C. Rotthaus
Nagoya Math. J.
Vol. 74 (1979), 123–135

UNIVERSELL JAPANISCHE RINGE MIT NICHT OFFENEM REGULÄREM ORT

CHRISTEL ROTTHAUS

Im Zusammenhang mit dem von Grothendieck in [2] Chap. IV (7.4.8) gestellten Problem "Ist die ideal-adische Komplettierung eines ausgezeichneten Ringes wieder ausgezeichnet?" scheint aufgrund der Arbeiten von Marot [3] und Valabrega [8] im lokalen Fall die folgende Frage interessant zu sein: "R sei ein lokaler universell japanischer Ring. Ist der singuläre Ort jeder endlich erzeugten R-Algebra A abgeschlossen in Spec(A)?" Diese Frage wird hier negativ beantwortet, *d.h.* wir werden einen lokalen universell japanischen Ring A konstruieren, dessen singulärer Ort nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie von Spec(A) ist.

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in [2]. Unter der Komplettierung $\hat{A}$ eines lokalen Ringes A mit maximalem Ideal m_A verstehen wir immer die Komplettierung von A nach der m_A-adischen Topologie.

Zunächst sei an einige Beziehungen über universell japanische Ringe erinnert:

THEOREM 1. *A sei ein lokaler noetherscher Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist universell japanisch.*

(ii) *Die formellen Fasern von A sind geometrisch reduziert.*

(iii) *Für jeden nullteilerfreien Restklassenring B von A (d.h. $B = A/\mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in$ Spec(A)) mit Quotientenkörper $K = Q(B)$ sind die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

(α) *$\hat{B}$ ist reduziert*

(β) *Für alle minimalen Primideale $\mathfrak{P} \in$ Spec$(\hat{B})$ ist die Körpererweiterung $\hat{B}_{\mathfrak{P}}/K$ separabel.*

Beweis. [2] Chap. IV (7.7.2) und (7.6.4)

Received July 14, 1978.
Revised August 4, 1978.

LEMMA. *A sei ein lokaler universell japanischer Ring*; $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *und* $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\hat{A})$ *minimal mit* $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. *Dann folgt*:

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Reg}(A) \leftrightarrow \mathfrak{P} \in \operatorname{Reg}(\hat{A})$$

Beweis. Da $\mathfrak{p}\hat{A}$ reduziert ist, folgt $\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}\hat{A}_{\mathfrak{P}}$. Aus $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim \hat{A}_{\mathfrak{P}}$ folgt dann die Behauptung.

§1. Vorbereitungen

$\boldsymbol{Q}$ sei der Körper der rationalen Zahlen; A_i, B_j, $i, j \in N$, seien Unbestimmte über $\boldsymbol{Q}$ mit $A_i \neq A_j$ und $B_i \neq B_j$ für alle $i, j \in N$ mit $i \neq j$ und $A_i \neq B_j$ für alle $i, j \in N$. Dann ist $K = \boldsymbol{Q}(A_i, B_j)_{i,j \in N}$ ein Körper mit abzählbar unendlich vielen Elementen. X, Y, Z, T seien Unbestimmte über K. Der Polynomring $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ enthält wieder abzählbar unendlich viele Elemente; insbesondere ist die Menge der Primelemente in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ abzählbar. Wir wählen nun eine Teilmenge $\mathscr{P} \subseteq \boldsymbol{Q}[A_i, B_j]_{i,j \in N}[X, Y, Z, T]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Elemente aus $\mathscr{P}$ sind Primelemente in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ und irgend zwei Elemente aus $\mathscr{P}$ sind nicht assoziiert in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$.

(2) $X \in \mathscr{P}$ und $X + Y^k \in \mathscr{P}$ für alle $k \in N$.

(3) Ist P ein Primelement in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$, so gibt es ein zu P assoziiertes Primelement $P' \in \mathscr{P}$.

Sei $\mathscr{P} = \{p_n\}_{n \in N}$ eine Abzählung von $\mathscr{P}$ mit $p_1 = X$. Wir setzen:

$$q_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

und definieren für Elemente

$$F = \sum_{0 \leq i,j,k,\ell \leq n} a_{ijk\ell} X^i Y^j Z^k T^\ell \in K[X, Y, Z, T]$$

mit $a_{ijk\ell} \in K$:

$$\operatorname{Grad} F = \partial F = \operatorname{Max}\{i + j + k + \ell \,|\, a_{ijk\ell} \neq 0\}\,.$$

Mit $t_n := \partial q_n$

$$r_n := [(t_n + 1)!]^2$$

bilden wir nun die folgenden Elemente aus dem formalen Potenzreihenring:

$$\tau := \sum_{i=1}^{\infty} A_i q_i^{r_i}$$

$$\sigma := \sum_{i=1}^{\infty} B_i q_i^{r_i}$$

Im folgenden benötigen wir, daß das Element $\omega_0 = (Z + \tau)(T + \sigma) \in K[[X, Y, Z]]$ algebraisch unabhängig über $K(X, Y, Z, T)$ ist. Dazu zeigen wir:

SATZ 1. *Die Menge $\{\sigma, \tau\}$ ist algebraisch unabhängig über $K(X, Y, Z, T)$.*

Beweis. Andernfalls gibt es ein $F(S_1, S_2) \in K[X, Y, Z, T][S_1, S_2] \setminus \{0\}$ mit $F(\sigma, \tau) = 0$, etwa:

$$F = \sum_{0 \leq i, j \leq q} a_{ij} S_1^i S_2^j$$

mit $a_{ij} \in K[X, Y, Z, T]$. Sei $d := \operatorname{Max}\{\partial a_{ij} | 0 \leqq i, j \leqq q\}$. Dann läßt sich nach Multiplikation vom F mit einem Element $\neq 0$ aus K ein $r \in N$ finden mit $r > \operatorname{Max}\{d, 2q\}$, so daß

$$a_{ij} \in \boldsymbol{Q}[A_\nu, B_\mu]_{1 \leqq \nu, \mu \leqq r}[X, Y, Z, T] \ .$$

Im folgenden setzen wir $M_n = \boldsymbol{Q}[A_\nu, B_\mu]_{1 \leqq \nu, \mu \leqq n}[X, Y, Z, T]$ für alle $n \in N$. Dann gibt es ein $s \geqq r$ mit $q_i \in M_s$ für $1 \leqq i \leqq r$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. *Fall.* $q_1, \cdots, q_t \in M_s, q_{t+1} \notin M_s$ für ein t mit $s > t \geqq r$.
   Setze $m := t; p := s$.
2. *Fall.* $q_1, \cdots, q_s, q_{s+1} \in M_s$.
   Setze $m := s; p := s$.
3. *Fall.* $q_1, \cdots, q_s \in M_s, \ q_{s+1} \notin M_s$.
   Dann gibt es ein $h \geqq s$ mit
   3.1: $q_1, \cdots, q_{h+1} \in M_h$ oder
   3.2: $q_1, \cdots, q_h \in M_h, q_{h+1} \notin M_{h+1}$

denn $\mathscr{P}$ enthält unendlich viele Primelemente der Form $X + Y^k; k \in N$. In den Fällen 3.1 und 3.2 setze man $m := h$ und $p := h$. Sei nun:

$$P_1(X, Y, Z, T) = \sum_{\mu=1}^{m} B_\mu q_\mu^{r_\mu}$$

$$P_2(X, Y, Z, T) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu q_\nu^{r_\nu}$$

Dann ist:

$$P_1, P_2 \in M_p$$

Weiter definieren wir:

$$G(S_1, S_2) = F(S_1 + P_1, S_2 + P_2) = \sum_{0 \leqq i,j \leqq q} b_{ij} S_1^i S_2^j$$

wobei $b_{ij} \in M_p$ für alle $i, j \in N_0$ mit $0 \leqq i, j \leqq q$. Mit $F(S_1, S_2) \neq 0$ ist auch $G(S_1, S_2) \neq 0$, und es gilt

$$G(\sigma - P_1, \tau - P_2) = F(\sigma, \tau) = 0 .$$

Weiter folgt für alle $i, j \in N_0$ mit $0 \leqq i, j \leqq q$:

$$\begin{aligned} \partial b_{ij} &\leqq d + 2q r_m t_m = d + 2q[(t_m + 1)!]^2 t_m \\ &< [(t_{m+1} + 1)!]^2 = r_{m+1} \end{aligned}$$

Für $i > 0$ oder $j > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} B_n q_n^{r_n}\right)^i \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n q_n^{r_n}\right)^j \\ &\qquad = B_{m+1}^i A_{m+1}^j q_{m+1}^{(i+k) r_{m+1}} + \Delta_{ij} \end{aligned}$$

dabei ist Δ_{ij} eine Potenzreihe in $K[[X, Y, Z, T]]$, in der nur Terme vom Grad $\geqq r_{m+2} = [(t_{m+2} + 1)!]^2$ vorkommen. Damit folgt:

$$(*) \qquad \begin{aligned} G(\sigma - P_1, \tau - P_2) = b_{00} &+ \sum_{\substack{0 \leqq i,j \leqq q \\ i \neq 0 \vee j \neq 0}} b_{ij} B_{m+1}^i A_{m+1}^j q_{m+1}^{(i+j) r_{m+1}} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leqq i,j \leqq q \\ 0 \neq i \vee j \neq 0}} b_{ij} \Delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Abschätzen der Grade der einzelnen Terme in (*) liefert:

(a) $\partial b_{00} \leqq r_{m+1} < r_{m+2}$

(b) $\partial \sum_{\substack{0 \leqq i,j \leqq q \\ i \neq 0 \vee j \neq 0}} b_{ij} B_{m+1}^i A_{m+1}^j q_{m+1}^{(i+j) r_{m+1}} < r_{m+2}$

(c) $\sum_{\substack{0 \leqq i,j \leqq q \\ i \neq 0 \vee j \neq 0}} b_{ij} \Delta_{ij} = 0$ oder der Grad der Monome in der Potenzreihe $\sum_{\substack{0 \leqq i,j \leqq q \\ i \neq 0 \vee j \neq 0}} b_{ij} \Delta_{ij}$ ist $\geqq r_{m+2}$

Gradvergleich liefert daraus:

$$(**) \qquad b_{00} + \sum_{\substack{0 \leqq i,j \leqq q \\ i \neq 0 \vee j \neq 0}} b_{ij} B_{m+1}^i A_{m+1}^j q_{m+1}^{(i+j) r_{m+1}} = 0$$

Nun folgt im

1. *Fall.* $A_{m+1}, B_{m+1}, b_{ij} \in M_p$ und
$q_{m+1} \notin M_p$.

Also ist q_{m+1} algebraisch abhängig über M_p. Andererseits ist $a_{ij} = b_{ij}$

für $i+j=k_0$ mit $k_0=\operatorname{Max}\{i+j \mid a_{ij}\neq 0\}$. Da $a_{ij}\in M_r$ und da $\{A_{m+1}, B_{m+1}\}$ algebraisch unabhängig über M_r ist, erhalten wir $\sum_{i+j=k_0} b_{ij}B^i_{m+1}A^j_{m+1}\neq 0$. Widerspruch.

2. *Fall.* $\qquad b_{ij}, q_{m+1}\notin M_p$

$$A_{m+1}, B_{m+1}\notin Q[A_\nu, B_\mu]_{1\leqq \nu,\mu\leqq p}$$

Dann ist $\{A_{m+1}, B_{m+1}\}$ algebraisch abhängig über M_m. Widerspruch.

3. *Fall.* 3.1 $b_{ij}, q_{m+1}\in M_m$.

Wie oben ergibt sich der Widerspruch: $\{A_{m+1}, B_{m+1}\}$ ist algebraisch abhängig über M_m. Im Fall 3.2 $b_{ij}, A_{m+1}, B_{m+1}\in M_{m+1}$ $q_{m+1}\notin M_{m+1}$ folgt wieder, daß $\{A_r, B_r\}_{r>m+1}$ algebraisch abhängig über M_{m+1} ist. Widerspruch.

Damit folgt: $b_{ij}=0$ für alle i, j; $0\leqslant i, j\leqslant q$; entgegen $G(S_1, S_2)\neq 0$. Im folgenden sei $\mathscr{P}\subseteq Q[A_\nu, B_\mu]_{\nu,\mu\in N}[X, Y, Z, T]$ eine Menge von Primelementen in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). $\varphi: N\to\mathscr{P}$ sei eine Abzählung von $\mathscr{P}$ mit $\varphi(1)=X$. Dann definieren wir:

$$q_{\varphi n} := \prod_{i=1}^{n}\varphi(i)$$
$$t_{\varphi n} := \partial q_{\varphi n}$$
$$r_{\varphi n} := [(t_{\varphi n}+1)!]^2$$
$$g_{\varphi n} := Z+\sum_{i=1}^{n} A_i q_{\varphi i}^{r_{\varphi i}}$$
$$h_{\varphi n} := T+\sum_{i=1}^{n} B_i q_{\varphi i}^{r_{\varphi i}}$$

Das von $g_{\varphi n}$ und $h_{\varphi n}$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}_{\varphi n}$ ist ein Primideal in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$, da $g_{\varphi n}, h_{\varphi n}, X, Y$ das maximale Ideal in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ erzeugen. Für ein $r>n$ sei $\mathfrak{p}_{\varphi n,r}$ das von

$$g_{\varphi n,r} := g_{\varphi n}+A_{n+1}q_{\varphi n,r}^{r_{\varphi n,r}}$$
$$h_{\varphi n,r} := h_{\varphi n}+B_{n+1}q_{\varphi n,r}^{r_{\varphi n,r}}$$

erzeugte Primideal, dabei ist $q_{\varphi n,r} := q_{\varphi n}\cdot\varphi(r)$ und $r_{\varphi n,r}=[(t_{\varphi n,r}+1)!]^2$ mit $t_{\varphi n,r}=\partial q_{\varphi n,r}$. Ist $s>r$, so definieren wir analog $\mathfrak{p}_{\varphi n,r,s}$ als das von

$$g_{\varphi n,r,s}=g_{\varphi n,r}+A_{n+2}q_{\varphi n,r,s}^{r_{\varphi n,r,s}}$$
$$h_{\varphi n,r,s}=h_{\varphi n,r}+B_{n+2}q_{\varphi n,r,s}^{r_{\varphi n,r,s}}$$

erzeugte Primideal, wobei $q_{\varphi n,r,s}=q_{\varphi n,r}\cdot\varphi(s)$ und

$$r_{\varphi n, r, s} = [(t_{\varphi n, r, s} + 1)!]^2 \text{ mit } t_{\varphi n, r, s} = \partial q_{\varphi n, r, s} \,.$$

Bemerkung. Da für alle $k \in N$, $\mathfrak{p}_{\varphi n}$, $X + Y^k$ und Y das maximale Ideal in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ erzeugen, gibt es unendlich viele Primelemente in $\mathscr{P}$, die nicht in $\mathfrak{p}_{\varphi n}$ liegen.

SATZ 2. *Es gibt eine Abzählung* $\psi : N \to \mathscr{P}$ *mit* $\psi(1) = X$ *und* $\psi(n) \notin \mathfrak{p}_{\psi_{n-1}}$ *für alle* $n \in N$.

Zum Beweis benötigen wir den folgenden

HILFSSATZ. $\mu : N \to \mathscr{P}$ *sei eine Abzählung von* $\mathscr{P}$ *mit* $\mu(1) = X$ *und* $\mu(i) \notin \mathfrak{p}_{\mu_{i-1}}$ *für alle* $i \leqq n$. *Ist* $\mu(n + 1) \in \mathfrak{p}_{\mu_n}$, *so ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt*:

(i) *Es gibt ein* $t > n + 1$ *mit*

$$\mu(t) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n} \,, \qquad \mu(n + 1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_{n,t}}$$

(ii) *Es gibt* $m, t \in N$, $m > t > n + 1$ *mit*

$$\mu(t) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n} \,, \quad \mu(m) \notin \mathfrak{p}_{\mu_{n,t}} \,, \quad \mu(n + 1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_{n,t,m}} \,.$$

Beweis des Hilfssatzes.

1. *Fall.* Es gibt ein $i > n + 1$ mit $\mu(i) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n}$ und $\mu(n + 1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$. Dann sind wir fertig.

2. *Fall.* Für alle $i > n + 1$ mit $\mu(i) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n}$ folgt: $p = \mu(n + 1) \in \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$. Die Menge dieser $i \in N$ werde mit I_0 bezeichnet. Offenbar enthält I_0 unendlich viele Elemente. Wegen $p \in \mathfrak{p}_{\mu_n}$ gibt es also $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i \in K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ mit: $p = \alpha g_{\mu_n} + \beta h_{\mu_n} = \alpha_i g_{\mu_{n,i}} + \beta_i h_{\mu_{n,i}}$ für alle $i \in I_0$. Subtraktion liefert:

$$0 = (\alpha - \alpha_i) g_{\mu_{n,i}} + (\beta - \beta_i) h_{\mu_{n,i}} - (\alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1}) q_{\mu_{n,i}}^{r_{\mu_{n,i}}}$$

Damit folgt:

$q_{\mu_{n,i}}^{r_{\mu_{n,i}}}(\alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1}) \in \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$ für alle $i \in I_0$. Wäre $q_{\mu_{n,i}} \in \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$, so folgt $\mu(i) \in \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$ oder $\mu(j) \in \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$ für ein $j \leqq n$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{p}_{\mu_{n,i}} = \mathfrak{p}_{\mu_n}$ *bzw.* $\mathfrak{p}_{\mu_{j-1}} = \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$ und damit der Widerspruch $\mu(i) \in \mathfrak{p}_{\mu_n}$ bzw. $\mu(j) \in \mathfrak{p}_{\mu_{j-1}}$ entgegen der Voraussetzung. Also folgt für alle $i \in I_0$:

$$\alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1} \in \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$$

Insbesondere folgt:

$$\mu(n + 1) = p \,, \qquad \alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1} \in \bigcap_{i \in I_0} \mathfrak{p}_{\mu_{n,i}}$$

BEHAUPTUNG (*). Es gibt eine Teilmenge $J \subseteq I_0$ mit $|J| = \infty$ und folgender Eigenschaft: Für alle $i, j \in J$ mit $i \neq j$ ist

$$\mathfrak{p}_{\mu_n, i} \neq \mathfrak{p}_{\mu_n, j} .$$

Beweis von (*). Für alle $k \in N$ ist $X + Y^k \notin \mathfrak{p}_{\mu_n}$, also gibt es ein $k_0 \in N$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $k \geqq k_0$ gibt es ein $i_k \in I_0$ mit $\mu(i_k) = X + Y^k$.

Für $k > \ell \geqq k_0$ ist aber $\mathfrak{p}_{\mu_n, i_k} \neq \mathfrak{p}_{\mu_n, i_\ell}$, da andernfalls

$$\begin{aligned} & g_{\mu_n, i_k} - g_{\mu_n, i_\ell} \\ & \quad = A_{n+\ell} q_{\mu_n}^{r_{\mu_n, i_\ell}} [q_{\mu_n}^{(r_{\mu_n, i_k} - r_{\mu_n, i_\ell})} \mu(i_k)^{r_{\mu_n, i_k}} - \mu(i_\ell)^{r_{\mu_n, i_\ell}}] \\ & \quad \in \mathfrak{p}_{\mu_n, i_k} = \mathfrak{p}_{\mu_n, i_\ell} \\ & \quad \to q_{\mu_n}^t \mu(i_k)^v - \mu(i_\ell)^u \in \mathfrak{p}_{\mu_n, i_k} = \mathfrak{p}_{\mu_n, i_\ell} \end{aligned}$$

wobei $t = r_{\mu_n, i_k} - r_{\mu_n, i_\ell}$; $v = r_{\mu_n, i_k}$; $u = r_{\mu_n, i_\ell}$ und $v > u$, wegen $k > 1$. Dann ist aber

$$q_{\mu_n}^t X^v - X^u \in (\mathfrak{p}_{\mu_n, i_k}, Y) \in \operatorname{Spec}(K[X, Y, Z, T]_{(X, Y, Z, T)} ,$$

und damit $X \in (\mathfrak{p}_{\mu_n, i_k}; Y)$ im Widerspruch *zu* $(X, Y, Z, T) = (\mathfrak{p}_{\mu_n, i_k}, X, Y)$ und Höhe $\mathfrak{p}_{\mu_n, i_k} = 2$. Damit ist die Behauptung (*) bewiesen.

Aus (*) folgt nun Höhe $\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_{\mu_n, i}\right) = 1$ und wegen $p \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_{\mu_n, i}$, p Primelement ergibt sich:

$$(**) \qquad \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_{\mu_n, i} = (p)$$

Daraus folgt: p teilt $\alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1}$ in $K[X, Y, Z, T]_{(X, Y, Z, T)}$. Sei nun $i_0 \in I_0 \subseteq N$ minimal.

Fall 2.1. Es gibt ein $m > i_0$ mit $\mu(m) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0}$ und $p \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0, m}$. Dann ist nichts mehr zu zeigen.

Fall 2.2. Für alle $i > i_0$ mit $\mu(i) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0}$ ist $p \in \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0, i}$. Dann gibt es wieder $\alpha_i, \beta_i \in K[X, Y, Z, T]_{(X, Y, Z, T)}$ mit $p = \alpha g_{\mu_n} + \beta h_{\mu_n} = \alpha_i g_{\mu_n, i_0, i} + \beta_i h_{\mu_n, i_0, i}$. Durch Subtraktion erhält man daraus:

$$\begin{aligned} 0 = (\alpha - \alpha_i) g_{\mu_n, i_0, i} + (\beta - \beta_i) h_{\mu_n, i_0, i} - \alpha(A_{n+1} q_{\mu_n, i_0}^{r_{\mu_n, i_0}} + A_{n+2} q_{\mu_n, i_0, i}^{r_{\mu_n, i_0, i}}) \\ - \beta(B_{n+1} q_{\mu_n, i_0}^{r_{\mu_n, i_0}} + B_{n+2} q_{\mu_n, i_0, i}^{r_{\mu_n, i_0, i}}) \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} F = \alpha(A_{n+1} q_{\mu_n, i_0}^{r_{\mu_n, i_0}} + A_{n+2} q_{\mu_n, i_0, i}^{r_{\mu_n, i_0, i}}) \\ + \beta(B_{n+1} q_{\mu_n, i_0}^{r_{\mu_n, i_0}} + B_{n+2} q_{\mu_n, i_0, i}^{r_{\mu_n, i_0, i}}) \end{aligned}$$

Da $\alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1} \in (p)$ und da $p \in \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0, i}$ für alle i, folgt:

$$G = (\alpha A_{n+2} + \beta B_{n+2}) q_{\mu_n, i_0, i}^{r_{\mu_n, i_0, i}} \in \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0, i}$$

für alle i mit $i > i_0$ und $\mu(i) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0}$. Daraus folgt wieder $\alpha A_{n+2} + \beta B_{n+2} \in \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0, i}$ für alle $i > i_0$ mit $\mu(i) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, i_0, i}$ und ebenso wie oben ergibt sich dann: p teilt $\alpha A_{n+2} + \beta B_{n+2}$. Insgesamt erhalten wir also: p teilt $\alpha A_{n+1} + \beta B_{n+1}$ und p teilt $\alpha A_{n+2} + \beta B_{n+2}$. Daraus folgt: p teilt $\beta(B_{n+1}A_{n+2} - B_{n+2}A_{n+1})$ und da $B_{n+1}A_{n+2} - A_{n+1}B_{n+2}$ eine Einheit in K ist, folgt: p teilt α und p teilt β, *d.h.* $\alpha = p \cdot \gamma$ und $\beta = p \cdot \delta$ mit $\gamma, \delta \in K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$. Daraus ergibt sich dann der Widerspruch $p = p(\gamma g_{\mu_n} + \beta h_{\mu_n})$, da $\gamma g_{\mu_n} + \beta h_{\mu_n} \in \mathfrak{p}_{\mu_n}$ keine Einheit in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis von Satz 2. $\varphi: N \to \mathscr{P}$ sei eine Abzählung von $\mathscr{P}$ mit $\varphi(1) = X$. Wir definieren $\Psi: N \to \mathscr{P}$ rekursiv. Sei $\Psi(1) = \varphi(1) = X$ und für $i \leqq n$ sei $\Psi(i)$ bereits definiert mit $\Psi(i) \notin \mathfrak{p}_{\Psi_{i-1}}$ für alle $2 \leqq i \leqq n$. Sei $k \in N$ minimal mit $\varphi(k) \in \mathscr{P} \backslash \{\Psi(1), \cdots, \Psi(n)\}$.

1. *Fall.* $\varphi(k) \notin \mathfrak{p}_{\Psi_n}$

   Definiere $\Psi(n+1) := \varphi(k)$

2. *Fall.* $\varphi(k) \in \mathfrak{p}_{\Psi_n}$

   Dann gibt es eine Abzählung $\mu: N \to \mathscr{P}$ mit

$$\begin{aligned} \mu(i) &= \Psi(i) \qquad \text{für alle } i \leqq n \\ \mu(n+1) &= \varphi(k) \end{aligned}$$

und

$$\mu(r) = \varphi(r) \qquad \text{für alle } r > r_0 > n$$

wobei $r_0 \in N$ hinreichend groß zu wählen ist. Nach dem Hilfssatz gibt es natürliche Zahlen $m \geqslant t > n+1$ mit: $\mu(t) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n} = \mathfrak{p}_{\Psi_n}$, $\mu(m) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, t}$ und $\mu(n+1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, t}$ oder $\mu(n+1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, t, m}$. Falls $\mu(n+1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, t}$ ist, so setze man $\Psi(n+1) := \mu(t)$ und $\Psi(n+2) := \varphi(k) = \mu(n+1)$. Ist $\mu(n+1) \in \mathfrak{p}_{\mu_n, t}$ und $\mu(n+1) \notin \mathfrak{p}_{\mu_n, t, m}$, so sei $\Psi(n+1) := \mu(t)$; $\Psi(n+2) := \mu(m)$ und $\Psi(n+3) = \varphi(k) = \mu(n+1)$. Damit folgt Satz 2.

§ 2. Konstruktion

Nach Satz 2 gibt es eine Abzählung $\mathscr{P} = \{p_n\}_{n \in N}$ von $\mathscr{P}$ mit $p_1 = X$ und $p_{n+1} \notin \mathfrak{p}_n$ für alle $n \in N$, wobei $\mathfrak{p}_n = (g_n, h_n)$ mit

$$g_n = Z + \sum_{i=1}^{n} A_i q_i^{r_i};\ h_n = T + \sum_{i=1}^{n} B_i q_i^{r_i};$$

$$q_k = \prod_{i=1}^{k} p_i;\ r_k = [(t_k + 1)!]^2\,, \qquad t_k = \partial q_k\,.$$

Eine solche Abzählung von $\mathscr{P}$ sei im folgenden fest gewählt. Wir bilden nun folgende Elemente:

$$\omega_0 = \left(Z + \sum_{i=1}^{\infty} A_i q_i^{r_i}\right)\left(T + \sum_{i=1}^{\infty} B_i q_i^{r_i}\right) \in K[[X, Y, Z, T]]$$

und für $n \geqq 1$:

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \frac{\omega_0 - g_n h_n}{q_n^{r_n}} \\
&= \frac{1}{q_n^{r_n}}\left[\left(g_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i q_i^{r_i}\right)\left(h_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i q_i^{r_i}\right) - g_n h_n\right] \\
&= \frac{1}{q_n^{r_n}}\left[g_n \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i q_i^{r_i} + h_n \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i q_i^{r_i}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i q_i^{r_i} \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i q_i^{r_i}\right]
\end{aligned}$$

Da $q_n^{r_n}\ q_{n+k}^{r_{n+k}}$ für alle $n, k \in N$ in $K[X, Y, Z, T]$ teilt, ist $\omega_n \in K[[X, Y, Z, T]]$ für alle $n \in N$. Zwischen ω_n und ω_{n+1} besteht für alle $n \in N$ folgender Zusammenhang:

$$\omega_0 = q_1^{r_1}\omega_1 + g_1 h_1$$

(2a) und für $n \in N$

$$\omega_n = \frac{q_{n+1}^{r_{n+1}}}{q_n^{r_n}}(\omega_{n+1} + A_{n+1}h_n + B_{n+1}g_n + A_{n+1}B_{n+1}q_{n+1}^{r_{n+1}})$$

wobei $q_1, q_{n+1}^{r_{n+1}}/q_n^{r_n} \in (X, Y, Z, T)K[X, Y, Z, T]$. Wir bilden nun in $K[[X, Y, Z, T]]$ den Unterring

$$R^1 = K[X, Y, Z, T, \omega_n]_{n \in N}$$

Aus der Rekursionsformel (2*a*) folgt, daß X, Y, Z, T ein maximales Ideal in R^1 erzeugen. Wir setzen:

$$R = R^1_{(X,Y,Z,T)}$$

Dann folgt:

(2.1) Die kanonischen Einbettungsmorphismen

$$K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)} \to R \to K[[X, Y, Z, T]]$$

sind lokal, das maximale Ideal in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ erzeugt das maximale Ideal von R.

(2.2) Ist $S = K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)} \setminus \{0\}$, dann ist $S^{-1}R$ isomorph zu einem Quotientenring von $K(X, Y, Z, T)[\omega_0]$; insbesondere ist $S^{-1}R$ ein noetherscher Ring der Dimension 1. Im folgenden wollen wir zeigen, daß $A = R/(\omega_0)$ ein lokaler universell japanischer Ring ist, dessen regulärer Ort Reg (A) nicht offen in Spec (A) ist. Ferner folgt, daß A Restklassernring eines regulären lokalen Ringes der Dimension 4 ist, der einen Körper der Charakteristik 0 umfaßt.

§ 3. Noetherzität von R

Für alle $n \in N_0$ ist der Unterring $K[X, Y, Z, T, \omega_n]$ von $K[[X, Y, Z, T]]$ freie K-Algebra der Dimension 5. Wir setzen $R_n = K[X, Y, Z, T, \omega_n]_{m_n} \subseteq R$, wobei m_n das von X, Y, Z, T und ω_n erzeugte maximale Ideal in $K[X, Y, Z, T, \omega_n]$ ist. R_n ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension 5 und enthalten in R. Der lokale Einbettungsmorphismus $R_n \xrightarrow{\nu_n} R$ faktorisiert für alle $n \in N$ über:

$$\begin{tikzcd} R_n \arrow[rr, "\nu_{n,n+1}"] \arrow[dr, "\nu_n"'] & & R_{n+1} \arrow[dl, "\nu_{n+1}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

wobei $\nu_{n,n+1}$ induziert wird von dem K-Algebramorphismus:

$$\bar{\nu}_{n,n+1}\colon K[X, Y, Z, T, \omega_n] \longrightarrow K[X, Y, Z, T, \omega_{n+1}]$$

$$K[X, Y, Z, T] \xrightarrow{\text{id}} K[X, Y, Z, T]$$

$$\omega_n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{q_{n+1}^{r_{n+1}}}{q_n^{r_n}}[\omega_{n+1} + A_{n+1}h_n + B_{n+1}g_n + A_{n+1}B_{n+1}q_{n+1}^{r_{n+1}}] \\ q_n & \text{falls } n \geqq 1 \\ q_1^{r_1}\omega_1 + q_1h_1 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Für $n < m$ definieren wir $\nu_{n,m}$ als den zusammengesetzten Morphismus $\nu_{m+1,m} \circ \cdots \circ \nu_{n,n+1}$. Damit läßt sich R auffassen als direkter Limes über $(R_n, \nu_{n,m})_{n,m \in N}$.

SATZ 3. *R ist ein noetherscher Ring.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß alle Primideale von R endlich erzeugt sind. Sei also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.
1. *Fall.* $\mathfrak{p} \cap K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)} = \mathfrak{q} \neq (0)$. Dann ist $R/\mathfrak{q}R$ Restklassenring von $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$, also ist $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt.
2. *Fall.* $\mathfrak{p} \cap K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)} = (0)$ und $\mathfrak{q} \neq (0)$. Mit $\mathfrak{p}_n = R_n \cap \mathfrak{p}$ ist dann ebenfalls $\mathfrak{p}_n \cap K[X, Y, Z, T] = (0)$. Wegen $R_n = K[X, Y, Z, T, \omega_n]_{\mathfrak{m}_n}$ folgt: Höhe $\mathfrak{p}_n = 1$ für alle $n \in N$: also ist auch Höhe $\mathfrak{p} = 1$. Dann gibt es für alle $n \in N$ ein $P_n \in R_n$ mit $(P_n) = \mathfrak{p}_n$, da R_n ein faktorieller Ring ist. Ferner gilt: $\nu_{n,n+1}(P_n) \in \mathfrak{p}_{n+1}$, also $\nu_{n,n+1}(P_n) = \alpha_{n,n+1}P_{n+1}$, wobei $\alpha_{n,n+1} \in R_{n+1}$. Der kanonische Einbettungsmorphismus $R_n \to K[[X, Y, Z, T]]$ ist lokal und faktorisiert über $\nu_{n,n+1}\colon R_n \to R_{n+1}$, und P_n zerfällt in $K[[X, Y, Z, T]]$ in ein endliches Produkt irreduzibler Faktoren. Damit folgt: es gibt ein $n_0 \in N$, so daß $\alpha_{n,n+1}$ für alle $n \geqq n_0$ Einheit in R_{n+1} ist. Dann erzeugt $\nu_{n_0,n_0+r}(P_{n_0})$ das Ideal $\mathfrak{p}_{n_0+r}$ für alle $r \in N$, das bedeutet, daß P_{n_0} das Ideal $\mathfrak{p}$ in R erzeugt, und es folgt die Behauptung.

Folgerung. R ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension 4. Da die Einbettungsmorphismen $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)} \to R$, $R \to K[[X, Y, Z, T]]$ lokal sind und da X, Y, Z, T das maximale Ideal von R erzeugen, folgt: $\hat{R} \cong K[[X, Y, Z, T]]$.

LEMMA. *ω_0 ist ein Primelement in R.*

Beweis. ω_0 ist Primelement oder Einheit in $S^{-1}R$, da $S^{-1}R$ ein Quotientenring von $K[X, Y, Z, T, \omega_0]$ ist. Es genügt nachzuweisen, daß $\omega_0 \notin (p_n)$ für alle $n \in N$. Annahme: p_n teilt $\omega_0 = (g_{n-1} + p_n\tilde{g}_n)(h_{n-1} + p_n\tilde{h}_{n-1})$ mit $\tilde{g}, \tilde{h}_n \in K[[X, Y, Z, T]]$. Dann ist g_{n-1} oder h_{n-1} durch p_n teilbar. Da g_{n-1} und h_{n-1} Primelemente sind, folgt, daß p_n zu g_{n-1} oder zu h_{n-1} assoziiert ist, im Widerspruch zu $p_n \notin \mathfrak{p}_{n-1}$.

§4. A ist ein lokaler universell japanischer Ring mit nicht offenem regulärem Ort

SATZ 4. *A ist universell japanisch.*

Beweis. Da $Q \subseteq A$ ist nach Theorem 1 (iii) nur zu zeigen: Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ist $\mathfrak{p}\hat{A}$ reduziert. Sei also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$
1. *Fall* $\mathfrak{p} = (0)$.

$$\hat{A} = \widehat{R/(\omega_0)} = K[[X, Y, Z, T]]/\omega_0 K[[X, Y, Z, T]]$$

ist reduziert, da ω_0 in $K[[X, Y, Z, T]]$ Produkt zweier nicht assoziierter Primelemente ist, d.h.: $\omega_0 = U.V$, wobei $U = Z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n^{r_n}$; $V = T + \sum_{n=1}^{\infty} B_n q_n^{r_n}$. U und V sind nicht assoziiert, da U, V, X und Y das maximale Ideal von $K[[X, Y, Z, T]]$ erzeugen.
2. *Fall.* $\mathfrak{p} \neq (0)$. $\mu: R \to R/(\omega_0)$ sei der kanonische Restklassenmorphismus. Dann gibt es ein $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $\mathfrak{P} \supseteq (\omega_0)$ und $\mu(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$. Wegen Höhe $\mathfrak{p} \geqq 1$ ist Höhe $\mathfrak{P} \geqq 2$; also folgt: $\mathfrak{P} \cap K[X, Y, Z, T] \neq (0)$; d.h. es gibt ein $n \in N$ mit $p_n \in \mathfrak{P}$. Dann ist $R/\mathfrak{P} = A/\mathfrak{p}$ isomorph zu einem Restklassenring von $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ und es folgt; $\widehat{(A/\mathfrak{p})}$ ist reduziert. Damit ist Satz 4 bewiesen. Im folgenden sei: $U: = Z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n^{r_n}$ und $V: = T + \sum_{n=1}^{\infty} B_n q_n^{r_n}$. Dann folgt:

LEMMA 1. *(U, V) ist ein Primideal in $K[[X, Y, Z, T]]$ mit $(U, V) \cap R = (\omega_0)$.*

Beweis. U und V sind Teil eines regulären Parametersystems, also ist (U, V) Primideal in $K[[X, Y, Z, T]]$. Ferner ist $(U, V) \cap K[X, Y, Z, T] = (0)$, denn andernfalls gibt es ein $p_n \in \mathscr{P}$ mit $p_n \in (U, V)$; dann folgt: $g_{n-1}, h_{n-1} \in (U, V)$. Da (g_{n-1}, h_{n-1}) ebenfalls in $K[[X, Y, Z, T]]$ ein Primideal der Höhe 2 ist, folgt $(g_{n-1}, h_{n-1}) = (U, V)$ und daraus $p_n \in \mathfrak{p}_{n-1}$ in $K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ im Widerspruch zur Konstruktion. Also ist Höhe $(U, V) \cap R = 1$ und wegen $\omega_0 \in R \cap (U, V)$, ω_0 Primelement in R, folgt: $(U, V) \cap R = (\omega_0)$.

Für alle $n \in N$ gilt: $(\mathfrak{p}_{n-1}, p_n)K[[X, Y, Z, T]] \supseteq (U, V)$. Nun gibt es für alle $i \in N$ ein $n_i \in N$ mit $p_{n_i} = X + Y^i$ und $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{p}_{n_i}, p_{n_i}) \in \mathrm{Spec}(K[X,Y,Z,T])_{(X,Y,Z,T)})$; ferner ist $\mathfrak{q}_i R \in \mathrm{Spec}(R)$ und $\mathfrak{q}_i K[[X, Y, Z, T]] \in \mathrm{Spec}(K[[X, Y, Z, T]])$

LEMMA 2. *Für alle $i, j \in N$ mit $i \neq j$ ist $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$.*

Beweis: Annahme: Es gibt $i, j \in N$ mit $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_j$ und $i \neq j$. Sei etwa $i > j$. Dann gibt es $\alpha, \beta, \gamma \in K[X, Y, Z, T]_{(X,Y,Z,T)}$ mit $p_{n_j} = \alpha g_{n_i} + \beta h_{n_i} + \gamma p_{n_i}$, α, β, γ lassen sich darstellen als $\alpha = a/e$, $\beta = b/e$ und $\gamma = c/e$ mit $a, b, c, e \in K[X, Y, Z, T]$; $e \notin (X, Y, Z, T)$. Damit folgt:

$$(X + Y^j)e = ag_{n_i} + bh_{n_i} + c(X + Y^i)$$

Auf der linken Seite tritt ein Term $Y^j e_0$; $e_0 \in K \backslash \{0\}$ auf, auf der rechten Seite enthalten ag_{n_i} bzw. bh_{n_i} nur Terme $Y^k f$, wobei $f \in (X, Z, T)$ ist, in

$c(X+Y^i)$ tritt ebenfalls kein Term der Form e_0Y^j auf, wegen $i>j$. Also ist die Annahme falsch und es folgt: $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$.

SATZ 5. *Sing* (A) *ist nicht abgeschlossen in* Spec (A).

Beweis. $\mathfrak{q}$ sei das von U und V in $\hat{A}=K[[X, Y, Z, T]]/\omega_0K[[X, Y, Z, T]]$ erzeugte Primideal. Für alle $\mathfrak{P} \in V(\mathfrak{q})$ ist $\hat{A}_{\mathfrak{P}}$ nicht integer, also nicht regulär, damit ist $V(\mathfrak{q}) \subseteq \mathrm{Sing}(\hat{A})$. Ferner ist für die $\mathfrak{q}_i$ aus Lemma 2: $\mathfrak{q}_i\hat{A} \in V(\mathfrak{q})$ für alle $i \in N$. Mit dem Lemma nach Theorem 1 folgt dann: $\mathfrak{q}_iA \in \mathrm{Sing}(A)$ für alle $i \in N$. Da A Integritätsbereich ist, genügt es nun zu zeigen: $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_iA = (0)$. Dazu brauchen wir nur nachzuweisen, daß $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_iR = \omega_0R$ ist. Nun gilt: $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_iR \subsetneqq \left(\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_i\hat{R}\right) \cap R$ und $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_i\hat{R} \supseteq (U, V)$. Die $\mathfrak{q}_i\hat{R}$ sind paarweise verschiedene Primideale der Höhe 3, dann ist $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_i\hat{R}$ ein Ideal der Höhe 2, das ein Primideal der Höhe 2 umfaßt, nämlich (U, V). Also ist $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_i\hat{R} = (U, V)$ und mit Lemma 1 folgt: $\bigcap_{i\in N} \mathfrak{q}_iR = \omega_0R$.

LITERATUR

[1] Bourbaki, N., Commutative Algebra, Paris, Hermann 1972.

[2] Grothendieck, A., Élements de Geométrie algebrique, Inst. haut. Etud. sci., Publ. math. **24** (1965).

[3] Marot, J.: Sur les anneaux universellement japonais, Bull. Soc. math. France, **103** (1975), 103–111.

[4] Matsumura, H., Formal power series rings over polynomial rings I, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Y. Akizuki. Tokyo, Kinokuniya 1973.

[5] Nagata, M., Local Rings, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics Nr. 13, New York, Interscience 1962.

[6] Nomura, M., Formal power series rings over polynomial rings II, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Y. Akizuki, Tokyo, Kinokuniya (1973).

[7] Rotthaus, C., Nicht ausgezeichnete, universell japanische Ringe, Math. Z. **152** (1977), 107–125.

[8] Valabrega, P, A few theorems on Completion of excellent rings, Nagoya Math. J., Vol. **61** (1976), 127–133.

Universität Münster