Y. Abe
Nagoya Math. J.
Vol. 122 (1991), 83-114

SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

YUKITAKA ABE

§ 0. Introduction

Les fonctions périodiques d'une seule variable ont été étudiées depuis longtemps. On sait que toute fonction méromorphe de n variables $2n$ fois périodiques peut s'écrire comme quotient de deux fonctions thêta. Ceci est a l'origine de l'essor des fonctions thêta. Au contraire, l'étude des fonctions périodiques de n variables r fois périodiques ($r < 2n$) a pris du retard. Il nous semble que P. Cousin ([4] et [5]) a étudié ces fonctions pour la première fois.

Nous pouvons regarder les fonctions périodiques de n variables r fois périodiques comme fonctions sur le groupe quotient $\mathbf{C}^n/\Gamma$ de $\mathbf{C}^n$ par un sous-groupe discret Γ de rang r. Par le théorème de Remmert-Morimoto ([12) et [14]), $\mathbf{C}^n/\Gamma$ est isomorphe à $\mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^q \times X_0$, où X_0 est un groupe toroidal de dimension m et $n = p + q + m$. Si X_0 est compact, alors c'est un tore. En conséquence, l'étude des fonctions périodiques se réduit à celle des fonctions méromorphes sur un groupe toroidal non-compact $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$. Toute fonction méromorphe sur X peut s'écrire comme quotient de deux sections holomorphes de l'espace fibré holomorphe en droites sur X. En 1982, Ch. Vogt [17] a démontré que tout espace fibré holomorphe en droites sur X est donné par un facteur thêta si et seulement si la dimension de la cohomologie $H^1(X, \mathcal{O})$ est finie. La classification des cohomologies $H^p(X, \mathcal{O})$ a été faite par H. Kazama [10]. L'auteur [2] a caractérisé les groupes toroidaux par l'existence d'espaces fibrés holomorphes en droites positifs et démontré un théorème de réduction méromorphe pour les groupes toroidaux. Mais, on ne sait pas encore quels espaces fibrés holomorphes en droites sur un groupe toroidal ont une section holomorphe non-triviale.

Tout espace fibré holomorphe en droites L sur un groupe toroidal

Received February 28, 1990.

$X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ est isomorphe au produit tensoriel $L_0 \otimes L_1$ d'un espace fibré holomorphe en droites topologiquement trivial L_0 par un espace fibré thêta L_1 donné par un facteur thêta ([18]). On suppose que le facteur thêta qui donne L_1 est de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Soit $\mathbf{C}_\Gamma^m$ le sous-espace linéaire complexe maximal dans le sous-espace linéaire réel $\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}$ qui est engendré par le sous-groupe discret Γ de $\mathbf{C}^n$. On écrira $\mathscr{H}_\Gamma := \mathscr{H}|_{\mathbf{C}_\Gamma^m \times \mathbf{C}_\Gamma^m}$. Si L a une section holomorphe non-triviale, alors la forme hermitienne $\mathscr{H}_\Gamma$ sur $\mathbf{C}_\Gamma^m$ est semi-définie positive ([2]). En sens contraire, on peut voir la conjecture suivante dans [18].

CONJECTURE. *Si $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive et non-nulle, alors L a une section holomorphe non-triviale.*

Dans cet article, nous montrons d'abord qu'il faut une autre condition que $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive pour l'existence des sections holomorphes non-triviales (théorème 3.4). Dans le paragraphe 4 nous considérons les valeurs des formes hermitiennes qui peuvent être les formes hermitiennes des facteur thêta au cas rang $\Gamma = n + 1$. Soit $e_1, e_2, \cdots, e_n$ la base naturelle de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_\Gamma^1 \times \mathbf{C}^{n-1}$ telles que e_1 est la base de $\mathbf{C}_\Gamma^1$. Nous montrons que pour tout nombre réel a il y a la forme hermitienne $\mathscr{H}$ d'un facteur thêta que $\mathscr{H}(e_1, e_1)$ est suffisamment voisine de a (proposition 4.1). Nous nous intéressons au cas où $\mathscr{H}_\Gamma$ est définie positive au paragraphe 6. D'abord nous montrons que $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) = \infty$ pour un espace fibré thêta positif L (théorème 6.1). Ensuite nous démontrons que si la forme hermitienne $\mathscr{H}_\Gamma$ est suffisamment positive alors nous avons le même résultat pour un espace fibré holomorphe en droites $L = L_0 \otimes L_1$ (théorème 6.4). Au paragraphe 7, nous démontrons que la conjecture est vraie dans le cas rang $\Gamma = n + 1$ en utilisant les résultats du paragraphe 4 (théorème 7.2).

Le paragraphe 8 est consacré au cas où $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive. Soit $\mathscr{H}$ une forme hermitienne dont la partie imaginaire est à valeurs entières sur $\Gamma \times \Gamma$. Même si $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive, nous ne pouvons pas obligatoirement l'étendre en une forme hermitienne semi-definie positive sur $\mathbf{C}^n$. Nous donnons la condition (In) nécessaire et suffisante pour cela (proposition 8.1). Ensuite nous montrons que si un espace fibré thêta L satisfait à l'hypothèse de la conjecture et la condition d'inclusion (In) alors on a $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) = \infty$ (théorème 8.2). Nous donnons un exemple qui montre la conjecture n'est pas vraie en général (voyez l'exemple 8.3 et le théorème 8.6).

§ 1. Groupes toroidaux

Soit Γ un sous-groupe discret de rang r de $\mathbf{C}^n$. On pose $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$. On dira que la (n, r)-matrice

$$P = (p_1, \cdots, p_r)$$

dont les vecteurs colonnes sont des générateurs $p_1, \cdots, p_r \in \mathbf{C}^n$ de Γ est une matrice de période de Γ ou de X. Soit P' une autre (n, r)-matrice. Les matrices P et P' sont équivalentes s'il existe $M \in GL(r, \mathbf{Z})$ et $A \in GL(n, \mathbf{C})$ telles que

$$P' = APM .$$

Soit Γ' le sous-groupe discret de $\mathbf{C}^n$ avec la matrice de période P'. Alors $\mathbf{C}^n/\Gamma$ et $\mathbf{C}^n/\Gamma'$ sont isomorphes si et seulement si P et P' sont équivalentes. On dira que $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ est un groupe toroidal lorsqu'il *n*'y a pas de fonction holomorphe non-constante sur X. Si $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ est un groupe toroidal, alors rang $\Gamma = n + m$ $(1 \leq m \leq n)$ et Γ continent n-vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$. On connaît bein la proposition suivante ([12], [13] et [17]).

PROPOSITION 1.1. *Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe quotient de $\mathbf{C}^n$ par Γ avec* rang $\Gamma = n + m$ $(1 \leq m \leq n)$. *Alors pour que X est toroidal il faut et il suffit que X a la matrice de période suivante*:

$$P = (I_n \quad S)\,, \tag{1.1}$$

où I_n est la (n, n)-matrice unité et S est une (n, m)-matrice satisfaisant à

$$\sigma S \notin \mathbf{Z}^m \tag{1.2}$$

pour tout $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in \mathbf{Z}^n \backslash \{0\}$.

La matrice de période $P = (I_n \quad S)$ dans la proposition 1.1 est équivalente à la matrice de période

$$P = \begin{pmatrix} 0 & T \\ I_{n-m} & R \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

où $T = (I_m \quad S')$ est la matrice de période d'un tore complexe de dimension m et R est une $(n - m, 2m)$-matrice réelle satisfaisant à

$$\sigma R \notin \mathbf{Z}^{2m} \tag{1.4}$$

pour tout $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-m}) \in \mathbf{Z}^{n-m} \backslash \{0\}$.

§ 2. Facteurs automorphes et fonctions automorphes

Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal et soit L un espace fibré holomorphe en croites sur X. Supposons que L est défini par un système de fonctions de transition $\{g_{ij}\}$ relatif au recouvrement $\{U_i\}$ de X. Soit π: $\mathbf{C}^n \to X$ la projection canonique. L'image réciproque π^*L de L par π est définie par le système de fonctions de transition $\{\tilde{g}_{ij}\}$ relatif au recouvrement $\{\tilde{U}_i\}$ de $\mathbf{C}^n$, où $\tilde{U}_i := \pi^{-1}(U_i)$ et $\tilde{g}_{ij}(z) := g_{ij}(\pi(z))$. Puisque tout espace fibré holomorphe en droites sur $\mathbf{C}^n$ est analytiquement trivial, il existe une fonction holomorphe $\tilde{c}_i$ sur $\tilde{U}_i$ à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ telle que

$$\tilde{c}_i^{-1}\tilde{g}_{ij}\tilde{c}_j = 1 \text{ sur } \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j\,. \tag{2.1}$$

On peut définir l'application α: $\Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ par

$$\alpha(\gamma, z) := \tilde{c}_i(z+\gamma)^{-1}\tilde{c}_i(z)$$

pour tous $z \in \tilde{U}_i$ et $\gamma \in \Gamma$. Alors α satisfait aux conditions suivantes:

a) α_γ: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$, $\alpha_\gamma(z) := \alpha(\gamma, z)$ est holomorphe pour tout $\gamma \in \Gamma$.

b) $\alpha(0, z) = 1$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$.

c) $\alpha(\gamma + \gamma', z) = \alpha(\gamma, z + \gamma')\alpha(\gamma', z)$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$.

DÉFINITION 2.1. On dira qu'une application α: $\Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ est un facteur automorphe si elle satisfait aux conditions susdites a), b) et c).

Soient α, β: $\Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ deux facteurs automorphes. S'il existe une fonction holomorphe h: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ telle que

$$\beta(\gamma, z) = h(z+\gamma)\alpha(\gamma, z)h(z)^{-1}$$

pour $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$, on dira que α et β sont équivalentes. La proposition suivante est due à Vogt [17].

PROPOSITION 2.2. *Les classes d'équivalence des facteurs automorphes pour Γ sur $\mathbf{C}^n$ correspondent bijectivement aux classes isomorphes des espaces fibrés holomorphes en droites sur $\mathbf{C}^n/\Gamma$.*

DÉFINITION 2.3. On dira qu'une application a: $\Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ est un facteur automorphe additif si elle satisfait aux conditions suivantes:

a) a_γ: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, $a_\gamma(z) := a(\gamma, z)$, est holomorphe pour tout $\gamma \in \Gamma$.

b) $a(0, z) = 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$.

c) $a(\gamma + \gamma', z) = a(\gamma, z + \gamma') + a(\gamma', z)$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$.

Pour un facteur automorphe additif $a\colon \Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, on peut définir le facteur automorphe α par $\alpha(\gamma, z) := \exp(a(\gamma, z))$.

PROPOSITION 2.4 ([17]). *Soit L un espace fibré holomorphe en droites sur $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$, décrit par le facteur automorphe $\alpha\colon \Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$, et pour chaque $\gamma \in \Gamma$, soit $a_\gamma\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, $a_\gamma(z) = a(\gamma, z)$ une fonction holomorphe telle que $\alpha(\gamma, z) = \exp(a(\gamma, z))$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) *L'espace fibré holomorphe en droites L est topologiquement trivial.*

b) *$a(\gamma, z + \gamma') + a(\gamma', z) = a(\gamma', z + \gamma) + a(\gamma, z)$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$.*

c) *Il existe un facteur automorphe additif $b\colon \Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ tel que $\alpha(\gamma, z) = \exp(b(\gamma, z))$.*

DÉFINITION 2.5. On dira qu'un facteur automorphe $\alpha\colon \Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ est un facteur thêta, s'il s'écrit

$$\alpha(\gamma, z) = e(\mathscr{L}_\gamma(z) + c(\gamma))$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$, où $\mathscr{L}_\gamma$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur $\mathbf{C}^n$, $c(\gamma)$ est une constante et $e(x) = \exp 2\pi\sqrt{-1}\,x$. On dira aussi que l'espace fibré holomorphe en droites donné par un facteur thêta est un espace fibré thêta.

Tout espace fibré holomorphe en droites L sur un groupe toroidal $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ est isomorphe à $L_0 \otimes L_1$, où L_0 est un espace fibré holomorphe en droites topologiquement trivial et L_1 est un espace fibré thêta ([18]). Dans la suite on notera $L_0 \otimes L_1$ l'expression ci-dessus.

Le facteur thêta $\rho(\gamma, z)$ s'écrit classiquement

$$\rho(\gamma, z) = \psi(\gamma)e\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\mathscr{H} + \mathscr{Q})(\gamma, z) + \frac{1}{4\sqrt{-1}}(\mathscr{H} + \mathscr{Q})(\gamma, \gamma) + \mathscr{L}(\gamma)\right]$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$, où $\mathscr{H}$ est une forme hermitienne telle que la partie imaginaire $\mathscr{A} := \operatorname{Im} \mathscr{H}$ est à valeurs entières sur $\Gamma \times \Gamma$, $\mathscr{Q}$ est une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique, $\mathscr{L}$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire et ψ est un semi-caractère de Γ associé à $\mathscr{A}|_{\Gamma\times\Gamma}$. Lorsque range $\Gamma = 2n$ cette expression est unique. Mais elle n'est pas unique en général. On dira q'un facteur thêta ρ est de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$ s'il a l'expression ci-dessus. Un facteur thêta de type $(\mathscr{H}, \psi, 0, 0)$ est un facteur thêta réduit de type $(\mathscr{H}, \psi)$. Et on dira qu'un facteur thêta de type $(0, 1, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$ est un facteur thêta trivial.

DÉFINITION 2.6. Soit $\alpha\colon \Gamma \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ un facteur automorphe. On dira qu'une fonction holomorphe f sur $\mathbf{C}^n$ est une fonction automorphe pour α si

$$f(z+\gamma) = \alpha(\gamma, z) f(z)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathbf{C}^n$. En particulier on dira qu'une fonction automorphe pour un facteur thêta est une fonction thêta.

Soit L un espace fibré holomorphe en droites donné par un facteur automorphe α. Alors les sections holomorphes de L correspondent bijectivement aux fonctions automorphes pour α.

§ 3. Une condition nécessaire

Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal de $\operatorname{rang} \Gamma = n + m$. On notera $\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}$ le sous-espace linéaire réel qui est engendré par Γ et $\mathbf{C}_\Gamma^m$ le sous-espace linéaire complexe maximal dans $\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}$. Soit $L = L_0 \otimes L_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur X. On suppose que l'espace fibré holomorphe en droites topologiquement trivial L_0 est donné par un facteur automorphe $\alpha(\gamma, z) = \exp(a(\gamma, z))$ qui est défini par un facteur automorphe additif $a(\gamma, z)$, et l'espace fibré thêta L_1 est donné par un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Si L a une section holomorphe non-triviale, alors $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive ([2]).

LEMME 3.1 ([2] et [7]). *Soit L un espace fibré holomorphe en droites topologiquement trivial sur un groupe toroidal. Alors pour que L ait une section holomorphe non-triviale il faut et il suffit que L soit analytiquement trivial.*

On peut voir la conjecture suivante dans [18].

CONJECTURE 3.2. *Si $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive et non-nulle, alors L a une section holomorphe non-triviale.*

Pour une forme hermitienne $\mathscr{H}$ sur $\mathbf{C}^n$ on pose

$$\operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma) := \{z \in \mathbf{C}_\Gamma^m;\ \mathscr{H}_\Gamma(z, z') = 0 \text{ pour tout } z' \in \mathbf{C}_\Gamma^m\}.$$

Rappelons le cas où $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ est un tore. Il est nécessaire pour l'existence d'une section holomorphe non-triviale de L que

$$\psi(\gamma) = 1 \quad \text{pour tout } \gamma \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}) \cap \Gamma\,,$$

où $\operatorname{Ker}(\mathscr{H})$ est le noyau de $\mathscr{H}$ sur $\mathbf{C}^n$. Donc il nous semble qu'une condition analogue est nècessaire pour un groupe toroidal.

On écrira $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^m_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-m}$. Soient $(z_1, \cdots, z_m; w_1, \cdots, w_{n-m})$ des coordonnées holomorphes de $\mathbf{C}^n$ telles que $z = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbf{C}^m_\Gamma$ et $w = (w_1, \cdots, w_{n-m}) \in \mathbf{C}^{n-m}$. On suppose que la matrice de période P de Γ a la forme (1.2). D'après Vogt [17], on peut supposer de plus que le facteur automorphe $\alpha(\gamma, (z, w))$ qui donne L_0 a les propriétés suivantes:

a) $\alpha(\gamma, (z, w))$ ne dépend pas de z. Pour cette raison on écrit $\alpha(\gamma, (z, w)) = \alpha(\gamma, w)$.

b) $\alpha(\gamma, w) = 1$ pour tout $\gamma \in \{0\} \times \mathbf{Z}^{n-m}$.

c) $\alpha(\gamma, w)$ est $\mathbf{Z}^{n-m}$-périodique pour w.

On pose $P = (p_1, \cdots, p_{n+m})$. On pose alors

$$\beta(p_i) := \begin{cases} \alpha(p_i, 0)^{-1} & \text{si } p_i \in \mathbf{C}^m_\Gamma \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour $\gamma \in \Gamma$ quelconque on peut écrire de façon unique

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n+m} a_i p_i, \qquad a_i \in \mathbf{Z}.$$

En posant

$$\beta(\gamma) := \prod_{i=1}^{n+m} \beta(p_i)^{a_i} \tag{3.2}$$

pour $\gamma \in \Gamma$, on définit un homomorphisme $\beta\colon \Gamma \to \mathbf{C}^*$. L'espace fibré holomorphe en droites L_β donné par β est homogène, par suite il est topologiquement trivial ([17]). En utilisant L_β, on a une autre expression

$$L = (L_0 \otimes L_\beta) \otimes (L_\beta^{-1} \otimes L_1) = \tilde{L}_0 \otimes \tilde{L}_1$$

de $L = L_0 \otimes L_1$, où $\tilde{L}_0$ est topologiquement trivial et $\tilde{L}_1$ est un espace fibré thêta. En effet, $\tilde{L}_0$ est donné par le facteur automorphe $\tilde{\alpha}(\gamma, w) = \alpha(\gamma, w)\beta(\gamma)$ et $\tilde{L}_1$ est donné par le facteur thêta $\tilde{\rho}(\gamma, (z, w)) = \beta(\gamma)^{-1}\rho(\gamma, (z, w))$. Supposons que $\beta(\gamma)^{-1}$ est de type $(0, \psi_\beta, 0, \mathscr{L}_\beta)$. Alors $\tilde{\rho}$ est de type $(\mathscr{H}, \tilde{\psi}, \mathscr{Q}, \tilde{\mathscr{L}})$, où $\tilde{\psi} = \psi\psi_\beta$ et $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_\beta$. On pose rang $(\Gamma \cap \mathbf{C}^m_\Gamma) = q$. On suppose que $p_{n+m-q+1}, \cdots, p_{n+m}$ sont des générateurs de $\Gamma \cap \mathbf{C}^m_\Gamma$.

Lemme 3.3. *On a*

$$\tilde{\alpha}(\gamma, 0) = 1 \tag{3.3}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma \cap \mathbf{C}_\Gamma^m$.

Démonstration. Tout $\gamma \in \Gamma \cap \mathbf{C}_\Gamma^m$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\gamma = \sum_{i=1}^{q} b_i p_{n+m-q+i}, \qquad b_i \in \mathbf{Z}.$$

On a donc par (3.1) et (3.2)

$$\begin{aligned}\beta(\gamma) &= \prod_{i=1}^{q} \beta(p_{n+m-q+i})^{b_i} \\ &= \prod_{i=1}^{q} \alpha(p_{n+m-q+i}, 0)^{-b_i}.\end{aligned}$$

Comme

$$\alpha(p_{n+m-q+i} + p_{n+m-q+j}, 0) = \alpha(p_{n+m-q+i}, 0)\alpha(p_{n+m-q+j}, 0)$$

pour i et j avec $1 \leq i, j \leq q$, on a

$$\prod_{i=1}^{q} \alpha(p_{n+m-q+i}, 0)^{-b_i} = \alpha(\gamma, 0)^{-1}.$$

On en déduit

$$\tilde{\alpha}(\gamma, 0) = \alpha(\gamma, 0)\beta(\gamma) = 1$$

pour tout $\gamma \in \Gamma \cap \mathbf{C}_\Gamma^m$. $\square$

Par le lemme 3.3 on peut supposer que pour un espace fibré holomorphe en droites $L = L_0 \otimes L_1$, le facteur automorphe α qui donne L_0 satisfait toujours à (3.3).

THÉORÈME 3.4. *Soit* $L = L_0 \otimes L_1$ *un espace fibré holomorphe en droites sur un groupe toroidal* $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$. *Si* L *a une section holomorphe, alors* $\psi|_{\Gamma \cap \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)}$ *est une représentation de* $\Gamma \cap \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ *qui est équivalente à* 1.

Démonstration. On peut supposer que le facteur thêta ρ qui donne L_1 est un facteur thêta réduit de type $(\mathscr{H}, \psi)$. Soient α le facteur automorphe qui donne L_0 et $f \not\equiv 0$ une fonction automorphe pour $\alpha \cdot \rho$, c'est-à-dire

$$f((z, w) + \gamma) = \alpha(\gamma, w)\rho(\gamma, (z, w))f(z, w)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $(z, w) \in \mathbf{C}^n$. Comme $f \not\equiv 0$, il existe $z \in \mathbf{C}_\Gamma^m$ tel que $f(z, 0) \neq 0$. On a pour tout $\gamma \in \Gamma \cap \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\gamma,0)}{f(z)} &= \alpha(\gamma,0)\rho(\gamma,(z,0)) \\ &= \psi(\gamma)e\left[\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathscr{H}(\gamma,(z,0))+\frac{1}{4\sqrt{-1}}\mathscr{H}(\gamma,\gamma)\right] \\ &= \psi(\gamma),\end{aligned}$$

car α satisfait à (3.3). Posons $\mathbf{C}^m_\Gamma = \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma) \times \mathbf{C}^l$ et $l + \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma) = m$. On écrira $z = (z', z'') \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma) \times \mathbf{C}^l$. Pour tout $\zeta \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$, on pose

$$f_z(\zeta) := f(z' + \zeta, z'', 0).$$

Alors $f_z(\zeta)$ est une fonction holomorphe sur $\operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$, et on a $f_z(0) = f(z, 0) \neq 0$. Nous obtenons donc $f_z \not\equiv 0$. On peut vérifier facilement que

$$\psi(\gamma + \gamma') = \psi(\gamma)\psi(\gamma')$$

pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma \cap \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ par

$$\rho(\gamma + \gamma', 0) = \rho(\gamma, \gamma')\rho(\gamma', 0).$$

On en déduit que $\psi_0 := \psi|_{\Gamma\cap\operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)}$ est une représentation de $\Gamma \cap \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$. Par (3.4) on a

$$f_z(\zeta + \gamma) = \psi(\gamma)f_z(\zeta)$$

pour tous $\zeta \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma \cap \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$. Ceci montre que f_z est une fonction automorphe pour la représentation ψ_0. On pose $\operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma) = \mathbf{C}^k$ et $\Gamma_0 := \Gamma \cap \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$. Comme il existe la projection canonique $X \to X_0 := \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)/\Gamma_0$, X_0 est aussi un groupe toroidal. L'espace fibré holomorphe en droites donné par ψ_0 est topologiquement trivial ([17]). Grâce au lemme 3.1, il en résulte que ψ_0 est équivalente à 1. □

§ 4. Formes hermitiennes des facteurs thêta

Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal. Dans ce paragraphe nous supposons que rang $\Gamma = n + 1$. Prenons les coordonnées holomorphes $(z, w) = (z, w_1, \cdots, w_{n-1})$ de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^1_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-1}$ comme celles du paragraphe 3. Soit $e_1, e_2, \cdots, e_n$ la base naturelle de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^1_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-1}$. Définissons

$$\begin{aligned}\mathscr{F} := \{\mathscr{H};\ &\text{une forme hermitienne sur } \mathbf{C}^n \text{ telle que} \\ &\operatorname{Im}\mathscr{H} \text{ est à valeurs entières sur } \Gamma \times \Gamma\}.\end{aligned}$$

On pose alors $F := \{v = \mathscr{H}(e_1, e_1);\ \mathscr{H} \in \mathscr{F}\}$.

PROPOSITION 4.1. *F est dense dans R.*

Démonstration. Par la projection $\tau\colon \mathbf{C}^n = \mathbf{C}^1_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-1}(z, w_1, \cdots, w_{n-1}) \to (z, w_1) \in \mathbf{C}^2$, on a l'application holomorphe surjective $\tau^*\colon X \to \mathbf{C}^2/\Gamma^*$, où $\Gamma^* = \tau(\Gamma)$. $\mathbf{C}^2/\Gamma^*$ est nécessairement un groupe toroidal avec la matrice de période

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha + \sqrt{-1}\,\beta \\ 1 & r_1 & r_2 \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta, r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, $\beta \neq 0$ et r_1 ou r_2 est irrationnel au moins. Par conséquent, la démonstration de la proposition est réduite au cas $n = 2$.

Prenons $\mathscr{H} \in \mathscr{F}$ avec $\mathscr{A} := \operatorname{Im} \mathscr{H}$. Alors on a $v = \mathscr{A}(e_1, \sqrt{-1}\,e_1)$. On pose $x := \mathscr{A}(e_1, e_2)$, $y := \mathscr{A}(e_2, \sqrt{-1}\,e_1)$ *et* $P = (p_1, p_2, p_3)$. On peut écrire $p_1 = e_2$, $p_2 = e_1 + r_1 e_2$ *et* $p_3 = \alpha e_1 + \beta\sqrt{-1}\,e_1 + r_2 e_2$. Comme $\mathscr{H} \in \mathscr{F}$, il existe $k, l, m \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\begin{cases} \mathscr{A}(p_1, p_2) = -x = k\,, \\ \mathscr{A}(p_1, p_2) = -\alpha x + \beta y = l\,, \\ \mathscr{A}(p_2, p_3) = (r_2 - \alpha r_1)x + r_1\beta y + \beta v = m\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

On en déduit par (4.1) que

$$m - r_1 l + r_2 k = \beta v\,. \tag{4.2}$$

Réciproquement, pour toutes valeurs entières k, l, m on peut construire $\mathscr{H} \in \mathscr{F}$ satisfaisante (4.1). Comme X est un groupe toroidal, l'ensemble $\{m + r_1 l + r_2 k;\ k, l, m \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$. Ensuite F est dense dans $\mathbf{R}$. □

§ 5. Une classe caratéristique nouvelle

Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal de rang $\Gamma = n + m$, et soient (z, w) des coordonnées holomorphes de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^m_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-m}$. On notera $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^{1,1}$ les faisceaux des germes des fonctions C^∞ à valeurs réelles et des (1, 1)-formes C^∞ réelles relatives à $\{dz_\alpha, d\bar{z}_\alpha;\ \alpha = 1, \cdots, m\}$ sur X. Soit $d_z = \partial_z + \bar{\partial}_z$ le d-opérateur aux variables z. On notera $\mathscr{F}^{1,1}$ le sous-faisceau de $\mathscr{E}^{1,1}$ qui consiste en (1, 1)-formes fermées par d_z. Soit $\mathscr{H}^*$ le faisceau des germes des fonctions C^∞ à valeurs $\mathbf{C}^*$ qui sont holomorphes relatives à z sur X.

On suppose que $L \in H^1(X, \mathscr{H}^*)$ est défini par un système de fonctions de transition $\{g_{ij}\}$ relatif au recouvrement $\{U_i\}$ de X. Soit $\{a_i\}$ une métrique hermitienne sur les fibres de L. On peut définir une (1, 1)-forme $\omega(L)$ à valeurs $\mathscr{F}^{1,1}$ pour L par

$$\omega(L) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial_z \bar{\partial}_z \log a_i \quad \text{sur} \quad U_i \, .$$

Alors on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\Gamma \colon H^1(X, \mathscr{H}^*) &\longrightarrow H^0(X, \mathscr{F}^{1,1})/\sqrt{-1}\, \partial_z \bar{\partial}_z H^0(X, \mathscr{E}) \\ L &\longmapsto [\omega(L)] \, . \end{aligned}$$

On dira que $\tilde{c}_\Gamma(L)$ est la class de Chern raffinée relative à Γ. Voyes [1] pour les propriétés de $\tilde{c}_\Gamma(L)$. Dans [2] nous avons démontré que si un espace fibré holomorphe en droites L est topologiquement trivial, alors $\tilde{c}_\Gamma(L) = 0$. Le contraire n'est pas vrai en général (Exemple 6.2 dans [3]). Soit L_ρ l'espace fibré thêta donné par un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Alors il existe une métrique hermitienne sur les fibres de L_ρ telle que

$$\left(- \frac{\partial^2 \log a_i}{\partial t_\alpha \bar{\partial} t_\beta} \right)_{\alpha, \beta = 1, \cdots, n} = \pi H \, ,$$

où $H = (h_{\alpha\beta})$ est la matrice de représentation de $\mathscr{H}$ relative aux coordonnées holomorphes $(t_1, \cdots, t_n) = (z, w)$ de $\mathbf{C}^n$ ([3]). En particulier on a

$$\tilde{c}_\Gamma(L_\rho) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{m} h_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \right] .$$

§ 6. Le cas défini positif

D'abord nous considérons des espaces fibrés thêta. Lorsque $\mathbf{C}^n/\Gamma$ est un tore, la dimension de l'espace vectoriel des fonctions thêta pour un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$ est le pfaffien $\mathrm{Pf}(\mathscr{A}, \Gamma)$ de $\mathscr{A} := \mathrm{Im}\, \mathscr{H}$ sur $\Gamma \times \Gamma$. On peut démontrer le théorème suivant pour des groupes toroidaux.

THÉORÈME 6.1. *Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal non-compact, et soit L l'espace fibré thêta sur X donné par un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Si $\mathscr{H}_\Gamma$ est définie positive, alors*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) = \infty \, .$$

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe un groupe discret $\tilde{\Gamma}$ de rang $2n$ contenant Γ comme sous-groupe et un facteur thêta $\tilde{\rho}\colon \tilde{\Gamma} \times \mathbf{C}^n$

$\to \mathbf{C}^*$ tels que $\tilde{\rho}|_{\Gamma\times\mathbf{C}^n} = \rho$ et $\mathrm{Pf}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\Gamma}) > N$, où $\tilde{\rho}$ est de type $(\tilde{\mathscr{H}}, \tilde{\psi}, \tilde{\mathscr{Q}}, \tilde{\mathscr{L}})$ et $\tilde{\mathscr{A}} := \mathrm{Im}\,\tilde{\mathscr{H}}$ (cf. [3] et [16]). Soit $\tilde{\Theta}$ l'espace vectoriel des fonctions thêta pour $\tilde{\rho}$. Alors on a

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}(L)) \geq \dim_{\mathbf{C}} \tilde{\Theta} = \mathrm{Pr}(\tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\Gamma}) .$$

Comme N est arbitraire, on a

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}(L)) = \infty . \qquad \square$$

Soit $L = L_0 \otimes L_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur un groupe toroidal $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$. On suppose que L_1 est donné par un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Il existe un groupe discret Γ' de rang $2n$ contenant Γ comme sous-groupe et un facteur thêta ρ': $\Gamma' \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^*$ tels que $\rho = \rho'|_{\Gamma\times\mathbf{C}^n}$ et $A := \mathbf{C}^n/\Gamma'$ est une variété abélienne. Soit σ: $X \to A$ le revêtement associé. Si L' est l'espace fibré thêta sur A donné par ρ', alors on a $L_1 = \sigma^* L_1'$. Soit $(\tilde{A}, \tau)$ une transformation quadratique de A centrée en $a \in A$. On pose que $S := \tau^{-1}(a) = \{a\} \times \mathbf{P}^{n-1}$. Soit [S] l'espace fibré holomorphe en droites sur $\tilde{A}$ déterminé par le diviseur S. Le lemma suivant est bien connu:

LEMME 6.2 ([11]). *Il existe une constante $c > 0$ telles que si un espace fibré holomorphe en droites L sur A a une métrique hermitienne sur les fibres dont la forme de courbure χ satisfait*

$$\sqrt{-1}\,\chi > c\sqrt{-1} \sum_{\alpha=1}^{n} dt_\alpha \wedge d\bar{t} ,$$

alors $[S]^{-1} \otimes \tau^* L$ est positif sur $\tilde{A}$, où des coordonées holomorphes de $\mathbf{C}^n$ sont $(t_1, \cdots, t_n)$ et les coordonnées locales de A sont induites de celles de $\mathbf{C}^n$.

LEMME 6.3. *Soient $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal, et (z, w) des coordonnées holomorphes de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^m_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-m}$. Pour tout espace fibré holomorphe en droites topologiquement trivial L et tout constante $K > 0$, il existe une métrique hermitienne $\{a_\iota\}$ sur les fibres de L telle que si la forme de courbure χ de $\{a_\iota\}$ est*

$$\chi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \chi_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta + (\textit{les termes contenant } dw_\mu \textit{ ou } d\bar{w}_\mu) ,$$

alors

$$(\chi_{\alpha\bar{\beta}})_{\alpha,\beta=1,\cdots,m} \geq -KI_m \textit{ sur } X .$$

Démonstration. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de X. On suppose que les coordonnées holomorphes sur U_i sont induites par celles sur $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^m_\Gamma \times \mathbf{C}^{n-m}$. Comme $\tilde{c}_\Gamma(L) = 0$ (cf. paragraphe 5), on peut prendre une métrique hermitienne $\{a_i\}$ sur les fibres de L qui est pluriharmonique relative à z ([1]). On pose pour $x \in U_i$

$$H(x) := \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}(x) & -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial z_\alpha \partial \bar{w}_\nu}(x) \\ -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial w_\mu \partial \bar{z}_\beta}(x) & -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial z_\alpha \partial \bar{w}_\nu}(x) \\ -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial w_\mu \partial \bar{z}_\beta}(x) & -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}(x) \end{bmatrix}$$

et

$$H'(x) := \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial z_\alpha \partial \bar{w}_\nu}(x) \\ -\dfrac{\partial^2 \log a_i}{\partial w_\mu \partial \bar{z}_\beta}(x) & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h_{\alpha\nu}(x) \\ h_{\mu\beta}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe une fonction continue $a(x)$ de x telle que

$$\bar{\xi} H'(x)\, {}^t\xi \geq a(x)\left(\delta^2 \sum_{\alpha=1}^{m} |\xi_\alpha|^2 + \frac{1}{\delta^2} \sum_{\mu=m+1}^{n} |\xi_\mu|^2\right) \tag{6.1}$$

pour tous $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$ et $\delta > 0$.

Il est bien connu qu'il existe une fonction d'exhaustion plurisousharmonique C^∞ non-négative φ sur X telle que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{w}_\nu} = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}(x)\right)_{\mu,\nu=1,\cdots,n-m}$$

est définie positive pour tout $x \in U_i$. On pose $\varphi_{\mu\nu}(x) = \partial^2\varphi/\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu(x)$. Il existe une fonction continue $b(x)$ à valeurs positives telle que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n-m} \varphi_{\mu\nu}(x)\xi_{m+\mu}\bar{\xi}_{m+\nu} \geq b(x) \sum_{\mu=1}^{n-m} |\xi_{m+\mu}|^2 \tag{6.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{C}^n$. Prenons $K > 0$ quelconque. Nous choisirons δ de (6.1) tel que $a(x)\delta^2 > -K$. Alors on a

$$\bar{\xi} H(x)\,{}^t\xi \geq -K \sum_{\alpha=1}^{m} |\xi_\alpha|^2 - c(x) \sum_{\mu=m+1}^{n} |\xi_\mu|^2 \tag{6.3}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{C}^n$, où $c(x)$ est une fonction continue positive. Prenons $\tau_x > 0$ telle que $\tau_x > c(x)/b(x)$. Par (6.2) et (6.3) on a

$$\bar{\xi}\left(H(x) + \tau_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{\mu\bar{\nu}}(x) \end{pmatrix}\right){}^t\xi \geq -K \sum_{\alpha=1}^{m} |\xi_\alpha|^2 \tag{6.4}$$

pour tout $\mathbf{C}^n$.

On en déduit que pour tout $x \in U_i$ il existe un voisinage $W_x(\subset U_i)$ de x et $\tau_x > 0$ tels que

$$H(y) + \tau_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{\mu\bar{\nu}}(y) \end{pmatrix} \geq -K \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $y \in W_x$. L'ensemble $\{W_x;\ x \in X\}$ devient un recourment de X. Soit $\mathfrak{W}$ un recouvrement localement fini de X qui consiste en des éléments de $\{W_x\}$. On pose pour $c \in \mathbf{R}$

$$X_c := \{x \in X;\ \varphi(x) < c\}\,.$$

On notera $\mathfrak{W}_0 := \{W_1, W_2, \cdots, W_{k_0}\}$ l'ensemble de tout $W_x \in \mathfrak{W}$ tel que $\bar{X}_0 \cap W_x \neq \emptyset$. Soit $\{W_{k_0+1}, \cdots, W_{k_1}\}$ l'ensemble de tout $W_x \in \mathfrak{W} \backslash \mathfrak{W}_0$ tel que $\bar{X}_1 \cap W_x \neq \emptyset$. On pose $\mathfrak{W}_1 := \mathfrak{W}_0 \cup \{W_{k_0+1}, \cdots, W_{k_1}\}$. Par récurrence on peut définir la suite $\mathfrak{W}_0, \mathfrak{W}_1, \cdots$ telle que

$$\mathfrak{W} = \bigcup_{s \geq 0} \mathfrak{W}_s$$

et

$$\mathfrak{W}_{s+1} = \mathfrak{W}_s \cup \{W_{k_s+1}, \cdots, W_{k_{s+1}}\}, \qquad s = 0, 1, \cdots.$$

On écrira $\tau_j = \tau_x$ quand $W_j = W_x$. Définissons une fonction non-décroissante $\nu(t)$ sur $[0, \infty)$ par

$$\nu(t) := \max_{1 \leq \mu \leq k_s} \tau_\mu \qquad \text{si } \tau \in (s-1, s]\,.$$

Il est bien connu qu'il existe $\lambda \in C^\infty([0, \infty))$ telle que

$$\begin{cases} \lambda'(t) > \nu(t) & \text{pour } t \in (0, \infty) \\ \lambda''(t) \geq 0 & \text{pour } t \in [0, \infty)\,. \end{cases}$$

Comme $\mathfrak{W} = \{W_j\}$ est un raffinement de $\{U_i\}$, il existe une application $\iota\colon \{j\} \to \{i\}$ telle que $W_j \subset U_{\iota(j)}$. On pose

$$\tilde{a}_j := e^{-\lambda(\varphi)} a_{\iota(j)} .$$

Alors $\{\tilde{a}_j\}$ est métrique hermitienne sur les fibres de L relative au recouvrement $\mathfrak{W}$ de X. Prenons $x \in X$ quelconque. On suppose que $\varphi(x) \in (s-1, s]$. Pour j tel que $x \in W_j$ on a

$$(6.6)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = -\dfrac{\partial^2 \log a_{\iota(j)}}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = 0 , \\ -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial z_\alpha \bar{w}_\nu} = -\dfrac{\partial^2 \log a_{\iota(j)}}{\partial z_\alpha \partial \bar{w}_\nu} + \lambda''(\varphi) \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}_\nu} , \\ -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu} = -\dfrac{\partial^2 \log a_{\iota(j)}}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu} + \lambda'(\varphi)\varphi_{\mu\bar{\nu}} + \lambda''(\varphi) \dfrac{\partial \varphi}{\partial w_\mu} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}_\nu} . \end{cases}$$

Il en résulte par (6.5) et (6.6) que pour tout $\xi \in \mathbf{C}^n$

$$\begin{aligned} &\bar{\xi} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}(x) & -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial z_\alpha \partial \bar{w}_\nu}(x) \\ -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial \omega_\mu \partial \bar{z}_\beta}(x) & -\dfrac{\partial^2 \log \tilde{a}_j}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}(x) \end{pmatrix} {}^t\xi \\ &\quad = \bar{\xi} H(x)\, {}^t\xi + \lambda'(\varphi(x)) \bar{\xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{\mu\bar{\nu}}(x) \end{pmatrix} {}^t\xi \\ &\qquad + \lambda''(\varphi(x)) \left| \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha}(x) \xi_\alpha + \sum_{\mu=1}^{n-m} \frac{\partial \varphi}{\partial w_\mu}(x) \xi_{m+\mu} \right|^2 \\ &\quad \geq \bar{\xi} H(x)\, {}^t\xi + \nu(\varphi(x)) \bar{\xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{\mu\bar{\nu}}(x) \end{pmatrix} {}^t\xi \\ &\quad \geq \bar{\xi} H(x)\, {}^t\xi + \tau_j \bar{\xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{\mu\bar{\nu}}(x) \end{pmatrix} {}^t\xi \\ &\quad \geq -K \sum_{\alpha=1}^{m} |\xi_\alpha|^2 . \end{aligned}$$

□

THÉORÈME 6.4. *Siot $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal non-compact. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout espace fibré holomorphe en droites $L = L_0 \otimes L_1$ sur X tel que*

$$\mathscr{H}_\Gamma > c\mathscr{I}_m$$

on a

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) = \infty ,$$

où $\mathscr{I}_m$ est la forme hermitienne sur $\mathbf{C}_\Gamma^m$ correspondante à la (m, m)-matrice unité et l'espace fibré thêta L_1 est donné par un facteur thêta de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$.

Démonstration. Il est clair que X est un revêtement $\sigma\colon X \to A$ d'une variété abélienne A de dimension n. Pour $a \in A$, $\sigma^{-1}(a) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ est un ensemble discret dénombrable. Soit $(\tilde{A}, \tau)$ une transformation quadratique de A centrée en $a \in A$. Prenons $l \in N$ quelconque. Soit $(\tilde{X}_l, \tilde{\tau})$ la transformation quadratique de X centrée aux poits $x_1, \cdots, x_l$. On pose

$$S_i := \{x_i\} \times \mathbf{P}^{n-1}, \qquad i = 1, \cdots, l\,.$$

Soit $c' > 0$ une constante ayant la propriété du lemme 6.2. Si un espace fibré holomorphe en droites L sur X a une métrique hermitienne sur les fibres dont la forme de courbure χ satisfait à

$$\sqrt{-1}\chi > c'\sqrt{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{m} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha + \sum_{\mu=1}^{n-m} dw_\mu \wedge d\bar{w}_\mu\right), \tag{6.7}$$

alors

$$\tilde{\tau}^* L \otimes [S_1]^{-1} \otimes \cdots \otimes [S_l]^{-1}$$

est positif sur $\tilde{X}_l$. On pose $c := c'/\pi$. On suppose qu'un espace fibré holomorphe en droites $L = L_0 \otimes L_1$ satisfait à $\mathscr{H}_\Gamma > c\mathscr{I}_m$. Soit $K > 0$ une constante assez petite pour que

$$(c + K)\mathscr{I}_m < \mathscr{H}_\Gamma\,.$$

D'après un résultat du paragraphe 5 et le lemme 6.3, il existe une métrique hermitienne $\{a_i\}$ sur les fibres de L dont la forme de courbure

$$\chi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \chi_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta + (\text{les termes contenant } dw_\mu \text{ ou } d\bar{w}^\nu)$$

satisfait à

$$(\chi_{\alpha\bar{\beta}})_{\alpha,\beta=1,\cdots,m} > c' I_m\,.$$

On suppose que φ est la fonction d'exhaustion plurisousharmonique. En utilisant une fonction convexe C^∞ non-décroissante λ, on peut définir une autre métrique hermitienne $\{\tilde{a}_i\}$ sur les fibres de L par

$$\tilde{a}_i := e^{-\lambda(\varphi)} a_i\,.$$

Par la même argument que dans la démonstration du lemme 6.3, on peut trouver λ telle que la forme de courbure $\tilde{\chi}$ de $\{\tilde{a}_t\}$ satisfait à (6.7). On écrira

$$S := S_1 \cup \cdots \cup S_l$$

et

$$[S]^{-1} := [S_1]^{-1} \otimes \cdots \otimes [S_l]^{-1}.$$

On a d'abord la suite exacte suivante:

$$(6.8) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}_l}(\tilde{\tau}^* L \otimes [S]^{-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}_l}(\tilde{\tau}^* L) \longrightarrow \mathcal{O}_S(\tilde{\tau}^* L|_S) \longrightarrow 0.$$

Comme $\tilde{\tau}^* L \otimes [S]^{-1}$ est positif sur $\tilde{X}_l$, grâce au théorème d'annulation pour les espaces fibrés en droites positifs sur une variété faiblement 1-complète ([9] et [15]) on a

$$H^1(\tilde{X}_l, \mathcal{O}_{\tilde{X}_l}(\tilde{\tau}^* L \otimes [S]^{-1})) = 0.$$

On en déduit par (6.8) que le morphisme de restriction

$$(6.9) \qquad H^0(\tilde{X}_l, \mathcal{O}_{\tilde{X}_l}(\tilde{\tau}^* L)) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(\tilde{\tau}^* L|_S))$$

est surjectif. Remarquons

$$H^0(\tilde{X}_l, \mathcal{O}_{\tilde{X}_l}(\tilde{\tau}^* L)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}(L)),$$

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(\tilde{\tau}^* L|_S)) \simeq H^0(S, \mathcal{O}) \simeq \mathbf{C}^l.$$

Alors, d'après (6.9)

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}(L)) \geq l.$$

On en déduit

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}(L)) = \infty. \qquad \square$$

On notera $\mathcal{O}^*$ et $\mathcal{M}$ les faisceaux des germes des fonctions holomorphes à valeurs $\mathbf{C}^*$ et des fonctions méromorphes sur une variété complexe X. En posant $\mathcal{M}_x^* := \mathcal{M}_x \setminus \{0_x\}$, on peut construire un sous-faisceau $\mathcal{M}^* = \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_x^*$ de $\mathcal{M}$. On dira que $\mathrm{Div}(X) := H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ est le groupe des diviseurs de X. Par une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \longrightarrow \{1\},$$

on a l'homomorphisme δ: $\mathrm{Div}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Notons que δ n'est pas surjectif en général. Mais on peut voir par le corollaire suivant que est surjectif si X est une variété quasi-abélienne au sens de Gherardelli-Andreotti [6].

COROLLAIRE 6.5. *Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ une variété quasi-abélienne non-compacte. Alors, pour tout espace fibré holomorphe en droites L sur X on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{M}(L)) = \infty ,$$

où $\mathscr{M}(L)$ est le faisceau des germes des sections méromorphes de L.

Démonstration. Comme X est quasi-abélienne, il existe un espace fibré thêta $\tilde{L}$ donné par un facteur thêta réduit $\tilde{\rho}$ de type $(\tilde{\mathscr{H}}, \tilde{\psi})$ tel que $\tilde{\mathscr{H}}$ est définie positive sur $\mathbf{C}^n$. Soit $L = L_0 \otimes L_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur X. On suppose que L_1 est donne par un facteur thêta de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Prenons une constante $c > 0$ dans le théorème 6.4. Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$(\mathscr{H} + k\tilde{\mathscr{H}})_\Gamma > c\mathscr{I}_m .$$

En appliquant le théorème 6.4 on a

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L \otimes \tilde{L}^k)) = \infty .$$

Par le théorème 6.1 il existe une section holomorphe non-triviale $g = \{g_i\} \in H^0(X, \mathscr{O}(\tilde{L}^k))$. Pour $l \in \mathbf{N}$ arbitraire il existe $f^{(1)} = \{f_i^{(1)}\}, \cdots, f^{(l)} = \{f_i^{(l)}\} \in H^0(X, \mathscr{O}(L \otimes \tilde{L}^k))$ linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$. On pose

$$m^{(j)} := \left\{ \frac{f_i^{(i)}}{g_i} \right\} \in H^0(X, \mathscr{M}(L))$$

pour $j = 1, \cdots, l$. Alors $m^{(1)}, \cdots, m^{(l)}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$. □

§ 7. Le cas rang $\Gamma = n + 1$

Nous démontrons dans ce paragraphe que la conjecture 3.2 est vraie dans le cas rang $\Gamma = n + 1$.

LEMME 7.1. *Soient $A = \mathbf{C}^n/\Gamma$ une variété abélienne, et $\mathscr{H}$ une forme de Riemann non-dégénérée positive pour A. Soient $\pi\colon \mathbf{C}^n \to A$ la projection canonique, et $\Theta = \Theta(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$ l'espace vectoriel des fonctions thêta pour un facteur thêta de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. On suppose que Θ détermine une application biunivoque et biréguliere de A sur une sous-variété algébrique V d'un espace projectif complexe $\mathbf{P}^N$, c'est-à-dire $\Delta = (\theta_0 \colon \cdots \colon \theta_N)\colon A \to V$*

$\subset \mathbf{P}^N$ *est l'application biunivoque et birégulière, où* $\theta_0, \cdots, \theta_N$ *est une base de* Θ. *Alors pour* $x_0, x_1 \in \mathbf{C}^n$ *avec* $\pi(x_0) \neq \pi(x_1)$, *il existe* $\theta \in \Theta$ *telle que* $\theta(x_0) = 0$ *et* $\theta(x_1) \neq 0$.

Démonstration. Par hypothèse il existe j tel que $\theta_j(x_1) \neq 0$. On peut supposer que $\theta_0(x_1) \neq 0$. Si $\theta_0(x_0) = 0$, alors θ_0 est une fonction thêta désirées. Supposons que $\theta_0(x_0) \neq 0$. Il existe j avec $1 \leq j \leq N$ tel que $\theta_j(x_0)/\theta_0(x_0) \neq \theta_j(x_1)/\theta_0(x_1)$. Quand $\theta_j(x_1) = 0$, on pose

$$\theta(z) := \theta_0(x_0)\theta_0(z) - c\theta_0(x_1)\theta_j(z)\,,$$

où

$$c := \frac{\theta_0(x_0)^2}{\theta_0(x_1)\theta_j(x_0)}\,.$$

Alors on a $\theta \in \Theta$, $\theta(x_0) = 0$ et $\theta(x_1) \neq 0$.

Quand $\theta_j(x_1) \neq 0$, on pose

$$c := \frac{\theta_0(x_1)\theta_j(x_0)}{\theta_0(x_0)\theta_j(x_1)} \neq 1\,.$$

Définissons $\theta \in \Theta$ par

$$\theta(z) := \theta_0(x_1)\theta_j(z) - c\theta_j(x_1)\theta_0(z)\,.$$

Alors on a $\theta(x_0) = 0$ et $\theta(x_1) \neq 0$. □

Soit $\mathscr{H}$ une forme hermitienne sur $\mathbf{C}^n$ dont la partie imaginaire est à valeurs entières sur $\Gamma \times \Gamma$. Alors il existe un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. On notera $\Theta(\mathscr{H}) = \Theta(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$ l'espace vectoriel des fonctions thêta pour ρ. Soient $A = C^n/\Gamma$ une variété abélienne, et $\mathscr{H}$ une forme de Riemann non-dégénérée positive pour A. Il est bien connu que $\Theta(m\mathscr{H})$ détermine une application biunivoque et birégulière de A sur une sous-variété algébrique d'un espace projectif complexe pour tout $m \geq 3$. Soit $L = L_0 \otimes L_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur un groupe toroidal X. Soil L_1 est donné par un facteur thêta de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. On dira que $\mathscr{H}$ est la forme hermitienne de L et $v = \mathscr{H}(e_1, e_1)$ est la valeur de $\mathscr{H}_\Gamma$ (ou la valeur de $\mathscr{H}$ sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$).

THÉORÈME 7.2. *Soient* $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ *un groupe toroidal de* rang $\Gamma = n + 1$, *et* $L = L_0 \otimes L_1$ *un espace fibré holomorphe en droites sur* X. *Soit* $\mathscr{H}$ *la forme hermitienne de* L. *Si la valeur de* $\mathscr{H}_\Gamma$ *est positive, alors on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) = \infty\,.$$

Démonstration. On pose $c_0 := \mathscr{H}(e_1, e_1) > 0$. D'après la proposition 4.1 il existe un facteur thêta $\tilde{\rho}_1$ de type $(\tilde{\mathscr{H}}_1, \tilde{\psi}_1)$ tel que $\tilde{\mathscr{H}}_1(e_1, e_1) = a_1 < c_0$. D'après le théorème 6.1, il existe une fonction thêta θ_1 telle que $\tilde{\rho}_1$ est déterminé par le diviseur $\operatorname{div}(\theta_1)$. Soit $\pi: \mathbf{C}^n \to X$ la projection canonique. Soit Y_1 une composante connexe de $\pi(\{\theta_1 = 0\})$. Alors Y_1 est un ensemble analytique de X de codimension 1. On notera $[Y_1]$ l'espace fibré holomorphe en droites sur X donné par le diviseur Y_1. Soit $\mathscr{H}_1$ la forme hermitienne de $[Y_1]$. Alors la valeur de $(\mathscr{H}_1)_\Gamma$ est inférieure ou égale à a_1.

LEMME 7.3. *Soient $L' = L'_0 \otimes L'_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur X, et $\mathscr{H}'$ la forme hermitienne de L'. Supposons que la valeur c' de $\mathscr{H}'_\Gamma$ est supérieure à a_1. Alors on a*

$$H^p(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L'|_{Y_1})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1,$$

et le morphisme de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}(L')) \longrightarrow H^0(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L'|_{Y_1}))$$

est surjectif.

Démonstration du lemme 7.3. Par une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(L' \otimes [Y_1]^{-1}) \longrightarrow \mathcal{O}(L') \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1}(L'|_{Y_1}) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante

$$\begin{aligned} \text{(7.1)} \qquad \cdots \longrightarrow H^p(X, \mathcal{O}(L')) &\longrightarrow H^p(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L'|_{Y_1})) \\ &\longrightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{O}(L' \otimes [Y_1]^{-1})) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Comme $c' - a_1 > 0$, l'espace fibré holomorphe en droites $L' \otimes [Y_1]^{-1}$ est positif sur X. Par le théorème d'annulation pour les espaces fibrés holomorphes en droites positifs sur une variété faiblemen 1-complète ([9] et [15]) on a

$$H^p(X, \mathcal{O}(L' \otimes [Y_1]^{-1})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1.$$

Par la même raison on obtient

$$H^p(X, \mathcal{O}(L')) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1.$$

D'après (7.1) on a la première assertion du lemme pour $p \geq 1$. Pour $p = 0$, on obtient la deuxième. □

Revenons à la démonstration du théorème 7.2. En appliquant le lemme 7.3, on obtient que le morphisme de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow H^0(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L|_{Y_1}))$$

est surjectif. Prenons $a_2 > 0$ tel que $c_0 > a_1 + a_2$. D'après la proposition 4.1 il existe $\mathscr{H}_2 \in \mathscr{F}$ telle que la valeur de $(\mathscr{H}_2)_\Gamma$ est inférieure à $a_2/3$. On peut supposer que $\mathscr{H}_2$ est définie positive sur $\mathbf{C}^n$. Il existe un sous-groupe discret $\tilde{\Gamma}$ de rang $2n$ tel que Γ est un sous-groupe de $\tilde{\Gamma}$, $A := \mathbf{C}^n/\tilde{\Gamma}$ est une variété abélienne et $\mathscr{H}_2$ est une forme de Riemann non-dégénérée pour A. L'espace vectoriel $\Theta_2 = \Theta(3\mathscr{H}_2)$ des fonctions thêta détermine une application biunivoque et birégulière de A sur une sous-variété algébrique d'un espace projectif complexe. En utilisant le lemme 7.1 on obtient la fonction thêta $\theta_2 \in \Theta_2$ telle que $Y_2 = \pi(\{\theta_2 = 0\})$ est un ensemble analytique de X de codimension 1 et $W_2 := Y_1 \cap Y_2$ est un ensemble analytique de Y_1 de codimension 1. Il est clair que la valeur de la forme hermitienne de $[Y_2]$ sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$ est inférieure à a_2. On obtient la suite exacte

$$\begin{aligned}(7.2)\qquad \cdots \longrightarrow H^p(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L|_{Y_1})) &\longrightarrow H^p(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(L|_{W_2})) \\ &\longrightarrow H^{p+1}(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L\otimes[Y_2]^{-1}|_{Y_1})) \longrightarrow \cdots,\end{aligned}$$

par une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1}(L\otimes[Y_2]^{-1}|_{Y_1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1}(L|_{Y_1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2}(L|_{W_2}) \longrightarrow 0\,.$$

En utilisant le lemme 7.3, on a d'aprés (7.2)

$$H^p(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(L|_{W_2})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1\,,$$

et le morphisme de restriction

$$H^0(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(L|_{Y_1})) \longrightarrow H^0(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(L|_{W_2}))$$

est surjectif. Définissons $Z_1 := Y_1$. Soit Z_2 une composante connexe de W_2. Alors on obtient

$$H^p(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2}(L|_{Z_2})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1\,,$$

et le morphisme de restriction

$$H^0(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}(L|_{Z_1})) \longrightarrow H^0(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2}(L|_{Z_2}))$$

est surjectif.

Par des raisonnements analogues aux précédents, on obtient le lemme suivant.

LEMME 7.4. *Soit $L' = L'_0 \otimes L'_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur X. Supposons que la valeur c' de la forme hermitienne de L' sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$*

satisfait à $c' > a_1 + a_2$. *Alors on a*

$$H^p(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2}(L'|_{Z_2})) = 0 \qquad \textit{pour } p \geq 1,$$

et le morphisme de restriction

$$H^0(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}(L'|_{Z_1})) \longrightarrow H^0(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2}(L'|_{Z_2}))$$

est surjectif.

Supposons qu'il existe les ensembles analytiques $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ de X de codimension 1 et les nombres positifs $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ayant les propriétés suivantes;

a) $c_0 > a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

b) $[Y_j]$ est un espace fibré thêta positif dont la valeur de la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$ est inférieure à a_j.

c) $Z_1 := Y_1$ est connexe. Z_2 est une composante connexe de l'ensemble analytique $Z_1 \cap Y_2$ de Z_1 de codimension 1 telle que $Z_2 \cap Y_3$ est un ensemble analytique de Z_2 de codimension 1. En général Z_j est une composante connexe de l'ensemble analytique $Z_{j-1} \cap Y_j$ de Z_{j-1} de codimension 1 pour $j = 2, \cdots, k$.

d) Le morphisme de restriction

$$H^0(Z_j, \mathcal{O}_{Z_j}(L|_{Z_j})) \longrightarrow H^0(Z_{j+1}, \mathcal{O}_{Z_{j+1}}(L|_{Z_{j+1}}))$$

est surjectif pour $j = 0, \cdots, k-1$, où $Z_0 = X$, en conséquence le morphisme de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow H^0(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k}))$$

est surjectif.

e) Pour un espace fibré holomorphe en droites $L' = L'_0 \otimes L'_1$ dont la valeur c' de la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$ satisfait à $c' > a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, on a

$$H^p(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L'|_{Z_k})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1.$$

Supposons $\dim Z_k \geq 2$. On peut trouver $a_{k+1} > 0$ tel que $c_0 > a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}$. D'après la proposition 4.1 et le lemme 7.1, il existe un ensemble anayltique Y_{k+1} de X de codimension 1 tel que $[Y_{k+1}]$ est un espace fibré thêta positif dont la valeur de la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$ est inférieure à a_{k+1}, et $Z_k \cap Y_{k+1}$ est un ensemble analytique de Z_k de codimension 1. En posant $W_{k+1} := Z_k \cap Y_{k+1}$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Z_k}(L\otimes[Y_{k+1}]^{-1}|_{Z_k}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k}) \longrightarrow \mathcal{O}_{W_{k+1}}(L|_{W_{k+1}}) \longrightarrow 0\,.$$

Donc on a la suite exacte suivante

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H^p(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k})) \longrightarrow H^p(W_{k+1}, \mathcal{O}_{W_{k+1}}(L|_{W_{k+1}}))\\ \longrightarrow H^{p+1}(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L\otimes[Y_{k+1}]^{-1}|_{Z_k})) \longrightarrow \cdots.\end{aligned}$$

Soit c_k la valeur de la forme hermitienne de $L\otimes[Y_{k+1}]^{-1}$ sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$. Alors on a

$$c_k > c_0 - a_{k+1} > a_1 + \cdots + a_k\,.$$

D'après la propriété e) on obtient

$$H^p(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L\otimes[Y_{k+1}]^{-1}|_{Z_k})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1\,,$$

$$H^p(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1\,.$$

Il en résulte que le morphisme de restriction

$$H^0(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k})) \longrightarrow H^0(W_{k+1}, \mathcal{O}_{W_{k+1}}(L|_{W_{k+1}}))$$

est surjectif. Par des raisonnements analogues aux précédents, on obtient l'assertion suivante:

Soit $L' = L'_0\otimes L'_1$ un espace fibré holomorphe en droites sur X dont la valeur c' de la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^1_\Gamma$ satisfait à $c' > a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}$. Alors on a

$$H^p(W_{k+1}, \mathcal{O}_{W_{k+1}}(L'|_{W_{k+1}})) = 0 \qquad \text{pour } p \geq 1\,.$$

Soit Z_{k+1} une composante connexe de $W_{k+1} = Z_k \cap Y_{k+1}$. Les propriétés a), b), c), d) et e) sont vraies pour $k+1$. Continuous ce procédé jusqu'à $\dim Z_k = 1$. Alors on a le morphisme de restriction surjectif

$$H^0(X, \mathcal{O}(L) \longrightarrow H^0(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k}))\,.$$

Comme X est non singulier au sens de Morimoto [14], il ne continent pas d'ensemble analytique compact de dimension positive ([14]). Alors Z_k est un espace de Stein, par suite on a

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(L|_{Z_k})) = \infty\,.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

§ 8. Le cas semi-défini positif

On suppose dans ce paragraphe qu'un espace fibré holomorphe en droites $L = L_0 \otimes L_1$ sur un groupe toroidal $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ a les propriétés de (3.3) et du théorème 3.4. Considérons le cas suivant:

La forme hermitienne $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive, mais n'est ni nulle ni définie positive.

Pour $\mathscr{A} := \operatorname{Im} \mathscr{H}$ on pose $\mathscr{A}_\Gamma := \mathscr{A}|_{\mathbf{R}_\Gamma^{n+m} \times \mathbf{R}_\Gamma^{n+m}}$, et

$$\text{(8.1)} \qquad \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_\Gamma) := \{x \in \mathbf{R}_\Gamma^{n+m};\ \mathscr{A}_\Gamma(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbf{R}_\Gamma^{n+m}\}.$$

On considère la condition d'inclusion (In): $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_\Gamma) \supset \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$. La condition (In) est équivalente à

$$\text{(8.2)} \qquad \mathscr{A}(z, \mathbf{R}_\Gamma^{n+m}) = \{0\} \qquad \text{pour tout } z \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma).$$

On dira qu'une forme hermitienne $\tilde{\mathscr{H}}$ est une extension de $\mathscr{H}$ si $\operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}|_{\mathbf{R}_\Gamma^{n+m} \times \mathbf{R}_\Gamma^{n+m}} = \operatorname{Im} \mathscr{H}|_{\mathbf{R}_\Gamma^{n+m} \times \mathbf{R}_\Gamma^{n+m}}$.

PROPOSITION 8.1. *Soit $\mathscr{H}$ une forme hermitienne satisfaisant à* (8.1). *Alors, $\mathscr{H}$ a une extension $\tilde{\mathscr{H}}$ semi-définie positive sur $\mathbf{C}^n$ si et seulement si la condition* (In) *est satisfaite.*

Démonstration. D'abord on suppose que la condition (In) est satisfaite. Il existe un sous-espace linéaire réel V de $\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}$ tel que

$$\mathbf{R}_\Gamma^{n+m} = \mathbf{C}_\Gamma^m \oplus V \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^n = \mathbf{C}_\Gamma^m \oplus V \oplus \sqrt{-1}\, V.$$

On pose $K := \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ et $\dim_{\mathbf{C}} K = k$. On peut écrire $\mathbf{C}_\Gamma^m = \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^{m-k}$, où $\mathbf{C}^k$ est identifié à K. Comme $\mathscr{H}|_{\mathbf{C}^{m-k} \times \mathbf{C}^{m-k}}$ est définie positive, il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\mathscr{H}(w', w') = \mathscr{A}(w', \sqrt{-1}\, w') \geq a \| w' \|^2$$

pour tout $w' \in \mathbf{C}^{m-k}$. Il existe de même une constante $c > 0$ telle que

$$|\mathscr{A}(x, \sqrt{-1}\, y)| \leq c \|x\| \|y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbf{C}^n$. Soit T: $V \times V \to \mathbf{R}$ une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire symétrique définie positive telle que

$$T(v, v) \geq b \|v\|^2$$

pour tout $v \in V$, où b est une constante positive. En utilisant $\mathscr{A} := \operatorname{Im} \mathscr{H}$ et T, on définit une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée $\tilde{\mathscr{A}}$: $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to R$ par

$$\text{(8.3)} \qquad \begin{cases} \tilde{\mathscr{A}}(v, \sqrt{-1}\, v') := T(v, v') & \text{pour tous } v, v' \in V \\ \tilde{\mathscr{A}}(\sqrt{-1}\, v', v) := -T(v', v) & \text{pour tous } v, v' \in V \\ \tilde{\mathscr{A}} := \mathscr{A} & \text{dans tous les autres cas}. \end{cases}$$

Alors $\tilde{\mathscr{A}}$ satisfait aux

$$(8.4)\qquad \begin{cases}\tilde{\mathscr{A}}(x, \sqrt{-1}\,y) = -\tilde{\mathscr{A}}(\sqrt{-1}\,x, y)\\ \tilde{\mathscr{A}}(\sqrt{-1}\,x, \sqrt{-1}\,y) = \tilde{\mathscr{A}}(x, y)\end{cases}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{C}^n$. Par suite il existe une forme hermitienne $\tilde{\mathscr{H}}: \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ telle que $\tilde{\mathscr{A}} = \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}$, c est-à-dire

$$\tilde{\mathscr{H}}(x, y) = \tilde{\mathscr{A}}(x, \sqrt{-1}\,y) + \sqrt{-1}\,\tilde{\mathscr{A}}(x, y)$$

pour tous $x, y \in \mathbf{C}^n$. Comme

$$\operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}|_{\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}\times\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}} = \tilde{\mathscr{A}}|_{\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}\times\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}} = \mathscr{A}|_{\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}\times\mathbf{R}_\Gamma^{n+m}},$$

$\tilde{\mathscr{H}}$ est une extension de $\mathscr{H}$.

Il suffit de prouver pour $b > 0$ assez grand que $\tilde{\mathscr{H}}$ est semi-défine positive sur $\mathbf{C}^n$. Chaque élément de $\mathbf{C}^n$ a l'expression unique $w + w' + u + \sqrt{-1}\,v$, où $w \in \mathbf{C}^k$, $w' \in \mathbf{C}^{m-k}$ et $u, v \in V$. Puisque $w \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ et $w, w' \in \mathbf{C}_\Gamma^m$, on a

$$(8.5)\qquad \tilde{\mathscr{H}}(w, w) = \tilde{\mathscr{H}}(w, w') = \tilde{\mathscr{H}}(w', w) = 0\,.$$

De même, on a

$$\tilde{\mathscr{H}}(w, u) + \tilde{\mathscr{H}}(u, w) = -2\mathscr{A}(\sqrt{-1}\,w, u)\,.$$

Comme $\sqrt{-1}\,w \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$, on a $\mathscr{A}(\sqrt{-1}\,w, u) = 0$ par la condition (In). On en déduit

$$(8.6)\qquad \tilde{\mathscr{H}}(w, u) + \tilde{\mathscr{H}}(u, w) = 0\,.$$

Pour la même raison que ci-dessus on a

$$(8.7)\qquad \tilde{\mathscr{H}}(w, \sqrt{-1}\,v) + \tilde{\mathscr{H}}(\sqrt{-1}\,v, w) = -2\mathscr{A}(w, u) = 0\,.$$

On a évidemment

$$(8.8)\qquad \tilde{\mathscr{H}}(w', w') = \mathscr{H}(w', w') \geq a\|w'\|^2\,.$$

Comme

$$\tilde{\mathscr{H}}(w', u) + \tilde{\mathscr{H}}(u, w') = 2\operatorname{Re}\tilde{\mathscr{H}}(w', u)$$

et

$$|\operatorname{Re}\tilde{\mathscr{H}}(w', u)| = |\tilde{\mathscr{A}}(w', \sqrt{-1}\,u)| \leq c\|w'\|\,\|u\|\,,$$

on a

$$(8.9)\qquad |\mathscr{H}(w', u) + \mathscr{H}(u, w')| \leq 2c\|w'\|\|u\|.$$

De la même manière on a

$$(8.10)\qquad |\mathscr{H}(w', \sqrt{-1}\,v) + \mathscr{H}(\sqrt{-1}\,v, w')| \leq 2c\|w'\|\|v\|$$

et

$$(8.11)\qquad |\mathscr{H}(u, \sqrt{-1}\,v) + \mathscr{H}(\sqrt{-1}\,v, u)| \leq 2c\|u\|\|v\|.$$

D'après la définition de $\mathscr{H}$ on a

$$(8.12)\qquad \begin{aligned}\mathscr{H}(u, u) &= \mathscr{A}(u, \sqrt{-1}\,u)\\ &= T(u, u)\\ &= b\|u\|^2\end{aligned}$$

et

$$(8.13)\qquad \begin{aligned}\mathscr{H}(\sqrt{-1}\,v, \sqrt{-1}\,v) &= T(v, v)\\ &\geq b\|v\|^2.\end{aligned}$$

On en déduit par (8.5), $\cdots$, (8.13)

$$(8.14)\qquad \begin{aligned}&\mathscr{H}(w + w' + u + \sqrt{-1}\,v, w + w' + u + \sqrt{-1}\,v)\\ &\geq a\|w'\|^2 - 2c\|w'\|\|u\| - 2c\|w'\|\|v\| + b^2\|u\|^2 - 2c\|u\|\|v\| + b\|v\|^2\\ &= \left(\frac{a}{2}\|w'\|^2 - 2c\|w'\|\|u\| + \frac{b}{2}\|u\|^2\right)\\ &\quad + \left(\frac{a}{2}\|w'\|^2 - 2c\|w'\|\|v\| + \frac{b}{2}\|v\|^2\right)\\ &\quad + \left(\frac{b}{2}\|u\|^2 - 2c\|u\|\|v\| + \frac{b}{2}\|v\|^2\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que le second membre de (8.14) est positif pour $b > 0$ assez grand. De plus, en posant

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{H}) := \{x \in \mathbf{C}^n;\ \mathscr{H}(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbf{C}^n\}$$

et

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{A}) := \{x \in \mathbf{C}^n;\ \mathscr{A}(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbf{C}^n\},$$

on a

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{H}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{A}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma).$$

Nous démontrons la nécessité. On suppose que la condition (In) n'est pas satisfaite. Alors il existe $z_0 \in \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ tel que $z_0 \notin \mathrm{Ker}(\mathscr{A}_\Gamma)$.

Nous choisissons $x_0 \in \mathbf{R}_\Gamma^{n+m}$ tel que $\mathscr{A}(x_0, z_0) < 0$. On peut supposer que $x_0 \in V$. Soit $\tilde{\mathscr{H}}$ une extension quelconque de $\mathscr{H}$, et soit $\tilde{\mathscr{A}} := \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}$. Pour une base réelle $v_1, \cdots, v_{n+m}$ de V, on pose

$$a_{ij} := \tilde{\mathscr{A}}(v_1, v_j).$$

Alors (a_{ij}) est une matrice réelle symétrique. On pose $y := \sqrt{-1}\, x_0 + \lambda z_0$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. On a d'abord

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{H}}(y, y) &= \tilde{\mathscr{A}}(\sqrt{-1}\, x_0 + \lambda z_0, -x_0 + \lambda\sqrt{-1}\, z_0) \\ &= \tilde{\mathscr{A}}(\sqrt{-1}\, x_0, -x_0) + \tilde{\mathscr{A}}(\sqrt{-1}\, x_0, \lambda\sqrt{-1}\, z_0) + \tilde{\mathscr{A}}(\lambda z_0, -x_0) \\ &\quad + \tilde{\mathscr{A}}(\lambda z_0, \lambda\sqrt{-1}\, z_0).\end{aligned}$$

Comme $z_0 \in \operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$, on a $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda z_0, \lambda\sqrt{-1}\, z_0) = 0$. On en déduit

$$\tilde{\mathscr{H}}(y, y) = \tilde{\mathscr{A}}(x_0, \sqrt{-1}\, x_0) + 2\lambda\mathscr{A}(x_0, z_0). \tag{8.15}$$

Pour une matrice réelle symétrique (a_{ij}) arbitraire, on peut trouver $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que le second membre de (8.15) est négatif. □

THÉORÈME 8.2. *Soit $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal non-compact, et soit L un espace fibré thêta sur X donné par un facteur thêta ρ de type $(\mathscr{H}, \psi, \mathscr{Q}, \mathscr{L})$. Si $\mathscr{H}$ satisfait la condition* (In), *alors on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) = -\infty.$$

Démonstration. On peut supposer que ρ est réduit. D'après la proposition 8.1 $\mathscr{H}$ a une extension $\tilde{\mathscr{H}}$ semi-définie positive sur $\mathbf{C}^n$. De plus, pour $N \in \mathbf{N}$ quelconque, il existe une extension $\tilde{\mathscr{H}}_N$ semi-définie positive de $\mathscr{H}$ telle qu'il y a un groupe discret $\tilde{\Gamma}_N$ de rang $2n$ contenant Γ avec $\operatorname{Pf}(\tilde{\mathscr{A}}_N, \tilde{\Gamma}_N) > N$, où on pose $\tilde{\mathscr{A}}_N := \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}_N$. Soit $\tilde{\rho}_N$ l'extension de ρ à $\tilde{\Gamma}_N \times \mathbf{C}^n$. Considérons le revêtement $\tau\colon X \to A_N := \mathbf{C}^n/\tilde{\Gamma}_N$. Soit $\tilde{L}_N$ l'espace fibré thêta sur A_N donné par $\tilde{\rho}_N$. Alors il est clair que $\tau^*\tilde{L}_N = L$. Comme

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(A_N, \mathscr{O}(\tilde{L}_N)) = \operatorname{Pf}(\tilde{\mathscr{A}}_N, \tilde{\Gamma}_N) > N,$$

on a

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathscr{O}(L)) > N.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

On donnera un contr'exemple à la conjecture 3.2.

EXEMPLE 8.3. Soit Γ un sous-groupe discret de rang 5 de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice de période P est donnée par

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \sqrt{-2} & \sqrt{-3} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{-3} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

P est de la forme (1.3), et satisfait à (1.4). Alors $X=\mathbf{C}^3/\Gamma$ est un groupe toroidal non-compact. On pose $\mathbf{C}^3=\mathbf{C}^2_\Gamma\times\mathbf{C}$. Soit e_1, e_2, e_3 la base complexe naturelle de $\mathbf{C}^3$, où e_1, e_2 est celle de $\mathbf{C}^2_\Gamma$. Il est clair que e_1, e_2, $\sqrt{-1}e_1$, $\sqrt{-1}e_2$, e_3 est une base réelle de $\mathbf{R}^5_\Gamma$.

Définissons une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée $\mathscr{A}$ sur $\mathbf{C}^3$ par

$$\mathscr{A}(e_1, x):=\begin{cases} 1 & \text{si } x=e_3 \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$
$$\mathscr{A}(e_2, x):=\begin{cases} \sqrt{3} & \text{si } x=\sqrt{-1}e_2 \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$
$$\mathscr{A}(e_3, x):=\begin{cases} -1 & \text{si } x=e_1 \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$
$$\mathscr{A}(\sqrt{-1}e_1, x):=0 \quad \text{pour tout } x,$$
$$\mathscr{A}(\sqrt{-1}e_2, x):=\begin{cases} -\sqrt{3} & \text{si } x=e_2 \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$
$$\mathscr{A}(\sqrt{-1}e_3, x):=0 \quad \text{pour tout } x,$$

où $x\in\{e_1, e_2, e_3, \sqrt{-1}e_1, \sqrt{-1}e_2, \sqrt{-1}e_3\}$. On peut voir facilement qu'il existe une forme hermitienne $\mathscr{H}$ telle que $\mathscr{A}=\operatorname{Im}\mathscr{H}$. Et $\mathscr{A}$ est à valeurs entières sur $\Gamma\times\Gamma$. Soit $\mathscr{B}$ une forme satellite de $\mathscr{A}$ sur $\Gamma\times\Gamma$. On pose

$$\psi(\gamma):=e\left(\frac{1}{2}\mathscr{B}(\gamma,\gamma)\right)$$

pour tout $\gamma\in\Gamma$. On pose alors

$$\rho(\gamma, x):=\psi(\gamma)e\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathscr{H}(\gamma, x)+\frac{1}{4\sqrt{-1}}\mathscr{H}(\gamma,\gamma)\right) \tag{8.16}$$

pour tous $\gamma\in\Gamma$ et $x\in\mathbf{C}^3$. Alors ρ est un facteur thêta réduit de type $(\mathscr{H}, \psi)$. Soit L l'espace fibré thêta sur X donné par ρ. On écrit $z=(z_1, z_2)\in\mathbf{C}^2_\Gamma$. La forme hermitienne $\mathscr{H}_\Gamma$ est semi-définie positive, mais n'est ni nulle ni définie positive. Il est clair que $\operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$ est le z_1-plan. Et $\mathscr{H}$ satisfait la condition du théorème 3.4, c'est-à-dire, $\psi(\gamma)=1$ pour tout $\gamma\in\Gamma\cap\operatorname{Ker}(\mathscr{H}_\Gamma)$.

Ensuite on définit une autre forme R-bilinéaire alternée $\mathscr{A}_1\colon \mathbf{C}^3\times\mathbf{C}^3\to\mathbf{R}$ par

$$\begin{cases}\mathscr{A}_1(e_1,e_3)=-\mathscr{A}_1(e_3,e_1):=1\,,\\ \mathscr{A}_1(\sqrt{-1}\,e_1,\sqrt{-1}\,e_3):=\mathscr{A}_1(e_1,e_3)\,,\\ \mathscr{A}_1(x,y):=0 \qquad \text{si } \{x,y\}\neq\{e_1,e_3\},\ \{\sqrt{-1}\,e_1,\sqrt{-1}\,e_3\}\,.\end{cases}$$

Soit $\mathscr{H}_1$ la forme hermitienne telle que $\mathscr{A}_1=\operatorname{Im}\mathscr{H}_1$. Comme pour ρ, on peut construire un facteur thêta réduit ρ_1 de type $(\mathscr{H}_1,\psi_1)$. On pose

$$\tilde\rho:=\rho\cdot\rho_1^{-1}\,.$$

Alors $\tilde\rho$ est un facteur thêta réduit de type $(\tilde{\mathscr{H}},\tilde\psi)$, où

$$\tilde{\mathscr{H}}:=\mathscr{H}-\mathscr{H}_1 \qquad \text{et } \tilde\psi:=\psi\cdot\psi_1^{-1}\,.$$

On pose $\tilde{\mathscr{A}}:=\operatorname{Im}\tilde{\mathscr{H}}$. Comme $\tilde{\mathscr{A}}=\mathscr{A}-\mathscr{A}_1$, on a

$$\tilde{\mathscr{A}}(e_2,\sqrt{-1}\,e_2)=\mathscr{A}(e_2,\sqrt{-1}\,e_2)=\sqrt{3}$$

et

$$\tilde{\mathscr{A}}(x,y)=0$$

pour $x,y\in\{e_1,e_3,\sqrt{-1}\,e_1,\sqrt{-1}\,e_3\}$.

Considérons la projection $\mathbf{C}^3\to\mathbf{C}$, $(z_1,z_2,w)\mapsto z_2$. On obtient l'espace fibré holomorphe $\sigma\colon X\to T^1$ sur un tore complexe de dimension 1, dont les fibres sont $\tilde X=\mathbf{C}^2/\tilde\Gamma$, où $\tilde\Gamma$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{C}^2$ donné par la matrice de période

$$\tilde P=\begin{pmatrix}0 & 1 & \sqrt{-3}\\ 1 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

et $T^1=\mathbf{C}/\Gamma_1$ avec $\Gamma_1=\{k+l\sqrt{-3};\ k,l\in\mathbf{Z}\}$. Comme $\tilde{\mathscr{H}}$ dépend seulement de la variable z_2, il existe un facteur thêta ρ_0 pour Γ_1 sur $\mathbf{C}$ tel que $\tilde\rho=\rho_0\circ(\mathscr{L}\times\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}\colon\mathbf{C}^3\to\mathbf{C}$ est l'extension linéaire de σ. Il existe une fonction thêta θ_0 pour ρ_0 telle que le diviseur $\operatorname{div}(\theta_0)$ détermine ρ_0, car $\mathscr{H}(e_2,e_2)=\sqrt{3}$. On pose

$$A_0:=\{z_2\in\mathbf{C};\ \theta_0(z_2)=0\}\,.$$

Soient $\pi_0\colon\mathbf{C}\to T^1$ la projection, et $Y_0:=\pi_0(A_0)$. Il est clair que Y_0 est un ensemble fini dans T^1. Par suite on pose $Y_0=\{q_1,\cdots,q_N\}$, et $Y:=$

$\sigma^{-1}(Y_0)$. Alors Y est un ensemble analytique de codimension pure 1, et il détermine $\tilde{\rho}$. On a la décomposition d'union disjointe des composants connexes

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N} Y_i, \qquad Y_i := \sigma^{-1}(q_i).$$

Chaque Y_i est isomorphe à $\tilde{X} = \mathbf{C}^2/\tilde{\Gamma}$. Soit $\tilde{L}$ l'espace fibré thêta donné par $\tilde{\rho}$. Comme $\tilde{L} = [Y]$, on a la suit exacte

$$(8.17) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(L \otimes \tilde{L}^{-1}) \longrightarrow \mathcal{O}(L) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(L|_Y) \longrightarrow 0.$$

D'après (8.17) on a alors la suite exacte

$$(8.18) \quad 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}(L \otimes \tilde{L}^{-1})) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(L|_Y)) \longrightarrow \cdots.$$

Le facteur thêta qui donne $L \otimes \tilde{L}^{-1}$ est $\rho \cdot \tilde{\rho}^{-1} = \rho \cdot \rho_1 \cdot \tilde{\rho}^{-1} = \rho_1$. Comme $(\mathscr{H}_1)_\Gamma = 0$, on a $\tilde{c}_\Gamma(L \otimes \tilde{L}^{-1}) = 0$. Mais on peut démontrer le lemma suivant.

LEMME 8.4. *$L \otimes \tilde{L}^{-1}$ n'est pas topologiquement trivial.*

Démonstration. On peut supposer que

$$\psi_1(\gamma) = e\left(\frac{1}{2}\mathscr{B}_1(\gamma, \gamma)\right),$$

où $\mathscr{B}_1$ est une forme satellite de $\mathscr{A}_1$ sur $\Gamma \times \Gamma$. On pose

$$a_1(\gamma, x) := \pi\sqrt{-1}\,\mathscr{B}_1(\gamma, \gamma) + \pi\mathscr{H}_1(\gamma, x) + \frac{1}{2}\pi\mathscr{H}_1(\gamma, \gamma)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \mathbf{C}^3$. Alors on a $\rho_1(\gamma, x) = \exp(a_1(\gamma, x))$. Par [17] (Proposition 5), $L \otimes \tilde{L}^{-1}$ est topologiquement trivial si et seulement si

$$(8.19) \qquad a_1(\gamma, x + \gamma') + a_1(\gamma', x) = a_1(\gamma', x + \gamma) + a(\gamma, x)$$

pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $x \in \mathbf{C}^3$. Posons $\gamma = (0, 0, 1) = p_1$ et $\gamma' = (1, 0, \sqrt{2}) = p_2$. Alors un calcul simple donne

$$\begin{aligned} &\{a_1(\gamma, x + \gamma') + a_1(\gamma', x)\} - \{a_1(\gamma', x + \gamma) + a_1(\gamma, x)\} \\ &\quad = \pi\mathscr{H}_1(p_1, p_2) - \pi\mathscr{H}_1(p_2, p_1) \\ &\quad = -2\pi\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Donc l'égalité (8.19) n'est pas satisfaite.

D'après le lemme 8.4 ci-dessus et le corollaire dans [1], on conclut

$$H^0(X, \mathcal{O}(L \otimes \tilde{L}^{-1})) = \{0\}.$$

$\tilde{X} = \mathbf{C}^2/\tilde{\Gamma}$ est aussi un groupe toroidal, car (1.4) est satisfaite. Dans ce cas, $\mathbf{C}^1_{\tilde{\Gamma}}$ est le z_1-plan, et $\tilde{c}_{\tilde{\Gamma}}(L|_{\tilde{X}}) = 0$. Par la même démonstration du lemme 8.4 on obtient le lemme suivant.

LEMME 8.5. *$L|_{\tilde{X}}$ n'est pas topologiquement trivial.*

Par suite on a

$$H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L|_{\tilde{X}})) = \{0\}.$$

On en déduit par (8.18)

$$H^0(X, \mathcal{O}(L)) = \{0\}.$$

THÉORÈM 8.6. *Soit $X = \mathbf{C}^3/\Gamma$ le groupe toroidal dans l'exemple* 8.3. *Soit ρ le facteur thêta pour Γ donné par* (8.16), *et soit L l'espace fibré thêta sur X donné par ρ. Alors, L satisfait aux conditions du théorème* 3.4 *et de la conjecture* 3.2, *mais on a*

$$H^0(X, \mathcal{O}(L)) = \{0\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abe, Y., Holomorphic sections of line bundles over (H, C)-groups, Manuscripta Math., **60** (1988), 379–385.

[2] ——, On toroidal groups, J. Math. Soc. Japan, **41** (1989), 699–708.

[3] ——, Homomorphisms of toroidal groups, Math. Rep. Toyama Univ., **12** (1989), 65–112.

[4] Cousin, P., Sur les fonctions périodiques, Ann. Sci. École Norm. Sup., **19** (1902), 9–61.

[5] ——, Sur les fonctions triplement périodiques de deux variables, Acta Math., **33** (1910), 105–232.

[6] Gherardelli, F. and Andreotti, A., Some remarks on quasi-abelian manifolds, Global analysis and its applications, Vol. II. Intern. Atomic Energy Agency, Vienna, 1974, 203–206.

[7] Huckleberry, A. T. and Margulis, G. A., Invariant analytic hypersurfaces, Invent. Math., **71** (1983), 235–240.

[8] Kazama, H., On pseudo-convexity of complex abelian Lie groups, J. Math. Soc. Japan, **25** (1973), 329–333.

[9] ——, Approximation theorem and application to Nakano's vanishing theorem for weakly 1-complete manifolds, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A., **27** (1973), 221–240.

[10] ——, $\bar{\partial}$ Cohomology of (H, C)-groups. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **20** (1984), 297–317.

[11] Kodaira, K., On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties), Ann. of Math., **60** (1954), 28–48.

[12] Kopfermann, K., Maximale Untergruppen abelscher komplexer Liescher Gruppen. Schr. Math. Inst. Univ. Münster, **29** (1964).

[13] Morimoto, A., Non-compact complex Lie groups without non-constant holomorphic functions, Proc. of Conf. on Complex Analysis (Minneapolis 1964), Springer-Verlag, 1965, 256–272.
[14] ——, On the classification of noncompact abelian Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), 200–228.
[15] Nakano, S., Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, II. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **10** (1974), 101–110.
[16] Pothering, G., Meromorphic function fields of non-compact $\mathbf{C}^n/\Gamma$, Thesis, Univ. of Notre Dame, 1977.
[17] Vogt, Ch., Line bundles on toroidal groups, J. Reine Angew. Math., **335** (1982), 197–215.
[18] ——, Two remarks concerning toroidal groups, Manuscripta Math., **41** (1983), 217–232.

Département de Mathématiques
Université de Toyama
Gofuku, Toyama 930
Japon