Y. Furuta
Nagoya Math. J.
Vol. 37 (1970), 197–200

ÜBER DAS GESCHLECHT UND DIE KLASSENZAHL EINES RELATIV-GALOISCHEN ZAHLKÖRPERS VOM PRIMZAHLPOTENZGRADE

YOSHIOMI FURUTA

Herrn Professor Katuzi Ono zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Für einen relativ-galoischen Zahlkörper K über k bezeichnen wir mit $G(K/k)$ die zugehörige galoische Gruppe und mit $(K: k)$ dem Erweiterungsgrade. Ferner seien $\bar{K}$, $\hat{K}$, bzw. K^* die größten, unverzweigten Erweiterungskörper von K, die beziehungsweise die folgenden Eigenschaften besitzen: die galoische Gruppe $G(\bar{K}/K)$ ist abelsch; die galoische Gruppe $G(\hat{K}/K)$ ist im Zentrum von $G(\hat{K}/k)$ enthalten; K^* ist das Kompositum von K und einem über k abelschen Erweiterungskörper. Dann ist $(\bar{K}: K)$ gleich der Klassenzahl von K, die wir mit h_K bezeichnen werden. Der Körper $\hat{K}$ heiße der *unverzweigte, maximalzentrale Erweiterungskörper von K in bezug auf k*, und der Grad $(\hat{K}: K)$, den wir mit $z_{K/k}$ bezeichnen werden, heiße die *zentrale Klassenzahl von K in bezug auf k*. Der Körper K^* heiße der *Geschlechterkörper von K in bezug auf k*, und der Grad $(K^*: K)$, den wir mit $g_{K/k}$ bezeichnen werden, heiße das *Geschlecht von K in bezug auf k*. Man kann dann leicht sehen, daß $\bar{K} \supset \hat{K} \supset K^*$, somit $g_{K/k}$ ein Teiler von $z_{K/k}$ und $z_{K/k}$ ein Teiler von h_K ist. Eine explizite Formel des Geschlechtes $g_{K/k}$ ist im allgemeinen von Furuta [4] gegeben, und im Falle, daß der Grundkörper k der rationale Zahlkörper ist, und K über k abelsch ist, findet man in Fröhlich [1] die explizite Struktur der galoischen Gruppe $G(\hat{K}/k)$. In der vorliegenden Note zeigen wir: wenn K über k zyklisch ist, so stimmt $\hat{K}$ mit K^* überein, daher $z_{K/k} = g_{K/k}$; wenn K galoisch über k mit Primzahlpotenzgrade l^n ist, so gilt $h_K \equiv z_{K/k} \mathrm{mod}. l$. Der letztere Satz wird im gruppentheoretischen Sinne als Dual eines Ergebnisses von Yokoi [8] ansehen, daß h_k und die ambige Klassenzahl $a_{K/k}$ von K in bezug auf k kongruent mod. l sind.

Received March 31, 1969

1. Für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ die Kommutatoruntergruppe von $\mathfrak{G}$. Ferner sei für eine abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ mit einem Operatorbereich $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{g}}$ die Untergruppe der $\mathfrak{g}$-invarianten Elementen von $\mathfrak{A}$, und $I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A})$ sei die durch $\alpha^{1-\sigma}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{A}$, wo α bzw. σ auf $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{g}$ durchlaüft.

2. Es sei K ein über k relativ-galoischer Zahlkörper, und wie bisher $\bar{K}$, $\hat{K}$ bzw. K^* der absolute Klassenkörper von K, die unverzweigte maximalzentrale Erweiterung von K in bezug auf k, bzw. der Geschlechterkörper von K in bezug auf k. Setzt man $\mathfrak{G} = G(\bar{K}/k)$, $\mathfrak{A} = G(\bar{K}/K)$ und $\mathfrak{g} = G(K/k)$, so ist $\mathfrak{G}$ eine Erweiterungsgruppe von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{g}$; ferner ist $\hat{K}$ der $I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A})$-invariante Unterkörper von $\bar{K}$, und K^* ist der $\mathfrak{A} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-invariante Unterkörper von $\bar{K}$.

3. Um die Relation zwischen $\hat{K}$ und K^* zu finden, betrachten wir eine abstrakte Gruppenerweiterung $\mathfrak{G}$ einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ in bezug auf einer endlichen Gruppe $\mathfrak{g}$. Für jedes $\sigma \in \mathfrak{g}$ sei S_σ ein Vertreter der σ zugeordneten Restklasse, und man setze $\alpha^\sigma = S_\sigma \alpha S_\sigma^{-1}$ für $\alpha \in \mathfrak{A}$. Wir beweisen jetzt die folgenden zwei Hilfssätze.

HILFSSATZ 1. $\qquad \mathfrak{A} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \supset I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A}).$

Beweis. Vermöge der inneren Automorphismen ist $\mathfrak{G}$ ein Operatorbereich von $\mathfrak{G}$ selbst. Da $\mathfrak{A}$ abelsch ist, kann man natürlich die $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{G}$-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ansehen; um den Hilfssatz zu beweisen, ist es genug zu zeigen, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}])$ elementweise $\mathfrak{G}$-invariant ist. Nach dem Isomorphiesatz bzgl. $\mathfrak{G}$-Gruppe haben wir $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]) \cong \mathfrak{A}[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, und die rechte Seite ist $\mathfrak{G}$-invariant. Damit ist die linke Seite auch $\mathfrak{G}$-invariant, wie zu zeigen war.

Für $\sigma, \tau \in \mathfrak{g}$ sei $C_{\sigma,\tau}$ ein Faktorsystem der Gruppenerweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{g}$: $S_\sigma S_\tau = S_{\sigma\tau} C_{\sigma,\tau}$. Es gilt dann

HILFSSATZ 2. *Ist* $\mathfrak{g}$ *abelsch und* $C_{\sigma,\tau} = C_{\tau,\sigma}$ *für alle* $\sigma, \tau \in \mathfrak{g}$, *so ist*

$$I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}].$$

Beweis. Die letztere Gleichheit ist klar, weil $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ abelsch ist. Nach Hilfssatz 1 ist $I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A}) \subset [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Um die umgekehrte Relation zu zeigen, werden wir beweisen, daß $\mathfrak{G}/I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A})$ abelsch ist. Jedes Element von $\mathfrak{G}$ ist in der Gestalt $S_{\sigma}a$ darstelbar, wo $\sigma \in \mathfrak{g}$ und $a \in \mathfrak{A}$ ist; es gilt auch die folgende Kongruenz: $(S_{\sigma}a)(S_{\tau}b)(S_{\sigma}a)^{-1}(S_{\tau}b)^{-1}=(S_{\sigma\tau}C_{\sigma,\tau}ab)(S_{\tau\sigma}C_{\tau,\sigma}ab)^{-1}=C_{\sigma,\tau}C_{\tau,\sigma}^{-1}=1$ mod. $I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A})$. Damit haben wir die Behauptung.

4. Im speziellen Falle, daß $\mathfrak{g}$ zyklisch ist, hat man sicher $C_{\sigma,\tau} = C_{\tau,\sigma}$ für alle $\sigma, \tau \in \mathfrak{g}$. Durch die Anwendung der Hilfssätze auf die galoischen Gruppen $\mathfrak{G} = G(\bar{K}/k)$, $\mathfrak{A} = G(\bar{K}/k)$ und $\mathfrak{g} = G(K/k)$, haben wir den folgende Satz.

SATZ 1. *Es sei K ein endlicher galoischer Erweiterungskörper von k, $\hat{K}$ sei der unverzweigte, maximalzentrale Erweiterungskörper von K in bezug auf k, und K^* sei der Geschlechterkörper von K in bezug auf k. Dann gilt $\hat{K} \supset K^*$. Wenn insbesondere K über k zyklisch ist, so gilt $\hat{K} = K^*$ und somit*[1] $z_{K/k} = g_{K/k}$.

5. Es sei wieder $\mathfrak{A}$ eine abstrakte endliche abelsche Gruppe mit einer Gruppe $\mathfrak{g}$ als die Operatorbereich, und X sei die Charaktergruppe von $\mathfrak{A}$. Dann wird X $\mathfrak{g}$-Gruppe durch die Festsetung

$$\chi^{\sigma}(\alpha) = \chi(\alpha^{\sigma}),$$

für $\chi \in X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ und $\sigma \in \mathfrak{g}$. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{g}}$ und $\sigma \in \mathfrak{g}$ ergibt sich

$$\chi^{1-\sigma}(\alpha) = \frac{\chi(\alpha)}{\chi(\alpha^{\sigma})} = \frac{\chi(\alpha)}{\chi(\alpha)} = 1.$$

Damit ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{g}}$ im Annihilator von $I_{\mathfrak{g}}(X)$ enthalten. Umgekehrt sei $\chi(\alpha) = 1$ für alle $\chi \in I_{\mathfrak{g}}(X)$. Daraus folgt $\chi(\alpha^{1-\sigma}) = \chi^{1-\sigma}(\alpha) = 1$ für alle $\chi \in X$, d.h. $\alpha^{1-\sigma} = 1$, somit $\alpha \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{g}}$. Daher haben wir

HILFSSATZ 3. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine endliche abelsche Gruppe mit einer Gruppe $\mathfrak{g}$ als die Operatorbereich, und X sei die Charaktergruppe von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{g}}$ dual zu $I_{\mathfrak{g}}(X)$, und $I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A})$ ist dual zu $X^{\mathfrak{g}}$.*

6. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wieder wie in Paragraphen 2 und 5. Dann ist die Klassenzahl h_K von K gleich der Ordnung von $\mathfrak{A}$, somit auch von X. Die zentrale Klassenzahl $z_{K/k}$ ist gleich dem Index $(\mathfrak{A}: I_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{A}))$, also gleich der Ordnung von $X^{\mathfrak{g}}$ nach Hilfssatz 3. Dann haben wir den folgenden Satz durch dieselbe Methode wie in Yokoi [8]:

[1] Wenn $a_{K/k}$ die ambige Klassenzahl bedeutet, so, im vorliegenden zyklischen Falle, haben wir weiter $z_{K/k}=g_{K/k}=a_{K/k}$ nach Yokoi [7].

SATZ 2. *Ist K ein galoischer Erweiterungskörper von k mit Primzahlpotenzgrade l^n, so ist*

$$h_K \equiv z_{K/k} \qquad \text{mod.} l.$$

Beweis. Nach Paragraphen 5 kann man sehen, daß $\mathfrak{g}$ eine Transformationsgruppe von X ist. Wenn die Ordnung von $\mathfrak{g}$ eine Primzahlpotenz l^n ist, so sind bekantlich die Ordnungen von X und der elementweise $\mathfrak{g}$-invarianten Untergruppe $X^{\mathfrak{g}}$ kongruent mod. l. Daraus folgt der Satz.

7. Nach Sätzen 1 und 2 ergibt die explizite Formel des Geschlechtes $g_{K/k}$ das folgende bekante[2)] Resultat: *Ist K eine zyklische Erweiterung mit Primzahlpotenzgrade l^n, so ist*

$$h_K \equiv \frac{h_k \prod_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}}}{l^n(\varepsilon : \eta)} \qquad \text{mod. } l,$$

wo $e_{\mathfrak{p}}$ die Verzweigungsordnung von K/k in bezug auf den Primdivisor $\mathfrak{p}$ ist, ε Einheiten von k sind und η diejenigen Einheiten von k, die Norm von Zahlen in K sind.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. Fröhlich: On the absolute class-group of abelian fields (I), (II), J. London Math. Soc., **29** (1954), 211–217, **30** (1955), 72–80.

[2] ————: On a method for the determination of class number factors in number fields, Mathematika, **4** (1957), 113–121.

[3] ————: The genus field and genus group in finite number fields I, II, Mathematika, **6** (1959), 40–46, 142–146.

[4] Y. Furuta: The genus field and genus number in algebraic number fields, Nagoya Math. J., **29** (1967), 281–285.

[5] K. Iwasawa: A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **20** (1956), 257–258.

[6] S.-N. Kuroda: Über die Klassenzahl eines relativ-zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrade, Proc. Japan Acad., **40** (1964), 623–626.

[7] H. Yokoi: On the class number of a relatively cyclic number field, Nagoya Math. J., **29** (1967), 31–44.

[8] ————: On the divisibility of the class number in an algebraic number field, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 411–418.

[9] A. Yokoyama: Über die relativklassenzahl eines relativgaloischen Zahlkörpers von Primzahlpotenzgrad, Tôhoku Math. J., **18** (1966), 318–324.

Mathematisches Institut
Universität zu Kanazawa

2) Vgl. Yokoi [8], auch die Fußnote 1).