigne par $\mathfrak{G}(G)$ l'ensemble de tous les isomorphismes locaux de G qui sont des restrictions de translations à gauche de G. Évidemment $\mathfrak{G}(G)$ est un pseudogroupe sur la variété G. On appelle $\mathfrak{G}(G)$ le pseudogroupe associé au groupe de Lie G. Nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Soient G_1 et G_2 des groupes de Lie. Alors*

a) $\mathfrak{G}(G_1)\cong\mathfrak{G}(G_2)$, si et seulement si $G_1\cong G_2$ (algébriquement);

b) $\mathfrak{G}(G_1)\precsim\mathfrak{G}(G_2)$, si et seulement si $G_1\precsim G_2$ (algébriquement),

où "algébriquement" signfie l'isomorphisme (resp. l'homomorphisme) comme groupes abstraits.

En effet, supposons que $\mathfrak{G}(G_1)\precsim\mathfrak{G}(G_2)$. Il existe alors un pseudogroupe $\mathfrak{H}$

opérant sur une variété E qui est un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}(G_1)$ et un prolongement de $\mathfrak{G}(G_2)$. Soient π_1 et π_2 les projections de E sur G_1 et sur G_2 respectivement. Désignons par $f(g_1)$ le prolongement maximal dans $\mathfrak{H}$ de la translation à gauche $L(g_1)$ de G_1. Supposons que $\pi_2(f(g_1))$ soit une restriction d'une translation à gauche $L(g_2)$ de G_2 et posons $g_2 = \varphi(g_1)$. Alors φ est une application de G_1 dans G_2. Puisque $L(g_1) \cdot L(h_1) = L(g_1 \cdot h_1)$, le produit $f(g_1) \cdot f(h_1)$ est *défini* (i.e. $f(g_1) \cdot f(h_1)$ est défini sur une partie non vide de E.) Puisque $\pi_1(f(g_1) \cdot f(h_1)) = \pi_1(f(g_1)) \cdot \pi_1(f(h)) = L(g_1)L(h_1) = L(g_1 \cdot h_1)$, $f(g_1) \cdot f(h_1)$ est une restriction de $f(g_1 \cdot h_1)$. Donc $\pi_2(f(g_1) \cdot f(h_1)) < \pi_2(f(g_1 \cdot h_1)) < L(\varphi(g_1 \cdot h_1))$. D'autre part $\pi_2(f(g_1) \cdot f(h_1)) < \pi_2(f(g_1)) \cdot \pi_2(f(h_1)) < L(\varphi(g_1)) \cdot L(\varphi(h_1)) = L(\varphi(g_1) \cdot \varphi(h_1))$. Il résulte de là que $L(\varphi(g_1 \cdot h_1))$ et $L(\varphi(g_1) \cdot \varphi(h_1))$ coincident sur une partie ouverte non vide de G_2. On voit donc que $\varphi(g_1 \cdot h_1) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(h_1)$. Soit maintenant $k(g_2) \in \mathfrak{H}$ un prolongement de la translation à gauche $L(g_2)$ de G_2. Supposons que $\pi_1(k(g_2))$ soit une restriction d'une translation à gauche $L(g_1)$ de G_1. Alors il est clair que $k(g_2)$ est une restriction de $f(g_1)$. Donc $\pi_2(f(g_1)) = L(g_2)$. Il resulte de ce que nous avons démontré que φ est un homomorphisme de G_1 sur G_2. Supposons maintenant que $\mathfrak{H}$ soit aussi un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}(G_2)$ et que $\varphi(g_1) = e$, où e est l'élément neutre de G_2. Il en résulte que $\pi_2(f(g_1))$ est un isomorphisme identique et puisque $\mathfrak{H}$ est un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}(g_2)$, on voit que $f(g_1)$ est un isomorphisme identique. Donc $L(g_1) = \pi_1(f(g_1))$ est aussi un isomorphisme identique. Il résulte de là que g_1 est l'élément neutre de G. Donc φ est un isomorphisme. Réciproquement supposons que φ soit un homomorphisme du groupe abstrait sous-jacent de G_1 sur celui de G_2. Soit $G = G_1 \times G_2$ et soit $\mathfrak{H}$ l'ensemble de tous les isomorphismes locaux de la variété G qui sont des restrictions de translations à gauche $L(g_1, \varphi(g_1))$ de G, où g_1 parcourt G_1. $\mathfrak{H}$ est èvidemment un pseudogroupe sur G. On peut voir facilement que $\mathfrak{H}$ est un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}$ (G_1) et un prolongement de $\mathfrak{G}(G_2)$. Il en résulte que $\mathfrak{G}(G_1) \gtrsim \mathfrak{G}(G_2)$. De plus, si φ est un isomorphisme, $\mathfrak{H}$ est aussi un prolongement isomorphe de $\mathfrak{G}(G_2)$; on obtient alors un isomorphisme $\mathfrak{G}(G_1) \cong \mathfrak{G}(G_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] É. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. Éc. Norm. t. **21**, 1904.
[2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton, 1946.

[3] C. Ehresmann, Sur la théorie des espaces fibrés, Colloque international de topologie algébrique, Paris, 1947.

Institut de Mathematiques
Université de Nagoya