Y. Tsukamoto
Nagoya Math. J.
Vol. 52 (1973), 35-38

ÜBER GEWISSE RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN MIT POSITIVER KRÜMMUNG

Professor Minoru Kurita zum 60. Geburtstag gewidet

YÔTARO TSUKAMOTO*

Es ist wichtig und interessant, die Beziehungen zwischen Krümmung, Volumen, Geodätischen und topologischen Strukturen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung zu untersuchen.

Die folgende Sätze sind wohlbekannt.

SATZ A (*Heim* [4]). *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqq 2$ mit Riemannscher Krümmung $K \geqq 1$ und $\operatorname{vol} M \geqq \frac{1}{2} \operatorname{vol} S^n$, wobei S^n eine Sphäre mit konstanter Krümmung 1 ist und $\operatorname{vol} M$ das Volumen von M ist. Dann sind alle periodischen Geodätischen nicht kürzer als π.*

SATZ B (*Nagayoshi und Tsukamoto* [5]). *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqq 2$ mit Riemannscher Krümmung $K \geqq 1$ und $\operatorname{vol} M \geqq \frac{1}{2} \operatorname{vol} S^n$. Dann ist M eine Homotopiesphäre oder isometrisch zum reellen projektiven Raum mit konstanter Krümmung 1.*

Hier beweisen wir den folgenden Satz.

SATZ. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqq 2$ mit Riemannscher Krümmung $K \geqq 1$ und $\operatorname{vol} M \geqq \frac{1}{2} \operatorname{vol} S^n$. Ferner gebe es eine periodische Geodätische minimaler Bogenlänge π. Dann ist M isometrisch zum reellen projektiven Raum mit konstanter Krümmung 1.*

1. Vorbereitungen

(a) Volumen (vgl. Berger-Gauduchon-Mazet [2]). Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, g die Riemannsche Metrik von

Received October 3, 1972.

* Von Sonderforschungsbereich "Theoretische Mathematik der Universität Bonn" unterstüzt.

M und v_g das Volumenelement von M. Für $m \in M$ hat man das Volumenelement v_m vom Tangentialraum M_m an m in M. Es sei $\exp_m$ die Exponentialabbildung von M_m in M und U_m die maximale offene Umgebung um 0 von M_m, die $\exp_m$ diffeomorph auf ihr Bild abbildet. Die Umgebung U_m heisst die injektive Umgebung von m. Für jeden Punkt $x \in U_m$ sei $\theta(x)$ die Jacobische Determinante von $\exp_x$. Dann haben wir

$$\mathrm{vol}\, M = \int_{U_m} \theta \cdot v_m \,. \tag{1}$$

Wir verwenden Jacobifelder, um Volumen zu berechnen. Es sei $U_\varepsilon(m)$ eine normale Umgebung vom Radius $\varepsilon > 0$ um m in M. Für $0 < r < \varepsilon$ und Einheitsvektor u auf $U_\varepsilon(m)$ geben wir den Ausdruck von $\theta(ru)$. Es sei c_u die Geodätische von m mit der Anfangsrichtung u. Es sei $\{y_2, \cdots, y_n\}$ eine orthonormale Basis vom orthogonalen Komplement $u^\perp$ von u. Es sei $Y_i(s), i = 2, \cdots, n$, Jacobifelder längs der Geodätischen c_u, so dass $Y_i(0) = 0$ und $Y_i'(0) = y_i/r$, wobei Y' die kovariante Ableitung von Y_i in der Richtung $\dot{c}_u$ ist. Dann haben wir

$$\theta(ru) = \det(\langle Y_i(r), Y_j(r)\rangle)^{1/2}\,, \qquad i, j = 2, \cdots, n, \tag{2}$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das innere Produkt von M ist.

(b) Die Vergleichssätze von Rauch und Toponogov (vgl. Gromoll-Klingenberg-Meyer [3]).

Für $m \in M$ bezeichne man mit G_m die Menge aller 2-dimensionalen linearen Teilräume von M_m und $G_M := \bigcup_{m \in M} G$; $c: [0, l] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Für $t \in [0, l]$ bezeichne man mit $G_{c,t}$ die Menge aller 2-dimensionalen linearen Teilräume $\sigma \subset M_{c(t)}$ mit dem Tangentenvektor $\dot{c}(t) \in \sigma$ und $G_c := \bigcup_{t \in [0,l]} G_{c,t}$. Man kann jeder Ebene $\sigma \in G_M$ die Riemannsche Krümmung $K_\sigma = K(u, v)$ zuordnen, indem man linear unabhängige Vektoren $u, v \in \sigma$ wählt.

VERGLEICHSSATZ VON RAUCH. *Es sei S^n eine n-dimensionale Sphäre mit konstanter Krümmung $1, M$ eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit $(n \geqq 2)$; $c: [0, l] \to M, \tilde{c}: [0, l] \to S^n$ normale Geodätische, $Y, \tilde{Y}$ Jacobifelder längs $c, \tilde{c}$ mit $Y(0) = 0, \tilde{Y}(0) = 0$ und $\langle Y', \dot{c}\rangle(0) = \langle \tilde{Y}', \dot{\tilde{c}}\rangle(0) = 0$ sowie $\|Y'(0)\| = \|\tilde{Y}'(0)\|$. c habe keine konjugierten Punkte in $(0, l)$. Ist dann die Krümmung von M längs c nicht kleiner als* 1, d. h. $K_\sigma \geqq 1$ *für alle $\sigma \in G_{c(t)}$ und alle $t \in [0, 1]$, so gilt $\|Y(t)\| \leqq \|\tilde{Y}(t)\|, t \in [0, l]$.*

Haben wir $\|Y(t_0)\| = \|\tilde{Y}(t_0)\| \neq 0$ *für* $t_0 \in [0, l]$, *so gilt* $K(Y(t), \dot{c}(t)) = 1$ *für alle* $t \in [0, t_0]$.

VERGLEICHSSATZ VON TOPONOGOV. *Es sei* M *eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* n $(n \geqq 2)$, *und* $K_\sigma \geqq k > 0$ *für alle* $\sigma \in G_M$. *Es sei* pqr *ein geodätisches Dreieck auf* M *und* $\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ *ein geodätisches Dreieck auf* $S^n(k)$ *mit* $d(\tilde{p}, \tilde{q}) = d(p, q), d(\tilde{p}, \tilde{r}) = d(p, r)$ *und dem Winkel* $\measuredangle\, \tilde{p} = \measuredangle\, p$. *Dann ist* $d(q, r) \leqq d(\tilde{q}, \tilde{r})$, (*wobei* $S^n(k)$ *eine* n-*dimensionale Sphäre mit konstanter Krümmung* k *ist und* d *die Abstandsfunktion ist*).

2. Beweis von Satz

Es sei c eine periodische Geodätische minimaler Bogenlänge π. Es sei m ein Punkt von c. Es sei n ein beliebiger Punkt von M und r ein nächster Punkt auf c von n. Dann haben wir $d(n, r) \leqq \pi/2$ (vgl. Berger [1]), und eine minimale Geodätische von n nach r ist orthogonal zu c in r. Wenn wir den Vergleichssatz von Toponogov verwenden und mit dem gleichen Argument wie im Beweis des Satzes von Berger ([5]) diskutieren, haben wir $d(m, n) \leqq \pi/2$. Es sei U_m die injektive Umgebung von m. Dann liegt U_m im offenen Ball um 0 in M mit Radius $\pi/2$. Nach (1), (2), dem Vergleichssatz von Rauch und einer Eigenschaft von Grammscher Determinante haben wir

$$\operatorname{vol} M \leqq \tfrac{1}{2} \operatorname{vol} S^n .$$

Daher haben wir $\operatorname{vol} M = \frac{1}{2} \operatorname{vol} S^n$. Nach (1), (2) und dem Vergleichssatz von Rauch stimmt U_m mit dem offenen Ball vom Radius $\pi/2$ um 0 in M_m überein und die Menge $\exp_m(U_m)$ ist isometrisch zur Hemisphäre von S^n. So ist M ein Raum mit konstanter Krümmung 1. Deshalb ist M isometrisch zu einem reellen projektiven Raum mit konstanter Krümmung 1, weil $\operatorname{vol} M = \frac{1}{2} \operatorname{vol} S^n$ ist.

LITERATUR

[1] M. Berger: Les variété riemannienne à courbure positive, Bull,, Soc., Belgique. **10**, 89–104 (1958).
[2] M. Berger, P. Gauduchon und E. Mazet: Le spectre d'une variété riemannienne, Springer-Verlag. Lecture notes **194**, 1971.
[3] D. Gromoll, W. Klingenberg und W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer-Verlag. Lecture notes **55**, 1968.
[4] C. Heim: Une borne pour la longueur des géodésiques périodiques d'une variété riemannienne compacte, These. Université Paris. 1971.

[5] T. Nagayoshi and Y. Tsukamoto: On positively curved Riemannian manifolds with bounded volume, Tohoku Math. J., **25**, 213–218 (1973).

Mathematisches Institut
Universität Kyushu