TIME AS A FOURTH DIMENSION.

BY PROFESSOR R. C. ARCHIBALD.

WHO first conceived the idea of time as a fourth dimension? In view of the recent development of the theory of relativity the answer to this question is of some interest to both mathematician and physicist. With the definite formulation of our ideas concerning space of n dimensions during the latter part of the last century the conception occurred, doubtless, to many people. But, so far as I am aware, writers who discuss the subject have invariably given the credit to Lagrange (1736–1813), and have referred to a paragraph in either the first* (1797, Loria† and Enriques‡) or second§ (1813, Dühring‖ and Sommerville¶) editions of his Théorie des Fonctions analytiques.** This paragraph, the first of the section "Application de la théorie des fonctions à la mécanique," is as follows:††

"Nous allons employer la théorie des fonctions dans la mécanique. Ici les fonctions se rapportent essentiellement au temps, que nous désignerons toujours par t; et comme la position d'un point dans l'espace dépend de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ces coordonnées, dans les problémes de mécaniques, seront censées être fonctions de t. Ainsi on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique."

---

* Paris, Prairial, an V [= 1797], p. 223.

† G. Loria, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie . . . ins Deutsche übertragen von F. Schütte, Leipzig, 1888, pp. 116–117; also Il Passato ed il Presente delle principali Teorie geometriche, terza ed., Torino, 1907, p. 327.

‡ F. Enriques, Encyclopédie des Sciences Math., tome III, vol. 1, p. 71 (1911); also Encyklopädie d. Math. Wiss., Bd. III, p. 63 (1907).

§ Paris, 1813, p. 311.

‖ E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Leipzig, 1877, p. 562f.

¶ D. M. Y. Sommerville, Bibliography of Non-Euclidean Geometry, London, 1911, p. 17.

** There are four other editions of this work: A German translation of the first by J. P. Grüson, Berlin, 1798–99; a German edition, with notes, of the second by A. L. Crelle in Bd. I of Lagrange's Mathematische Werke, Berlin, 1823; a fourth French edition reprinted from the second in Lagrange's Œuvres, tome IX (1881); the third French edition (best), edited by J. A. Serret, Paris, 1847.

†† I quote from the second edition. The only difference of the paragraph from that of the first edition is in the first sentence.

No further elaboration of this idea occurs in the published writings of Lagrange.

Apparently independent of earlier suggestion, a writer in *Nature** developed the idea of "time-space." A decade later the popular English novelist Herbert George Wells wrote a serial, for W. E. Henley's *New Review*,† in which an invention for negotiating similar "space" is basic.

Then came the important mathematical developments by R. Mehmke,‡ A. Einstein,§ H. Minkowski,|| M. Abraham,¶ A. Sommerfeld,** Wilson and Lewis,†† to mention only a few names.‡‡

But the main purpose of this note is to make a very small contribution to the history of geometry by way of answer to the question with which this paper commences. Long before the publication of the Fonctions analytiques, indeed as far back as 1754, d'Alembert (1717–1783) published the article "Dimension" in the famous Encyclopédie edited by Diderot and himself.§§ Here the idea of fourth dimension is dwelt

* March 26, 1885, vol. 31, p. 481; "Four-dimensional space," by "S."

† Jan.–June, 1895, vol. 12; "The time machine," republished in book form, London, 1895.

‡ "Ueber die darstellende Geometrie der Räume von vier und mehr Dimensionen, mit Anwendungen auf die graphische Mechanik, die graphische Lösung von Systemen numerischer Gleichungen und auf Chemie." Vortrag, *Math. naturw. Mitt.*, Stuttgart (2), vol. 6, 1904, p. 44 ff.

§ "Zur Elektrodynamik bewegter Körper," *Annalen der Physik*, 1905, Bd. 322, p. 391 ff.

|| "Raum und Zeit," Vortrag, gehalten zu Köln, am 21 September, 1908, Leipzig, 1909. Numerous editions of this Vortrag have been published. Another edition may be found in Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, Bd. II, Leipzig u. Berlin, 1911, p. 431 ff.

¶ "Sull'elettrodinamica di Minkowski (Vettori e tensori di quattro dimensioni)," *Palermo, Rend. Circ. Mat.*, vol. 30 (1910), p. 33 ff.

** "Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra," *Annalen der Physik*, 1910, Bd. 337, p. 749 ff.

†† E. B. Wilson and G. N. Lewis, "The space-time manifold of relativity. The non-euclidean geometry of mechanics and electromagnetics," *Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences*, Nov., 1912, vol. 48, pp. 389–507.

‡‡ For bibliographies of the theory of relativity the reader may consult M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl., Braunschweig, 1913, and the article by J. Laub in the *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektrotechnik*, 1910, Bd. 7, p. 405 f.

§§ Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des Arts et des métiers, par une societé de gens de Lettres. Mis en ordre et publié par M. Diderot . . .; et quant à la partie mathématique par M. d'Alembert . . ., tome IV, Paris, M. DCC. LIV, pp. 1009–1010; 3e éd., Livourne, tome IV, 1772, pp. 922–923; Encyclopédie méthodique, Mathématiques, par MM. d'Alembert, l'abbé Bossut, de la Lande, le Marquis de Condorcet, etc., tome I, p. 531, Paris, 1784. There are several other editions which I have not seen. The same article may be found in all the editions above specified. It is signed by "O." = d'Alembert.

upon more at length than by Lagrange, and d'Alembert attributes the conception of time as a fourth dimension to "un homme d'esprit de ma connaisance."

It seems questionable that Lagrange, a youth of 18 years, was characterized in this way, even though he was in the following year appointed professor of mathematics in the Artillery School at Turin. But at least credit given Lagrange in this connection must, in the future, be rendered with small show of authority.

To give appropriate setting to what d'Alembert writes, I quote somewhat fully* from his article in question:

". . . On se sert particulièrement du mot *dimension* pour exprimer les puissances des racines ou valeurs des quantités inconnues des équations, que l'on appelle les *dimensions* de ces racines. . . ."

"Ainsi, dans une équation simple du premier degré; la quantité inconnu n'a qu'une *dimension*, comme $x = a + b$. Dans une équation du second degré. . . . "

"En général on dit, *en Algèbre*, qu'une quantité comme *abcd, abc, ab*, etc. est d'autant de *dimensions* qu'il y a de lettres ou de facteurs dont elle est composée. Ainsi *abcd* est de quatre *dimensions, abc* de trois, etc. On sent assez la raison de cette denomination prise de la géométrie. Si, par example, les produisans ou facteurs a, b, c du produit *abc* sont representés par des lignes, le produit *abc* sera représenté par un solide ou parallelepipede (*sic*), dont l'une des dimensions est a, l'autre b, l'autre c; de même le produit *ab* est de deux *dimensions*, parce qu'il peut représenter une surface ou figure rectangle de deux *dimensions*, a, b, etc. Au reste, il ne peut y avoir proprement que des quantités de trois *dimensions;* car passé le solide, on n'en peut concevoir d'autres. Qu'est-ce donc que les quantités comme a^4, a^5, qu'on employe dans l'application de l'algèbre à la géométrie? Ces quantités peuvent être considérés sous deux points de vûe. Ou la ligne a est représentée par un nombre arithmétique, et en ce cas a^4 est le quatrieme (*sic*) puissance de ce nombre; ou bien on doit supposer a^4 divisé par une certaine ligne à volonté, qui réduise le nombre des dimensions à 3. Par example, soit $x^5 + ax^4$

In this connection reference should be given to the article "Abmessung" by G. S. Klügel in his Mathematisches Wörterbuch, I. Theil, Leipzig, 1803, where d'Alembert's ideas are reproduced.

* In making the quotation "et" has been substituted for "&."

$+ b^5 = 0$, je dis que cette équation est la même chose que $(x^5 + ax^4 + b^5)/c^2 = 0$, ce qui réduit les dimensions à trois."

"Remarquez qu'on peut toujours faire cette division; car, dans la géométrie, tout se réduit toujours à des équations. On ne considere (*sic*) a^4 que pour le comparer à quelque autre quantité de même *dimension;* et il est visible qu'une équation continue d'avoir lieu, lorsqu'on divise tous ses termes par une quantité constante quelconque. Ou bien on peut regarder a et b dans l'équation comme des nombres, qui soient entr'eux comme les lignes représentées par a et b, et alors x sera un nombre, et on n'aura que faire de division. Cette manière de considérer les quantités de plus de *trois dimensions,* est aussi exacte que l'autre; car les lettres algébriques peuvent toujours être regardées comme représentant des nombres, rationels ou non. J'ai dit plus haut qu'il n'étoit pas possible de concevoir plus de trois *dimensions.* Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourroit cependant regarder la durée comme une quatrieme (*sic*) *dimension,* et que le produit du tems (*sic*) par la solidité, serait en quelque maniere (*sic*) un produit de quatre *dimensions;* cette idée peut être contestée, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne servoit que celui de la nouveauté."

BROWN UNIVERSITY,
PROVIDENCE, R.I.
December 26, 1913.

THE DISCOVERY OF INVERSION.

Über Bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. By F. BÜTZBERGER. B. G. Teubner, Leipzig, 1913. viii + 60 pp.

As indicated by the title, this interesting monograph consists of three chapters in which Professor Bützberger presents the results of a critical and historical investigation on bicentric polygons, Steinerian series of circles and spheres, and the discovery of inversion.

The first chapter treats of polygons which are simultaneously inscribed to one and circumscribed to the other of two non-intersecting circles in a plane. The conditions for closure of such polygons have been investigated by Poncelet, and it is for this reason that they are frequently called Poncelet's