M. Itô.
Nagoya Math. J.
Vol. 44 (1971), 61–77

NOYAUX DE CONVOLUTION REGULIERS ET NOYAUX DE CONVOLUTION SINGULIERS

MASAYUKI ITO

1. Introduction

Soient X un groupe abélien localement compact et non-compact, et dx sa mesure de Haar. Rappelons qu'un noyau de convolution N sur X est une mesure de Radon positive dans X. Il est symétrique s'il est symétrique par rapport à l'origine. Notons M_K la totalité de fonctions mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact. On dit que N est de type positif si, quelle que soit f une fonction de M_K, $N*f*\check{f}(0)\geqq 0$, où $\check{f}(x)=f(-x)$ et la signe $*$ est la convolution sur X.

On connaît qu'à un noyau de convolution N symétrique et de type positif sur X, on peut associer un espace fonctionnel H invariant par translations sur X, et un seul tel que, quelle que soit f une fonction de M_K, le potentiel de f dans H soit égal à la densité de la convolution $N*f$. On appelle H l'espace fonctionnel associé à N, qui s'écrit précisément $H=H(N)$.

Soit N un noyau de convolution symétrique et de type positif sur X. Il est dit d'être régulier si $H(N)\cap C_K$ est dense dans $H(N)$ et dans C_K, où C_K est l'espace des fonctions finies et continues dans X, à support compact, et muni de la topologie usuelle. On dit que N est singulier si $H(N)\cap C_0=\{0\}$, où C_0 est la totalité des fonctions numériques, continues dans X et s'annulant à l'infini.

Cette note sera principalement consacrée à la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME. *Soient N et N' un noyau de convolution régulier sur X et un noyau de convolution singulier sur X, respectivement. Alors, pour que $N+N'$ satisfasse au principe de domination, il faut et il suffit que N soit un noyau de Dirichlet*

Received January 21, 1971

sur X et que N' soit périodique à tout le point du support S_N de N et satisfasse au principe de domination[1].

On obtiendra donc que si S_N est égal à X, N' est toujours constant. En l'appliquant, on arrive au corollaire suivant:

Corollaire. *On suppose qu'il n'existe aucun sous-groupe compact de X sauf* $\{0\}$. *Si un noyau de convolution symétrique N sur X satisfait au principe de domination, il est alors de la forme $N = N_r + N_s$, où N_r est un noyau de Dirichlet sur X ou zéro, et où N_s est un noyau de convolution singulier sur X et qui est périodique à tout le point de S_{N_r} et satisfait au principe de domination.*

Cela est une amélioration du résultat de l'autre note [5].

2. Préliminaire

On commencera d'abord avec la définition d'un espace fonctionnel invariant par translations sur X (au sens de A. Beurling et J. Deny) (voir [1]).

Définition 1. Un espace hilbertien H s'appelle un *espace fonctionnel invariant par translations sur X* si tout l'élément de H est une fonction localement sommable dans X et à valeurs réelles, et si les deux conditions sont satisfaites:

(a) A un compact K de X, on peut associer une constante non-négative $A(K)$ telle que l'on ait, quelle que soit u de H,

$$\int_K |u|\, dx \leqq A(K)\|u\|. \tag{1}$$

(b) Pour une fonction u de H et pour un point x de X, la fonction $U_x u$ obtenue de u par la translation de x appartient à H et on a $\|U_x u\| = \|u\|$.

Plus précisément, l'élément de H est une classe des fonctions qui sont égaux localement presque partout. On désigne respectivement par $\|\cdot\|$ et $(\cdot, \cdot)$ la norme de H et le produit scalaire associé. D'après la condition (a), on obtient que, pour une fonction f de M_K, il existe un élément u_f de H, et un seul tel que l'on ait, quelle que soit v de H,

$$(u_f, v) = \int v f\, dx, \tag{2}$$

[1] On dit que N' est périodique à un point x de X si $N' = N' * \varepsilon_x$, où ε_x est la mesure de Dirac à x.

et u_f s'appelle le potentiel de f dans H. Si l'on a, quelle que soit f une fonction non-négative de M_K, $u_f \geqq 0$, H est dit d'être à noyau positif. Cette terminologie est très résonable, car on connaît bien qu'à un noyau de convolution N symétrique et de type positif sur X (resp. à un espace fonctionnel H invariant par translations sur X et à noyau positif), on peut associer un espace fonctionnel H invariant par translations sur X et à noyau positif (resp. un noyau de convolution N symétrique et de type positif sur X), et un seul tel que, quelle que soit f une fonction de M_K, le potentiel de f dans H soit égal à la densité de $N*f$. En ce moment, H s'appelle l'espace fonctionnel associé au noyau N et s'écrit $H = H(N)$, et N s'appelle le noyau de H.

PROPOSITION 1. *Soient N_1 et N_2 noyaux de convolution symétriques et de type positif sur X, et soient H_1 et H_2 respectivement les espaces fonctionnels associés à N_1 et à N_2. Alors, l'espace fonctionnel H associé au noyau $N = N_1 + N_2$ est égal à $\{u_1 + u_2;\ u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2\}$. En particulier, si $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, on a $H = H_1 \oplus H_2$, où $\oplus$ est la somme directe.*

Démonstration. Pour une fonction f de M_K, on désigne respectivement par $u_f^{(i)}$ et u_f les potentiels de f dans H_i $(i = 1, 2)$ et dans H. Ils sont évidemment égaux aux densités de N_i*f et de $N*f$. Les produits scalaires dans H_i et dans H sont désignés respectivement par $(\cdot, \cdot)_i$ et par $(\cdot, \cdot)$, et on utilise les notations analogues pour leurs normes. On a, quelle que soit g de M_K,

$$\left|\int u_f^{(i)} g\, dx\right| \leqq \left(\int u_f^{(i)} f\, dx\right)^{1/2} \left(\int u_g^{(i)} g\, dx\right)^{1/2} = \|u_f^{(i)}\|_i \cdot \|u_g^{(i)}\|_i \leqq \|u_f^{(i)}\|_i \cdot \|u_g\|, \tag{3}$$

et donc, on peut définir une fonctionnelle linéaire et bornée L sur H, telle que, quelle que soit g de M_K,

$$L(u_g) = \int u_f^{(i)} g\, dx, \tag{4}$$

car l'ensemble $\{u_g \in H;\ g \in M_K\}$ est dense dans H. D'après le théorème de Riesz, il existe une fonction u de H telle que, quelle que soit g de M_K,

$$\int u\, g\, dx = (u, u_g) = L(u_g) = \int u_f^{(i)} g\, dx, \tag{5}$$

et par suite, $u = u_f^{(i)}$, d'où $u_f^{(i)} \in H$ et $\|u_f^{(i)}\| \leqq \|u_f^{(i)}\|_i$ $(i = 1, 2)$. Soit u une fonction de H_i, il existe alors une suite (f_n) de M_K telle que la suite $(u_{f_n}^{(i)})$

converge fortement vers u dans H_i avec $n \to \infty$. On a

$$\|u^{(i)}_{f_n} - u^{(i)}_{f_m}\| \leqq \|u^{(i)}_{f_n} - u^{(i)}_{f_m}\|_i \tag{6}$$

et par suite, $(u^{(i)}_{f_n})$ est fondamentale dans H. La suite $(u^{(i)}_{f_n})$ converge, d'autre part, vers u localement presque partout dans X, d'où $u \in H$ et $\|u\| \leqq \|u\|_i$. Par conséquent, $H \supset \{u_1 + u_2;\ u_1 \in H_1 \text{ et } u_2 \in H_2\}$.

Montrons ensuite l'inclusion inverse. Soit u une fonction de H. Il existe alors une suite (f_n) de M_K telle que la suite (u_{f_n}) converge fortement vers u dans H avec $n \to \infty$. On a

$$\|u_{f_n}\|^2 = \int (u^{(1)}_{f_n} + u^{(2)}_{f_n}) f_n dx \geqq \|u^{(i)}_{f_n}\|_i \ (i = 1, 2), \tag{7}$$

et donc, $(u^{(i)}_{f_n})$ est fondamentale dans H_i $(i = 1, 2)$. Par conséquent, il existe une fonction u_i de H_i telle que $(u^{(i)}_{f_n})$ converge fortement vers u_i dans H_i. On a ainsi $u = u_1 + u_2$, et la démonstration est complète.

Corollaire 1. *Soient N_1 et N_2 respectivement un noyau de convolution régulier sur X et un noyau de convolution singulier sur X. Alors, l'espace fonctionnel associé au noyau $N_1 + N_2$ est $H_1 \oplus H_2$, où H_i est l'espace fonctionnel au noyau N_i.*

En effet, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, car, pour une fonction u de $H_1 \cap H_2$, on a, quelle que soit φ de C_K, $u*\varphi*\check{\varphi} \in H_1 \cap H_2 \cap C_0$, d'où $u = 0$.

Définition 2. Un noyau de convolution N sur X *satisfait au principe de domination* si, quelles que soient $f \geqq 0$, $g \geqq 0$ de M_K, l'inégalité $N*f \leqq N*g$ est satisfaite localement presque partout sur X dès qu'elle l'est presque partout sur $\{x \in X;\ f(x) > 0\}$.

Proposition 2. *Si un noyau de convolution symétrique N sur X satisfait au principe de domination, il est alors de type positif.*

Voir [6].

Proposition 3 (*le balayage*). *Soit N un noyau de convolution symétrique sur X, et soit H l'espace fonctionnel associé au noyau N. Si N satisfait au principe de domination et si $H \cap C_K$ est dense dans C_K, alors, à un ouvert relativement compact ω de X, on peut associer une mesure de Radon positive ε' portée par $\bar{\omega}$, et une seule telle que l'on ait:*

(1) *$N \geqq N * \varepsilon'$ au sens des mesures dans X.*

(2) *$N = N * \varepsilon'$ au sens des mesures dans ω.*

(3) *Quelle que soit* μ *une mesure de Radon positive dans* X *et portée par* $\bar{\omega}$, $N*\mu \geqq N*\varepsilon'$ *dès que* $N*\mu \geqq N$ *au sens des mesures dans* ω.

En particulier si N *est régulier, la proposition ci-dessus a lieu pour un ouvert quelconque de* X.

On dit que ε' est la mesure balayée de la mesure de Dirac ε à l'origine sur ω relativement au noyau N, et on a évidemment $\int d\varepsilon' \leqq 1$.

G. Choquet et J. Deny [3] montre l'existence de la mesure satisfaisant aux conditions (1) et (2). Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts de X et telle que $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega$ et $\bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \omega$, et soit ε'_α une mesure de Radon positive dans X, portée par $\bar{\omega}_\alpha$ et telle que l'on ait $N \geqq N*\varepsilon'_\alpha$ au sens des mesures dans X et $N = N*\varepsilon'_\alpha$ au sens des mesures dans ω_α. Alors, il existe un voisinage V de l'origine tel que, quelle que soit $\varphi \geqq 0$ de C_K à support $\subset V$ et quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X et portée par $\bar{\omega}$,

$$N*\mu*\varphi(x) \geqq N*\varepsilon'_\alpha * \varphi(x) \tag{8}$$

dans X dès que $N*\mu \geqq N$ au sens des mesures dans ω, d'où $N*\mu \geqq N*\varepsilon'_\alpha$. Soit ε' un point vaguement adhérent de $(\varepsilon'_\alpha)_{\alpha \in A}$, il est alors une mesure de Radon positive dans X, portée par $\bar{\omega}$ et qui satisfait aux conditions (1), (2) et (3).

Montrons finalement l'unicité de ε'. Soit ε'' une autre mesure de Radon positive dans X, portée par $\bar{\omega}$ et qui satisfait aux conditions (1), (2) et (3). On a alors $N*\varepsilon' = N*\varepsilon''$ au sens des mesures dans X, et donc, quelle que soit φ de $C_K \cap H$ et quelle que soit f de M_K,

$$\int \varphi\varepsilon' * f\, dx = \int \varphi\varepsilon'' * f\, dx, \tag{9}$$

d'où $\varepsilon' = \varepsilon''$.

Lorsque N est régulier, il est bien connu que, pour un ouvert quelconque ω de X, il existe une mesure de Radon positive dans X, portée par $\bar{\omega}$ et qui satisfait aux conditions (1) et (2) (voir [3]), et on arrive à la conclusion de la même manière que ci-dessus.

On appelle "contraction normale" de la droite réelle R toute transformation T qui diminue la distance et conserve l'origine.

Un espace fonctionnel invariant par translations H sur X s'appelle un espace de Dirichlet spécial sur X s'il est régulier et si, quelle que soit u de H et quelle que soit T une contraction normale de R, on a $T \cdot u \in H$ et

$\|T\cdot u\| \leqq \|u\|$, et son noyau s'appelle un noyau de Dirichlet sur X. Il est égal à un noyau régulier satisfaisant au principe de domination (ou au principe du balayage).

3. La démonstration du théorème principal

LEMME 1. *Soient N et N' respectivement un noyau de convolution régulier sur X et un noyau de couvolution singulier sur X. Si $N+N'$ satisfait au principe de domination, alors, N y satisfait.*

En effet, soit H l'espace fonctionnel associé au noyau $N+N'$, et soit H_1 l'espace fonctionnel associé au noyau N. Alors, d'après la proposition 1, H_1 est un sous-espace fermé de H et qui contient $C_K \cap H$. Pour une fonction u de H_1, il existe une suite (φ_n) de $C_K \cap H$ qui converge fortement vers u dans H (et aussi dans H_1). Pour une contraction normale T de R, $T\cdot\varphi_n$ appartient à H_1 et on a

$$\|T\cdot\varphi_n\|_{H_1} = \|T\cdot\varphi_n\|_H \leqq \|\varphi_n\|_H = \|\varphi_n\|_{H_1}. \tag{10}$$

Faisant $n\to\infty$, on a $T\cdot u \in H_1$ et $\|T\cdot u\|_{H_1} \leqq \|u\|_{H_1}$, et par suite, H_1 est un espace de Dirichlet spécial sur X.

LEMME 2. *Soient N et N' les mêmes que ci-dessus, et soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts de X et telle que le complément de $\omega = \bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha$ soit compact. Si $N+N'$ satisfait au principe de domination, alors, la famille $(\varepsilon'_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge vaguement vers ε'_ω, où ε'_α est la mesure balayée de sur ω_α relativement au noyau $N+N'$, et où ε'_ω est la mesure balayée de ε sur ω relativement au noyau N.*

En effet, la famille $((N+N')*\varepsilon'_\alpha)_{\alpha\in A}$ est évidemment filtrante à droite, et donc, pour une fonction $\varphi \geqq 0$ de C_K et pour $\alpha<\beta$,

$$\|(N+N')*(\varepsilon'_\beta-\varepsilon'_\alpha)*\varphi\|_H^2 \leqq \|(N+N')*\varepsilon'_\beta*\varphi\|_H^2 - \|(N+N')*\varepsilon'_\alpha*\varphi\|_H^2, \tag{11}$$

où H est l'espace fonctionnel associé au noyau $N+N'$ et $\|\cdot\|_H$ est sa norme. Par conséquent, il existe une fonction u de H et à support compact, telle que la famille

$$((N+N')*\varphi-(N+N')*\varepsilon'_\alpha*\varphi)_{\alpha\in A} \tag{12}$$

converge fortement vers u dans H. Il en résulte encore que $(\varepsilon'_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ' dans X. On a, quelle que soit v une fonction de l'espace fonctionnel H_1 associé au noyau N,

$$
\begin{aligned}
(u, v)_{H_1} = (u, v)_H &= \lim_{\alpha\in A}((N+N')*\varphi - (N+N')*\varepsilon'_\alpha*\varphi, v)_H \\
&= \lim_{\alpha\in A}\Big(\int v\varphi dx - \int v\varepsilon'_\alpha*\varphi\, dx\Big) = \int v\varphi\, dx - \int v\mu'*\varphi\, dx \\
&= (N*\varphi - N*\mu'*\varphi, v)_{H_1},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

et par suite, $u = N*\varphi - N*\mu'*\varphi$. Par conséquent, μ' est portée par $\bar{\omega}$ et on a $N \geqq N*\mu'$ au sens des mesures dans X et $N = N*\mu'$ au sens des mesures dans ω, d'où $N*\mu' \geqq N*\varepsilon'_\omega$.

Montrons réciproquement $N*\mu' \leqq N*\varepsilon'_\omega$. D'après l'égalité $\lim_{\alpha\in A}(N' - N'*\varepsilon'_\alpha) = 0$, il suffit de montrer l'inégalité

$$N*\varepsilon'_\omega + N' \geqq N*\varepsilon'_\alpha + N'*\varepsilon'_\alpha \tag{14}$$

au sens des mesures dans X. On peut supposer, en ce cas, que $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega$ (cf. la proposition 3). Soit ω' un ouvert de X qui contient $\bar{\omega}_\alpha$, tel que $\mathscr{C}\omega'$ soit compact et son intérieur contienne $\mathscr{C}\omega$, et soit μ'' une mesure de Radon positive dans X et obtenue pour ω' de la manière ci-dessus. On a évidemment $N*\mu'' + N' \geqq N*\varepsilon'_\alpha + N'*\varepsilon'_\alpha$ au sens des mesures dans X et $N*\varepsilon'_\omega \geqq N*\mu''$, d'où (14). On arrive ainsi à l'égalité $\mu' = \varepsilon'_\omega$, d'ou notre lemme.

LEMME 3. *Soint N et N' les mêmes que ci-dessus. On suppose encore que $N+N'$ satisfait au principe de domination et le support S_N de N est non-compact. Alors, pour qu'une fonction bornée u de H appartienne à H_2, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit K un compact de X,*

$$\Big(\int d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}\Big)u = u*\varepsilon'_{\mathscr{C}K}, \tag{15}$$

où H et H_2 sont les espaces fonctionnels associés au noyau $N+N'$ et au noyan N', et où $\varepsilon'_{\mathscr{C}K}$ est la meaure balayée de ε sur $\mathscr{C}K$ relativement au noyau N.

En effet, soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts de X et avec $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha = \mathscr{C}K$, et soit ε'_α la mesure balayée de ε sur ω_α relativement au noyau $N+N'$. On a alors, quelle que soit φ de C_K,

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\alpha\in A} N'*\varphi*\check{\varphi}*(\varepsilon - \varepsilon'_\alpha)(0) \\
&= \lim_{\alpha\in A}\int|\hat{\varphi}(\hat{x})|^2(1-\hat{\varepsilon}'_{\mathscr{C}K}(\hat{x}))d\nu'(\hat{x}) \geqq \int|\hat{\varphi}(\hat{x})|^2(\hat{\varepsilon}'_{\mathscr{C}K}(\hat{0}) - \hat{\varepsilon}'_{\mathscr{C}K}(\hat{x}))d\nu'(\hat{x}),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

où la signe ^ est la transformation de Fourier dans X et ν' est la transformation de Fourier de N'. On a donc

$$\left(\int d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}\right)N'*\varphi*\check{\varphi} = N'*\varphi*\check{\varphi}*\varepsilon'_{\mathscr{C}K}, \tag{17}$$

d'où la condition est nécessaire.

Montrons ensuite que la condition est suffisante. Le support S_N étant non-compact, on a, quel que soit K un compact de X, $\varepsilon'_{\mathscr{C}K} \neq 0$. Soit u' la projection de u sur H_2, on a alors, quelle que soit φ de C_K,

$$\lim_{x\to\infty}(u-u')*\varphi*\check{\varphi}(x) = 0. \tag{18}$$

En appliquant le résultat montré ci-dessus et d'après notre condition pour u, on a, quel que soit K un compact de X,

$$\left(\int d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}\right)(u-u')*\varphi*\check{\varphi} = (u-u')*\varphi*\check{\varphi}*\varepsilon'_{\mathscr{C}K}, \tag{19}$$

et par suite,

$$(u-u')*\varphi*\check{\varphi}(x) = \lim_{K\uparrow X}\frac{1}{\int d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}}\int(u-u')*\varphi*\check{\varphi}(x-y)d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}(y) = 0, \tag{20}$$

d'où $u = u'$.

LEMME 4. *Soit N un noyau de Dirichlet, on a alors*

$$S_N = Ad(\cup\{S_{(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n}\,;\,K \textit{ est compact, } n \textit{ est un entier} > 0\}), \tag{21}$$

où

$$(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n = (\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^{n-1}*\varepsilon'_{\mathscr{C}K}. \tag{22}$$

Pour un ensemble U, on désigne par $Ad(U)$ l'adhérent de U. On a d'abord $N \geqq N*(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n$ et S_N contient 0, et par suite, $S_N \supset S_{(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n}$, d'où

$$S_N \supset \mathrm{Ad}(\cup\{S_{(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n}\,;\,K \text{ est compact, } n \text{ est un entier} > 0\}). \tag{23}$$

Réciproquement, il existe une famille filtrante $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ à gauche de compacts de X et une famille $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ de nombres > 0 tels que, quelle que soit φ de C_K,

$$\lim_{\alpha\in A} a_\alpha\int\varphi d\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}K_\alpha})^n = \int\varphi dN, \tag{24}$$

où $(\cdot)^0 = \varepsilon$. D'après $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha = \{0\}$, on a

$$S_N = \mathrm{Ad}(\cup\{S_{(\varepsilon'_{\mathscr{C}K_\alpha})^n}\,;\,\alpha\in A\}), \tag{25}$$

d'où notre lemme.

LEMME 5. *Soient N et N' les mêmes que ci-dessus. On suppose aussi que $N+N'$ satisfait au principe de domination et que S_N est compact. Alors, quelles que soient f, $g\geqq 0$ de C_K, l'inégalité $(N+N')*f\leqq N'*g$ est satisfaite partout dans X dès qu'elle l'est sur S_f.*

Il suffit de supposer que $(N+N')*f(x)<N'*g(x)$ sur S_f. S'il existe un point de X où la fonction $N'*g(x)-(N+N')*f(x)$ prend la valeur négative, on peut alors choisir un point x_0 de $S_{(N*g)}\cap\mathscr{C}S_f$ tel que

$$N'*g(x_0)-N'*f(x_0)-N'*f(x_0)=\min_{x\in X}(N'*g(x)-N*f(x)-N'*f(x)), \tag{26}$$

car, d'après le principe de domination pour $N+N'$, $(N+N')*f(x)\leqq(N+N')*g(x)$ partout dans X et $S_{(N*g)}$ est compact. Posons

$$\omega=\mathscr{C}\overline{\{x\in X\,;\,N'*g(x)<N*f(x)+N'*f(x)\}} \tag{27}$$

et soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts de X et avec $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha=\omega$. On a alors, quel que soit $\alpha\in A$,

$$\int(N'*g-N*f-N'*f)d(\varepsilon_{x_0}-\varepsilon'_{x_0,\alpha})\leqq N'*g(x_0)-N*f(x_0)-N'*f(x_0)<0, \tag{28}$$

où $\varepsilon'_{x_0,\alpha}$ est la mesure balayée de la mesure de Dirac ε_{x_0} au point x_0 sur ω_α relativement au noyau $N+N'$. D'après l'égalité $(N+N')*f(x)\leqq(N+N')*g(x)$ sur X, on a $\mathscr{C}\omega\subset S_{(N*g)}$, et donc, $\mathscr{C}\omega$ est compact. Par conséquent,

$$\lim_{\alpha\in A}\int(N'*g(x)-N'*f(x))d(\varepsilon_{x_0}-\varepsilon'_{x_0,\alpha})(x)=0, \tag{29}$$

et

$$\lim_{\alpha\in A}\int N*f(x)d(\varepsilon_{x_0}-\varepsilon'_{x_0,\alpha})(x)=N*f(x_0)-\int N*f(x)d\varepsilon'_{x_0,\omega}(x)=0, \tag{30}$$

car $\omega\supset S_f$, où $\varepsilon'_{x_0,\omega}$ est une mesure balayée de ε_{x_0} sur ω relativement au noyau N. Mais c'est en contradiction avec (28), d'où $N*f(x)+N'*f(x)\leqq N'*g(x)$ sur X.

Démonstration du théorème. On montre d'abord que la condition est suffisante. Pour deux fonctions $\varphi_1 \geqq 0$ et $\varphi_2 \geqq 0$ de C_K, on pose

$$u = \inf((N+N')*\varphi_1,\ (N+N')*\varphi_2) - \inf(N'*\varphi_1,\ N'*\varphi_2). \tag{31}$$

Pour $i = 1, 2$, on a alors, quel que soit K un compact de X et quel que soit x_0 de K,

$$\begin{aligned}
&\int (N+N')*\varphi_i \ d\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K} - \int \inf(N'*\varphi_1,\ N'*\varphi_2) d\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K} \\
&= \int N*\varphi_i \ d\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K} + \int (N'*\varphi_i - \inf(N'*\varphi_1,\ N'*\varphi_2)) d\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K} \\
&\leqq N*\varphi_i(x_0) + \left(\int d\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K}\right)(N'*\varphi_i(x_0) - \inf(N'*\varphi_1(x_0),\ N'*\varphi_2(x_0)) \\
&\leqq N*\varphi_i(x_0) + N'*\varphi_i(x_0) - \inf(N'*\varphi_1(x_0),\ N'*\varphi_2(x_0)),
\end{aligned} \tag{32}$$

où $\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K}$ est la mesure balayée de ε_{x_0} sur $\mathscr{C}K$ relativement au noyau N, et donc

$$u(x_0) \geqq \int u(x) d\varepsilon'_{x_0,\mathscr{C}K}(x). \tag{33}$$

D'autre part, $u \leqq \sup(N*\varphi_1,\ N*\varphi_2)$ et $\sup(N*\varphi_1,\ N*\varphi_2)$ appartient à l'espace fonctionnel H_1 associé au noyau N, car les contractions normales opérent dans H_1. On a, quelle que soit $\varphi \geqq 0$ de $H_1 \cap C_K$, $u*\varphi \in H_1$, et d'après (33),

$$\|u*\varphi\|_{H_1}^2 \leqq (u*\varphi,\ \sup(N*\varphi_1,\ N*\varphi_2)*\varphi)_{H_1}, \tag{34}$$

et par suite,

$$\|u*\varphi\|_{H_1} \leqq \|\sup(N*\varphi_1,\ N*\varphi_2)*\varphi\|_{H_1}. \tag{35}$$

D'après le fait que $H_1 \cap C_K$ est dense dans C_K, u appartient à H_1 et

$$|(N+N')*(\varphi_1 - \varphi_2)| - |N'*(\varphi_1 - \varphi_2)| \in H_1. \tag{36}$$

On a

$$\big|\,|(N+N')*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| - |N'*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)|\,\big| \leqq |N*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \tag{37}$$

et, quels que soient x et y respectivement de X et de S_N,

$$\begin{aligned}
&\big|\,|(N+N')*(\varphi_1 - \varphi_2)(x+y)| - |(N+N')*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \\
&\quad - |N'*(\varphi_1 - \varphi_2)(x+y)| + |N'*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)|\,\big| \\
&\leqq |N*(\varphi_1 - \varphi_2)(x+y) - N*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \\
&\quad + 2|N'*(\varphi_1 - \varphi_2)(x+y) - N'*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \\
&= |N*(\varphi_1 - \varphi_2)(x+y) - N*(\varphi_1 - \varphi_2)(x)|.
\end{aligned} \tag{38}$$

Soit $(N_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ famille résolvante des noyaux de convolution sur X et telle que $N_0 = N$ (cf. [1]), l'inégalité (38) a lieu aussi pour y de S_{N_λ}, car $N_\lambda \leqq N$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\| \, |(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)| - |N'*(\varphi_1-\varphi_2)| \, \|_{H_1}^2 \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\Big(\lambda\int \big| \, |(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)| - |N'*(\varphi_1-\varphi_2)| \, \big|^2 \Big(1-\lambda\int dN_\lambda\Big)dx \\
&+\frac{1}{2}\lambda\iint \big| \, |(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)(x+y)| - |N'*(\varphi_1-\varphi_2)(x+y)| \\
&- |(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)(x)| + |N'*(\varphi_1-\varphi_2)(x)| \, \big|^2 \lambda dN_\lambda(y)dx\Big) \\
&\leqq \lim_{\lambda\to\infty}\Big(\lambda\int |N*(\varphi_1-\varphi_2)|^2\Big(1-\lambda\int dN_\lambda\Big)dx + \frac{1}{2}\lambda\iint |N*(\varphi_1-\varphi_2)(x+y) \\
&\qquad -N*(\varphi_1-\varphi_2)(x)|^2\lambda dN_\lambda(y)dx\Big) \\
&= \|N*(\varphi_1-\varphi_2)\|_{H_1}^2,
\end{aligned} \tag{39}$$

et par suite, $|(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)|$ appartient à l'espace fonctionnel H associé au noyau $N+N'$. On a ensuite

$$\begin{aligned}
&\| \, |(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)| \, \|_H^2 \\
&= \| \, |(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)| - |N'*(\varphi_1-\varphi_2)| \, \|_{H_1}^2 + \| \, |N'*(\varphi_1-\varphi_2)| \, \|_{H_2}^2 \\
&\leqq \|N*(\varphi_1-\varphi_2)\|_{H_1}^2 + \|N'*(\varphi_1-\varphi_2)\|_{H_2}^2 \\
&\quad = \|(N+N')*(\varphi_1-\varphi_2)\|_H^2,
\end{aligned} \tag{40}$$

où H_2 est l'espace fonctionnel associé au noyau N'. Pour une fonction u de H, il existe une suite (φ_n) de C_K telle que $((N+N')*\varphi_n)$ converge fortement vers u dans H avec $n\to\infty$. La suite $(|(N+N')*\varphi_n|)$ étant bornée dans H et convergeant vers $|u|$ localement presque partout dans X, on a $|u|\in H$ et

$$\| \, |u| \, \|_H \leqq \varliminf_{n\to\infty} \| \, |(N+N')*\varphi_n| \, \|_H \leqq \lim_{n\to\infty} \|(N+N')*\varphi_n\|_H = \|u\|_H. \tag{41}$$

La contraction module de R opére dans H, d'où $N+N'$ satisfait au principe de domination[2)].

Montrons que la condition est nécessaire. Il est déjà connu que N satisfait au principe de domination (cf. le lemme 1). Pour un compact K de X et pour un entier $n>0$, on a

$$\Big(\int d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}\Big)^n N' = N'*(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n, \tag{42}$$

---

2) La contraction module T de R est la transformation telle que $T(a) = |a|$.

et il résulte du théorème de G. Choquet et J. Deny (cf. [2]) que N' est périodique à tout le point de $S_{(\varepsilon'_{\mathscr{C}K})^n}$. D'après le lemme 4, on arrive à la conclusion que N' est périodique à tout le point de S_N. On va ensuite montrer que N' satisfait au principe de domination, en séparant aux deux parties suivantes:

(I) Le cas où S_N n'est pas compact. Soient H et H_2 respectivement les espaces fonctionnels associés au noyau $N+N'$ et au noyau N'. Pour une fonction f de M_K et pour une contraction normale T de R, la fonction $T\cdot N'*f$ appartient à H (cf. la proposition 1 et [4]), et elle est périodique à tout le point de S_N. On a donc, quel que soit K un compact de X,

$$\dot{T}\cdot(N'*f)=\frac{1}{\int d\varepsilon'_{\mathscr{C}K}}(T\cdot(N'*f))*\varepsilon'_{\mathscr{C}K}, \tag{43}$$

et, d'après le lemme 3, on a $T\cdot(N'*f)\in H_2$.

$$\|T\cdot(N'*f)\|_{H_2}=\|T\cdot(N'*f)\|_H\leqq\|N'*f\|_H=\|N'*f\|_{H_2}, \tag{44}$$

et par suite, on obtient ainsi que les contractions normales opérent dans H_2, d'où N' satisfait au principe de domination.

(II) Le cas où S_N est compact. On peut supposer évidemment $N'\neq 0$. Le noyau de convolution N' étant de type positif, $S_{N'}$ contient l'origine, et donc, il suffit de montrer que, quelles que soient $f\geqq 0$, $g\geqq 0$ et $\varphi\geqq 0$ de C_K,

$$\begin{aligned}&N'*(f*\varphi)(x)<N'*(g*\varphi)(x)\ \text{sur}\ S_{(f*\varphi)}\\ &\Longrightarrow N'*(f*\varphi)(x)\leqq N'*(g*\varphi)(x)\quad\text{dans}\quad X,\end{aligned} \tag{45}$$

car, quelle que soit $h\geqq 0$ de C_K, $N'*h(x)>0$ dans $\{x\in X\,;\,h(x)>0\}$. On obtient d'abord que, quel que soit ω un voisinage ouvert et relativement compact de 0,

$$N'*\varphi*\check{\varphi}(0)=\sup_{x\in\mathscr{C}\omega}N'*\varphi*\check{\varphi}(x). \tag{46}$$

En effet, s'il existe un voisinage ω_0 ouvert et relativement compact de 0 tel que

$$N'*\varphi*\check{\varphi}(0)>\sup_{x\in\mathscr{C}\omega_0}N'*\varphi*\check{\varphi}(x) \tag{47}$$

la fonction $T_a\cdot(N'*\varphi*\check{\varphi})=\inf(N'*\varphi*\check{\varphi},a)$ est non-zéro et $T_a\cdot(N'*\varphi*\check{\varphi})$

$= N' * \varphi * \check{\varphi}$ sur $\mathscr{C}\omega_0$, où

$$a = \sup_{x \in \mathscr{C}\omega_0} N' * \varphi * \check{\varphi}(x). \tag{48}$$

D'après la proposition 1 et le principe de domination pour $N + N'$, on a $T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}) \in H$. La fonction $N' * \varphi * \check{\varphi} - T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi})$ est non-zéro et à support compact, et donc, elle appartient à H_1. En utilisant encore la proposition 1, on a

$$\begin{aligned} \| T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}) \|_H &= \| N' * \varphi * \check{\varphi} - (N' * \varphi * \check{\varphi} - T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi})) \|_H \\ &= \| N' * \varphi * \check{\varphi} \|_H + \| N' * \varphi * \check{\varphi} - T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}) \|_H, \end{aligned} \tag{49}$$

d'où

$$\| T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}) \|_H \geqq \| N' * \varphi * \check{\varphi} \|_H. \tag{50}$$

L'égalité $\| T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}) \|_H = \| N' * \varphi * \check{\varphi} \|_H$ résulte de (50) et du fait que les contractions normales opérent dans H, d'où $N' * \varphi * \check{\varphi} = T_a \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi})$, mais cela est en contradiction avec (47).

On pose

$$b = \inf_{x \in S_{(f * \varphi)}} (N' * g * \varphi(x) - N' * f * \varphi(x)) \tag{51}$$

et

$$\lambda = \max((N' * f * \check{f}(0))^{1/2},\ ((N' * g * \check{g}(0))^{1/2}). \tag{52}$$

On peut supposer encore $N' * \varphi * \check{\varphi}(0) = 1$. On prend un entier positif n tel que

$$\frac{1}{n} \max_{x \in X} N * (f * \varphi)(x) < b, \tag{53}$$

et soit η un nombre positif tel que

$$6 \lambda n \eta < b - \frac{1}{n} \max_{x \in X} N * (f * \varphi)(x). \tag{54}$$

Il existe alors un point x_0 de X tel que l'on ait

$$N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(x_0) < \eta^4 \tag{55}$$

et

$$S_{(N * f * \varphi)} \cap S_{(U_{x_0} N * f * \varphi)} = \phi, \tag{56}$$

car $S_{(N*f*\varphi)}$ est compact. On a alors, quel que soit i un entier positif et quel que soit x de X,

$$
\begin{aligned}
&|U_{ix_0}N'*(f*\varphi)(x) - N'*(f*\varphi)(x)|^2 = |\underbrace{N'*(f*\varphi)(x+ix_0)} - N'*(f*\varphi)(x)|^2 \\
&\leqq (N'*f*\check{f}(0))(N'*(U_{(ix_0+x)}\varphi - U_x\varphi)*(U_{(ix_0+x)}\varphi - U_x\varphi)(0)) \\
&\leqq 2(N'*f*\check{f}(0))(N'*\varphi*\check{\varphi}(0) - N'*\varphi*\check{\varphi}(ix_0)) < 4i\lambda^2\eta^2, \qquad (57)
\end{aligned}
$$

car, pour $i \geqq 1$,

$$
\begin{aligned}
&|N'*\varphi*\check{\varphi}(ix_0) - N'*\varphi*\check{\varphi}((i-1)x_0)| \\
&\leqq \sqrt{2}\,(N'*\varphi*\check{\varphi}(0))^{1/2}(N'*\varphi*\check{\varphi}(0) - N'*\varphi*\check{\varphi}(x_0))^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\,(N'*\varphi*\check{\varphi}(0) - N'*\varphi*\check{\varphi}(x_0))^{1/2} < 2\eta^2, \qquad (58)
\end{aligned}
$$

d'où

$$
|U_{ix_0}N'*(f*\varphi)(x) - N'*(f*\varphi)(x)| < 2i\lambda\eta. \qquad (59)
$$

De la même manière, on a

$$
|U_{ix_0}N'*(g*\varphi)(x) - N'(g*\varphi)(x)| < 2i\lambda\eta. \qquad (60)
$$

Soit x un point de $\bigcup_{i=0}^{n-1} S_{(U_{ix_0}f*\varphi)}$. Alors, il existe un entier m $(0 \leqq m \leqq n-1)$ et un point y de $S_{(f*\varphi)}$ tels que $x = mx_0 + y$. On a

$$
\begin{aligned}
&N'*(g*\varphi)(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} N*(U_{ix_0}f*\varphi)(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} N'*(U_{ix_0}f*\varphi)(x) \\
&\geqq N'*(g*\varphi)(mx_0+y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} N'*(f*\varphi)((m+i)x_0+y) - \frac{1}{n}\max_{x\in X} N*(f*\varphi)(x) \\
&\geqq N'*(g*\varphi)(y) - N'*(f*\varphi)(y) - 2\lambda m\eta - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 2\lambda(m+i)\eta - \frac{1}{n}\max_{x\in X} N*(f*\varphi)(x) \\
&\geqq N'*(g*\varphi)(y) - N'*(f*\varphi)(y) - 6\lambda n\eta - \frac{1}{n}\max_{x\in X} N*(f*\varphi)(x) \\
&\geqq N'*(g*\varphi)(y) - N'*(f*\varphi)(y) - b \\
&\geqq 0. \qquad (61)
\end{aligned}
$$

D'après le lemme 5, on a

$$
N'*(g*\varphi)(x) \geqq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} N*(U_{ix_0}f*\varphi)(x) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} N'*(U_{ix_0}f*\varphi)(x) \qquad (62)
$$

dans X, et donc,

$$N' * (g * \varphi)(x) \geqq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} N' * (U_{ix_0} f * \varphi)(x)$$

$$= N' * f * \varphi(x) - \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i\lambda\eta = N' * f * \varphi(x) - 2(n-1)\lambda\eta \tag{63}$$

dans X. Faisant $\eta \to 0$, on arrive à la conclusion que $N' * (g*\varphi)(x) \geqq N' * (f*\varphi)(x)$ dans X. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 1. Le support du noyau de Dirichlet N sur X est un sous-groupe fermé de X, car $N + \varepsilon$ est élémentaire[3]. Par conséquent, si N est absolument continue, le support de N est égal à X. Lorsque $S_N = X$, tout le noyau de convolution singulier N' sur X est constant dès que $N + N'$ satisfait au principe de domination. Lorsque $S_N \neq X$, on peut trouver un noyau de convolution singulier N' non-constant et tel que $N + N'$ satisfasse au principe de domination. Son exemple peut être trouvé dans [3].

Problème. Est-ce qu'il existe noyaux de convolution singuliers, non-périodiques et qui satisfait au principe de domination?

Remarque 2. Dans le cas où un noyau de convolution N sur X est non-symétrique, les mêmes discutions ont lieus dans le cadre des noyaux d'espace fonctionnel invariant par translations au sens généralisé (cf. [7]).

4. Applications

Dans cette section, on supposera toujours qu'il n'existe aucun sous-groupe compact de X sauf $\{0\}$.

LEMME 6. *Soit N un noyau de convolution symétrique sur X. Alors, pour que N soit un noyau de Dirichlet sur X, il faut et il suffit que N satisfasse au principe de domination et que N soit non-zéro et s'annule à l'infini*[4].

En effet, d'après la proposition 2, N est de type positif s'il satisfait au principe de domination. Soit H l'espace fonctionnel sur X associé au noyau N. Montrons que H est un espace de Dirichlet spécial sur X sous la condition que N $(\neq 0)$ satisfait au principe de domination et s'annule à l'infini. Soit f une fonction non-négative de C_K, et soit T_n la projection de R sur l'inter-

---

[3] On dit qu'un noyau de convolution N sur X est élémentaire s'il est de la forme $N = a\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma)^n$, où a est une constante non-négative et σ est une mesure de Radon $\geqq 0$.

[4] Cela signifie que, quelle que soit φ de C_K, $N * \varphi(x) \to 0$ avec $x \to \infty$.

valle fermé $[0, 1/n]$. Alors, $T_n \cdot (N*f)$ appartient à H, car T_n est une contraction normale de R. D'après l'inégalité

$$\|T_n \cdot (N*f)\|_H^2 \leqq (N*f,\ T_n \cdot (N*f))_H,$$

la suite $(N*f - T_n \cdot (N*f))$ converge fortement vers $N*f$ dans H avec $n \to \infty$. L'ensemble $\{N*f;\ f \in C_K\}$ étant dense dans H, $C_K \cap H$ est dense dans H. On montre ensuite que $C_K \cap H$ est dense dans C_K. Soit φ une fonction non-négative, non-zéro de C_K, alors, on a, quel que soit V un voisinage ouvert, relativement compact de 0 et symétrique par rapport à 0,

$$N*\varphi*\check{\varphi}(0) > \sup_{x \in \mathscr{C}V} N*\varphi*\check{\varphi}(x)$$

car, sinon, d'après $\lim_{x \to \infty} N*\varphi*\check{\varphi}(x) = 0$, il existe un point x_0 de $\mathscr{C}V$ tel que

$$N*\varphi*\check{\varphi}(x_0) = \sup_{x \in \mathscr{C}V} N*\varphi*\check{\varphi}(x) = N*\varphi*\check{\varphi}(0),$$

et alors, quel que soit m un entier $> 0, N*\varphi*\check{\varphi}(mx_0) = N*\varphi*\check{\varphi}(0)$. D'après notre hypothèse, $N*\varphi*\check{\varphi}(0) = 0$, d'où $N = 0$.

La fonction $N*\varphi*\check{\varphi} - \inf(N*\varphi*\check{\varphi},\ a)$ est non-zéro, non-négative et de $H \cap C_K$. Par conséquent, l'ensemble $\{\varphi \in C_K \cap H\ ;\ \varphi \geqq 0\}$ est riche dans C_K, d'où $H \cap C_K$ est dense dans C_K. On obtient ainsi que N est un noyau de Dirichlet sur X.

La condition est évidemment nécessaire.

S'il existe un sous-groupe compact $(\neq 0)$ de X, le lemme 6 n'a pas lieu. On peut facilement fournir son exemple. En utilisant notre théorème et le lemme 6, on arrive au corollaire suivant:

Corollaire. *Si un noyau de convolution symétrique N sur X satisfait au principe de domination, il est alors de la forme $N = N_r + N_s$, où N_r est un noyau de Dirichlet sur X ou 0 et N_s est un noyau de convolution singulier sur X, périodique à tout le point de S_N et qui satisfait au principe de domination.*

L'inverse est évidemment vrai d'après notre théorème.

D'après la proposition 2, il existe l'espace fonctionnel H associé au noyau N. Soient H_0 et H' respectivement l'adhérent de $C_K \cap H$ et l'espace orthogonal de H_0 dans H. Alors, en vertu des lemmes 1 et 6, H_0 est un espace de Dirichlet sur X ou $\{0\}$. On a ensuite $H_0 \supset C_0 \cap H$, car, quelle que soit u une fonction non-négative de $C_0 \cap H$, la fonction $u - T_n \cdot u$ appartient à $C_K \cap H$ et la suite $(T_n \cdot u)$ converge faiblement vers 0 avec $n \to \infty$, et donc, la suite $(u - T_n \cdot u)$ est bornée dans H_0 et converge localement presque partout vers u dans X. T_n est la projection de R sur $[0, 1/n]$. Désignons par N_r le noyau de H_0. Alors, il suffit de voir que la mesure $N - N_r$ est positive. Pour une fonction non-négative f de C_K, on a $(N - N_r)*f \in H'$ et

$$\|(N - N_r)*f\|_H \geqq \|((N - N_r)*f)^+\|_H = \|(N - N_r)*f + ((N - N_r)*f)^-\|_H$$
$$= \|(N - N_r)*f\|_H + \|((N - N_r)*f)^-\|_H,$$

car la fonction $((N - N_r)*f)^-$ s'annule à infini, d'où $(N - N_r)*f \geqq 0$. La fonction f étant quelconque, $N - N_r$ est une mesure de Radon positive dans X. La démonstration est ainsi complète.

Références

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., **45,** 1959, p. 208–215.

[2] G. Choquet et J. Deny: Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, C.R. Acad. Sc. Paris, **250,** 1960, p. 799–801.

[3] ——————: Aspects linéaires de la théorie du potentiel, ibid, **250,** 1960, p. 4260–4262.

[4] J. Deny: Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier, **15,** 1965, p. 259–271.

[5] M. Itô: Sur les espaces de Dirichlet spéciaux, Proc. Japan Acad., **43,** 1967, p. 429–434.

[6] ———: Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., **44,** p. 133–164.

[7] ———: A note on extended regular functional spaces, Proc. Japan Acad., **43,** 1967, p. 435–440.

Institut Mathématique
Université de Nagoya