Y. Ito
Nagoya Math. J.
Vol. 63 (1976) 123-137

SUR LE SEMI-GROUPE DE L'OPERATEUR INVERSE DE Δ

YOSHIFUSA ITO

1. Introduction.

Soient N le noyau newtonien sur l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$ à dimension $n \geqq 3$ et E l'espace de Banach formé par des fonctions finies et continues définies dans $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini et normé usuellement. Définissons l'opérateur de convolution K par $Kf = -N*f$. Dans cette note nous traitrons l'opérateur K dans E. D'abord on remarque l'existence de l'extension fermée $\bar{K}$ de l'opérateur K. On note $\bar{\Delta}$ l'extension fermée de l'opérateur de Laplace Δ. Soient $(G_t)_{t\geqq 0}$ et $(T_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe des opérateurs dont le générateur infinitésimal est $\bar{\Delta}$ et celui dont le générateur infinitésimal est $\bar{K}$. On montrera que la transformation de Bessel applique $(G_t)_{t\geqq 0}$ à $(T_t)_{t\geqq 0}$, et chaque opérateur T_t est défini par la différence de la mesure de Dirac δ à l'origine et d'une fonction s_t analytique en dehors de l'origine. La fonction s_t est sphériquement symétrique et à décroissance rapide. Elle oscille encore infiniment sur toute la demi-droite. En l'appliquant on peut obtenir la solution explicite de problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \bar{K}u(x,t) \\ \text{(b)} \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

La solution du présent problème est représentée par

$$u(x,t) = T_t u_0(x) = u_0(x) - s_t * u_0(x) \ ,$$

si u_0 appartient au domaine de $\bar{K}$.

Finalement on montrera que

$$\int_0^\infty T_t dt = -\bar{\Delta}$$

Received February 18, 1976.

au sens des distributions; c'est-à-dire, $-\bar{\Delta}$ est un noyau de potentiel engendré par $(T_t)_{t\geqq 0}$.

L'étude de $\bar{K}$ au lieu de $\bar{\Delta}$ dans $\partial u/\partial t = \bar{\Delta} u$ est fondée sur l'intérêt au processus appelé "l'inhibition latérale" par les physiologistes ([4], [5] et [6]). La forme de la différence $\delta - s_t$ représente approximativement la réponse du système nerveux à stimulation du petit groupe des récepteurs dans l'organe sensoriel.

2. Préliminaires.

On désigne par x ou y un élément de $\boldsymbol{R}^n$ et par s ou t un élément de $\boldsymbol{R}^1_+ = \{s \in \boldsymbol{R}^1 \mid s \geqq 0\}$.

On note:

E_0 l'espace des fonctions finies et continues dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact.

E l'espace de Banach formé par des fonctions finies et continues dans $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini et muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in \boldsymbol{R}^n}|f(x)|$.

L^1 l'espace formé par des fonctions sommables dans $\boldsymbol{R}^n$.

Soit L un opérateur dans E. On écrit $D(L)$ le domaine de L. On a évidemment $E \supset D(\bar{K}) \supset D(K) \supset E_0$. Les sous-espaces $D(\bar{K})$, $D(K)$ et E_0 sont denses dans E.

La transformée de Fourier d'une fonction f dans $\boldsymbol{R}^n$ est définie par

$$\mathscr{F} f(y) = \int f(x) \exp(2\pi\sqrt{-1}\, x\cdot y) dx$$

dès que l'intégrale a un sens, où $x \cdot y$ est le produit scalaire dans $\boldsymbol{R}^n$. La transformée inverse de Fourier d'une fonction g dans $\boldsymbol{R}^n$ s'écrit comme $\mathscr{F}^{-1}g$.

On désigne par δ la mesure de Dirac à l'origine et par I l'opérateur d'identité.

On pose

$$g_s(x) = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4s}\right).$$

Alors

$$\mathscr{F} g_s(y) = e^{-4\pi^2 s|y|^2}.$$

La fonction bessélienne du premier cardre est définie par

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \qquad \text{si } \arg z \neq \pi .$$

On appelle la fonction bessélienne du troisième cardre la fonction $K_\nu(z)$ définie par

$$\text{i)}\quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \qquad \text{si } \nu \text{ } n\text{'est pas entier}\,, \tag{1}$$

$$\text{ii)}\quad K_m(z) = \frac{(-1)^m}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=m} \qquad \text{si } m \text{ est entier}\,, \tag{2}$$

où I_ν est la fonction bessélienne modifiée du premier cardre définie par

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m}}{n!\,\Gamma(\nu + m + 1)} \qquad \text{si } \arg z \neq \pi\,. \tag{3}$$

Il est bien connu que $K_\nu(z)$ est représentée par l'intégrale suivante ([3] p. 183):

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{z^2}{4t}\right)\cdot t^{-\nu-1}dt$$
$$\text{pour } \nu > 0 \text{ et } z > 0\,.$$

En modifiant cette égalité, on a

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{2\nu-1}dr = \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{st})$$
$$\text{pour } \nu > 0,\ s > 0 \text{ et } t > 0\,. \tag{4}$$

Soit τ_x la translation de x. Rappelons que T est un opérateur de convolution sur un espace vectoriel V formé par des fonctions si les deux conditions suivantes sont verifiées:

i) $\tau_x V = V$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$.

ii) $\tau_x(Tf) = T(\tau_x f)$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$ et toute $f \in V$.

Dans cette note le noyau newtonien est

$$N = \frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}\,,$$

où Ω_n est l'aire de la sphère d'unité dans $\boldsymbol{R}^n$. On appelle le potentiel newtonien d'une fonction f

$$N*f(x) = \frac{1}{(n-2)\Omega_n}\int \frac{f(x-y)}{|y|^{n-2}}dy$$

dès que l'intégrale a un sens. Il est clair que $K: f \to -N*f$ est un opérateur linéaire de convolution.

3. Le semi-groupe associé à l'opérateur $\bar{K}$ et un problème de Cauchy.

L' opérateur K n'est pas fermé dans E. En effet, il existe un exemple suivant:

EXEMPLE. Soient ε une constante positive $< 1/2$ et $(\tilde{W}_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite des fonctions finies, continues et non-négatives sur R^1 qui satisfait aux conditions suivantes:

1) $\operatorname{supp} \tilde{w}_k \subset (k-\varepsilon,\ k+\varepsilon)$.
2) $\tilde{w}_k < 1/\varepsilon k^2$.
3) $\int_0^\infty \tilde{w}_k(r) r dr = 1/k$.
4) $\int_0^\infty \tilde{w}_k(r) r^{n-1} dr = k^{n-3}$.

Posons

$$w_k(x) = \tilde{w}_k(|x|)$$

et

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{i} (-1)^k w_k(w) \qquad \text{pour } i \geqq 1 .$$

Alors (f_i) et (Kf_i) convergent uniformément lorsque $i \to \infty$. Posons

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) .$$

Alors Kf n'a pas de sens; c'est-à-dire, f n'appartient pas au domain de K. Donc K n'est pas un opérateur fermé. Mais il existe l'extention fermée de K.

PROPOSITION 1. *L'opérateur K possède l'extension fermée $\bar{K}$.*

Démonstration. Soit $G(K)$ le graphe de K. Il suffit de montrer que $G(K)$ est le graphe d'un opérateur. Soit $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ une suite dans E telle que $f_m \to 0$ et $Kf_m \to g \in E$. Soient ρ_r la mesure uniforme sur la sphère de centre 0 et de rayon r avec

$$\int d\rho_r = 1 , \quad \text{et} \quad \varphi \in E_0 .$$

Posons

$$h_r(x) = \varphi * (\delta - \rho_r)(x) .$$

Alors on a

$$\int g(x)h_r(x)dx = -\lim_{m\to\infty}\int N*f_m(x)h_r(x)dx = -\lim_{m\to\infty}\int N*h_r(x)f_m(x)dx = 0 .$$

D'autre part, on a

$$\lim_{r\to\infty}\int g(x)\rho_r*\varphi(x)dx = 0 .$$

Donc

$$\int g(x)\varphi(x)dx = \lim_{r\to\infty}\left(\int g(x)h_r(x)dx + \int g(x)\rho_r*\varphi(x)dx\right) = 0 .$$

Comme φ est quelconque, $g = 0$. c.q.f.d.

Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante de $\bar{\Delta}$. Posons

$$K_p = \frac{1}{p}\left[I - \frac{1}{p}N_{1/p}\right]$$

pour $p > 0$. Alors $(K_p)_{p>0}$ est la résolvante de $\bar{K}$. Donc on voit qu'il existe le semi-groupe $(T_t)_{t\geqq 0}$ des opérateurs de classe C_0 dont le générateur infinitésimal est $\bar{K}$, car

$$\int N_p\,dx = \frac{1}{p}$$

(v. le théorème 3.3, chap. 1, [2]).

Ce semi-groupe $(T_t)_{t\geqq 0}$ est donné explicitement dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soit $(T_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe des opérateurs dont le générateur infinitésimal est $\bar{K}$. Alors, pour $t \geqq 0$ quelconque, T_t est l'opérateur linéaire de convolution défini par la différence de δ et d'une fonction s_t sphériquement symétrique; c'est-à-dire,*

$$T_t f = f - s_t*f \qquad \textit{pour } f \in E .$$

La fonction s_t est obtenue de $(g_s)_{s\geqq 0}$ par la transformation de Bessel suivante:

$$s_t(x) = \int_0^\infty g_s(x)\sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st})\mathrm{ds} .$$

La fonction s_t possède les propriétés suivantes:

a) s_t *est analytique en dehors de l'origine.*

b) s_t *est à décroissance rapide lorsque* $|x| \to \infty$.

c) $|s_t| \leqq tN$ *et* $(s_t(x)/tN(x)) \to 1$ *lorsque* $x \to \infty$.

d) $s_t \in L^1$ *et* $\int |s_t(x)|\, dx$ *est une constante.*

Démonstration. Comme la fonction $\sqrt{(t/s)}J_1(2\sqrt{st})$ de s est bornée sur $(0, \infty)$, on peut définir

$$s_t(x) = \int_0^\infty g_s(x)\sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st})ds$$

et on voit facilement que a) a lieu.

En utilisant l'égalité

$$\int_0^s (2\sqrt{ut})^\nu J_{\nu-1}(2\sqrt{ut})\sqrt{\frac{t}{u}}du = (2\sqrt{st})^\nu J_\nu(2\sqrt{st}) ,$$

on a, pour tout entier $m \geqq 3$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{e^{-|x|^2/4s}}{s^{m/2}} J_\nu(2\sqrt{st})ds \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-|x|^2/4s}}{t^{1/2}s^{m/2+1/2}}\left(\frac{m}{2} + \frac{\nu}{2} - 1 + \frac{|x|^2}{2s}\right)J_{\nu+1}(2\sqrt{st})ds \\
&= O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right) .
\end{aligned}$$

Par récurrence, pour tout l'entier k

$$|x|^k s_t(x) \longrightarrow 0$$

lorsque $|x| \to \infty$. De la même manière, on voit que, pour des polynômes p, q quelconques,

$$p(x)q(D_x)s_t(x) \longrightarrow 0$$

lorsque $|x| \to \infty$, où

$$D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) ,$$

d'où b).

Comme

$$t \geqq \sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st}) \geqq t\left(1 - \frac{st}{2}\right) ,$$

on a, pour $\eta < 4/t$,

$$\begin{aligned} tN(x) &= t\int_0^\infty g_s(x)ds > \int_0^\infty g_s(x)\sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st})ds \\ &= s_t(x) > t\Big(1-\frac{\eta t}{2}\Big)\int_0^\infty g_s(x)ds - 2t\int_\eta^\infty g_s(x)ds \\ &> t\Big(1-\frac{\eta t}{2}\Big)N(x) - \frac{4t}{(4\pi)^{n/2}(n-2)\eta^{(n/2)-1}} \,. \end{aligned}$$

Donc

$$1 > \frac{s_t(x)}{tN(x)} > 1 - \frac{\eta t}{2} - \frac{4}{(4\pi)^{n/2}(n-2)\eta^{(n/2)-1}N(x)} \,.$$

Par conséquent, c) a lieu.

D'après b) et c), il est clair que $s_t \in L^1$. En posant $u = st$, on a

$$s_t(x) - \int_0^\infty g_s(x)\sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st})ds = t^{n/2}\int_0^\infty g_u(xt^{1/2})\sqrt{\frac{1}{u}}J_1(2\sqrt{u})du \,.$$

Donc

$$\int |s_t(x)|\,dx = t^{n/2}\int\left|\int_0^\infty g_u(xt^{1/2})\sqrt{\frac{1}{u}}J_1(2\sqrt{u})du\right|dx = \text{const} \,.$$

Alors on a d).

Définissons l'opérateur linéaire U_t de convolution sur E par

$$U_t f = f - s_t * f \,.$$

Montrons que $(U_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe de classe C_0. Posons

$$j(s,t) = \sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st}) \,.$$

D'après l'égalité

$$1 - e^{-t/p} = \int_0^\infty e^{-ps}\sqrt{\frac{t}{s}}J_1(2\sqrt{st})ds \qquad (p > 0,\ t > 0)$$

(v. vol. 1, p. 245 [1]), on a

$$j(s, t_1 + t_2) = j(s, t_1) + j(s, t_2) - \int_0^s j(s_1, t_1)j(s - s_1, t_2)ds_1 \,.$$

Alors, pour $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$ quelconques, on a

$$\begin{aligned} s_{t_1+t_2}(x) &= \int_0^\infty g_s(x) j(s, t_1 + t_2) ds \\ &= s_{t_1}(x) + s_{t_2}(x) - \int_0^\infty \int_0^\infty g_{s_1} * g_{s_2}(x) j(s_1, t_1) j(s_2, t_2) ds_1 ds_2 \\ &= s_{t_1}(x) + s_{t_2}(x) - s_{t_1} * s_{t_2}(x) . \end{aligned}$$

Donc

$$U_{t_1+t_2} f = f - s_{t_1} * f - s_{t_2} * f + s_{t_1} * s_{t_2} * f = U_{t_1}(U_{t_2} f) .$$

La continuité de $t \to U_t$ résulte de celle de $t \to j(\cdot, t)$.

Comme $s_t(x)/tN(x) \leqq 1$ et $s_t(x)/tN(x) \to 1$ lorsque $t \to 0$, on voit que le générateur infinitésimal de $(U_t)_{t \geqq 0}$ coïncide avec K dans E_0. Donc le semi-groupe $(U_t)_{t \geqq 0}$ est égal à $(T_t)_{t \geqq 0}$. c.q.f.d.

COROLLAIRE. (I) *La solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \bar{K} u(x, t) \\ \text{(b)} \quad u_0(x, 0) = u_0(x) \qquad\qquad u_0 \in D(\bar{K}) \end{cases}$$

est représentée par

$$u(x, t) = T_t u_0(x) = u_0(x) - s_t * u_0(x) .$$

(II) *Soit* $(u_0^{(m)})_{m=1}^\infty$ *une suite de* $D(K)$ *telle que* $u_0^{(m)} \to 0$ *fortement dans* E *lorsque* $m \to \infty$. *Alors* $\|u^{(m)}(\cdot, t)\| \to 0$ *uniformément sur* $[0, \infty)$, *où* $u^{(m)}$ *est la solution du problème du Cauchy pour la valeur initiale* $u_0^{(m)}$.

En effect, on voit facilement que (I) a lieu, d'après le théorème 1.

Comme

$$\int |s_t(x)| \, dx$$

est égale à une constante M,

$$\|u^{(m)}(\cdot, t)\| \leqq (1 + M) \|u_0^{(m)}\|$$

pour tout $t \in [0, \infty)$, d'où (II).

Remarque. D'après (I), la solution u n'est pas toujours analytique dans $\boldsymbol{R}^n \times (0, \infty)$, et donc son allure est différent de celle de la solution du problème de Cauchy usuel pour l'opérateur différentiel.

La fonction $s_t(x)$ de x et de t peut être explicitement représentée par une série. Le lemme suivant sera utilisé dans sa démonstration de la proposition 2.

LEMME. *Soient U et V deux distributions tempérées définies dans $\boldsymbol{R}^n$ et sphériquement symétriques. Si $U(g_s) = V(g_s)$ pour $s > 0$ quelconque, alors $U = V$.*

En effect, soient f et h deux fonctions continues, tempérées et sphériquement symétriques définies dans $\boldsymbol{R}^n$. Montrons que si, pour $s > 0$ quelconque,

$$\int f(x)g_s(x)dx = \int h(x)g_s(x)dx \ , \tag{5}$$

alors $f = h$. Posons $\tilde{f}(|x|) = f(x)$, $\tilde{h}(|x|) = h(x)$ et $\tilde{g}_s(|x|) = g_s(x)$. Alors $\tilde{f}$ et $\tilde{h}$ sont deux fonctions continues et tempérées sur $[0, \infty)$ et l'égalité (5) s'écrit comme

$$\int_0^\infty \tilde{f}(t)\tilde{g}_s(t)t^{n-1}dt = \int_0^\infty \tilde{h}(t)\tilde{g}_s(t)t^{n-1}dt \ .$$

L'injectivité de la transformation de Laplace donne que $\tilde{f} = \tilde{h}$ sur $[0, \infty)$, d'où $f = h$ sur $\boldsymbol{R}^n$.

Soit $s_0 > 0$ quelconque. En posant

$$u = U*g_{s_0} \quad \text{et} \quad v = V*g_{s_0} \ ,$$

on voit que u et v sont deux fonctions continues, tempérées et sphériquement symétriques, car g_{s_0} est à décroissance rapide et sphériqument symétrique. Soit $s > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int u(x)g_s(x)dx &= U(g_{s_0}*g_s) = U(g_{s_0+s}) = V(g_{s_0+s}) \\ &= V(g_{s_0}*g_s) = \int v(x)g_s(x)dx \ .\end{aligned}$$

Donc on a $u = v$; c'est-à-dire,

$$U*g_{s_0} = V*g_{s_0} \ .$$

En faisant $s_0 \to 0$, on a $U = V$.

PROPOSITION 2. *La fonction s_t est explicitement représentée de la forme suivante:*

i) *Pour n impair,*

$$s_t(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} t^{n/2}}{\pi^{n/2-1}} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(|x|\, t^{1/2})^{2i-n}}{2^{2i}\Gamma(i)\Gamma(i+1)\Gamma(-n/2+i+1)} \right. \tag{6}$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(|x|\, t^{1/2})^{2i}}{2^{2i+n}\Gamma(i+n/2)\Gamma(i+n/2+1)\Gamma(i+1)} \right].$$

ii) *Pour n pair,*

$$s_t(x) = \left(\frac{t}{\pi}\right)^{n/2} \left[\sum_{i=1}^{n/2-1} \frac{(-1)^{i+1}(n/2-i-1)!}{2^{2i}\Gamma(i)\Gamma(i+1)} (|x|\, t^{1/2})^{2i-n} \right.$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2+1}(|x|\, t^{1/2})^{2i}}{2^{2i+n}\Gamma(i+1)\Gamma(i+n/2)\Gamma(i+n/2+1)} \tag{6a}$$
$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2} \frac{1}{k} - 3C - \log \frac{|x|^2 t}{4} \right) \right],$$

où C est la constante d'Euler.

Démonstration. En utilisant la formule dans [1] (vol. 1, p. 245), on a

$$\int_0^\infty e^{-4\pi^2 s|x|^2} \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st})dt = 1 - e^{-t/4\pi^2|x|^2}.$$

Donc

$$\mathscr{F} s_t(x) = 1 - e^{-t/4\pi^2|x|^2}.$$

En utilisant cette égalité et la formule de Parseval, on a

$$\Omega_n \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{n-1} dr = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} - \int s_t(x) g_s(x) dx \tag{7}$$

Soit n un entier impair. En utilisant (1), (3) et (4), on a

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{n-1} dr$$
$$= \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^n} \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{s}\right)^{n/4} \left[(st)^{-n/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(st)^i}{i!\, \Gamma(-n/2+i+1)} \right. \tag{8}$$
$$\left. - (st)^{n/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(st)^i}{i!\, \Gamma(n/2+i+1)} \right].$$

Posons

$$a_i = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2^{2i}\pi^{n/2-1}\Gamma(i)\Gamma(i+1)\Gamma(-n/2+i+1)} \qquad \text{pour } i \geqq 1,$$

et

$$b_i = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2^{2i+n}\pi^{n/2-1}\Gamma(i+n/2)\Gamma(i+n/2+1)\Gamma(i+1)} \qquad \text{pour } i \geqq 0 \,.$$

En régardant les ordres de (a_i) et de (b_i), on voit que

$$s_t^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{n/2}(|x|\, t^{1/2})^{2i-n}$$

et

$$s_t^{(2)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{n/2}(|x|\, t^{1/2})^{2i}$$

convergent absolument en dehors de l'origine. Posons $s_t'(x) = s_t^{(1)}(x) - s_t^{(2)}(x)$. Alors la fonction s_t' est localement sommable, car la singularité de $s_t^{(1)}$ est d'ordre $(2-n)$ à l'origine. En utilisant (8) et l'égalité

$$\int_0^\infty r^{2k-1}e^{-r^2/4s}dr = 2^{2k-1}s^k\Gamma(k) \qquad \text{pour } k>0 \text{ et } s>0 \,, \tag{9}$$

on a

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2\,|x|^2} - 4\pi^2 s\,|x|^2\right)dx = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} - \int s_t'(x)g_s(x)dx \,. \tag{10}$$

En comparant (7) avec (10), on a

$$\int s_t(x)g_s(x)dx = \int s_t'(x)g_s(x)dx \tag{11}$$

Soit n un entier pair. En utilisant (2), (3) et (4), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{n-1}dr \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\frac{t}{s}\right)^{n/4}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\frac{(n/2-i-1)}{i!}(st)^{i-n/4} \\
&\qquad\qquad + \frac{(-1)^{n/2}}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(st)^{n/4+i}}{i!\,\Gamma(n/2+i+1)} \\
&\qquad\qquad \times\left(\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2}\frac{1}{k} - 2C - \log st\right)\Bigg] \,.
\end{aligned}$$

Posons

$$c_i = \frac{(-1)^{i+1}(n/2-i-1)}{2^i\pi^{n/2}\Gamma(i)\Gamma(i+1)} \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq \frac{n}{2} - 1 \,,$$

$$d_i = \frac{(-1)^{n/2+1}}{2^{2i+n}\Gamma(i+n/2)\Gamma(i+n/2+1)\Gamma(i+1)}$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{i+n/2-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{i+n/2}\frac{1}{k}-3C+2\log 2\right) \qquad \text{pour } i \geqq 0\ ,$$

et

$$e_i=\frac{(-1)^{n/2}}{2^{2i+n-1}\pi^{n/2}\Gamma(i+n/2)\Gamma(i+n/2+1)\Gamma(i+1)} \qquad \text{pour } i \geqq 0\ .$$

De la même façon, les deux séries

$$s_t^{(3)}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}d_i(|x|\,t^{1/2})^{2i}$$

et

$$s_t^{(4)}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}e_i(|x|\,t^{1/2})^{2i}\log|x|\,t^{1/2}$$

convergent absolument en dehors de l'origine. Posons

$$s_t'(x)=\sum_{i=1}^{n/2-1}c_i(|x|\,t^{1/2})^{2i-n}+s_t^{(3)}(x)+s_s^{(4)}(x)\ .$$

Alors $s_t'(x)$ est localement sommable dans $\boldsymbol{R}^n$, car la sigulalité de $s_t'(x)$ est d'ordre $(2-n)$ à l'origine. En utilisant (9), (12) et l'égalité

$$\int_0^{\infty} r^{2k-1}e^{-r^2/4s}\log r dr=2^{2k-2}s^k[\log 4s\cdot\Gamma(k)+\Gamma'(k)] \qquad \text{pour } k>0 \text{ et } s>0\ ,$$

on voit que

$$\int\exp\left(-\frac{t}{4\pi^2|x|^2}-4\pi^2s\,|x|^2\right)dx=\frac{1}{(4\pi s)^{n/2}}-\int s_t'(x)g_s(x)dx\ . \tag{10a}$$

En comparant (7) avec (10a), on a

$$\int s_t(x)g_s(x)dx=\int s_t'(x)g_s(x)dx\ . \tag{11a}$$

En utilisant le lemme, (11) et (11a), on obtient $s_t=s_t'$. Donc on a (8) et (8a).

Remarque. On a

$$\int s_t(x)dx=1\ .$$

Pour un polynôme $p(x)$ s'annulant à l'origine quelconque,

$$\int p(x)s_t(x)dx=0\ .$$

Lorsque $|x| \to \infty$, s_t oscille infiniment en prenant des valeurs positives et négatives alternativement.

En effect, soit $p_1(x)$ un polynôme quelconque. Alors on a

$$\int p_1(x)s_t(x)dx = \lim_{x \to 0} p_1\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}D_x\Big)(1 - e^{-t/4\pi^2|x|^2}) = p_1(0) .$$

Donc on a deux l'égalités dans la remarque. Si s_t n'oscille pas infiniment en prenant des valeurs positives et négatives alternativement, il est impossible que

$$\int p(x)s_t(x)dx = 0 .$$

4. Comparaison de $(T_t)_{t \geqq 0}$ et du semi-groupe associé au noyau newtonien.

Définissons l'opérateur G_t par

$$G_t f(x) = g_t * f(x) = \int \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/4t} f(x-y)dy$$

dès que l'intégrale a un sens. Alors $(G_t)_{t \geqq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau newtonien. Il est bien connu que

$$\int_0^\infty G_t f dt = Nf ,$$

où le noyau newtonien N et l'opérateur dans E défini par N sont identifiés. Montrons que l'opérateur $-\bar{\Delta}$ peut être aussi considéré comme le noyau de potentiel engendré par $(T_t)_{t \geqq 0}$. En effect, soit $\mathscr{S}$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide sur $\boldsymbol{R}^n$. Si $\varphi \in \mathscr{S}$, il est clair que $T_t\varphi$ est continue comme une fonction de t. Considérons la fonction

$$\int_0^M T_t\varphi(x)dt$$

de x, alors

$$\mathscr{F}\Big(\int_0^M T_t\varphi dt\Big) = \int_0^M e^{-t/4\pi^2|x|^2}(\mathscr{F}\varphi)dt .$$

En faisant $M \uparrow \infty$, on a

$$\int_0^\infty T_t\varphi dt = -\Delta\varphi$$

au sens des distributions.

Les semi-groupes $(G_t)_{t\geqq 0}$ et $(T_t)_{t\geqq 0}$ sont de classe C_0. Le générateur infinitésimal de $(G_t)_{t\geqq 0}$ est $\bar{\Delta}$ et celui de $(T_t)_{t\geqq 0}$ est $\bar{K}$. Donc la relation entre $(G_t)_{t\geqq 0}$, N et Δ est analogue à celle entre $(T_t)_{t\geqq 0}$, $-\Delta$ et $-N$. De plus, lorsque $t\to\infty$, G_t dilate et T_t se contracte, mais pour $f\in E$ quelconque G_tf et $T_tf\to 0$ $(t\to\infty)$. Lorsque $t\to 0$, G_t et T_t convergent à l'opérateur d'identité.

Pour un nombre $0<\alpha\leqq 1$, la relation suivante est bien connue:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}G_t dt=\frac{\Gamma(n/2-\alpha)}{4^\alpha\pi^{n/2}\Gamma(\alpha)\,|x|^{n-2\alpha}}=N^\alpha\,.$$

De même, on a l'égalité suivante:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}T_t dt=(-\Delta)^\alpha$$

sur le domaine de $(-\Delta)^\alpha$. En effect, pour $\psi\in\mathscr{S}$,

$$\begin{aligned}\int(-\Delta)^\alpha\psi\,dx&=\int(4\pi^2|x|^2)\mathscr{F}^{-1}\psi dx=\int\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(\mathscr{F}(\delta-s_t))\mathscr{F}^{-1}\psi dtdx\\&=\int\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}T_t\psi dtdx=\int\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}T_t dt\Big)\psi dx\,.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}T_t dt=(-\Delta)^\alpha$$

sur $\mathscr{S}$. Comme $\mathscr{S}$ est dense dans l'espace de Banach $D((-\Delta)^\alpha)$, on a l'égalité sur le domaine de $(-\Delta)^\alpha$.

Finalement on remarque le semi-groupe associé à l'opérateur inverse du

$$\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

est obtenu de la même manière dès que

$$\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

est elliptique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Erdélyi, A.; Table of integral transforms, McGraw-Hill book company, INC. New York, 1954.
[2] Крейн, С. Г.; Линейные дифференциалные уравнения в Банаховом пространстве, Москва, 1963.
[3] Watson, G. N.; A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, at the university press, 1966.
[4] Békésy, G.; Neural funneling along the skin and between the inner and outer hair cells of the cochlea, J. Accoust. Soc. Am., **13** (1959), 1236–1249.
[5] Hartline, H. K. and F. Ratliff; Inhibitory interaction of receptor units in the eye of Limulus, J. Gen. Physiol., **40** (1957), 357–376.
[6] Ratliff, F.; Mach Bands: Quantitative Studies on Neural Networks in the Retina, Holden-Day, San Francisco, 1965.

Université de Nagoya
Département de Physiologie