Commun. Math. Phys. 105, 327–335 (1986)

Communications in
**Mathematical
Physics**

L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques

Yves Colin de Verdiere

Laboratoire de Mathématiques, Institut Fourier, Université de Grenoble 1,
B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Heres Cedex, France

Abstract. Nous prouvons une formule pour le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda)$ de dénombrement des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique qui tend vers l'infini à l'infini de $\mathbb{R}^d$. La preuve utilise un résultat précis sur l'estimation des valeurs propres pour un champ magnétique constant dans un cube de $\mathbb{R}^d$.

Introduction

Le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $H=-\Delta+V$ lorsque $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x)=+\infty$ dans $\mathbb{R}^d$ a été beaucoup étudié (voir par exemple [R–S], théorème XIII.81). L'analogue pour les champs magnétiques est moins connu. Les articles [A–H–S], puis [D], [I] mettent en évidence des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sous lesquelles l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique $B(x)$ sur $\mathbb{R}^d$ est à résolvante compacte.

L'asymptotique de ce spectre est le but du présent article qui reprend et améliore des résultats partiels [CV 3, CV 4]. Dans le cas $d=3$, des résultats voisins ont été trouvés récemment par Tamura [T] de façon indépendante et par une méthode différente. La méthode utilisée ici est apparentée à la méthode de Weyl [C–H, R–S]: découpage en cubes et estimations pour les champs constants dans les cubes: c'est ces dernières estimations qui nous semblent être la partie la plus originale de notre article: elles peuvent également être utilisées dans des asymptotiques $\hbar\to 0$ ou dans d'autres problèmes, par exemple de laplaciens complexes en vue desquelles Demailly [DY 1, DY 2] a montré des inégalités du même type. Je tiens à le remercier ici pour les discussions que nous avons eues récemment sur ces sujets.

1. Bouteilles magnétiques

Soit (X, g) une variété riemannienne (pas nécessairement complète), B une 2-forme réelle fermée sur X telle que la classe de cohomologie de $B/2\pi$ est entière. Il existe alors un fibré en droites complexes L au-dessus de X muni d'une structure hermitienne et d'une connexion hermitienne ∇ dont la courbure est iB. Localement, sur un ouvert U de X, $L=\mathbb{C}\times U \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} U$ et $|(z,x)|=|z|$. La connexion ∇ est donnée par $\nabla_X f = df(X) - i\alpha(X)f$ où α est une 1-forme réelle sur U telle que $d\alpha=B$. On introduit alors sur $C_0^\infty(X;L)$ la forme quadratique $q(f)=\int_X \|\nabla f\|^2 dx$ où la norme $\|\cdot\|$ est la norme d'application linéaire $\nabla f(x): T_xX \to L_x$. Si $(e_i(x))$ est un champ local de repères orthonormés, on a:

$$q(f)=\sum_{i=1}^d \int_X |\nabla_{e_i} f|^2 dx.$$

Cette forme quadratique est fermable sur $L^2(X;L)$ et on lui associe par le procédé de Friedrich's un opérateur autoadjoint H_B: l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique B.

Si $X=\mathbb{R}^d$ et $\alpha=\sum_{j=1}^d a_j dx_j$, on a:

$$H_B=\sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}-a_j\right)^2=\sum_{j=1}^d X_j^2 \quad \text{avec} \quad [X_j,X_k]=ib_{j,k},$$
$$B=\sum b_{j,k} dx_j \wedge dx_k.$$

Remarques. Si $\alpha_1=\alpha+df$ est une autre primitive de B, on obtient un opérateur H' unitairement équivalent à H; H_{-B} est antiunitairement équivalent à H_B.

On dit que (X,B) est une *bouteille magnétique* si les deux conditions suivantes sont réalisés:

(B_1) H_B est *essentiellement autoadjoint* avec comme domaine $C_0^\infty(X;L)$.

(B_2) H_B est à *résolvante compacte*.

On peut voir dans [A–H–S] des conditions suffisantes pour que $(\mathbb{R}^d, B)$ soit une bouteille magnétique et une étude de la nécessité de certaines de ces conditions dans [D, I]. A notre connaissance, le problème des bouteilles magnétiques dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ n'a pas été abordé.

2. Champs constants sur les tores

Soit le champ $B=\sum_{i=1}^r b_i dx_i \wedge dy_i$ ($\mathrm{b}_i>0$) sur le tore $X=\mathbb{R}^d/\Gamma$, où $d=2r+k$ et X est équipée de la métrique quotient de la métrique canonique de $\mathbb{R}^d$. La classe de cohomologie de $B/2\pi$ est entière lorsque, par exemple, $\Gamma=\bigoplus_{i=1}^r \varrho_i\mathbb{Z}^2 \oplus \Gamma_0$ (Γ_0 réseau de $\mathbb{R}^k$) et que $b_i\cdot\varrho_i^2\in 2\pi\mathbb{Z}$. Il se trouve que l'on peut alors calculer le spectre de H_B sur X, on obtient que le spectre de H_B est constitué des valeurs propres

$$\lambda=(2n_1+1)b_1+\ldots+(2n_r+1)b_r+\mu \quad \text{où} \quad n_1\geqq 0,\ldots,n_r\geqq 0$$

sont des entiers, et μ est une valeur propre du laplacien sur $\mathbb{R}^k/\Gamma_0$, la multiplicité de λ est égale à la multiplicité de μ augmentée de $\prod_{i=1}^r n_i$ avec $n_i=\dfrac{|b_i|\varrho_i^2}{2\pi}$.

Pour le prouver, il suffit de considérer le cas $d=2$. Le calcul du spectre résulte alors du lemme suivant utilisé classiquement pour calculer le spectre de l'oscillateur harmonique;

Lemme 2.1. *Soit A un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et $C=A^*A$, on suppose que $[A^*, A]=A^*A-AA^*=c\mathrm{Id}(c>0)$, alors le spectre de C est constitué des valeurs propres nc $(n\in\mathbb{N},\ n\geqq 1)$, les espaces propres $E_n=\mathrm{Ker}(C-nc)$ étant tous isomorphes: $E_1=\mathrm{Ker}\,A^*$, $E_n=A(E_{n-1})$ et $E_{n-1}=A^*(E_n)$.*

La preuve de ce lemme est élémentaire.

On applique le lemme à $A=\frac{1}{i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}+\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}$ et on a $H_B=C-B.\,\mathrm{Id}$, d'où le spectre de H_B. La multiplicité (constante) des espaces propres est alors déterminée par l'asymptotique de Weyl valable pour un opérateur elliptique autoadjoint quelconque opérant sur les sections d'un fibré vectoriel sur une variété compacte.

3. Champs constants dans un cube

Soit $B=\sum_{i,j} b_{ij}dx_i\wedge dx_j$ une 2-forme extérieure sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$; il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ où B s'exprime sous la forme:

$$B=\sum_{i=1}^{r} b_i dx_i\wedge dy_i \quad \text{avec} \quad b_1\geqq b_2\geqq\ldots\geqq b_r>0\,.$$

On désigne pour le champ constant B précédent par $v_B(\lambda)$ la fonction suivante:

$$v_B(\lambda)=C_{k,r}b_1\ldots b_r\sum_{n_i\geqq 0}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{r}(2n_i+1)b_i\right)_+^{k/2}$$

(continue à droite si $k=0$); $d=2r+k$ et $C_{k,r}=\gamma_k/(2\pi)^{k+r}$ avec $\gamma_k=$volume de la boule unité de $\mathbb{R}^k$.

Remarque 1. La mesure $dv_B(\lambda)$ dépend continuement de B même lorsque le rang r varie. Cela est encore plus clair sur la transformée de Laplace $Z_B(t)=\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}dv_B(\lambda)$:

$$Z_B(t)=(4\pi t)^{-d/2}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{tb_i}{\sinh tb_i}\right).$$

Remarque 2. $v_B(\lambda)$ s'interprète comme la densité d'état pour l'opérateur de Schrödinger avec champ constant B dans $\mathbb{R}^d$: si Ω est un «grand» ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $N_\Omega(\lambda)$ la fonction de dénombrement du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec le champ B et les conditions de Dirichlet au bord de Ω, on a:

$$N_\Omega(\lambda)\sim\int_\Omega v_B(\lambda)dx \quad (\Omega \text{ «grand»}).$$

Nous allons donner une version précise de cet équivalence dans le cas où Ω est un cube de $\mathbb{R}^d$.

On a le:

Theoreme 3.1. *On désigne par $N_{B,R}(\lambda)$ la fonction de dénombrement du spectre du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Schrödinger avec le champ constant $B=\sum_{i,j} b_{i,j}dx_i\wedge dx_j$ dans le cube $[0,R]^d$, il existe une constante C ne dépendant que de d telle que, pour tout A avec $0<A<R/2$, on ait:*

(1) $N_{B,R}(\lambda)\leqq R^d v_B(\lambda)$,
(2) $N_{B,R}(\lambda)\geqq (R-A)^d v_B(\lambda - C/A^2)$.

Preuve.

a) *Majoration.* Cette inégalité (1) utilise le calcul du Sect. 2 et la méthode due à Polya [P]. On commence par choisir un «grand» tore $\mathbb{R}^d/\Gamma$ vérifiant les conditions du Sect. 2 pour le champ B et dont le domaine fondamental est un certain pavé D_Γ. On considère alors le pavage de $\mathbb{R}^d$ par les cubes $(R\cdot\mathbb{Z})^d+[0,R]^d$ et on désigne par $(\Omega_i)_{i\in I}$ la famille de ceux de ces cubes inclus dans $\mathring{D}_\Gamma$: «grand» signifie que $\mathrm{vol}(\cup\Omega_i)\geqq(1-\varepsilon)\mathrm{vol}D_\Gamma$ (ε donné, il existe Γ, etc.). On utilise alors l'injection isométrique pour les normes L^2 et la forme quadratique q_B, donnée par:

$$j:\oplus H_0^1(\Omega_i)\hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^d/\Gamma, L),$$

$j(\oplus f_i)=\sum_i f_i$ (on choisit préalablement sur chaque Ω_i une trivialisation de L).
On en déduit, chaque Ω_i ayant le même spectre:

$$(\# I)\times N_{B,R}(\lambda)\leqq \prod_{i=1}^{r}[(b_i\varrho_i^2)/2\pi]\,\#\{((n_i),\mu)\,|\,\sum(2n_i+1)b_i+\mu\leqq\lambda\}.$$

Soit, en désignant par $N_0(\lambda)$ la fonction de dénombrement du spectre du laplacien pour Γ_0:

$$(\# I)\times N_{B,R}(\lambda)\leqq \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{b_i\varrho_i^2}{2\pi}\right)\sum_{n_i\geqq 0}N_0\left(\lambda-\sum_{i=1}^{r}(2n_i+1)b_i\right).$$

On a:

$$\mathrm{vol}D_\Gamma=(\mathrm{vol}(\mathbb{R}^k/\Gamma_0))\times\prod_{i=1}^{r}\varrho_i^2 \quad \text{et} \quad \# I\cdot R^d=\mathrm{vol}\left[\bigcup_{i\in I}\Omega_i\right].$$

Donc:

$$N_{B,R}(\lambda)\leqq\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{b_i}{2\pi}\right)\cdot\frac{\mathrm{vol}D_\Gamma}{\mathrm{vol}\cup\Omega_i}\sum_{n_i\geqq 0}\left(\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^k/\Gamma_0)}\right)N_0(\lambda-\sum(2n_i+1)b_i),$$

et on a:

$$\lim_{\Gamma_0\,\mathrm{grand}}\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^k/\Gamma_0)}N_0(\mu)=\frac{\gamma_k}{(2\pi)^k}\cdot\mu^{k/2}.$$

On en déduit ainsi l'inégalité (1) en passant à la limite avec Γ et Γ_0 grands.

b) *Minoration.* La minoration est un peu plus délicate à obtenir.

On considère d'abord le pavage de $\mathbb{R}^d$ par les cubes $((R-A)\mathbb{Z})^d+[0,R-A]^d$, on considère ceux de ces cubes qui rencontrent D_Γ (même notation que précédemment) et on désigne par Ω_i des cubes ayant même centres que ces derniers et de côtés R, on a ainsi:

$$\operatorname{vol}\Big(\bigcup_i \Omega_i\Big) \underset{\Gamma\,\text{grand}}{\sim} \left(\frac{R}{R-A}\right)^d \cdot \operatorname{vol} D_\Gamma ,$$

Ω_i donne lieu à un recouvrement du tore $\mathbb{R}^d/\Gamma$ que nous noterons encore Ω_i.

Lemme. *Il existe une famille de fonctions $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ telle que:*

(i) $\sum_i \varphi_i^2 \equiv 1$ *sur* $\mathbb{R}^d/\Gamma = X$;

(ii) $|\operatorname{grad} \varphi_i| \leqq C/A$ *où C ne dépend que de d.*

Ce lemme étant admis, on utilise l'injection $H^1(X; L) \hookrightarrow \oplus H_0^1(\Omega_i)$ donnée par $f \rightsquigarrow \oplus(f\varphi_i)$ qui est isométrique pour les normes L^2 et l'inégalité:

$$\sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla(\varphi_i f)|^2 \leqq \int_X |\nabla f|^2 + \frac{C}{A^2} \|f\|^2_{L^2(X)},$$

où $C = \sup \sum_i |\operatorname{grad} \varphi_i|^2$ ne dépend que de d, par l'intermédiaire du lemme précédent et du nombre maximum de i tel que x_0 donné soit dans Ω_i qui est majorable par 6^d (voir plus bas).

La méthode du minimax donne alors:

$$N_{\Gamma,B}(\lambda) \leqq (\# I) \cdot N_{B,R}\left(\lambda - \frac{C}{A^2}\right),$$

on raisonne alors comme dans a) et on obtient la fonction $(R-A)^d$ au lieu de R^d, à cause de:

$$\# I \cdot R^d \sim \left(\frac{R}{R-A}\right)^d \operatorname{vol} X .$$

Preuve du lemme. On considère d'abord des fonctions $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ translatées de la fonction $\psi(x) = \eta(x_1) \times \ldots \times \eta(x_d)$, où $\eta \in C_0^\infty(]-A/2, R-A/2[)$ est une fonction à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur $[0, R-A]$. Puis $\varphi_i = \dfrac{\psi_i}{\sqrt{\Sigma \psi_i^2}}$ et donc une majoration de $\nabla \varphi_i$ car $\Sigma \psi_i^2 \geqq 1$ (définition des Ω_i) et le nombre:

$$M = \max_{x_0 \in X} \max \# \{i \mid x_0 \in \Omega_i\}$$

que l'on peut majorer par 6^d (recouvrement local des Ω_i d'un facteur $\leqq 2^d$ et recouvrement par périodicité d'un facteur $\leqq 3^d - 1 =$ nombre de translatés de D_Γ contigus à D_Γ).

4. Enonce du resultat principal

Nous sommes amenés à faire un certain nombre d'hypothèses sur le champ magnétique B (variable) dans $\mathbb{R}^d$ très voisines de celles utilisées par Tamura [T] dans le cas $d = 3$.

(B_3) $\lim_{|x|\to\infty} \|B(x)\| = +\infty$.

(B_4) Il existe une constante $C>0$ telle que, $\forall x, x'$ vérifiant $|x-x'|\leqq 1$, on ait $\|B(x)\|\leqq C\|B(x')\|$.

(B_5) Soit $M(x)=\max_{|\beta|=2}\left(\sup_{|x'-x|\leqq 1}\|D^\beta a(x')\|\right)$, où a est un potentiel magnétique de B convenablement choisi, alors on a:

$$M(x)=o(\|B(x)\|^{3/2}) \quad \text{quand} \quad |x|\to+\infty\,.$$

On définit alors $N_{\mathrm{as}}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^d} \nu_{B(x)}(\lambda)dx$, intégrale qui a un sens dès que (B_3) est satisfaite.

On a le:

Theoreme 4.1. *Sous les hypothèses* (B_3), (B_4) *et* (B_5), *on a, pour tout* $\varepsilon>0$,

$$N_{\mathrm{as}}(\lambda(1-\varepsilon)\lesssim N(\lambda)\lesssim N_{\mathrm{as}}(\lambda(1+\varepsilon)) \qquad (\lambda\to+\infty)\,,$$

où $N(\lambda)$ est la fonction de dénombrement du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec le champ magnétique $B(x)$ dans $\mathbb{R}^d$.

Remarque 1. Si $N_{\mathrm{as}}(\lambda)\sim C\lambda^b(\mathrm{Log}\,\lambda)^C$ le théorème implique $N(\lambda)\sim N_{\mathrm{as}}(\lambda)$.

Remarque 2. Dans le cas $d=3$, notre résultat est voisin de celui de Tamura [T], mais ici nous obtenons le cas d quelconque, sans hypothèses sur le rang de $B(x)$.

Remarque 3. L'évaluation de $N_{\mathrm{as}}(\lambda)$ peut se faire grâce au théorème de Karamata et en évaluant la transformée de Laplace:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}dN_{\mathrm{as}}(\lambda)=(4\pi t)^{-d/2}\cdot\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{i=1}^{r}\frac{tb_i(x)}{\sinh tb_i(x)}\cdot dx\,,$$

où $r=r\max$ est le rang maximum de B et où l'on remplace $\dfrac{tb_i}{\sinh tb_i}$ par 1 lorsque $b_i=0$, i.e. lorsque $r<r\max$.

5. Preuve du resultat principal

On aura besoin de:

Lemme 5.1. *Soient* ($\mathscr{H}_1$, q_1, $D(q_1)$) *et* ($\mathscr{H}_2$, q_2, $D(q_2)$) *deux formes quadratiques fermables et $j: D(q_1)\hookrightarrow D(q_2)$ une injection isométrique pour les normes de $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$. On suppose qu'il existe des constantes C_1 et $C_2>0$ telles que, $\forall f\in\mathscr{H}_1$, on ait $q_1(f)\geqq C_1q_2(j(f))-C_2\|f\|^2_{\mathscr{H}_1}$. Alors en désignant par N_1 et N_2 les fonctions de dénombrement des spectres de q_1 et q_2, on a:*

$$\forall\lambda\geqq 0\,, \qquad N_1(\lambda)\leqq N_2((\lambda+C_2)/C_1)\,.$$

Ce lemme est une conséquence immédiate du principe du minimax.

Lemme 5.2. *Sous les hypothèses* (B_3), (B_4) *et* (B_5), *et $\varepsilon>0$ étant donné, il existe un pavage de $\mathbb{R}^d$ par des cubes $(\Omega_i)_{i\geqq 0}$ (de tailles inégales) tel que $\Omega_0=[-l,+l]^d$, les*

$(\Omega_i)_{i\geqq 0}$ *sont de côtes* r_i, *et des nombres* $(a_i)_{i\geqq 1}$ $\left(0<a_i\leqq \frac{r_i}{2}\right)$ *tels que, si on note* $M_i = \underset{|\beta|=2}{\mathrm{Max}} \sup_{x\in\Omega_i} |D^\beta a(x)|$ *(où a est un potentiel du champ B), on ait,* $\forall x\in\Omega_i$, $\forall i\geqq 1$:

(i) $r_i^2 M_i \leqq \varepsilon \|B(x)\|^{1/2}$;

(ii) $M_i \leqq \varepsilon^3 \|B(x)\|^{3/2}$;

(iii) $1/a_i^2 \leqq \mathrm{Max}\left(4\varepsilon\|B(x), \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Preuve. On considère un pavage initial de $\mathbb{R}^d$ par des cubes $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ de côtés 1. On note $M_\alpha = \underset{|\beta|=2}{\mathrm{Max}} \sup_{x\in C_\alpha} |D^\beta a(x)|$. On commence par utiliser (B_3) pour regrouper dans Ω_0 les C_α tel qu'il existe x dans C_α avec $M_\alpha > \varepsilon^3 \|B(x)\|^{3/2}$.

On va alors subdiviser les cubes C_α extérieurs à Ω_0 en petits cubes de côtés r_α avec $\frac{1}{r_\alpha}$ entier. Ces cubes seront les $(\Omega_i)_{i\geqq 1}$ (et donc $r_i = r_\alpha$ si $\Omega_i \subset C_\alpha$).

L'inégalité (ii) est automatiquement vérifiée par le choix de Ω_0.

Choix de r_α. Soit $\varrho_\alpha = \mathrm{Min}\left(\frac{\varepsilon}{4M_\alpha} \underset{x\in C_\alpha}{\mathrm{Max}} \|B(x)\|^{1/2}, \frac{1}{4}\right)$, on peut choisir r_α tel que $\frac{1}{r_\alpha}$ est entier et

$$\varrho_\alpha \leqq r_\alpha^2 \leqq 4\varrho_\alpha .$$

Choix de a_j. Dans C_α on prend les a_j tous égaux à $a_\alpha = \sqrt{\varepsilon r_\alpha}$ et on obtient (iii).

Preuve du résultat principal

Minoration de $N(\lambda)$. On utilise le Lemme 5.1 et l'injection $\bigoplus_{i\geqq 1} H_0^1(\Omega_i) \to D(q_B)$, où chaque $H_0^1(\Omega_i)$ est muni de la forme quadratique associée au champ magnétique constant égal à la valeur de B en un point quelconque x_i de Ω_i. On a ainsi:

$$q_1\left(\bigoplus_{i\geqq 1} f_i\right) = \sum_{i\geqq 1} \int_{\Omega_i} |\nabla_i f|^2 ,$$

où ∇_i est la connection associée au champ constant $B(x_i)$.

La formule de Taylor à l'ordre 1 en x_i donne, en prenant comme potentiel de $B(x_i)$, le développement de Taylor à l'ordre 1 de a en x_i:

$$|(\nabla - \nabla_i) f(x)| \leqq M_i r_i^2 |f(x)| ,$$

on a ainsi:

$$q_1\left(\bigoplus_{i\geqq 1} f_i\right) \geqq (1-\varepsilon_1) \int_{x\notin\Omega_0} |\nabla f|^2 - C_{\varepsilon_1} \sum_{i\geqq 1} M_i^2 r_i^4 \int_{\Omega_i} |f_i|^2 ,$$

ε_1 étant donné, on a pu choisir ε (et donc les Ω_i, r_i, a_i) tel que $\varepsilon \geqq \varepsilon_1$ et $C_{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon \leqq \varepsilon_1$.

On a ainsi:

$$(1-\varepsilon_1) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \leqq \sum_{i\geqq 1} \left(\int_{\Omega_i} |\nabla_i f_i|^2 + \varepsilon_1 \|B(x_i)\| \int_{\Omega_i} |f_i|^2\right),$$

avec $f=\sum_{i\geqq 1} f_i$, on en déduit:

$$N(\lambda)\geqq \sum_{i\geqq 1} N_{B(x_i),r_i}((1-\varepsilon_1)\lambda-\varepsilon_1\|B(x_i)\|);$$

puis, en utilisant la minoration du Sect. 3:

$$N(\lambda)\geqq \sum_{i\geqq 1} (r_i-a_i)^d v_{B(x_i)}((1-\varepsilon_1)\lambda-\varepsilon_1(1+C)\|B(x_i)\|-C/\varepsilon),$$

puis à l'aide de l'expression de v_B et de l'équivalence $\|B\|\sim b_1$:

$$N(\lambda)\geqq(1-0(\sqrt{\varepsilon_1}))\sum_{i\geqq 1} r_i^d\cdot v_{B(x_i)}\left(\left(\frac{1-\varepsilon_1}{1+C'\varepsilon_1}\right)\lambda-C''\right);$$

en utilisant le fait que x_i est quelconque dans Ω_i, on a:

$$N(\lambda)\geqq(1-0(\sqrt{\varepsilon_1}))\int_{x\notin\Omega_0} v_{B(x)}((1-0(\varepsilon_1))\lambda-C).$$

On utilise alors le fait que:

$$\int_{\Omega_0} v_{B(x)}(\lambda)=0\left(\int_{\mathbb{R}^d} v_{B(x)}(\lambda)\right).$$

En effet, pour tout cube C, on a:

$$\int_C v_{B(x)}(\lambda)\sim C_d\,\mathrm{vol}(C)\lambda^{d/2}:$$

c'est l'asymptotique du spectre de tout opérateur elliptique du second ordre dans l'ouvert C relativement compact de $\mathbb{R}^d$.

Majoration. Elle se fait de façon analogue en utilisant le recouvrement par les $\tilde{\Omega}_i$ qui sont des cubes centrés sur les Ω_i et côtés r_i+a_i. On introduit alors une famille $\varphi_i\in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_i)$ telle que $\sum_{i\geqq 0}\varphi_i^2\equiv 1$ et $\forall x\in\Omega_i$, $\|d\varphi_i(x)\|\leqq C_d/a_i$. On utilise alors l'injection $D(q_B)\hookrightarrow\bigoplus_{i\geqq 1} H_0^1(\tilde{\Omega}_i)$, donnée par $f\mapsto\bigoplus_{i\geqq 0}(f\varphi_i)$, puis les mêmes comparaisons de formes quadratiques et la majoration du Sect. 3.

Le seul point éventuellement délicat est la construction des φ_i: elle se fait exactement comme au Sect. 3 en partant d'une famille initiale ψ_i et en majorant le taux de recouvrement des $\tilde{\Omega}_i$ par une constante ne dépendant que de d.

Bibliographie

[A–H–S] Avron, J., Herbst, I., Simon, B.: Duke Math. J. **45**, 847–883 (1978)

[C–H] Courant, R., Hilbert, D.: Methods of mathematical physics. I. pp. 429–431. New York: Wiley 1953

[CV 1] Colin de Verdiere, Y.: Calcul du spectre de certaines nilvariétés compactes de dimension 3. Séminaire Grenoble-Chambéry 83–84 (exposé n° 5)

[CV 2] Colin de Verdiere, Y.: Minorations de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya. Séminaire Grenoble-Chambéry 84–85 (exposé n° 6)

[CV 3] Colin de Verdiere, Y.: L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques bidimensionnelles. Prépublications de l'Institut Fourier, n° 33 (1985)

[CV 4] Colin de Verdiere, Y.: Asymptotique du spectre des bouteilles magnétiques. Exposé aux Journées de St.-Jean de Monts (juin 1985)
[D] Dufresnoy, A.: Duke Math. J. **50**, 729–734 (1983)
[DY 1] Demailly, J.P.: C.R. Acad. Sci, Paris **301**, 119–122 (1985)
[DY 2] Demailly, J.P.: Ann. Inst. Fourier **35**, 189–229 (1985)
[I] Iwatsuka, A.: Magnetic Schrödinger operators with compact Resolvent. Preprint 1985
[M] Michau, F.: Comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Thèse de 3e cycle, Grenoble 1982
[P] Polya, G.: Proc. London Math. Soc. **11**, 419–433 (1961)
[R–S] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. IV. New York: Academic Press 1978
[T] Tamura, H.: Asymptotic distribution of eigenvalues for Schrödinger operators with Magnetic Fields. Preprint Nagoya University (1985)

Communicated by B. Simon

Received November 14, 1985; in revised form February 19, 1986