# SUR LE SYSTÈME DE SOUSLIN D'ENSEMBLES DANS L'ESPACE TRANSFINI

ISAIE MAXIMOFF

Soit $\Omega_i$ le premier nombre transfini que précèdent $\aleph_i$ nombres transfinis. La suite de nombres $x_\alpha$, $(1 \leqq x_\alpha < \Omega_i)$:

$$x = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_\alpha, \cdots\}, \qquad 1 \leqq \alpha < \Omega_i, \tag{1}$$

sera nommée point de l'espace transfini d'ordre $i$. Nous le désignons par $I_x^{(i)}$.

Appelons *espace transfini à m dimensions* l'ensemble de tous les systèmes $[x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}]$ où $x^{(s)}$, $(1 \leqq s \leqq m)$, est un point quelconque de $I_{x^{(s)}}^{(i)}$. Cet espace sera désigné par $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}}^{(i)}$ ou par $I_X^{(i)}$ où $X = [x^{(1)}x^{(2)} \cdots x^{(m)}]$.

Une suite d'ensembles

$$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_\alpha, \cdots, \qquad \alpha < \Omega_i, \tag{2}$$

de points de $I_X^{(i)}$ est appelée *convergente* $(\Omega_i)$ si pour chaque point $X$ de cet espace il existe une valeur $\alpha = \alpha_0$, dépendant de $X$, telle que $X$ appartient nécessairement à tous les $E_\alpha$, $(\alpha \geqq \alpha_0)$, ou bien n'appartient à aucun des $E_\alpha$, $(\alpha \geqq \alpha_0)$.

L'ensemble $E$ de tous les points $X$ qui appartiennent à tous les $E_\alpha$, $(\alpha \geqq \alpha_0)$ ($\alpha_0$ dépend de $X$), est appelé *limite* $(\Omega_i)$ de la suite convergente (2) et nous écrivons $E = \lim_{\alpha \to \Omega_i} E_\alpha$.

Soit

$$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_\alpha, \cdots, \qquad \alpha < \Omega_i, \tag{3}$$

une suite quelconque d'ensembles situés dans $I_X^{(i)}$. Nous dirons que l'ensemble $S = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_\alpha + \cdots$, $(\alpha < \Omega_i)$, est *somme* $(\Omega_i)$ *et l'ensemble* $P = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \cdots \cdot E_\alpha \cdot \cdots$, $(\alpha < \Omega_i)$, est *partie commune* $(\Omega_i)$ des ensembles de la suite (3).

Il est évident que l'opération $\lim_{\alpha \to \Omega_i} E_\alpha$ se ramène encore aux sommes $(\Omega_i)$ et aux parties communes $(\Omega_i)$ par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to \Omega_i} E_\alpha = {} & (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \cdots \cdot E_\alpha \cdot \cdots) \\ & + (E_2 \cdot E_3 \cdot E_4 \cdot \cdots \cdot E_\alpha \cdot \cdots) + \cdots \\ & + (E_\beta \cdot E_{\beta+1} \cdot E_{\beta+2} \cdot \cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

où $\alpha < \Omega_i$, $\beta < \Omega_i$.

*Système initial.* Prenons un système $\mathfrak{M}$ d'ensembles quelconques $M$ de l'espace $I_X^{(i)}$. Nous dirons que $\mathfrak{M}$ est le système initial.

Tout ensemble $E$ de $I_X^{(t)}$ qu'on obtient, à partir des ensembles du système initial au moyen des deux opérations: somme $(\Omega_i)$ et partie commune $(\Omega_i)$ répétées au plus une infinité $\aleph_i$ de fois, est dit ensemble du système $B$ (de Borel) ou ensemble de Borel.

Soit $\nu=(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_\kappa, \cdots)$, $\kappa<\Omega_0$, une suite quelconque de nombres $n_\kappa$ tels que $1\leqq n_\kappa<\Omega_i$. Désignons par $\{\nu\}$ l'ensemble de toutes les suites $\nu$.

Soit $F(n_1)$, $F(n_1n_2)$, $F(n_1n_2n_3)$, $\cdots$, $F(n_1n_2\cdots n_\kappa)$, $\cdots$ une suite d'ensembles quelconques de $I_X^{(t)}$. Nous introduisons la désignation

$$E(\nu) = F(n_1)\cdot F(n_1n_2)\cdot F(n_1n_2n_3)\cdot \cdots \cdot F(n_1n_2\cdots n_\kappa)\cdot \cdots .$$

Si $A$ est la somme de tous les ensembles $E(\nu)$, $\nu$ parcourant tous les éléments de $\{\nu\}$, convenons écrire $A=\mathfrak{S}_\nu E(\nu)$ ou

$$(5)\quad A = \mathfrak{S}_{\nu} F(n_1)\cdot F(n_1n_2)\cdot F(n_1n_2n_3)\cdot \cdots \cdot F(n_1n_2\cdots n_\kappa)\cdot \cdots, \quad \kappa<\Omega_0.$$

Nous dirons que l'ensemble $A$ appartient au système de Souslin si tous les ensembles $F(n_1)$, $F(n_1n_2)$, $F(n_1n_2n_3)$, $\cdots$, $F(n_1n_2\cdots n_\kappa)$, $\cdots$ sont contenus dans le système $B$.

Sans restreindre la généralité de définition on peut supposer ici que

$$(6)\qquad F(n_1)\supset F(n_1n_2)\supset F(n_1n_2n_3)\supset \cdots \supset F(n_1n_2\cdots n_\kappa)\supset \cdots .$$

Il est évident que tout ensemble du système $B$ appartient au système de Souslin.

Par le raisonnement parfaitement analogue au raisonnement classique sur le système de Souslin dans l'espace ordinaire (voir Dr. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin, 1927, pp. 92–93) on peut démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Si les ensembles* $F(n_1, n_2, \cdots, n_\kappa)$, $(1\leqq\kappa<\Omega_0)$, *dans la formule* (5) *appartiennent au système de Souslin, l'ensemble A l'est aussi.*

En effet, soient $F(n_1n_2\cdots n_\kappa)=\mathfrak{S}_{\alpha^{(\kappa)}}H_{\alpha^{(\kappa)}}$ où

$$H_{\alpha^{(\kappa)}} = M_{\alpha_1^{(\kappa)}}^{n_1n_2\cdots n_\kappa}\cdot M_{\alpha_2^{(\kappa)}}^{n_1n_2\cdots n_\kappa}\cdot M_{\alpha_3^{(\kappa)}}^{n_1n_2\cdots n_\kappa}\cdot \cdots$$

et les ensembles $M_{\alpha_r^{(\kappa)}}^{n_1n_2\cdots n_\kappa}$ appartiennent au système de Borel. Maintenant nous rangeons les éléments de la matrice

$$A = \left\| \begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 \cdots \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \cdots \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \end{matrix} \right\|$$

en suite simple: $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_s, \cdots, (s<\Omega_0)$, de telle manière que la matrice $A$ soit égale à la matrice

$$B = \left\| \begin{matrix} m_1 & m_3 & m_5 & \cdots \\ m_2 & m_6 & m_{10} & \cdots \\ m_4 & m_{12} & m_{20} & \cdots \\ m_8 & m_{24} & m_{40} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix} \right\| .$$

Après cela nous introduisons la désignation

$$\text{(a)} \qquad M[2^r(2\kappa+1)] = M^{m_1 m_3 \cdots m_{2^{r+1}}}_{m_{2^{r+1}} m_{2^{r+1} 3} m_{2^{r+1} 5} \cdots m_{2^{r+1}(2\kappa+1)}}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \cdots, \kappa = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

De cette formule il suit que à tout ensemble $M[s]$ correspond un et un seul système $(m_1, m_2, \cdots, m_{2s})$ et inversement à tout système $(m_1, m_2, \cdots, m_{2s})$ correspond un et un seul ensemble $M[s]$. C'est pour cette raison on peut introduire la désignation nouvelle

$$\text{(b)} \qquad M_{m_1 m_2 \cdots m_{2s}} = M[s].$$

Maintenant nous introduisons l'ensemble $M_{m_1 m_2 \cdots m_{2s} m_{2s+1}}$ d'après

$$\text{(c)} \qquad M_{m_1 m_2 \cdots m_{2s+1}} = M_{m_1 m_2 \cdots m_{2s}}.$$

Ceci étant, on peut écrire la formule

$$A = \mathfrak{S}_\nu F(n_1) F(n_1 n_2) \cdots F(n_1 n_2 \cdots n_\kappa) \cdots = \mathfrak{S}_\mu M_{m_1} M_{m_1 m_2} M_{m_1 m_2 m_3} \cdots ,$$

où $\mu = (m_1 m_2 m_3 \cdots)$. Comme $M_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa}$ appartient au système de Borel, l'ensemble $A$ appartient au système de Souslin, ce qu'il fallait démontrer.

Voici les deux théorèmes qui sont conséquences immédiates du Théorème 1.

THÉORÈME 2. *Si les ensembles $E_\alpha$, $(1 \leqq \alpha < \Omega_i)$, appartiennent au système de Souslin, la somme $(\Omega_i)$: $E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_\alpha + \cdots$ l'est aussi.*

En effet, si nous posons $F(n_1 n_2 \cdots n_\kappa) = E_{n_1}$, nous obtenons:

$$\mathfrak{S}_\nu F(n_1) \cdot F(n_1 n_2) \cdot F(n_1 n_2 n_3) \cdot \cdots \cdot F(n_1 n_2 n_3 \cdots n_\kappa) \cdot \cdots$$
$$= E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_{n_1} + \cdots, \quad n_1 < \Omega_i, \ \kappa < \Omega_0.$$

THÉORÈME 3. *Si les ensembles $E_n$, $(1 \leqq n < \Omega_0)$, appartiennent au système de Souslin, l'ensemble $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \cdots \cdot E_n \cdot \cdots$ l'est aussi.*

En effet, si nous posons $F(n_1 n_2 \cdots n_\kappa) = E_\kappa$, nous obtenons:

$$\underset{\nu}{\mathfrak{S}} F(n_1)\cdot F(n_1 n_2)\cdot \cdots \cdot F(n_1 n_2 \cdots n_\kappa)\cdot \cdots = E_1\cdot E_2\cdot E_3\cdot \cdots \cdot E_\kappa\cdot \cdots, \qquad \kappa < \Omega_0.$$

Si un ensemble $A$ appartient au système de Souslin, nous l'appelons ensemble de Souslin.

Soit $A$ un ensemble de Souslin quelconque. Dans ce cas il y a lieu la formule (5). Nous introduisons la désignation $r = (n_1, n_2, \cdots, n_\kappa)$, $(\kappa < \Omega_0)$, et nous dirons que le système $r$ *précède* le système $(r, n) = (n_1, n_2, \cdots, n_\kappa, n)$ ou le système $(r, n)$ *suit* le système $(r)$.

Soit $R_0$ un ensemble quelconque de systèmes $(n_1, n_2, \cdots, n_\kappa)$ où $1 \leqq n_r < \Omega_i$; $r = 1, 2, 3, \cdots, \kappa$; $\kappa < \Omega_0$. Si $r = (n_1 n_2 \cdots n_\kappa)$ appartient à $R_0$ et s'il n'y a aucun élément $(r, n)$ qui suit l'élément $r$ et appartient à $R_0$, nous dirons que $r$ est un élément *final* de $R_0$.

Étant donné un ensemble quelconque $R_0$ d'éléments $r$, nous formons la suite des ensembles $R_\alpha$ provenant de l'ensemble donné $R_0$:

$$(7) \qquad R_0, R_1, R_2, \cdots, R_\alpha, \cdots, R_\gamma, \cdots$$

de manière suivante. On obtient $R_\gamma$, si $\gamma$ est de première espèce, $\gamma = \gamma^* + 1$, en enlevant de l'ensemble précédent déjà défini $R_{\gamma^*}$ tout élément final, et, si $\gamma$ est de seconde espèce, on obtient $R_\gamma$ en faisant la partie commune des ensembles précédents $R_{\gamma'}$, $(\gamma' < \gamma)$, déjà définis.

D'après ce qui précède l'inégalité $\gamma < \gamma'$ entraîne $R_\gamma \supset R_{\gamma'}$. Désignons par $\Delta_\gamma$ l'ensemble des éléments de $R_{\gamma+1}$ sans faire partie de $R_\gamma$. On voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta_\gamma$ soit nul est que $R_{\gamma+1} = R_\gamma$. Chacun des ensembles

$$(8) \qquad \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_\gamma, \cdots$$

à la puissance égale au plus à $\aleph_i$, et deux d'entre eux n'ont aucun élément commun. Il y a donc au plus une infinité $\aleph_i$ d'ensembles (8) non nuls; les indices $\gamma$ de ceux des ensembles (8) qui ne sont pas nuls forment ainsi un ensemble de la puissance égale au plus à $\aleph_i$, par suite, il y a un nombre $\rho$, $(\rho < \Omega_{i+1})$, qui a la propriété suivante: si $\rho' \geqq \rho$, on a $\Delta_{\rho'} = 0$ d'où résulte

$$(9) \qquad R_\rho = R_{\rho+1} = R_{\rho+2} = \cdots = R_{\rho'} = \cdots, \qquad \rho' > \rho.$$

Désignons par $R_{\Omega_{i+1}}$ la partie commune à tous les ensembles (7). On voit bien que les ensembles (7) sont, pour les valeurs suffisamment grandes de l'indice, identiques à $R_{\Omega_{i+1}}$.

Il y a un nombre bien déterminé qui est le plus petit de tels qu'on ait $R_\eta = R_{\Omega_{i+1}}$. Nous le désignons par $\eta$ et dirons que $\eta$ est l'indice de $R_0$: pour $\xi < \eta$ on a $R_\xi \supset R_{\xi+1}$ et pour $\xi \geqq \eta$ on a $R_\xi = R_{\Omega_i}$.

Désignons par $K(R_0)$ l'ensemble $R = R_\eta = R_{\eta+1} = R_{\eta+2} = \cdots$ et par $R_0(X)$ l'ensemble de tous les systèmes $r = (n_1 n_2 \cdots n_\kappa)$, $\kappa < \Omega_0$, tels que $X$ appartient à l'ensemble $F(r) = F(n_1 n_2 \cdots n_\kappa)$. Soit $\eta$ le plus petit nombre tel que $KR_0(X) = R_\eta(X) = R_{\eta+1}(X) = \cdots$. Dans ce cas $\eta$ est dit *l'indice* du point $X$, et nous écrivons l'égalité $\eta = \eta(X)$.

D'ailleurs, $R(X) = R_\eta(X)$ est aussi appelé indice du point $X$. Désignons par $A_\eta$ $(B_\eta)$ l'ensemble de tous les points $X$ appartenant à l'ensemble $A$ $(B)$ où $B = CA$ et ayant l'indice $\eta$. Alors nous avons les formules

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_\gamma + \cdots,$$
$$B = B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_\gamma + \cdots, \quad 0 \leqq \gamma < \Omega_{i+1}.$$

Il est évident que les ensembles

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_\gamma, \cdots, \qquad B_0, B_1, B_2, B_3, \cdots, B_\gamma, \cdots,$$
$$0 \leqq \gamma < \Omega_{i+1},$$

n'ont aucun point commun deux à deux. Nous les appelons *constituantes* respectivement de $A$ et de $B$.

Maintenant nous allons démontrer notre théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 4. *Si $A$ est un ensemble de Souslin quelconque, alors nous avons les développements*

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_\alpha + \cdots,$$
$$B = B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_\alpha + \cdots, \qquad \alpha < \Omega_{i+1},$$

*de l'ensemble $A$ et de son complémentaire $B = CA$ en une infinité $\aleph_{i+1}$ d'ensembles constituantes $A_\alpha$, $B_\alpha$, $(0 \leqq \alpha < \Omega_{i+1})$, chacun desquels appartient au système $B$.*

Démonstration de ce théorème consiste de quatre parties.

*La première partie.* Tout d'abord montrons que l'ensemble $R_\xi(X)$ défini précédemment contient tous les éléments précédents, c'est à dire,

$$(10) \qquad (r, n) \in R_\xi(X) \rightarrow (r) \in R_\xi(X),$$

où $\rightarrow$ signifie l'implication logique.

Cette proposition est vraie pour $\xi = 0$.

En effet, si $(r, n)$ appartient à $R_0(X)$, on a $X \in F(r, n)$, par suite, $X \in F(r)$ d'où il suit $r \in R_0(X)$. Maintenant supposons que cette proposition est vraie pour $\xi=\alpha$ et démontrons la pour $\xi=\alpha+1$; d'après l'hypothèse faite $r \in R_\alpha(X)$. Donc, $R_\alpha(X)$ contient $(r)$ et $(r, n)$, par suite, $(r)$ n'est pas un élément final de $R_\alpha(X)$; il en suit que $(r) \in R_{\alpha+1}(X)$.

Soit $\eta$ un nombre quelconque de seconde espèce, $\eta<\Omega_{i+1}$, et soit $(r, n) \in R_\eta(X)$; alors $(r, n)$ est contenu dans chaque $R_\xi(X)$ où $\xi<\eta$.

Si $(r, n) \in R_\xi(X)$, on a $(r) \in R_\xi(X)$ pour tout $\xi<\eta$, par suite, $r \in R_\eta(X)$.

*La deuxième partie.* Désignons par $F_\xi(r)$ l'ensemble des points $X$ tels que $r \in R_\xi(X)$. Cela veut dire que la relation $r \in R_\xi(X)$ est équivalente à la relation $X \in F_\xi(r)$. Si $X \in F_\xi(r, n)$ on a $(r, n) \in R_\xi(X)$, par suite, $r \in R_\xi(X)$ d'où il suit $X \in F_\xi(r)$. Donc,

$$F_\xi(r, n) \subset F_\xi(r). \tag{11}$$

Il est évident que

$$F_0(r) = F(r), \quad F_{\xi+1}(r) = \mathfrak{S}_n F_\xi(r, n), \quad F_\eta(r) = \mathfrak{D}_{\xi<\eta} F_\xi(r), \quad n<\Omega_i, \tag{12}$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le signe de la sommation s'étendant sur tous $n<\Omega_i$ et $\mathfrak{D}_{\xi<\eta}$ est le signe de la partie commune s'étendant sur tous $\xi<\eta$.

La première des égalités (12) est une consequence immédiate de la définition de $R_0(X)$. En effet, la relation $X=F_0(r)$ est équivalente à la relation $r \in R_0(X)$. Mais cette dernière est équivalente à la relation $X \in F(r)$. La deuxième des égalités (12) s'obtient par le raisonnement suivant: la relation $X \in F_{\xi+1}(r)$ est équivalente à la relation $r \in R_{\xi+1}(X)$. Mais dans ce cas $r$ n'est pas élément final de $R_\xi(X)$, par suite, $(r, n) \in R_\xi(X)$ d'où $X \in F_\xi(r, n)$.

La troisième des égalités s'obtient par le raisonnement analogue: la relation $X \in F_\eta(r)$ est équivalente à la relation $r \in R_\eta(X) = \mathfrak{D}_{\xi<\eta} R_\xi(X)$. Mais la dernière est équivalente à la suite des relations:

$$r \in R_0(X),\ r \in R_1(X), \cdots, r \in R_\xi(X), \cdots, \qquad \xi<\eta,$$

équivalentes respectivement aux relations

$$X \in F_0(r),\ X \in F_1(r), \cdots, X \in F_\xi(r), \cdots, \qquad \xi<\eta.$$

Mais le dernier système des relations est équivalent à la relation $X \in \mathfrak{D}_{\xi<\eta} F_\xi(r)$ d'où il suit $F_\eta(r) = \mathfrak{D}_{\xi<\eta} F_\xi(r)$.

*La troisième partie.* Maintenant posons

$$S_\xi = \mathfrak{S}_r F_\xi(r), \tag{13}$$

$$T_\xi = \mathfrak{S}_r [F_\xi(r) - F_{\xi+1}(r)]. \tag{14}$$

$F_0(r)$ est ensemble de Borel, puisque $F_0(r)=F(r)$. En partant des ensembles $F_0(r)$ et en tenant compte de formules (12) on peut démontrer que tous les ensembles $F_\xi(r)$ appartiennent au système $B$, par suite, $S_\xi$ et $T_\xi$ appartiennent aussi à ce système.

Il est à remarquer que $S_\xi$ est l'ensemble des points $X$ pour lesquels $R_\xi(X) \neq 0$, et $T_\xi$ est l'ensemble des points $X$ pour lesquels

$$R_\xi(X) - R_{\xi+1}(X) \neq 0.$$

*La quatrième partie.* Maintenant nous allons démontrer que

$$S_\xi = A + \sum_{\eta>\xi} B_\eta, \qquad T_\xi = \sum_{\eta>\xi} A_\eta + \sum_{\eta>\xi} B_\eta. \tag{15}$$

Pour cela nous faisons les remarques suivantes: En premier lieu, si $X \varepsilon A$ on a $KR_0(X) \neq 0$ et inversement si $KR_0(X) \neq 0$ on a $X \varepsilon A$. En second lieu, si $X \varepsilon B$ on a $KR_0(X) = 0$ et inversement si $KR_0(X) = 0$ on a $X \varepsilon B$. En troisième lieu, $R_\xi(X) \supset R_{\xi+1}(X)$ pour $\xi < \eta(X)$ et $R_\xi(X) = R_{\xi+1}(X)$ pour $\xi \geqq \eta(X)$ où $\eta(X)$ est l'indice du point $X$.

Soit $X$ un point quelconque de $I_X^{(i)}$. Nous considérons les cas possibles suivants:

*Le premier cas*: $X \varepsilon S_\xi$. Dans ce cas $R_\xi(X) \neq 0$. Inversement, si $R_\xi(X) \neq 0$ on a $X \varepsilon S_\xi$. Si $X \varepsilon A$ on a $KR_0(X) \neq 0$, par suite, $R_\xi(X) = 0$ d'où $X \varepsilon S_\xi$, c'est à dire, $A \subset S_\xi$. Si $X \varepsilon B$ on a $KR_0(X) = 0$, par suite, $R_\eta(X) = 0$, mais $X \varepsilon S_\xi$, par suite, $X \varepsilon R_\xi(r)$ d'où $\xi < \eta$, c'est à dire, l'indice de $X$ est supérieure à $\xi$. Donc $S_\xi = A + \sum_{\eta>\xi} B_\eta$.

*Le second cas*: $X \varepsilon T_\xi$. Dans ce cas $R_\xi(X) - R_{\xi+1}(X) \neq 0$, alors $\eta > \xi$, par suite, $T_\xi = \sum_{\eta>\xi} A_\eta + \sum_{\eta>\xi} B_\eta$. De formules (15) on tire

$$\begin{aligned} S_\xi - T_\xi &= A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_\xi, \\ I_x^{(i)} - S_\xi &= B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + \beta_\xi. \end{aligned} \tag{16}$$

Au moyen de ces formules par le procédé d'induction on peut démontrer que les ensembles $A_\xi$ et $B_\xi$ sont contenus dans le système $B$, ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant posons les définitions suivantes:

(a) Si pour un point $x = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_\alpha, \cdots\}$, $(\alpha < \Omega_i)$, de l'espace $I_x^{(i)}$ tous les nombres $x_n$, $(1 \leqq n < \Omega_0)$, sont finis, $x_n < \Omega_0$, alors nous dirons que $x$ possède un *noyau* $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$, $(1 \leqq n < \Omega_0)$, qui est un point de l'espace de Baire $I^{(0)}$.

(b) Désignons par $n(E)$ l'ensemble formé des noyaux de tout les points de $E$; $n(E)$ est dit le noyau de l'ensemble $E$.

(c) Si $E_0$ est le noyau d'un ensemble $E$ de Borel, nous dirons que $E_0$ est ensemble de Borel $(\aleph_i)$ dans $I_x^{(0)}$.

(d) Si $E_0$ est le noyau d'un ensemble $E$ de Souslin, nous dirons que $E_0$ est ensemble de Souslin $(\aleph_i)$ dans $I_x^{(0)}$.

(e) Si $E$ contient tout ensemble $\mathcal{E}$ tel que $n(E)=n(\mathcal{E})$, nous dirons que $E$ est *normal.*

Ceci étant, prenons un ensemble de Souslin quelconque $A$ de points de $I_x^{(i)}$. D'après le Théorème 4 on a

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_\alpha + \cdots , \\ CA &= B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_\alpha + \cdots , \qquad 0 \leqq \alpha < \Omega_{i+1}. \end{aligned}$$

Il est évident que si $E$ est normal on a

$$n(CE) = C[n(E)] \tag{17}$$

d'où il suit pour $A$ normal

$$\begin{aligned} n(A) &= n(A_0) + n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_\alpha) + \cdots , \\ C[n(A)] &= n(B_0) + n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_\alpha) + \cdots , \\ & \qquad\qquad \alpha < \Omega_{i+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Donc, nous avons obtenu le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Pour tout ensemble a de Souslin* ($\aleph_i$) *dans* $I_x^{(0)}$ *on peut trouver les ensembles de Borel* ($\aleph_i$):

$$a_0, a_1, a_2, \cdots , a_\alpha, \cdots , \qquad b_0, b_1, b_2, \cdots , b_\alpha, \cdots , \qquad \alpha < \Omega_{i+1},$$

*de cet espace tels que*

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_\alpha + \cdots , \\ b &= b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_\alpha + \cdots , \qquad \alpha < \Omega_{i+1}. \end{aligned}$$

TCHEBOKSARY, U.R.S.S.