

# Clusterentwicklung der Informationsgrößen im Besetzungszahl-Formalismus der klassischen Gleichgewichts-Statistik

PAUL ZIESCHE

Abteilung für Theoretische Physik, Pädagogisches Institut Dresden

Eingegangen am 1. Februar 1967

**Abstract.** By means of quantum field theoretical methods (occupation number formalism, linked graph theorem, functional derivation) the cluster developments of classical equilibrium statistics are rederived. Thereby an information quantity comprehending all partial information about a system is introduced.

## Einleitung

Bei einem Vergleich der verschiedenen Graphen- und Cluster-Entwicklungen der Vielteilchentheorie fällt auf, daß die Entwicklungen der klassischen Statistik (Gleichgewicht — MAYER, Nichtgleichgewicht — PRIGOGINE/BALESCU) in einer Art und Weise formuliert werden, die von den in der übrigen Vielteilchentheorie bewährten, quantenfeldtheoretischen Methoden (Wicksches Theorem) recht verschieden ist. Jedoch entsteht gemeinsam sowohl in der klassischen wie in der quantenmechanischen Vielteilchentheorie stets eine allgemeine Aussage, nämlich: alle Meßgrößen werden durch nur zusammenhängende Graphen oder Cluster wiedergegeben. Es erhebt sich daher die Frage, ob es im Sinne einer Vereinheitlichung nicht möglich ist, sowohl für die klassische wie für die quantenmechanische Vielteilchentheorie eine gemeinsame Formulierung zu finden, so daß die erwähnten Verbundgraphentheoreme als Spezialfälle eines allgemeineren Theorems erscheinen. Tatsächlich ist dies möglich. Dazu wird der zuerst von SCHÖNBERG [1] angegebene Besetzungszahlformalismus aufgegriffen und weiterentwickelt (Kapitel 1). Zustände klassischer Systeme werden hierbei durch die Besetzungen im klassischen Phasenraum beschrieben. Physikalische Größen nehmen damit die von der Wellenquantelung her bekannte Form an, nur mit dem Unterschied, daß die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren hier nicht von  $r$  oder  $p$ , sondern von  $r$  und  $p$  abhängen. Bei der Bildung von Erwartungswerten (Kapitel 2) ergibt sich gegenüber der Quantentheorie insofern eine Vereinfachung, als die zunächst auftretenden Austauschsterme wegen der im klassischen Grenzfall „dünnen“ Besetzung des Phasenraums vernachlässigt werden können. Für die klassische Spur-

bildung ergibt sich damit eine einfache Regel (Abschnitt 21), die bei Anwendung auf den großkanonischen Zustand (Kapitel 3) in Verbindung mit einem für die Umordnung von Exponentialfunktionalen gültigen allgemeinen Verbundgraphentheorem [2] sofort die bekannte Clusterentwicklung der Freien Energie [3] reproduziert, wobei die eigentliche Mayersche Clusterentwicklung als hard-core-Teilsumimation erscheint (Abschnitt 33). Auch die Clusterentwicklung der (reduzierten) Dichtefunktionen ergibt sich automatisch. Dazu wird das zuerst von BOGOLJUBOW [4] eingeführte erzeugende Funktional dieser Dichtefunktionen herangezogen. Zwischen diesem Dichte-Funktional und dem erzeugenden Funktional der Korrelationsfunktionen, die bei einer URSELL/MAYER-Entwicklung der Dichtefunktionen auftreten, besteht ein einfacher Zusammenhang (Abschnitt 22). Dieser läßt mit Hilfe von Funktionalableitungen erkennen (Abschnitt 33), daß die Freie Energie als Funktional der ungestörten Einteilchendichte (Abschnitt 32) zugleich die Erzeugende der Korrelationsfunktionen darstellt [5]. In diesem Zusammenhang bietet sich in Analogie zu [6] die Einführung einer sog. Informationsgröße  $U(\sigma)$  an, in der alle Teilinformationen über den Zustand eines Systems kompakt zusammengefaßt werden. Der natürliche Logarithmus von  $U(\sigma)$  hat dann wie in [6] die Bedeutung des erzeugenden Energie/Korrelations-Funktional (Abschnitt 31).

Die Formeln sind abschnittsweise durchnummeriert und werden zusammen mit den Abschnittsnummern zitiert. Zur formalen Vereinfachung wird für Mehrfachintegrale in Anlehnung an SYMANZIK [7] eine abkürzende Schreibweise eingeführt.

## 1. Physikalische Größen

### 1.1. Dynamische Variable

Um die quantenfeldtheoretischen Methoden auch in der klassischen Statistik anwenden zu können und eine über weite Strecken zur Quantenstatistik parallele Entwicklung zu ermöglichen, wird zunächst ausgehend von der üblichen Formulierung („Teilchenbild“) mit Teilchenzahlen  $N$  und Phasenraumpunkten  $x \hat{=} (\mathbf{r}, \mathbf{p})$  als den dynamischen Variablen ein klassischer Besetzungszahl-Formalismus („Wellenbild“) mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\psi^\dagger(x)$ ,  $\psi(x)$  als den dynamischen Variablen entwickelt. Dazu wird der *kleine Phasenraum in nummerierte Zellen  $\Delta x$  eingeteilt*. Im Prinzip kann jede Zelle von beliebig vielen Teilchen besetzt werden, soweit nicht etwa durch ein hard-core Einschränkungen entstehen. Jedoch hat die klassische Statistik bekanntlich nur Gültigkeit für genügend dünne Besetzung der Zellen  $\Delta x = (2\pi\hbar)^3$ , so daß jede Zelle praktisch höchstens einfach besetzt wird:  $N_x = 0$  oder 1. Daher sind klassische Bose-Statistik und klassische Fermi-Statistik in ihren

Ergebnissen miteinander entartet. Deswegen können bei praktischen Auswertungen Summationen über die Phasenraum-Zellen durch Integrationen ersetzt werden:  $\sum_x \Delta x \approx \int dx$ . Letzteres ermöglicht bei der Bildung von Erwartungswerten das Streichen der Austauschsterme, in denen sich ja Fermi- und Bose-Statistik voneinander unterscheiden.

Die Zustände eines Systems ununterscheidbarer Teilchen<sup>1</sup> werden nun bei vollständiger Information durch Hilbert-Vektoren  $\Phi_{N_1, N_2, \dots}$  beschrieben, die die Besetzungen der einzelnen Zellen angeben. Daß sich Zustände mit verschiedenen *Besetzungszahlen* gegenseitig ausschließen, wird durch die Orthogonalität der Vektoren wiedergegeben und daß mit  $N_x = 0, 1, 2, \dots, \infty$  (BOSE) bzw.  $N_x = 0, 1$  (FERMI) die Gesamtheit aller möglichen Zustände eines Einzelsystems dargestellt wird, wird durch die Vollständigkeit der Vektoren wiedergegeben:

$$(\Phi_{N_1 \dots}, \Phi_{N'_1 \dots}) = \delta_{N_1 - N'_1} \dots, \quad \sum_{N_1, \dots} \Phi_{N_1 \dots} (\Phi_{N_1 \dots} = 1. \quad (1)$$

Daß es keine negativen Besetzungszahlen gibt, wird durch  $\Phi_{\dots N_x \dots} = 0$  für  $N_x < 0$  beschrieben; in der Fermi-Statistik gilt zusätzlich noch  $\Phi_{\dots N_x \dots} = 0$  für  $N_x > 1$ . Für das Vakuum wird die übliche Bezeichnung  $\Phi_{00 \dots} \equiv >$  bzw.  $(\Phi_{00 \dots} \equiv <$  benutzt.

Die dynamischen Variablen sind in diesem Formalismus diejenigen Größen, die die Besetzungszahlen ändern, also die von der Quantentheorie her wohlbekannten und durch

$$\frac{\psi_x^\dagger}{\sqrt{N_x + 1}} \Phi_{\dots N_x \dots} = e^{i\alpha_x} \Phi_{\dots N_x + 1 \dots}, \quad \frac{\psi_x}{\sqrt{N_x}} \Phi_{\dots N_x \dots} = e^{-i\alpha_x} \Phi_{\dots N_x - 1 \dots} \quad (2)$$

definierten *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren*. Aus dieser Definition folgt sofort die Vertauschung von  $\psi_x^\dagger$  und  $\psi_x$

$$\left. \begin{aligned} \psi_x^\dagger \psi_x \Phi_{\dots N_x \dots} &= N_x \Phi_{\dots N_x \dots} \\ \psi_x \psi_x^\dagger \Phi_{\dots N_x \dots} &= (N_x + 1) \Phi_{\dots N_x \dots} \end{aligned} \right\} \curvearrowright [\psi_x, \psi_x^\dagger]_{\mp} = 1. \quad (3)$$

Über die Vertauschung von  $\psi_x$  und  $\psi_{x'}$  für verschiedene  $x, x'$  sowie die Vertauschungen der  $\psi_x$  bzw.  $\psi_x^\dagger$  untereinander wird durch geeignete Wahl der willkürlichen Phasen entsprechend verfügt. Mit den Abkürzungen ( $\delta_{x-x'}$  bedeutet das Kroneckersymbol)

$$\psi(x) \equiv \frac{\psi_x}{\sqrt{\Delta x}}, \quad \psi^\dagger(x) \equiv \frac{\psi_x^\dagger}{\sqrt{\Delta x}}, \quad \delta(x, x') \equiv \frac{\delta_{x-x'}}{\Delta x}, \quad \int \Delta x \equiv \sum_x \Delta x \quad (4)$$

<sup>1</sup> Klassische Teilchen sind mit einem (ungequantelten) Strahlungsfeld als Träger der Informationen über die Teilchenzustände eigentlich stets durch die unterschiedlichen Anfangsbedingungen individualisierbar. Verzichtet man jedoch auf Fragestellungen, in denen die Teilchen unterschieden werden, so genügt es, sich bei der Beschreibung von vornherein auf solche Systemzustände zu beschränken, in denen alle Teilchen gleichberechtigt auftreten. Nur solche Zustände werden hier behandelt.

lauten die Vertauschungen schließlich

$$\boxed{[\psi(x), \psi^\dagger(x')]_{\mp} = \delta(x, x'), [\psi, \psi']_{\mp} = 0 = [\psi^\dagger, \psi'^\dagger]_{\mp}, \psi > = 0 = \langle \psi^\dagger.} \quad (5)$$

Sie haben also genau dieselbe Form wie in der Quantentheorie.

Für den *Vakuum-Projektionsoperator* existiert die wichtige Darstellung

$$\boxed{\langle \psi^\dagger \psi \rangle = \delta \psi^\dagger \psi = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi}} \quad \delta \geq 0, \quad \psi^\dagger \psi \equiv \int \Delta x \psi^\dagger(x) \psi(x). \quad (6)$$

$N_{\psi^\dagger, \psi}$  ordnet einschließlich entsprechender Vorzeichenwechsel gemäß (5) alle  $\psi^\dagger$  nach links, alle  $\psi$  nach rechts und  $\psi^\dagger \psi$  bedeutet gemäß (3) den Teilchenzahloperator. Das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich für  $v(x) = \delta - 1$  aus der in [2] angegebenen Beziehung (22.10)

$$e^{\psi^\dagger \ln(1+v)\psi} = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger v \psi} \quad \psi^\dagger w \psi \equiv \int \Delta x \psi^\dagger(x) w(x) \psi(x), \quad (7)$$

die ihrerseits ein einfaches Beispiel eines für allgemeinere Operatoren-Umordnungen gültigen und in [2] bewiesenen Verbundgraphentheorems darstellt. Aus (6) folgt zunächst die identische Umformung der Vollständigkeitsrelation (1)

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{N_1, \dots} (\Delta x)^{N_1} \dots \frac{\psi_1^{\dagger N_1}}{\sqrt{N_1!}} \dots \langle \dots \frac{\psi_N^{\dagger N}}{\sqrt{N!}} = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} e^{\int \Delta x \psi^\dagger(x) v(x)} \\ &= \sum_N \frac{1}{N!} \int \Delta x_1 \dots \int \Delta x_N \psi_1^\dagger \dots \psi_N^\dagger \rangle \langle \psi_N \dots \psi_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Weiter wird (6) bei der Formulierung physikalischer Größen benötigt.

*Physikalische Größen*  $A$  haben nämlich im Besetzungszahl-Formalismus die Form

$$\boxed{A(\psi^\dagger, \psi) = \sum_N \frac{1}{N!} \int \Delta x_1 \dots \int \Delta x_N \psi_1^\dagger \dots \psi_N^\dagger \langle A_N(x_1, \dots, x_N) \rangle \langle \psi_N \dots \psi_1 \rangle \equiv \sum_N \frac{1}{N!} \psi^\dagger{}^N \rangle A_N \langle \psi^N,} \quad (9)$$

die durch (6) in

$$\boxed{A(\psi^\dagger, \psi) = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} A(\psi^\dagger \psi)} \quad (10)$$

überführt werden kann mit

$$A(\varkappa) = \sum_N \frac{1}{N!} \int \Delta x_1 \varkappa(x_1) \dots \int \Delta x_N \varkappa(x_N) A_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \sum_N \frac{1}{N!} \varkappa^N A_N \quad (11)$$

als dem erzeugenden Funktional der zu den Teilchenzahlen  $N$  gehörigen Größen  $A_N$  des „Teilchenbildes“. Bei Entwicklung von  $A_N$  nach Ein-

Zwei-, Drei-Teilchengrößen usw.

$$A_N(1 \dots N) = \sum_s \frac{1}{s!} N_{\neq} \sum_{i_1 \dots i_s}^N a(i_1 \dots i_s) \quad (12)^2$$

entsteht zwischen dem erzeugenden Funktional dieser  $s$ -tupel-Größen  $a_s$   
 $a(\kappa) = \sum_s \frac{1}{s!} \int \Delta x_1 \kappa(x_1) \dots \int \Delta x_s \kappa(x_s) a_s(x_1, \dots, x_s) \equiv \sum_s \frac{1}{s!} \kappa^s a_s \quad (13)$

und der Erzeugenden  $A(\kappa)$  der einfache Zusammenhang

$$A(\kappa) = e^{1 * \kappa} a(\kappa) \quad 1 \kappa \equiv \int \Delta x \kappa(x), \quad (14)$$

so daß mit  $\kappa(x) = \psi^\dagger(x) \psi(x)$  aus (10) für  $A(\psi^\dagger, \psi)$  sofort die Darstellung

$$A(\psi^\dagger, \psi) = \sum_s \frac{1}{s!} \psi^\dagger{}^s a_s \psi^s \quad (15)$$

folgt. Schließlich gilt noch für die Multiplikation zweier physikalischer Größen

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{B} &= \sum_{N, M} \frac{1}{N!} \psi^\dagger{}^N > A_N < \psi^N \frac{1}{M!} \psi^\dagger{}^M > B_M < \psi^M \\ &= \sum_N \frac{1}{N!} \psi^\dagger{}^N > A_N B_N < \psi^N = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} \underline{A} \underline{B}(\psi^\dagger, \psi) \\ \underline{A} \underline{B}(\kappa) &= \sum_N \frac{1}{N!} \int \Delta x_1 \kappa(x_1) \dots \int \Delta x_N \kappa(x_N) A_N(x_1 \dots x_N) B_N(x_1 \dots x_N) \equiv \\ &\equiv \sum_N \frac{1}{N!} \kappa^N A_N B_N \end{aligned} \quad (16)$$

mit  $\underline{A} \underline{B}(\kappa)$  als der Erzeugenden des Produkts  $A_N(\dots) B_N(\dots)$ .

### 1.2. Teilchenzahl

Im folgenden wird als einfachste physikalische Größe die Teilchenzahl mit einigen ihrer Abkömmlinge behandelt. Aus (11.3) folgt sofort, daß

$$Z_\omega \equiv \int \Delta x \psi^\dagger(x) \Theta_\omega(x) \psi(x) \equiv \psi^\dagger \Theta_\omega \psi \quad (1)$$

den Operator der *Teilchenzahl in einem Teilvolumen*  $\omega$  des kleinen Phasenraumes mit  $\Theta_\omega(x)$  als Stufenfunktion bedeutet, die das Teilvolumen  $\omega$  herausprojiziert:

$$\Theta_\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \begin{cases} x \text{ innerhalb } \omega \\ x \text{ außerhalb } \omega \end{cases} \\ 0 & \end{cases} \quad (2)$$

Aus (1) wiederum folgt der Operator der  $s$ -tupel-Zahl in  $\omega$  zu

$$\begin{aligned} \binom{Z_\omega}{s} &= N_{\psi^\dagger, \psi} \frac{Z_\omega^s}{s!} = \frac{1}{s!} \int \Delta x_1 \Theta_\omega(x_1) \dots \int \Delta x_s \Theta_\omega(x_s) z_s(x_1, \dots, x_s) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{s!} \Theta_\omega^s z_s \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>2</sup>  $N_{\neq}$  streicht in Mehrfachsummen über gleichartige Variable alle Diagonalglieder (Entdiagonalisierungsoperator).

mit  $z_s(\dots)$  als dem Operator der  $s$ -tupel-Dichte:

$$z_s(x_1, \dots, x_s) = \psi^\dagger(x_1) \dots \psi^\dagger(x_s) \psi(x_s) \dots \psi(x_1). \quad (4)$$

Beim Umformen in (3) wurde (22.12) aus [2] benutzt.

Zweckmäßig faßt man wie in [4] die Dichte-Operatoren  $z_s$  durch „Multiplikation“ mit einer dimensionslosen Testfunktion  $\sigma(x)$  zu einem erzeugenden Funktional zusammen

$$z(\sigma) = \sum_s \frac{1}{s!} \sigma^s z_s = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger \sigma \psi} = \sum_N \frac{1}{N!} \psi^{\dagger N} > \tau^N < \psi^N \quad (5)$$

$$\tau(x) = 1 + \sigma(x),$$

das mit  $\sigma(x) = \alpha \Theta_\omega(x)$  auch zugleich das erzeugende Funktional der  $s$ -tupel-Zahl-Operatoren (3) enthält

$$\sum_s \alpha^s \binom{Z_\omega}{s} = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\alpha Z_\omega} = z(\alpha \Theta_\omega). \quad (6)$$

Bei der Umformung von  $z(\sigma)$  in (5) wurde (11.6) verwendet.

Schließlich ergibt sich aus (11.8) für den Operator der *Teilchenzahl-Verteilung*

$$\begin{aligned} \delta_{N-Z} &= \frac{1}{N!} \int \Delta x_1 \dots \int \Delta x_N \psi_1^\dagger \dots \psi_N^\dagger > < \psi_N \dots \psi_1 \\ &= N_{\psi^\dagger, \psi} \frac{Z^N}{N!} e^{-Z} \quad Z \equiv Z_\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Im letzten Gleichheitszeichen wurde wieder (11.6) benutzt.

### 1.3. System- und Zustandsgrößen

Der das jeweilige System charakterisierende *Hamilton-Operator* hat gemäß (11.9 und 15) die Form

$$\begin{aligned} H(\psi^\dagger, \psi) &= \sum_N \frac{1}{N!} \psi^{\dagger N} > H_N < \psi^N \\ &= \psi^\dagger h \psi + \frac{1}{2!} \psi^{\dagger 2} v \psi^2 \equiv H^0(\psi^\dagger, \psi) + V(\psi^\dagger, \psi) \\ H_N(1 \dots N) &= \sum_i^N h(i) + \frac{1}{2!} \sum_{i \neq j}^N v(i, j) \equiv H_N^0(1 \dots N) + V_N(1 \dots N) \quad (1) \\ h(x) &= \frac{p^2}{2m} + a(\mathbf{r}) \quad v(x_1, x_2) = v(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \end{aligned}$$

Aus den Vertauschungen

$$[H^0, \psi_1] = -h_1 \psi_1 \quad [H^0, \psi_1^\dagger] = h_1 \psi_1^\dagger \quad (2)$$

folgt, daß der ideale Anteil  $H^0$  mit dem Wechselwirkungs-Anteil  $V$  vertauschbar ist

$$[H^0, V] = \frac{1}{2!} \int \Delta x_1 \int \Delta x_2 \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger [(h_1 + h_2), v_{12}] \psi_2 \psi_1 = 0. \quad (3)$$

Die Vertauschbarkeit von  $h$  und  $v$  führt hier also zu einer wesentlichen Vereinfachung gegenüber der Quantentheorie.

Die mehr oder weniger vollständigen Informationen über den jeweiligen Zustand eines Systems  $H$  werden durch den *statistischen Operator*

$$\varrho(\psi^\dagger, \psi) = \sum_N \frac{1}{N!} \psi^{\dagger N} > \varrho_N < \psi^N = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} \varrho(\psi^\dagger \psi) \quad (4)$$

wiedergegeben, mit  $\varrho(x)$  als der Erzeugenden der statistischen Verteilungen

$$\varrho_N = \varrho_N(x_1, \dots, x_N) \quad (5)$$

$$\sum_N \frac{1}{N!} \int \frac{dx_1}{\Omega} \dots \int \frac{dx_N}{\Omega} \varrho_N(x_1, \dots, x_N) = 1 \quad \Omega = (2\pi\hbar)^3,$$

die in der klassischen Statistik im Unterschied zur Quantenstatistik stets diagonal sind.  $\varrho$  wird aus den jeweils vorhandenen Informationen durch die Forderung geringster Willkür, d. h. durch Maximalisierung der Entropie gewonnen, die aus dem zu  $\varrho$  gehörigen *Entropie-Operator*

$$-k \ln \varrho = \sum_N \frac{1}{N!} \psi^{\dagger N} > (-k) \ln \varrho_N < \psi^N \quad (6)$$

durch Mittelung entsteht und ein Maß für die Vollständigkeit der vorhandenen Informationen darstellt.

## 2. Erwartungswerte

### 2.1 Klassische Spurbildung

Wie in der Quantenmechanik gewinnt man *Erwartungswerte* physikalischer Größen  $A$  im Zustand  $\varrho$  aus

$$\varrho A = \sum_N \frac{1}{N!} \psi^{\dagger N} > \varrho_N A_N < \psi^N = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} \varrho A(\psi^\dagger \psi) \quad (1)$$

durch Spurbildung

$$\text{Sp} \varrho A = \sum_N \frac{1}{N!} \varrho_N^\pm A_N \quad (2)$$

$$\varrho_N^\pm(x_1 \dots x_N) = \langle \psi_1 \dots \psi_N \psi_N^\dagger \dots \psi_1^\dagger \rangle \varrho(x_1 \dots x_N).$$

Allerdings können die durch

$$\langle \psi_1 \dots \psi_N \psi_N^\dagger \dots \psi_1^\dagger \rangle = \left\| \begin{matrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{N1} & \dots & \delta_{NN} \end{matrix} \right\|^\pm \quad (3)$$

( $\|\dots\|^\pm$  bedeutet die Permanente bzw. Determinante) entstehenden Austauschsterme vernachlässigt werden

$$\varrho_N^\pm(x_1 \dots x_N) \approx \delta(x_1, x_1) \dots \delta(x_N, x_N) \varrho_N(x_1 \dots x_N) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^N} \varrho(x_1 \dots x_N),$$

da sie in der im klassischen Grenzfall gültigen Näherung  $\int \Delta x \approx \int dx$  den Integranden nur in schmalen Diagonal-Streifen ( $x_i = x_j, x_i = x_j = x_K, \dots$ ) des gesamten Integrationsbereichs ( $x_1, \dots, x_N$ ) ändern, das

Integral also nur in vernachlässigbarer Weise beeinflussen. Es gilt daher

$$\bar{A} = \text{Sp}_{kl} \varrho A = \lim_{\substack{\Delta x = \Omega \\ \int \Delta x \approx \int dx}} \text{Sp} \varrho A = \varrho A \left( \frac{1}{\Omega} \right) \quad \Omega = (2\pi\hbar)^3. \quad (5)$$

Die Größe der Phasenraumzellen ergibt sich dabei aus dem klassischen Grenzfall der Quantenstatistik. Ein Vergleich von (5) mit (1) läßt eine einfache Regel für die Bildung von Erwartungswerten erkennen: Herstellen der Normalordnung in  $\varrho A$ , Abspalten des Faktors  $\exp(-\psi^\dagger \psi)$  und Ersetzen aller Paare  $\psi^\dagger \psi$  in dem übrigbleibenden Ausdruck durch  $1/\Omega$ .

Einfachste *Beispiele* sind mit (12.7) und (13.4) Teilchenzahlverteilung und Normierung

$$W(N) = \overline{\delta_{N-Z}} = \frac{1}{N!} \int \frac{dx_1}{\Omega} \dots \int \frac{dx_N}{\Omega} \varrho_N(x_1, \dots, x_N) \quad (6)$$

$$\text{Sp}_{kl} \varrho = \sum_N W(N) = 1$$

gemäß (13.5).

## 2.2. Dichte- und Dichtekorrelations-Funktionen

Aus (11.15) und (12.4) geht hervor, daß man mit den Dichtefunktionen

$$n_s(x_1 \dots x_s) = \overline{z(x_1 \dots x_s)} = \frac{\delta^s}{\delta \sigma(x_1) \dots \delta \sigma(x_s)} n(\sigma) \Big|_{\sigma=0}, \quad n(\sigma) = \overline{z(\sigma)} \quad (1)$$

die Erwartungswerte beliebiger physikalischer Größen konstruieren kann:

$$\bar{A} = \sum_s \frac{1}{s!} a_s n_s, \quad a_s n_s \equiv \int dx_1 \dots \int dx_s a_s(x_1 \dots x_s) n_s(x_1 \dots x_s). \quad (2)$$

Die Dichtefunktionen ihrerseits gehen durch Funktionalableitungen aus dem erzeugenden Dichte-Funktional

$$n(\sigma) = \overline{z(\sigma)} = \text{Sp}_{kl} [N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger \sigma \psi}] [N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} \varrho(\psi^\dagger \psi)] \quad (3)$$

$$= \text{Sp}_{kl} N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} \varrho(\tau \psi^\dagger \psi)$$

hervor. Dabei wird in (3) vor der Spurbildung die Normalordnung von  $z(\sigma)\varrho$  durch Ersetzen des in  $z(\sigma)$  enthaltenen  $\psi$  durch  $\delta/\delta\psi^\dagger$  sowie Anwendung der Taylor/Volterra-Entwicklung hergestellt. Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes lautet daher das *Dichte-Funktional*

$$n(\sigma) = \sum_N \frac{1}{s!} \sigma^s n_s = \sum_N \frac{1}{N!} \left( \frac{\tau}{\Omega} \right)^N \varrho_N = \varrho \left( \frac{\tau}{\Omega} \right) \quad \tau(x) = 1 + \sigma(x). \quad (4)$$

$n(\sigma)$  stimmt also mit der Erzeugenden  $\varrho(\tau/\Omega)$  der statistischen Verteilungen  $\varrho_N(\dots)$  überein. Der einfache Zusammenhang zwischen den



Testfunktionen  $\tau$  und  $\sigma$  gestattet die Umformung

$$n(\sigma) = \sum_{N,s} \frac{1}{s!} \sigma^s \frac{1}{(N-s)!} 1^{N-s} \frac{\varrho_N}{\Omega^N} \quad (5)$$

und damit die Darstellung der Dichtefunktionen durch die statistischen Verteilungen  $\varrho_N(\dots)$ :

$$n_s(x_1 \dots x_s) = \sum_N \frac{1}{(N-s)!} \frac{1}{\Omega^s} \int \frac{dx_{s+1}}{\Omega} \dots \int \frac{dx_N}{\Omega} \times \quad (6)$$

$$\times \varrho_N(x_1 \dots x_s, x_{s+1} \dots x_N).$$

Aus der mittleren Zahl von Teilchen- $s$ -tupeln im Teilvolumen  $\omega$  liest man gemäß (12.3) und (1)

$$\left( \frac{Z_\omega}{s} \right) = \frac{1}{s!} \Theta_\omega^s n_s \quad (7)$$

die Bedeutung von  $n_s(\dots)$  als Dichte der mittleren  $s$ -tupel-Zahl ab.

Schließlich führt die funktionale Zusammenfassung der bekannten *Ursell/Mayer-Entwicklung*

$$n_1(1) = u_1(1),$$

$$n_2(1, 2) = u_1(1) u_1(2) + u_2(1, 2), \quad (8)$$

$$n_3(1, 2, 3) = u_1(1) u_1(2) u_1(3) + u_1(1) u_2(2, 3) + u_1(2) u_2(3, 1) +$$

$$+ u_1(3) u_2(1, 2) + u_3(1, 2, 3), \quad \text{usw.}$$

zu dem einfachen Zusammenhang

$$n(\sigma) \equiv \sum_s \frac{1}{s!} \sigma^s n_s = e^{\sum_r \frac{1}{r!} \sigma^r u_r} \equiv e^{u(\sigma)} \quad (9)$$

zwischen dem erzeugenden Funktional  $n(\sigma)$  der Dichtefunktionen  $n_s(\dots)$  und dem erzeugenden Funktional  $u(\sigma)$  der Ursell/Mayerschen Dichtekorrelationsfunktionen  $u_r(\dots)$ .

### 3. Gleichgewicht

#### 3.1. Statistischer Operator und Informationsgröße

Wird der statistische Operator  $\varrho$  wie üblich durch Maximalisierung der Entropie  $S = -k \ln \varrho$  aus den Erwartungswerten  $\bar{A}$  von Erhaltungsgrößen wie  $H$  oder  $Z$  konstruiert, so ergeben sich stationäre Zustände  $\varrho = \varrho(H, Z)$ . Zum Beispiel entsteht bei Kenntnis der mittleren Energie  $E = \bar{H}$  und der Teilchenzahlverteilung  $W(M) = \overline{\delta_{M-Z}}$  der Zustand  $\varrho = \sum_M W(M) \varrho_M$  mit  $\varrho_M$  als dem kanonischen Zustand zur Teilchenzahl  $M$

$$\varrho_M = \delta_{M-Z} e^{-\beta(H-F_M)}. \quad (1)$$

Bei der etwas geringeren Kenntnis der mittleren Energie  $E = \bar{H}$  und der mittleren Teilchenzahl  $N = \bar{Z}$  entsteht der *großkanonische Zustand*

$$\varrho = e^{-\beta(H - \zeta Z - J)}, \quad (2)$$

der sich auch beim Kontakt mit einem durch die Parameter  $\beta$  und  $\zeta$  charakterisierten Wärme- und Teilchenbad einstellt. Die übliche Thermodynamik ist hier bekanntlich vollständig in den durch

$$e^{-\beta J} \equiv \text{Sp}_{kl} e^{-\beta(H - \zeta Z)} = \sum_M e^{\zeta M} \text{Sp}_{kl} \delta_{M-Z} e^{-\beta H} \equiv \sum_M e^{\zeta M} e^{-\beta F_M}, \quad (3)$$

$$W_\zeta(M) = e^{-\beta(F_M - \zeta M - J)}$$

definierten Freien Energien  $F_M$  und  $J$  enthalten. Die in dem aus  $\varrho$  entstehenden Dichtefunktional  $n(\sigma)$  und der zugehörigen Zustandssumme  $\mathcal{Z}$

$$n(\sigma) = \text{Sp}_{kl} \varrho N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger \sigma \psi} = e^{u(\sigma)} \quad \mathcal{Z} = \text{Sp}_{kl} e^{-\beta(H - \zeta Z)} = e^{-\beta J} \quad (4)$$

enthaltenen Teilinformationen faßt man zweckmäßig wie in [6] zu einer sog. Informationsgröße

$$U(\sigma) = \text{Sp}_{kl} e^{-\beta(H - \zeta Z)} N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger \sigma \psi} = e^{-\beta J + u(\sigma)} \quad (5)$$

zusammen, so daß  $\ln U(\sigma)$  die Bedeutung eines erzeugenden Energie/Korrelations-Funktional erhält.

### 3.2. Ideale Systeme

Für ideale Systeme  $H^0$  läßt sich  $U(\sigma)$  sofort angeben. Dazu wird zuerst  $\varrho$  mit (11.7) und dann  $z(\sigma)\varrho$  wie in (22.3) normalgeordnet:

$$e^{-\beta(H^0 - \zeta Z)} z(\sigma) = [N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger (e^{-\beta(H^0 - \zeta)} - 1)\psi}] [N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger \sigma \psi}] \quad (1)$$

$$= N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} e^{\psi^\dagger \tau e^{-\beta(H^0 - \zeta)} \psi}.$$

Mit (21.5) ergibt sich für die *großkanonische Informationsgröße idealer Systeme*

$$U^0(\sigma) = \text{Sp}_{kl} e^{-\beta(H^0 - \zeta Z)} z(\sigma) = e^{\tau n_1^0} \quad n_1^0(x) = \frac{1}{\Omega} e^{-\beta(\hbar(x) - \zeta)}, \quad (2)$$

woraus durch Vergleich mit (31.5) für die Freie Energie und die Dichtefunktionen

$$-\beta J^0(n_1^0) = \int dx n_1^0(x) \quad n_s^0(x_1 \dots x_s) = n_1^0(x_1) \dots n_1^0(x_s) \quad (3)$$

folgt. Ideale klassische Systeme im Gleichgewicht sind also korrelationsfrei. Dies wird auch durch die aus (21.6) folgende Poisson-Form der Teilchenzahlverteilung

$$W_\zeta^0(M) = \frac{N^M}{M!} e^{-N} \quad N = \int dx n_1^0(x) \quad (4)$$

mit  $N$  als mittlerer Teilchenzahl bestätigt.

3.3. Reale Systeme

In realen Systemen läßt die wegen der Vertauschbarkeit von  $H^0$  und  $V$  mögliche Abspaltung des Wechselwirkungsanteils in Verbindung mit (32.1) erkennen

$$\begin{aligned}
 U(\sigma) &= \text{Sp}_{kl} z(\sigma) e^{-\beta(H^0 - \zeta Z)} e^{-\beta V} \\
 &= N_{n_1^0, \delta/\delta n_1^0} e^{\sigma n_1^0 \delta/\delta n_1^0} \text{Sp}_{kl} N_{\psi^\dagger, \psi} e^{-\psi^\dagger \psi} e^{\psi^\dagger e^{-(\beta h - \zeta) \psi}} e^{-\beta V} \\
 &= N_{n_1^0, \delta/\delta n_1^0} e^{\sigma n_1^0 \delta/\delta n_1^0} e^{-\beta J(n_1^0, v)} \rightsquigarrow \boxed{U(\sigma) = e^{-\beta J(n_1^0, v)}}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

daß das Dichtekorrelationsfunktional einfach aus der freien Energie hervorgeht [5]:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 u(\sigma) &= -\beta(J(n_1^0, v) - J(n_1^0, v)) \\
 &= N_{n_1^0, \delta/\delta n_1^0} (e^{\sigma n_1^0 \delta/\delta n_1^0} - 1) (-\beta) J(n_1^0, v) .
 \end{aligned}
 }
 \tag{2}$$

Es genügt also, die Verschiebung  $\Delta J = J - J^0$  der Freien Energie zu bestimmen. Dazu wird *in dem Wechselwirkungsanteil die Normalordnung* hergestellt:

$$\boxed{e^{-\beta \frac{1}{2} \psi^{\dagger 2} v \psi^2} = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\mathcal{V}(\psi^\dagger, \psi, v)}} .
 \tag{3}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \overset{i}{\vdots} &= \int \Delta x_i = \overset{i}{\vdots} & \leftarrow_i &= \psi^\dagger(x_i) & i \leftarrow &= \psi(x_i) \\
 \underset{j}{\vdots} &= -\beta v(x_i, x_j) & i \leftarrow_j &= \overline{\psi(x_i) \psi^\dagger(x_j)} = [\psi(x_i), \psi^\dagger(x_j)]_{\mp} = \delta(x_i, x_j)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

ergibt sich nach dem Verbundgraphentheorem [2], daß die Verbundgraphensumme  $\gamma(\psi^\dagger \psi, v)$  durch sukzessives Hintereinandersetzen der Bauelemente

$$\frac{1}{2} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} = -\beta \frac{1}{2} \psi^{\dagger 2} v \psi^2
 \tag{5}$$

und Herstellung all der Verknüpfungen entsteht, die zu Verbundgraphen führen. So ergibt sich z. B. in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{1}{2} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \right)_{\text{Verbund}} \\
 = \frac{1}{2!2^2} \left( 2 \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} + 4 \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \right) = \frac{1}{2!^2} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} + \frac{3}{3!} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \overset{\leftarrow}{\leftarrow}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Da die Kontraktionen hier lediglich Kronecker-Symbole bedeuten, schrumpfen deren Abbilder in den Graphen zu Punkten zusammen. Dies hat auch zur Folge, daß in den  $\psi^\dagger \psi$ -Paaren jeweils beide Faktoren stets nur von derselben Variablen abhängen. Nach den Regeln zur Spur-

bildung müssen diese Operatoren-Paare in

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{Sp}_{kl} [N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger (e^{-\beta}(\hbar-\zeta)-1)\psi}] [N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\gamma(\psi^\dagger \psi, v)}] \\ &= \text{Sp}_{kl} e^{-\psi^\dagger \psi} e^{\psi^\dagger e^{-\beta}(\hbar-\zeta)\psi} + \gamma(e^{-\beta}(\hbar-\zeta)\psi^\dagger \psi, v) \end{aligned} \tag{7}$$

einfach durch  $1/\Omega$  ersetzt werden:

$$\boxed{-\beta \Delta J(n_1^0, v) = \gamma(n_1^0, v)} \quad \gamma(n_1^0, v) = \sum_{r \geq 2} \frac{1}{r!} (n_1^0)^r \gamma_r(v) \tag{8}$$

Nach dem Verbundgraphentheorem [2] ergibt sich daher mit der Abkürzung  $\int dx_i n_1^0(x_i) = \bullet$  für die freie Energie die Graphensumme

$$\begin{aligned} -\beta J(n_1^0, v) &= \bullet + \frac{1}{2!} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} + \dots \Big\} + \\ &+ \frac{1}{3!} \left\{ 3 \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \right\} + \dots \right\} + \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right) + \dots \Big\} + \dots \end{aligned} \tag{9}$$

aus der man mit (8) unmittelbar die Ursell-Cluster-Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma_r(x_1 \dots x_r) &= \frac{\delta^r}{\delta n_1^0(x_1) \dots \delta n_1^0(x_r)} \gamma(n_1^0) \Big|_{n_1^0=0} \\ \gamma_2(x_1, x_2) &= \begin{array}{c} |1 \\ |2 \end{array} + \frac{1}{2!} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \dots \\ \gamma_3(x_1, x_2, x_3) &= \begin{array}{c} |1 \\ |2 \\ |3 \end{array} + \begin{array}{c} |2 \\ |3 \\ |1 \end{array} + \begin{array}{c} |3 \\ |1 \\ |2 \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

in Übereinstimmung mit [3] abliest.

Bei diesem Vorgehen entsteht die sonst auf ganz andere Weise gewonnene Mayer'sche Cluster-Entwicklung [3] erst durch eine ganz bestimmte *Teilsummation*. Weist nämlich die Wechselwirkung ein hard-core auf, so sind die in (9) enthaltenen Integrationen nicht mehr definiert und man hat, um die Wechselwirkung zweier Teilchen bis zu beliebig hoher Ordnung zu erfassen, genau wie in der Brueckner-Theorie der Kernmaterie [8] die Summe aller Leitergraphen zu bilden, die hier wegen der Einfachheit der Kontraktionen geschlossen angegeben werden kann. Der dabei entstehende, der Bruecknerschen *K*-Matrix entsprechende Ausdruck  $f_{ij} = (\exp(-\beta)v_{ij}) - 1$  verschwindet im Innern des hard-core und ermöglicht damit Integrationen über den gesamten *x*-Bereich. Andererseits kann man ausgehend von (9) auch die Schwierigkeiten langreichweitiger Wechselwirkungen wie in Elektronengasen, Elektrolyten u. ä. durch Teilsummationen beseitigen. Die hierbei auftretenden Polarisierungseffekte werden durch die ebenfalls von MAYER [9] angegebene klassische Ring-Cluster-Summation berücksichtigt, die den quantenmechanischen Teilsummationen von MACKE, GELL-MANN/BRUECKNER und anderen [10–13] entspricht.

Wie aus (2) hervorgeht, ist die Freie Energie (9) zugleich die Erzeugende der *klassischen Dichtekorrelationen*  $u_s$ :

$$\begin{aligned}
 u_s(x_1 \dots x_s) &= n_1^0(x_1) \dots n_1^0(x_s) \frac{\delta}{\delta n_1^0(x_s)} \dots \frac{\delta}{\delta n_1^0(x_1)} (-\beta) J(n_1^0, v) \\
 &= u_s^0(x_1 \dots x_s) + n_1^0(x_1) \dots n_1^0(x_s) \sum_{r(\geq s)} \frac{1}{(r-s)!} \times \\
 &\quad \times \int dx_{s+1} n_1^0(x_{s+1}) \dots \int dx_r n_1^0(x_r) \gamma_r(x_1 \dots x_s, x_{s+1} \dots x_r),
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

wobei  $u_s^0(\dots)$  nur für  $s = 1$  von Null verschieden ist. Mit der Abkürzung  $n_1^0(x_i) = \underset{i}{\circ}$  lauten die ersten Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1) &= \underset{1}{\circ} + \frac{1}{1!} \left\{ \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \frac{1}{2!} \left\{ \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} \right\} + \dots \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left\{ 2 \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \dots + \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \dots \right\} + \dots \tag{12} \\
 u_1(x_1, x_2) &= \left\{ \underset{2}{\underset{1}{\circ}} + \frac{1}{2!} \left\{ \underset{2}{\underset{1}{\circ}} \right\} + \dots \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{1!} \left\{ \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \dots + \underset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} + \dots \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

Die  $u_s$  entstehen also in Übereinstimmung mit [3] aus der Freien Energie  $(-\beta)J$  durch sukzessives Beseitigen von Integrationen oder aus den Cluster-Funktionen  $\gamma_r$  durch sukzessives Durchführen von Integrationen.

Aus (11) liest man übrigens noch ab, daß die  $u_s$  die Normierungs- und Reduktionseigenschaften

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s!} 1^s u_s &= N_{n_1^0, \delta/\delta n_1^0} \frac{\left( n_1^0 \frac{\delta}{\delta n_1^0} \right)^s}{s!} (-\beta) J(n_1^0, v) = \left( n_1^0 \frac{\delta}{\delta n_1^0} \right)_s (-\beta) J(n_1^0, v) \tag{13} \\
 &= \delta_{s-1} 1 u_1^0 + \sum_{r \geq 2} \binom{r}{s} \frac{1}{r!} (n_1^0)^r \gamma_r(v)
 \end{aligned}$$

besitzen. Dabei wurde (22.12) aus [2] benutzt.

Da Änderungen der idealen Einteilchendichte  $n_1^0(x) \sim \exp(-\beta) a(\mathbf{r})$  prinzipiell durch Änderungen eines äußeren Feldes  $a(\mathbf{r})$  realisiert werden können, enthält (11) oder auch (2) die physikalisch plausible Aussage, daß das Verhalten eines Systems im äußeren Feld, d. h. die Kenntnis der Freien Energie  $J(n_1^0)$  als Funktional von  $n_1^0(x)$  bzw.  $a(\mathbf{r})$ , Aufschluß gibt über die innere Dynamik, d. h. über die Dichte-Korrelationen  $u_s(\dots)$  und umgekehrt. Zusammenfassend lautet die *großkanonische*

*Informationsgröße realer Systeme*

$$\begin{aligned}
 U(\sigma) &= \text{Sp}_{kl} e^{-\beta(H-\zeta Z)} z(\sigma) = e^{\tau n_1^0 + \gamma(\tau n_1^0, v)}, \\
 e^{-\beta \frac{1}{2} \psi^\dagger \psi^2} &= N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\gamma(\psi^\dagger, \psi)}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Damit ist gezeigt, daß die Anwendung quantenfeldtheoretischer Methoden (Besetzungszahl-Formalismus, Verbundgraphentheorem, Funktionalableitungen) die Clusterentwicklungen der klassischen Gleichgewichts-Statistik auf einfache Weise reproduziert. Das analoge Vorgehen in der Quantenstatistik führt dort zu einer ähnlichen Reproduktion der Entwicklungen von MONTROLL/WARD und BLOCH/DE DOMINICIS.

Herrn Prof. Dr. W. MACKE danke ich für sein förderndes Interesse sowie für die Unterstützung dieser Arbeit durch Gewährung von Arbeitsmöglichkeiten am Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität Dresden.

**Literatur**

1. SCHÖNBERG, M.: Nuovo Cimento **9**, 1139 (1952) u. **10**, 419 u. 697 (1953).
2. ZIESCHE, P.: Commun. Math. Phys. **5**, 301 (1967).
3. Siehe z. B. UHLENBECK, G. E., and G. W. FORD: In: J. DE BOER, and G. E. UHLENBECK: Studies in statist. mech. Amsterdam: North-Holland Publ. 1962.
4. BOGOLJUBOW, N. N.: J. Phys. (USSR) **10**, 256 u. 265 (1946).
5. Siehe auch G. STELL: In: H. L. FRISCH, J. L. LEBOWITZ: The equilibrium of classical fluids. Amsterdam: Benjamin 1964.
6. ZIESCHE, P.: Acta Phys. Hung. **21**, 219 (1966).
7. SYMANZIK, K.: Z. Naturforsch. **9a**, 809 (1954).
8. BRUECKNER, K. A., and C. A. LEVINSON: Phys. Rev. **97**, 1344 (1955).
9. MAYER, J. E.: J. Chem. Phys. **18**, 1426 (1950).
10. MACKE, W.: Z. Naturforsch. **5a**, 192 (1950).
11. GELL-MANN, M., and K. A. BRUECKNER: Phys. Rev. **106**, 364 (1957).
12. HUBBARD, J.: Proc. Roy. Soc. A **243**, 336 (1958).
13. DU BOIS, D. F.: Ann. Phys. **7**, 174 (1959) u. **8**, 24 (1959).