N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 66 (1977), 37-52

SUR QUELQUES COMBINAISONS LINÉAIRES EXCEPTIONNELLES AU SENS DE NEVANLINNA, V.

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction

Soit $f = (f_0, f_1, \cdots, f_n)$ $(n \geqq 1)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = \infty,$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique définie par Cartan ([1]):

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0\leqq j\leqq n} \log |f_j(re^{i\theta})|\, d\theta - \max_{0\leqq j\leqq n} \log |f_j(0)| .$$

Soit

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire de $f_0, \cdots, f_n$, homogène à coefficients constants. On dit que la combinaison F est

1) lacunaire si elle n'admet pas de zéro dans $|z| < \infty$;

2) exceptionnelle au sens de Picard si elle n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z| < \infty$;

3) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0,F)}{T(r,f)} > 0 .$$

On note que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) et $0 \leqq \delta(F) \leqq 1$.

Soient X un ensemble de combinaisons $(\not\equiv 0)$ linéaires de $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$

Received February 4, 1976.

à $n+1$ et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et indépendantes sur C entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Ici, C signifie le corps de nombre complexe. On note que $0 \leqq \lambda \leqq n-1$.

On cherche quelques relations entre le nombre de combinaisons exceptionnelles dans X et le nombre "λ".

D'après le théorème fondamental de Cartan ([1]), on sait que s'il y a $n+2$ combinaisons $F_1, \cdots, F_{n+1}, G$ dans X telles que

$$\delta(G) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n+1 ,$$

alors, $\lambda \geqq 1$ (voir Lemme 2). Récemment, on a démontré que, si $n-1$ combinaisons quelconque dans $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ sont linéairement indépendantes de plus, alors $\lambda = 1$ et il y a une dans $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ qui est proportionnelle à G ([8], Th. B′). C'est une réponse positive pour la conjecture d'Ozawa ([5]) et de Noguchi ([4]).

Dans ce mémoire, on démontre

"S'il y a $n+\mu+1$ combinaisons $F_1, \cdots, F_{n+1}, G_1, \cdots, G_\mu$ $(1 \leqq \mu \leqq n-1)$ dans X telles que

$$\delta(G_j) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n+1 \qquad (j = 1, \cdots, \mu) ,$$

alors $\lambda \geqq \mu$." (voir Lemme 8),
et, en utilisant cela, on généralise les Théorèmes B′ et D′ dans [8]. La généralisation du Théorème D′ (voir Th. 2) est peut-être un point final parti d'un théorème de Niino et Ozawa ([3], Th. 3).

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna ([2]).

2. Préliminaires

1. Soient f, X et λ comme dans l'introduction. D'abord, on note que le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes sur C entre $n+1$ combinaisons quelconque de X est égal à λ. Soient $F_1, \cdots, F_{n+1}$ $n+1$ combinaisons quelconque dans X, alors il y a $n+1-\lambda$ combinaisons linéairement indépendantes sur C dans $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ (soient $g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}$) telles que tous les éléments dans X sont représentés par $g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}$ à coefficients constants:

$$F = \alpha_{F1}g_1 + \cdots + \alpha_{Fn+1-\lambda}g_{n+1-\lambda} \qquad (F \in X,\ \alpha_{Fi} \in C)\ .$$

Evidemment, $g = (g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda})$ est un système transcendant dans $|z| < \infty$. On dit que telles $g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}$ forment une base de X.

On donne quelques lemmes qui seront utilisés après.

LEMME 1. *Soient* $H_1, \cdots, H_k$ $(2 \leqq k \leqq n+1)$ k *combinaisons quelconque dans* X. *Alors,*

$$m(r, \|H_1, \cdots, H_k\|/H_1 \cdots H_k) = O\,(\log rT(r,f)) \ (r \to \infty, r \notin E)\ ,$$

où $\|H_1, \cdots, H_k\|$ *signifie le wronskian de* $H_1, \cdots, H_k$ *et* E *est un ensemble de* r *de mesure linéaire finie.*

Une démonstration de ce lemme est contenue dans celle du théorème fondamental de Cartan ([1]).

LEMME 2. *Quand* $\lambda = 0$, $\sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n+1$ ([1]).

LEMME 3. $|T(r,f) - T(r,g)| < O\,(1)$.

C'est trivial d'après les définitions de $T(r,f)$, $T(r,g)$ et g.

LEMME 4. *S'il y a* $\lambda + 1$ *combinaisons dans* X *tous les rapports entre lesquelles sont constants, on a*

$$\sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n + \lambda + 1 \qquad \text{([6], Th. 6)}\ .$$

LEMME 5. *S'il y a* $2n$ *combinaisons* $F_1, \cdots, F_{2n}$ *dans* X *telles que*

$$\delta(F_{n+1+j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n+1 \qquad (j = 1, \cdots, n-1)$$

et si $\lambda = n-1$, *alors les combinaisons* $F_1, \cdots, F_{2n}$ *se repartissent en deux classes jouissant les propriétés suivantes:*

1) *Chaque classe contient* n *combinaisons.*

2) *Tous les rapports entre deux éléments quelconque dans une même classe sont des constantes.* ([8], *Lemme* 6).

2. Soit X^0 un sous-ensemble quelconque de $X - \{g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}\}$. On introduit une relation equivalente dans X^0.

DÉFINITION 1. i) $X^0 \ni H_1, H_2, H_j = \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} \alpha_{ji} g_i$ $(j = 1, 2)$,

$H_1 \approx H_2 \Leftrightarrow$ il y a un i_0 telque $\alpha_{1i_0} \neq 0$, $\alpha_{2i_0} \neq 0$.

ii) $X^0 \ni F, G,$

$F \sim G \Leftrightarrow F \approx G$, ou il existent $H_1, \cdots, H_s$ dans X^0 telles que $F \approx H_1$, $H_1 \approx H_2, \cdots, H_s \approx G$.

PROPOSITION 1. *La relation "$\sim$" est une relation équivalente dans* X^0.

C'est trivial par définition.

On classifie X^0 par cette relation équivalente. Soit

$$X^0/\sim \,=\{X_1^0, \cdots, X_p^0\} \qquad (1 \leqq p \leqq n+1-\lambda)\,.$$

DÉFINITION 2.

$A_\ell = \{g_i\,;$ il y a au moins une F dans X_ℓ^0 telle que $\alpha_{Fi} \neq 0\}$,

$A_0 = \{g_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda} - \bigcup_{\ell=1}^{p} A_\ell$,

$\nu_\ell =$ le nombre d'éléments dans A_ℓ $(\ell = 0, 1, \cdots, p)$.

Par définition, on obtient, tout de suite, la proposition suivante.

PROPOSITION 2. i) $A_{\ell_1} \cap A_{\ell_2} = \phi$ $(\ell_1 \neq \ell_2)$.

ii) $\sum_{\ell=0}^{p} \nu_\ell = n+1-\lambda$.

3. Lemme fondamental

Soient f, X et λ comme précédent. Maintenant supposons qu'il y ait $n+\mu+1$ $(1 \leqq \mu \leqq n-1)$ combinations $F_1, \cdots, F_{n+\mu+1}$ dans X telles que

$$\delta(F_{n+1+j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n+1 \qquad (j = 1, \cdots, \mu)\,. \tag{1}$$

On note que $\lambda \geqq 1$ d'après le Lemme 2. On peut supposer que $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ forment une base de X. On utilise $\{F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}\}$ au lieu de $\{g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}\}$ dans §2. Représentons $F_{n+2-\lambda}, \cdots, F_{n+\mu+1}$ par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$:

$$F_{n+1-\lambda+k} = \alpha_{k1}F_1 + \cdots + \alpha_{kn+1-\lambda}F_{n+1-\lambda} \qquad (k = 1, \cdots, \lambda+\mu) \tag{2}$$

PROPOSITION 3. *Pour chaque k, il y a au moins un coefficient qui est égal à zéro.*

Démonstration. Si tous les coefficient $\alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kn+1-\lambda}$ sont différents de zéro, on peut appliquer le Lemme 2 à $\tilde{F} = (F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda})$ et $\tilde{X} =$

$\{F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}, F_{n+1-\lambda+k}\}$. On obtient l'inégalité

$$\delta(F_{n+1-\lambda+k}) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} \delta(F_i) \leqq n + 1 - \lambda$$

d'après le Lemme 3. C'est contraire à (1).

Ici, on applique la discussion dans § 2–2 à $Y^0 = \{F_{n+1-\lambda+k}\}_{k=1}^{\lambda}$ et $Y^j = Y^0 \cup \{F_{n+1+i}\}$ $(j = 1, \cdots, \mu)$ en utilisant $\{F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}\}$ au lieu de $\{g_1, \cdots, g_{n+1-\lambda}\}$. Soient

$$Y^j/\sim\, = \{Y_1^j, \cdots, Y_{p_j}^j\} \qquad (j = 0, \cdots, \mu)\,,$$
$$B_\ell^j = \{F_i\,;\, Y_\ell^j \ni F \text{ telle que } \alpha_{Fi} \neq 0\} \qquad (\ell = 1, \cdots, p_j\,;\, j = 0, \cdots, \mu)\,,$$
$$B_0^j = \{F_i\}_{0=1}^{n+1-\lambda} - \bigcup_{\ell=1}^{p_j} B_\ell^j$$

où α_{Fi} est le coefficient de F_i $(1 \leqq i \leqq n + 1 - \lambda)$ quand on représente F par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$.

De plus, soient

$\nu_\ell^j =$ le nombre d'éléments dans B_ℓ^j $(\ell = 0, \cdots, p_j\,;\, j = 0, \cdots, \mu)$.

D'après la Proposition 2, on a

$$B_{\ell_1}^j \cap B_{\ell_2}^j = \phi \qquad (\ell_1 \neq \ell_2)$$

et

$$\sum_{\ell=0}^{p_j} \nu_\ell^j = n + 1 - \lambda \qquad (j = 1, \cdots, \mu)\,. \tag{3}$$

LEMME 6. $\nu_\ell^j \leqq n - \lambda$ $(\ell = 0, \cdots, p_j\,;\, j = 0, \cdots, \mu)$.

Démonstration. Par définition,

$$\nu_0^j \leqq n - \lambda$$

pour chaque j. On démontre quand $j = 1$. Supposons qu'il y ait un ℓ $(\geqq 1)$ tel que

$$\nu_\ell^1 > n - \lambda\,.$$

Alors, $p_1 = 1$, $Y_1^1 = Y^1$, $B_1^1 = \{F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}\}$ et $B_0^1 = \phi$. Par conséquent, $\ell = 1, \nu_1^1 = n + 1 - \lambda$. On utilise les représentations (2). Dans ce cas, pour simplifier, on met

$$H_k = F_{n+1-\lambda+k} \qquad (k = 1, \cdots, \lambda + 1)\,,$$
$$H_k = \alpha_{k1}F_1 + \cdots + \alpha_{kn+1-\lambda}F_{n+1-\lambda} \qquad (k = 1, \cdots, \lambda + 1)\,. \tag{2}$$

On note que, grâce à la Proposition 3, il y a au moins un coefficient égal à zéro pour chaque k.

I. Comme $\nu_1^1 = n+1-\lambda$, il y a au moins une combinaison dans $\{H_1, \cdots, H_{\lambda+1}\}$ telle que le nombre de coefficients différents de zéro à (2) est au moins deux. On peut supposer que H_1 est telle combinaison.

Soient

$$\alpha_{1i(1)_1} \neq 0, \cdots, \alpha_{1i(1)_{m_1}} \neq 0$$
$$\alpha_{1i} = 0 \qquad (i \neq i(1)_1, \cdots, i(1)_{m_1}) \quad (2 \leqq m_1 \leqq n-\lambda) .$$

C'est-à-dire,

$$H_1 = \alpha_{1i(1)_1} F_{i(1)_1} + \cdots + \alpha_{1i(1)_{m_1}} F_{i(1)_{m_1}} \tag{4}$$

Alors, de (4), on obtient

$$\alpha_{1i(1)_m} F_{i(1)_m} = H_1 \Delta_1^m / \Delta_1 \qquad (m = 1, \cdots, m_1) \tag{5}$$

où

$$\Delta_1 = \|F_{i(1)_1}, \cdots, F_{i(1)_{m_1}}\| / F_{i(1)_1} \cdots F_{i(1)_{m_1}}$$

et

$$\Delta_1^m = \frac{\|F_{i(1)_1}, \cdots, F_{i(1)_{m-1}}, H_1, F_{i(1)_{m+1}}, \cdots, F_{i(1)_{m_1}}\|}{F_{i(1)_1} \cdots F_{i(1)_{m-1}} H_1 F_{i(1)_{m+1}} \cdots F_{i(1)_{m_1}}} .$$

De (5), on a l'inégalité

$$\max_{\alpha_{1i} \neq 0} \log |F_i| \leqq \log |H_1| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_1} \right| + \sum_{m=1}^{m_1} \log^+ |\Delta_1^m| + O(1) \tag{6}$$

II. Parce que

$$\{F_i ; \alpha_{1i} \neq 0\} \subsetneqq \{F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}\}$$

et

$$\nu_1^1 = n+1-\lambda ,$$

il y a une combinaison H_k dans $\{H_2, \cdots, H_{\lambda+1}\}$ et un i tels que

$$H_1 \approx H_k , \qquad \alpha_{1i} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{ki} \neq 0 .$$

On peut supposer que $H_k = H_2$.

Soient

$$\{i\,;\,\alpha_{1i}=0,\alpha_{2i}\neq 0\}=\{i(2)_1,\cdots,i(2)_{m_2}\}\ ,$$
$$\Delta_2=\|H_2,F_{i(2)_1},\cdots,F_{i(2)_{m_2}}\|/H_2F_{i(2)_1}\cdots F_{i(2)_{m_2}}$$

et

$$\Delta_2^m=\frac{\|H_2,F_{i(2)_1},\cdots,F_{i(2)_{m-1}},\tilde{F}_2,F_{i(2)_{m+1}},\cdots,F_{i(2)_{m_2}}\|}{H_2F_{i(2)_1}\cdots F_{i(2)_{m-1}}\tilde{F}_2F_{i(2)_{m+1}}\cdots F_{i(1)_{m_2}}}$$

où

$$\tilde{F}_2\equiv-\sum_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0\\ \alpha_{2i}\neq 0}}\alpha_{2i}F_i=-H_2+\sum_{\substack{\alpha_{2i}\neq 0\\ \alpha_{1i}=0}}\alpha_{2i}F_i \tag{7}$$

Parce que $H_1\approx H_2$ et $\{i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0,\alpha_{2i}\neq 0\}\neq\phi$,

$$\tilde{F}_2\not\equiv 0\ .$$

Alors, on obtient

$$\alpha_{2i(2)_m}=\tilde{F}_2\Delta_2^m/\Delta_2\qquad(m=1,\cdots m_2)\ . \tag{8}$$

De (8), on a l'inégalité

$$\max_{\substack{\alpha_{2i}\neq 0\\ \alpha_{1i}=0}}\log|F_i|\leqq\log|\tilde{F}_2|+\log^+\left|\frac{1}{\Delta_2}\right|+\sum_{m=1}^{m_2}\log^+|\Delta_2^m|+O(1) \tag{9}$$

et de (7),

$$\log|\tilde{F}_2|\leqq\max_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0\\ \alpha_{2i}\neq 0}}\log|F_i|+0(1)\leqq\max_{\alpha_{1i}\neq 0}\log|F_i|+O(1)\ . \tag{10}$$

De plus, on a

$$m_1+m_2\leqq n-\lambda\ . \tag{11}$$

En effet, si $m_1+m_2=n+1-\lambda$, de (6), (9) et (10), on a

$$\max_{1\leqq i\leqq n+1-\lambda}\log|F_i|\leqq\log|H_1|+\log^+\left|\frac{1}{\Delta_1}\right|+\log^+\left|\frac{1}{\Delta_2}\right|+\sum_{m=1}^{m_1}\log^+|\Delta_1^m|$$
$$+\sum_{m=1}^{m_2}\log^+|\Delta_2^m|+O(1)\ ,$$

de sorte qu'en intégrant à régard de θ, on obtient l'inégalité suivante d'après les Lemmes 1 et 3:

$$T(r,f)\leqq N(r,0,H_1)+m(r,1/\Delta_1)+m(r,1/\Delta_2)+\sum_{m=1}^{m_1}m(r,\Delta_1^m)$$
$$+\sum_{m=1}^{m_2}m(r,\Delta_2^m)+O(1)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n+3-\lambda} N(r, 0, F_i) + S(r)$$

où $S(r) = O(\log rT(r, f))\ (r \to \infty, r \notin E)$.

Parce que $H_k = F_{n+1-\lambda+k}$,

$$m(r, 1/\Delta_k) = N(r, \Delta_k) + m(r, \Delta_k) - N(r, 1/\Delta_k) + 0(1)\ , \qquad (k = 1, 2)$$

$$N(r, \Delta_1) \leqq \sum_{m=1}^{m_k} N(r, 0, F_{i(k)_m})\ ,$$

$$N(r, \Delta_2) \leqq \sum_{m=1}^{m_2} N(r, 0, F_{i(2)_m}) + N(r, 0, H_2)$$

et

$$\{F_{i(1)_m}\}_{m=1}^{m_1} \cup \{F_{i(2)_m}\}_{m=1}^{m_2} = \{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda}\ .$$

En conséquence, on a

$$\sum_{i=1}^{n+3-\lambda} \delta(F_i) \leqq n + 2 - \lambda\ ,$$

qui est contraire à (1). Cela veut dire que

$$\{F_i\,;\, \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0\} \subsetneqq \{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda}\ .$$

III. Comme $\nu_1^1 = n + 1 - \lambda$, il y a au moins une H_j dans $\{H_3, \cdots, H_{\lambda+1}\}$ et un $i\,(1 \leqq i \leqq n + 1 - \lambda)$ tels que

$$H_1 \approx H_j \quad \text{ou} \quad H_2 \approx H_j$$

et

$$\alpha_{1i} = 0\ , \qquad \alpha_{2i} = 0\ , \qquad \alpha_{ji} \neq 0\ .$$

On peut supposer que $H_j = H_3$. Soient

$$\{i\,;\, \alpha_{1i} = 0, \alpha_{2i} = 0, \alpha_{3i} \neq 0\} = \{i(3)_1, \cdots, i(3)_{m_3}\}\ ,$$
$$\Delta_3 = \|H_3, F_{i(3)_1}, \cdots, F_{i(3)_{m_3}}\| / H_3 F_{i(3)_1} \cdots F_{i(3)_{m_3}}\ ,$$
$$\Delta_3^m = \frac{\|H_3, F_{i(3)_1}, \cdots, F_{i(3)_{m-1}}, \tilde{F}_3, F_{i(3)_{m+1}}, \cdots, F_{i(3)_{m_3}}\|}{H_3 F_{i(3)_1} \cdots F_{i(3)_{m-1}} \tilde{F}_3 F_{i(3)_{m+1}} \cdots F_{i(3)_{m_3}}}$$

où

$$\tilde{F}_3 = - \sum_{\substack{\alpha_{3i} \neq 0, \\ \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0}} \alpha_{3i} F_i = -H_3 + \sum_{\substack{\alpha_{3i} \neq 0 \\ \alpha_{2i} = 0 \\ \alpha_{1i} = 0}} \alpha_{3i} F_i\ .$$

Parce que $H_1 \approx H_3$ ou $H_2 \approx H_3$,

$$\{i\,;\,\alpha_{3i}\neq 0, |\alpha_{1i}|+|\alpha_{2i}|\neq 0\}\neq\phi \quad \text{et} \quad \tilde{F}_3\not\equiv 0\,.$$

Alors, on a

$$\alpha_{3i(3)_m}F_{i(3)_m}=\tilde{F}_3\Delta_3^m/\Delta_3 \qquad (m=1,\cdots,m_3)$$

et de cela, on a

$$\max_{\substack{\alpha_{3i}\neq 0,\ \alpha_{2i}=0\\ \alpha_{1i}=0}}\log|F_i|\leqq\log|\tilde{F}_3|+\log^+\left|\frac{1}{\Delta_3}\right|+\sum_{m=1}^{m_3}\log^+|\Delta_3^m|+O(1) \tag{12}$$

et

$$\log|\tilde{F}_3|\leqq\max_{\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0}\log|F_i|+O(1) \tag{13}$$

Des inégalités (6), (9), (10), (12) et (13), on a

$$\max_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0\\ \text{ou } \alpha_{3i}\neq 0}}\log|F_i|\leqq\log|H_1|+\sum_{k=1}^{3}\log^+\left|\frac{1}{\Delta_k}\right|+\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{m_k}\log^+|\Delta_k^m|+O(1)\,. \tag{14}$$

En utilisant cette inégalité, d'après l'hypothèse (1), on a

$$m_1+m_2+m_3\leqq n-\lambda$$

comme dans II, (8). C'est-à-dire,

$$\{F_i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{3i}\neq 0\}\subsetneqq\{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda}\,.$$

De la même manière, on obtient

$$\{F_i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \cdots \text{ ou } \alpha_{qi}\neq 0\}\subsetneqq\{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda} \qquad (q=1,2,\cdots,\lambda+1)\,.$$

IV. D'autre part, comme

$$\{F_i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0\}\subsetneqq\{F_i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i}\neq 0\}\subsetneqq\cdots\subsetneqq\{F_i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \cdots \text{ ou } \alpha_{qi}\neq 0\}\subsetneqq\cdots\subset\{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda}$$

et l'ensemble $\{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda}$ est fini, il faut qu'il y ait un t $(\leqq\lambda+1)$ tel que

$$\{F_i\,;\,\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou } \cdots \text{ ou } \alpha_{ti}\neq 0\}=\{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda}\,.$$

Dans ce cas, comme (14), on obtient l'inégalité

$$\max_{\substack{\alpha_{1i}\neq 0 \text{ ou}\cdots\\ \text{ou } \alpha_{ti}\neq 0}}\log|F_i|=\max_{1\leqq i\leqq n+1-\lambda}\log|F_i|$$
$$\leqq\log|H_1|+\sum_{k=1}^{t}\log^+\left|\frac{1}{\Delta_k}\right|+\sum_{k=1}^{t}\sum_{m=1}^{m_k}\log^+|\Delta_k^m|+O(1)\,.$$

De cette inégalité, on a, comme dans II,

$$T(r, f) \leqq \sum_{i=1}^{n+1-\lambda+t} N(r, 0, F_i) + S(r) ,$$

où $S(r) = O\ (\log rT(r, f))\ (r \to \infty, r \notin E)$.
Par conséquent, on obtient l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n+1-\lambda+t} \delta(F_i) \leqq n + t - \lambda ,$$

qui est contraire à (1). Cela veut dire qu'il faut

$$\nu_\ell^1 \leqq n - \lambda$$

pour $\ell = 1, \cdots, p_1$.

De la même manière, on obtient

$$\nu_\ell^j \leqq n - \lambda$$

pour $\ell = 1, \cdots, p_j, j = 2, \cdots, \mu$.

On peut supposer que F_{n+1+j} appartiennent à Y_1^j sans restriction de généralité ($j = 1, \cdots, \mu$).

LEMME 7. i) *Quand* $\nu_0^0 = 0$, *pour chaque* j ($= 1, \cdots, \mu$), *il existent un* $\ell(j, 1)$ *tel que*

$$B_{\ell(j,1)}^0 \subset B_1^j$$

et un $\ell(j, 2)$ *tel que*

$$B_{\ell(j,2)}^0 \cap B_1^j = \phi .$$

ii) *Quand* $\nu_0^0 > 0$,

$$B_0^0 \subset B_1^j$$

et il a un $\ell(j)$ *tel que*

$$B_{\ell(j)}^0 \cap B_1^j = \phi \qquad (j = 1, \cdots, \mu) .$$

Démonstration. i) Comme

$$\sum_{\ell=1}^{p_0} \nu_\ell^0 = n + 1 - \lambda ,$$

il y a au moins un $\ell(j, 1)$ tel que

$$B_{\ell(j,1)}^0 \cap B_1^j \neq \phi .$$

Alors, par définition,

$$Y^0_{\ell(j,1)} \subset Y^j_1$$

et on a

$$B^0_{\ell(j,1)} \subset B^j_1 .$$

Et puis, si

$$B^0_\ell \subset B^j_1$$

pour $\ell = 1, \cdots, p_j$, alors

$$\nu^j_1 = n + 1 - \lambda .$$

C'est contraire au Lemme 6. Cela veut dire qu'il y a un $\ell(j, 2)$ tel que

$$B^0_{\ell(j,2)} \cap B^j_1 = \phi .$$

ii) On peut supposer que $B^0_0 = \{F_1, \cdots, F_{\nu^0_0}\}$. Pour tous les éléments dans $\bigcup_{\ell=0}^{p_0} Y^0_\ell$, les coefficients de $F_1, \cdots, F_{\nu^0_0}$ sont tous égals à zéro par définition. En conséquence quand on représente F_{n+1+j} par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$, les coefficients de $F_1, \cdots, F_{\nu^0_0}$ sont différents de zéro. En effet, s'il y en a un qui est égal à zéro (soit le coefficient de F_1 égal à zéro, par exemple), le nombre de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et indépendantes entre $n + 1$ combinaisons $F_2, \cdots, F_{n+1}, F_{n+1+j}$ devient $\lambda + 1$, qui est contraire à la définition de λ. Cela veut dire que

$$B^0_0 \subset B^j_1 .$$

Si, pour chaque ℓ $(= 1, \cdots, p_0)$,

$$B^0_\ell \cap B^j_1 \neq \phi ,$$

alors,

$$Y^0_\ell \subset Y^j_1$$

et

$$B^0_\ell \subset B^j_1 .$$

Par conséquent,

$$\bigcup_{\ell=0}^{p_0} B^0_\ell \subset B^j_1 \quad \text{et} \quad \nu^j_1 = n + 1 - \lambda ,$$

qui est contraire au Lemme 6. C'est-à-dire, il y a un $\ell(j)$ tel que

$$B^0_{\ell(j)} \cap B^j_1 = \phi .$$

LEMME 8. *S'il y a* $n+\mu+1$ *combinaisons* $\{F_1, \cdots, F_{n+\mu+1}\}$ $(1 \leqq \mu \leqq n-1)$ *dans* X *telles que*

$$\delta(F_{n+1+j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n+1 \qquad (j = 1, \cdots, \mu) , \tag{1}$$

alors, $\lambda \geqq \mu$.

Démonstration. On applique le Lemme 7 au

$$Y^j = \{F_1, \cdots, F_{n+1}, F_{n+1+j}\} \qquad (j = 1, \cdots, \mu) .$$

C'est possible d'après l'hypothèse (1). Pour chaque j, il y a au moins une classe $B^0_{\ell(j)}$ telle que, quand on représente F_{n+1+j} par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$, tous les coefficients d'éléments dans $B^0_{\ell(j)}$ sont égals à zéro.

1) Le cas $\nu^0_0 = 0$. Quand on représente $F_{n+1-\lambda+k}$ $(k = 1, \cdots, \lambda)$ par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$, pour chaque k, il y a $p_0 - 1$ classes $B^0_{\ell(k)_1}, \cdots, B^0_{\ell(k)_{p_0-1}}$ telles que tous les coefficients d'éléments dans $\bigcup_{m=1}^{p_0-1} B^0_{\ell(k)_m}$ sont égal à zéro. Par conséquent, en considérant que le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes entre $n+1$ éléments quelconque dans X est λ, il faut que

$$\mu + (p_0 - 1)\lambda \leqq p_0\lambda .$$

C'est-à-dire, on a

$$\mu \leqq \lambda .$$

2) Le cas $\nu^0_0 > 0$. Quand on représente $F_{n+1-\lambda+k}$ $(k = 1, \cdots, \lambda)$ par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$, il y a p_0 classes $B^0_0, B^0_{\ell(k)_1}, \cdots, B^0_{\ell(k)_{p_0-1}}$ telles que tous les coefficients d'éléments dans $B^0_0 \cup \left(\bigcup_{m=1}^{p_0-1} B^0_{\ell(k)_m}\right)$ sont égals à zéro pour chaque k. Par conséquent, comme 1) il faut que

$$\mu + p_0\lambda \leqq (p_0 + 1)\lambda .$$

C'est-à-dire, on a

$$\mu \leqq \lambda .$$

4. Théorèmes

Soient f, X et λ comme précédent. Dans ce paragraphe, on donne deux théorèmes et quelques applications.

THÉORÈME 1. *S'il y a* $n+\mu+1$ $(1 \leqq \mu \leqq n-2)$ *combinaisons* $F_1, \cdots, F_{n+\mu+1}$ *dans* X *telles que*

1) $n-\mu$ *combinaisons quelconque dans* $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ *sont linéairement indépendantes sur* C *et*

2) $\delta(F_{n+1+j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n+1$ $(j=1, \cdots, \mu)$,

alors,

i) $\lambda = \mu$,

ii) *il y a une combinaisons* F_{i_0} *dans* $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ *telle que* $F_{i_0}, F_{n+2}, \cdots, F_{n+\mu+1}$ *sont proportionnelles aux unes aux autres,*

iii) *pour* F *quelconque dans* $X - \{F_1, \cdots, F_{n+\mu+1}\}$,

$$\delta(F) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) \leqq n+1 .$$

iv) $\sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n+\mu+1$.

Démonstration. On utilise les mêmes notations dans § 3. i) D'après l'hypothèse 1), $\nu_1^0 \geqq n-\mu$ et en vertu du Lemme 6, $\nu_1^0 \leqq n-\lambda$. Par conséquent, on a

$$\mu \geqq \lambda .$$

D'autre part, grâce au Lemme 8, hypothèse 2) entraîne que

$$\lambda \geqq \mu .$$

C'est-à-dire, on a $\lambda = \mu$.
ii) L'hypothèse 1) et i) entrainent que

$$\nu_1^0 = \nu_2^0 = \cdots = \nu_{p_0}^0 = n-\lambda .$$

De plus, comme

$$\sum_{\ell=0}^{p_0} \nu_\ell^0 = n+1-\lambda ,$$

il faut que

$$p_0 = 1 , \qquad \nu_1^0 = n-\lambda \quad \text{et} \quad \nu_0^0 = 1 .$$

Soit $B_0^0 = \{F_{i_0}\}$. Alors, en appliquant le Lemme 7, ii), on a

$$F_{n+1+j} = \alpha_j F_{i_0} \qquad (j = 1, \cdots, \mu) .$$

iii) S'il y a une F_0 dans $X - \{F_1, \cdots, F_{n+\mu+1}\}$ telle que

$$\delta(F_0) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n + 1 ,$$

en considérant l'hypothèse 2), on a $\lambda \geqq \mu + 1$ d'après le Lemme 8. C'est contraire à i).

iv) D'après ii), en appliquant le Lemme 4, on a la conclusion tout de suite.

THÉORÈME 2. *S'il y a $2n$ combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{2n}$ dans X telles que*

$$\delta(F_{n+1+j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n + 1 \qquad (j = 1, \cdots, n - 1) ,$$

alors, $\{F_i\}_{i=1}^{2n}$ se repartissent en deux classes jouissants les propriétés suivantes:

i) *Chaque classe contient n combinaisons.*

ii) *Tous les rapports entre deux éléments quelconque dans une même classe sont des constantes.*

Démonstration. f étant trancendant, l'hypothèse entraîne que

$$\lambda = n - 1$$

d'après le Lemme 8. Par conséquent, on a ce théorème tout de suite du Lemme 5.

N.B. 1) Au théorème 1, quand $\mu = 1$, on a le Théorème B′ dans [8]. 2) Le Théorème 2 est une amélioration du Théorème C′ dans [7].

COROLLAIRE 1. i) *S'il y a une combinaison exceptionnelle au sens de Picard (ou lacunaire) dans $\{F_{n+1+j}\}_{j=1}^{\mu}$ au Théorème 1, il y en a $\mu+1$ dans $\{F_i\}_{i=1}^{n+\mu+1}$.*

ii) *S'il y a une combinaison exceptionnelle au sens de Picard (ou lacunaire) dans $\{F_i\}_{i=1}^{2n}$ au Théorème 2, il y en a $n - 1$ en outre.*

COROLLAIRE 2. *Soient $F_1, \cdots, F_{n+\lambda+2}$ $n + \lambda + 2$ combinaisons quelconque dans X. Alors, on a*

$$\sum_{i=1}^{n+\lambda+2} \delta(F_i) \leqq n + \lambda + 1 .$$

En effet, si

$$\sum_{i=1}^{n+\lambda+2} \delta(F_i) > n + \lambda + 1 ,$$

on a

$$\delta(F_{n+1+j}) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n + 1 \qquad (j = 1, \cdots, \lambda + 1) .$$

Cela veut dire que $\lambda \geqq \lambda + 1$ d'après le Lemme 8, qui est absurde.

COROLLAIRE 3. *Il y a au plus $n + \lambda + 1$ combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X.*

Finalement, on donne un exemple.

EXEMPLE. Soient $a_1, \cdots, a_{n+\mu+1}$ $(1 \leqq \mu \leqq n - 1)$ $n + \mu + 1$ valeurs complexes finies et distinctes. On met

$$\begin{aligned} F(z, w) &= f_0 w^n + f_1 w^{n-1} + \cdots + f_n \\ &= e^z \prod_{i=1}^{n} (w - a_i) + \prod_{j=0}^{\mu} (w - a_{n+1+j}) \sum_{k=1}^{n-1} A_k \frac{\prod_{m=1}^{n-\mu} (w - a_m)}{w - a_k} \end{aligned}$$

où

$$A_k = z^{k-1} \Big/ \prod_{j=0}^{\mu} (a_k - a_{n+1+j}) \cdot \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n-\mu} (a_k - a_m) \qquad (k = 1, \cdots, n - \mu) .$$

Dans cette situation, soient

$$f = (f_0, \cdots, f_n) , \qquad X = \{w^n f_0 + w^{n-1} f_1 + \cdots + f_n ; w \in C\} .$$
$$F_i \equiv F(z, a_i) \qquad (i = 1, \cdots, n + \mu + 1)$$

Alors, f est transcendant et $\{F_i\}_{i=1}^{n+\mu+1}$ satisfont les hypothèses du Théorème 1 $(\mu \leqq n - 2)$ ou du Théorème 2 $(\mu = n - 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica, **7** (1933), 5–31.

[2] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Gauthier-Villars, Paris 1929.

[3] K. Niino et M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function. Kōdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 98–113.

[4] J. Noguchi, On the deficiencies and the existence of Picard exceptional values of

entire algebroid function. Kodai Math. Sem. Rep., **26** (1974), 29–35.

[5] M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function III. Kōdai Math. Sem. Rep., **23** (1971), 486–492.

[6] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 67–95.

[7] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, II. J. Math. Soc. Japan, **25** (1973), 158–167.

[8] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, IV. Nagoya Math. J., **59** (1975), 77–86.

Université de Nagoya