African Diaspora Journal of Mathematics ISSN 1539-854X
Volume 17, Number 2, pp. 1–19 (2014) www.math-res-pub.org/adjm

Flot d'un système hyperbolique

Nadji Hermas*
Département de Mathématiques et d'Informatique
Université Ziane Achour, Djelfa, ALGÉRIE

Abstract. In this paper, we study the existence of the flow of a hyperbolic system on some functional spaces.

2010 MSC: 58B25, 58C20, 58D05, 58D25
Keywords: Système hyperbolique, Flots, Calcul différentiel sur les espaces localement convexes, Groupes de difféomorphismes.

1 Introduction

Dans cet article, on prouve l'existence du flot du système hyperbolique quasi-linéaire

$$\partial_t u(t,x) + D_2 u(t,x)(f(t,x,u(t,x))) = 0, \tag{1}$$

sur les espaces fonctionnels $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ (espace de Schwartz), $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ (complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans l'espace d'Hölder $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ d'exposant $r=\infty$), et $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, et sur la variété des applications $C^\infty(M;N)$, où M est une variété fermé, N est une variété paracompacte sans bord, f est une fonction (ou une section) donnée de classe C^∞ et $D_2 u$ est la dérivée de u par rapport à x. D'après les terminologies physiques, ce type d'équations d'ordre 1 est nommé 'loi hyperbolique de conservation'.

Avant de parler de la contribution présentée par cet article par rapport aux travaux récents sur la théorie des lois de conservation, on jette un aperçu rapide sur la "théorie des lois hyperboliques de conservation", qui a bien sûr une relation avec notre équation (1), et sur la "théorie de la différentiation dans les espaces localement convexes", qui nous intéresse dans cet article.

En effet, la première théorie traite l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions (faibles ou classiques) des systèmes hyperboliques des lois de conservation, et parmi les outils utilisés dans cette théorie, on site, par exemple, les méthodes géométriques des courbes caractéristiques inventées par le mathématicien William R. Hamilton, les méthodes basées sur les formules de Hopf-Lax et de Lax-Oleinik, les méthodes basées sur la construction des suites des solutions approchées, les méthodes qui utilisent l'approche des solutions au sens viscosité, et enfin les méthodes basées sur la notion des solutions variationnelles.

On voit que les trois références [6], [10] et [21] présentent une grande partie de la théorie des lois hyperboliques. En effet, dans [6], on trouve une bonne étude sur les lois hyperboliques de conservation et leur relation avec la physique des milieux continus. L'auteur discute, par exemple,

*e-mail address: hermasnadji@yahoo.fr

les lois d'équilibre dans la physique des milieux continus, la définition des systèmes hyperboliques des lois d'équilibre, l'entropie et la stabilité des solutions classiques des systèmes hyperboliques, la théorie L^1 des lois hyperboliques de conservation, la théorie des chocs et ondes admissibles et la méthode de compacité par compensation. Dans la référence [10], les auteurs parlent du phénomène de la désintégration des solutions des systèmes hyperboliques non linéaires des lois de conservation. En effet, ils étudient les lois approximatives de conservation et leurs caractéristiques approximatives, la construction des solutions exactes comme des limites des solutions approximatives, et enfin l'existence et la désintégration des solutions avec des données de Cauchy arbitraires. L'auteur de la référence magistrale [21] traite les systèmes hyperboliques des lois de conservation et la théorie mathématique des ondes de choc. La matière présentée par l'auteur contient les équations hyperboliques quasi-linéaires, les systèmes des lois de conservation, les lois scalaires de conservation, et la désintégration des solutions lorsque la variable temporelle tend vers l'infinie.

On peut consulter également les références [1], [2], [3], [5], [7], [8], [13], [16], [17], [18], [19], [20], [25], [26], [27], [28] et [38] pour le sujet des lois de conservation et des équations hyperboliques

On discute maintenant deux notions de dérivabilité adoptées dans la théorie de la différentiation dans les espaces localement convexes.

On rappelle que, d'après [14], le calcul différentiel dans les espaces normés (basé sur la dérivabilité usuelle de Fréchet) n'a pas une extension canonique unique aux espaces localement convexes. De plus, il n'existe pas dans l'extension raisonnable de ce calcul, qui utilise les ensembles bornés, une facilité suffisante dans la manipulation de la règle de la chaîne. Pour cela, les mathématiciens qui travaillent sur l'analyse et la géométrie différentielle des variétés différentiables modelées sur les espaces localement convexes, rejettent cette notion et la remplacent par des notions plus convenables aux questions de l'analyse globale comme la 'dérivabilité faible' utilisée dans [4], [11], [23], [24], [30], [31], [32], [33], [34] et [35] et la 'dérivabilité convenable' utilisée dans [9] et [15]. Pour la même raison, on adopte, dans ce travail, ces deux notions. Selon la référence [37], la dérivabilité faible s'appelle parfois 'dérivabilité de Michal-Bastiani'.

Voici la définition de la dérivabilité faible. Etant donné deux espaces localement convexes E et F et un ouvert Ω de E, on dit qu'une fonction $f : \Omega \to F$ est faiblement de classe C^1, ou simplement de classe C^1_F, sur Ω si il existe une fonction continue $(x, v) \in \Omega \times E \mapsto Df(x)(v) \in F$ telle que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = Df(x)(v), \forall x \in \Omega, \forall v \in E.$$

Par récurrence, on définit les classes C^j_F, $j \geq 2$. Il est évident que si E est normé, on a les inclusions $C^j(\Omega; F) \subset C^j_F(\Omega; F)$, $j \geq 1$.

Avant de donner la définition de la dérivabilité convenable, on rappelle la notion de la C^∞-topologie.

Etant donné un espace vectoriel topologique localement convexe E, la C^∞-topologie de E est, par définition, la topologie finale par rapport à la famille $C^\infty(\mathbb{R}, E)$. L'espace topologique $C^\infty E$ constitué de l'ensemble E et cette topologie, n'est en général pas un espace vectoriel topologique, mais l'identité Id_E est continue de $C^\infty E$ dans E muni de sa topologie originale.

Etant donné un deuxième espace localement convexe F et un ouvert Ω de $C^\infty E$, on dit qu'une fonction $f : \Omega \to F$ est convenablement de classe C^∞ (en anglais 'conveniently smooth' selon [37]), ou simplement de classe C^∞_{conv}, sur Ω si pour toute courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega)$, $f \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; F)$. Cette notion est plus faible que celle donnée précédement. Par exemple, toute forme $\ell \in E'$ (espace des formes linéaires et bornées de E) est de classe C^∞_{conv} (voir [15]), alors que les formes dans $E' - E^*$ ne sont pas de classe C^∞_F, où E^* désigne le dual topologique de E. On attire l'attention ici sur le fait que l'égalité $E' = E^*$ n'est pas vraie dans le cas général.

En ce qui concerne les flots, on peut dire que l'existence du flot d'un champ de vecteurs ou, plus général, le flot d'une équation différentielle abstraite de la forme

$$u'(t) = X(t, u(t)),$$

sur une variété différentiable modelée sur des espaces localement convexes n'est pas toujours assurée et constitue en fait un problème délicat, et ceci revient principalement à l'absence d'un analogue convenable du théorème de Cauchy-Lipschitz pour ce type de variétés différentiables. En général, l'analyse sur les variétés de Fréchet et les variétés modelées sur les espaces localement convexes est difficile, et les théorèmes classiques de l'analyse sur les espaces de Banach comme le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites, ne sont pas valables dans ce cadre (voir [11] et [15]). En tenant en compte de cette réalité et du fait que les espaces fonctionnels $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ ne sont pas des espaces de Banach, on peut considérer facilement que l'existence du flot de l'équation (1) sur l'un de ces espaces est un résultat significatif et non trivial, ce qui donne une importance à ce travail.

Notre méthode pour prouver l'existence des flots repose sur une nouvelle approche géométrique basée sur le fait que l'équation (1) peut être considérée comme un champ de vecteurs sur chacun des espaces fonctionnels indiqués précédemment. En effet, grâce aux conditions supposées sur la fonction f, l'application $(t,u) \mapsto -\,Du(\cdot)(f(t,\cdot,u(\cdot)))$ est de classe C^∞_{conv} de $\mathbb{R}\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et est de classe C^∞_F de $\mathbb{R}\times E$ dans E et de $\mathbb{R}\times C^\infty(M;N)$ dans $TC^\infty(M;N)$, où E est l'un des espaces de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Partant de cette situation, on vérifie, en utilisant une méthode des courbes caractéristiques, que l'équation (1) admet, pour toute fonction φ appartenant à l'un des ensembles $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, E et $C^\infty(M;N)$, une seule solution maximale $(t,x)\mapsto\mathfrak{F}(t,\varphi)(x)$ définie de $\mathcal{I}_\varphi\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ou bien de $\mathcal{I}_\varphi\times M$ dans N vérifiant $\mathfrak{F}(0,\varphi)=\varphi$, où $\mathcal{I}_\varphi$ est un intervalle ouvert contenant 0. Ce résultat est donné dans la proposition 2.3. De plus, on remarque que l'application $\mathfrak{F}:(t,\varphi)\mapsto\mathfrak{F}(t,\varphi)$ possède la propriété suivante: si φ est donnée et si $s\in\mathcal{I}_\varphi$, il existe un $\delta>0$ tel que

$$\mathfrak{F}(t,\varphi) = \mathfrak{F}(s,\varphi)\circ\widetilde{\Phi}_t^{-1}, t\in\,]s-\delta, s+\delta[,$$

où $t\mapsto\widetilde{\Phi}_t$ est une applicatione continue de l'intervalle $]s-\delta,s+\delta[$ dans le groupe topologique $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n)$ (ce groupe est défini dans la proposition 2.2). En tenant ces données en considération, on démontre, en première étape, que $\mathfrak{F}$ est en fait un flot de classe C^∞_{conv} de (1) sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ en utilisant une propriété simple caractérisant les courbes de classe C^∞ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ signalée dans le lemme 2.5. Le résultat obtenu est donné dans le théorème 2.4. En deuxième étape, on vérifie, sous des conditions supplémentaires sur la fonction f, que la même application constitue un flot de classe C^∞_F de (1) sur les espaces de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. La preuve de cette affirmation énoncée dans le théorème 3.1, est basée sur la structure de Lie du groupe $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ introduite dans la proposition 2.2 et la réciproque du théorème de Taylor (voir l'appendice). Dans la section 4, on vérifie par une méthode similaire que $\mathfrak{F}$ est un flot de classe C^∞_F de l'équation (1) sur la variété des applications $C^\infty(M;N)$, ce qui constitue l'énoncé du théorème 4.1.

D'après cette discussion rapide sur les outils utilisés dans les différentes démonstrations, on dire facilement que ce travail se situe à l'intersection de deux théories différentes, théorie des équations différentielles hyperboliques et celle des variétés et groupes de dimension infinie.

2 Existence du flot dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$

Soit $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^∞. On note $F=\left(F^1,F^2\right)$ le flot de l'équation différentielle

$$F'(t)=(f(t,F(t)),0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,$$

et on considère sur f les conditions suivantes:

$$\sup_{\substack{|t|\le R,\|y\|_2\le R\\ x\in\mathbb{R}^n}}\|f(t,x,y)\|_2<\infty,\forall R>0, \tag{2}$$

$$\lim_{\|x\|_2\to\infty}\sup_{|t|\le R,\|y\|_2\le R}\left\|\partial_{x^k}f(t,x,y)\right\|_2=0,\forall k=1,\dots,n,\forall R>0, \tag{3}$$

$$\sup_{\substack{|t|\le R,\|y\|_2\le R\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left\|\partial_{y^j}f(t,x,y)\right\|_2<\infty,\forall j=1,\dots,m,\forall R>0 \tag{4}$$

$$\lim_{\|x\|_2\to\infty}\sup_{|t|\le R,\|y\|_2\le R}\left\|\partial_{y^j}f(t,x,y)\right\|_2=0,\forall j=1,\dots,m,\forall R>0. \tag{5}$$

Proposition 2.1. *On suppose que la fonction f vérifie les conditions (2), (3) et (4), et soit $\varphi\in C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ $(k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})$ une fonction bornée ainsi que ses dérivées d'ordre* 1*. Alors il existe un intervalle ouvert I_φ contenant* 0 *tel que pour tout $t\in I_\varphi$, l'application $\Phi_t:x\in\mathbb{R}^n\mapsto F^1(t,x,\varphi(x))\in\mathbb{R}^n$ est un difféomrphisme de classe C^k, et la fonction u définie par*

$$u(t,x)=\varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right),(t,x)\in I_\varphi\times\mathbb{R}^n,$$

constitue une solution de classe C^k du problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\partial_t u(t,\cdot)+D_2u(t,\cdot)(f(t,\cdot,u(t,\cdot)))=0,\\ u(0,\cdot)=\varphi.\end{cases}$$

Proof. On va utiliser une méthode de courbes caractéristiques. D'après la condition (2), le flot F est défini sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ tout entier. Donc on peut écrire

$$F(t,x,y)=\left(x+\int_0^t f\left(\tau,F^1(\tau,x,y),y\right)d\tau,y\right),(t,x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

Encore d'après (2), on a

$$\|x\|_2-\operatorname{const}(R)\le\inf_{|t|\le R,\|y\|_2\le R}\left\|F^1(t,x,y)\right\|_2,x\in\mathbb{R}^n,R>0. \tag{6}$$

En utilisant cette inégalité et les conditions (3) et (4), on vérifie que

$$\sup_{\substack{|t|\le R,\|y\|_2\le R\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left\|\partial_{x^k}F^1(t,x,y)\right\|_2<\infty,k=1,\dots,n,R>0, \tag{7}$$

et

$$\sup_{\substack{|t|\le R,\|y\|_2\le R\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left\|\partial_{y^j}F^1(t,x,y)\right\|_2<\infty,j=1,\dots,m,R>0. \tag{8}$$

Soit maintenant $v\in C^1(]a,b[\times\Omega;\mathbb{R}^m)$ une solution du problème $(\mathcal{P})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a<0<b$. On considère le flot $G:\mathcal{U}\subset]a,b[\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ de l'équation

$$G'(t)=f(t,G(t),v(t,G(t))),$$

et on pose

$$H(t,x) = (G(t,x), v(t, G(t,x))), (t,x) \in \mathcal{U}.$$

Pour tout $(t,x) \in \mathcal{U}$, on écrit

$$\begin{aligned}
& \partial_t H(t,x) \\
= \; & (\partial_t G(t,x), \partial_t v(t, G(t,x)) + D_2 v(t, G(t,x))(\partial_t G(t,x))) \\
= \; & (f(t, H(t,x)), \partial_t v(t, G(t,x)) \\
& + D_2 v(t, G(t,x))(f(t, G(t,x), v(t, G(t,x))))) \\
= \; & (f(t, H(t,x)), 0),
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$H(t,x) = F(t,x,\varphi(x)), (t,x) \in \mathcal{U},$$

ce qui nous donne

$$G(t,x) = x + \int_0^t f\left(\tau, F^1(\tau, x, \varphi(x)), \varphi(x)\right) d\tau, (t,x) \in \mathcal{U},$$

et

$$v(t, G(t,x)) = \varphi(x), (t,x) \in \mathcal{U}. \tag{9}$$

On remarque ici que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{U} =]a,b[\times \mathbb{R}^n$.

On pose

$$\Phi_t(\cdot) = F^1(t, \cdot, \varphi(\cdot)) = Id(\cdot) + \int_0^t f\left(\tau, F^1(\tau, \cdot, \varphi(\cdot)), \varphi(\cdot)\right) d\tau,$$

et on définit un intervalle $I_\varphi \subset \mathbb{R}$ comme suit:

$$\begin{aligned}
t & \in I_\varphi \cap \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall s \in [0,t]; \Phi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ est un } C^k\text{-difféomrphisme}, \\
t & \in I_\varphi \cap \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \forall s \in [t,0]; \Phi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ est un } C^k\text{-difféomrphisme}.
\end{aligned}$$

Il est évident que $0 \in I_\varphi$. Prouvons que I_φ est ouvert. Soit $t \in I_\varphi$. En utilisant (3), (4), (6), (7), (8), et la formule

$$\begin{aligned}
\partial_{x^k} \Phi_t(\cdot) = e_k + \int_0^t \sum_{1 \le \ell \le n} & \partial_{x^\ell} f\left(\tau, F^1(\tau, \cdot, \varphi(\cdot)), \varphi(\cdot)\right) \\
& \times \partial_{x^k} \left(F^1\right)^\ell (\tau, \cdot, \varphi(\cdot)) \, d\tau \\
+ \int_0^t \sum_{\substack{1 \le \ell \le n \\ 1 \le j \le m}} & \partial_{x^\ell} f\left(\tau, F^1(\tau, \cdot, \varphi(\cdot)), \varphi(\cdot)\right) \\
& \times \partial_{y^j} \left(F^1\right)^\ell (\tau, \cdot, \varphi(\cdot)) \, \partial_{x^k} \varphi^j(\cdot) \, d\tau \\
+ \int_0^t \sum_{1 \le j \le m} & \partial_{y^j} f\left(\tau, F^1(\tau, \cdot, \varphi(\cdot)), \varphi(\cdot)\right) \partial_{x^k} \varphi^j(\cdot) \, d\tau,
\end{aligned} \tag{10}$$

on vérifie que la suite $(J_{\Phi_s})_{s \in \mathbb{R}}$ converge uniformément, dans $\mathbb{R}^n$, vers J_{Φ_t} lorsque $s \to t$, et que $\lim_{\|x\|_2 \to \infty} J_{\Phi_t}(x) = 1$. Mais comme $J_{\Phi_t}(x) \neq 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, il vient

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} J_{\Phi_t}(x) > 0. \tag{11}$$

Soit $\delta > 0$ tel que

$$|s - t| < \delta \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : \left| J_{\Phi_s}(x) - J_{\Phi_t}(x) \right| \le \frac{1}{2} \inf J_{\Phi_t}.$$

Par suite,

$$0 < \frac{1}{2} \inf J_{\Phi_t} \leq J_{\Phi_s}(x), |s-t| < \delta, x \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui entraîne que Φ_s est un C^k-difféomorphisme local pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $|s-t| \leq \delta$. D'autre part, il est évident, grâce à (3), (4), (7), (8) et (10), que

$$\left\| \left(\partial_k (\Phi_t)^j\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))} < \infty.$$

Par suite, selon (11) et l'inégalité

$$\left\|\mathcal{M}^{-1}\right\|_2 \leq \frac{n!}{|\det \mathcal{M}|} \|\mathcal{M}\|_2^{n-1}, \mathcal{M} \in GL(n;\mathbb{R}),$$

on peut écrire l'estimation

$$\begin{aligned} \left\| \left(\partial_k \left(\Phi_t^{-1}\right)^j\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))} &\leq n! \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{J_{\Phi_t}(x)} \left\| \left(\partial_k \Phi_t^j\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))}^{n-1} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

qui montre que Φ_t^{-1} est Lipschitzienne. Soit maintenant $s \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $|s-t| < \delta$ et $\Phi_s(x) = \Phi_s(y)$. On a

$$\begin{aligned} \|x-y\|_2 &\leq \operatorname{const}(\Phi_t) \|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\|_2 \\ &= \operatorname{const}(\Phi_t) \|\Phi_t(x) - \Phi_s(x) + \Phi_s(y) - \Phi_t(y)\|_2 \\ &= \operatorname{const}(\Phi_t) \Bigg\| \int_s^t f\left(\tau, F^1(\tau, x, \varphi(x)), \varphi(x)\right) d\tau \\ &\quad - \int_s^t f\left(\tau, F^1(\tau, y, \varphi(y)), \varphi(y)\right) d\tau \Bigg\|_2 . \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (3), (4), (7), (8) et le théorème des accroissements finis, il vient

$$\|x-y\|_2 \leq \operatorname{const}(\Phi_t) \operatorname{const}(f, \varphi, \delta, t) |s-t| \|x-y\|_2 .$$

Si $\operatorname{const}(\Phi_t) \operatorname{const}(f, \varphi, \delta, t) |s-t| < 1$, on a nécessairement $x = y$ et donc Φ_s est injective. Choisissons alors $\delta > 0$ tel que

$$|s-t| < \delta \Rightarrow \operatorname{const}(\Phi_t) \operatorname{const}(f, \varphi, \delta, t) |s-t| < 1.$$

Dans ce cas, pour tout $s \in]t-\delta, t+\delta[$, Φ_s est un C^k-difféomrphisme de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ dans $\Phi_s(\mathbb{R}^n)$.

Fixons $s \in]t-\delta, t+\delta[$. Si $y \in \overline{\Phi_s(\mathbb{R}^n)}$, alors il existe une suite $\left(x_j\right) \subset \mathbb{R}^n$ telle que $\Phi_s\left(x_j\right) \to y$. Comme $\left(x_j\right)$ est bornée d'après (2), on peut supposer que $x_j \to x$. Par suite, $\Phi_s(x) = y \in \Phi_s(\mathbb{R}^n)$. Donc $\Phi_s(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$, ce qui prouve que $\Phi_s(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Par conséquent, Φ_s est un C^k-difféomrphisme de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ dans lui même quel que soit $s \in]t-\delta, t+\delta[$, ce qui entraîne que $]t-\delta, t+\delta[\subset I_\varphi$. D'où I_φ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On remarque, d'après ce qui précède, que l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soit un C^k-difféomrphisme, est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que I_φ est la composante connexe de cet ensemble qui contient 0.

Concernant la solution v, on a d'après (9)

$$v(t,x) = \varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right), t \in I_\varphi, \left(t, \Phi_t^{-1}(x)\right) \in \mathcal{U}.$$

D'autre part, il est évident que la fonction $u : (t,x) \in I_\varphi \times \mathbb{R}^n \mapsto u(t,x) = \varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right) \in \mathbb{R}^m$ constitue une solution de $(\mathcal{P})$. □

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note, dans cet article, $\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions $\xi \in C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ (espace d'Hölder d'exposant k) telles les dérivées $\partial^\alpha \xi(x)$, $|\alpha| = k$, sont uniformément continues, et que $\lim_{\|x\|\to\infty} \left\|\partial_j \xi(x)\right\|_2 = 0$ quel que soit $j \in \{1,\ldots,n\}$. Pour $k = \infty$, on pose $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Le groupe des C^k-difféomorphismes $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ayant la forme $g = Id + \xi$ avec $\xi \in \mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, sera noté $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n)$. Concernant ces espaces et ces groupes, on a la proposition suivante, qui se démontre exactement comme le lemme 2.1, la proposition 2.2, et le théorème 2.6 dans [12].

Proposition 2.2. *1. L'application $(\xi,\eta) \mapsto \xi(Id+\eta)$ est de classe C^j du produit $\mathfrak{C}^{k+j}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \times \left(Id + \mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\right)$ dans $\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ quel que soit $(k,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.*

2. *Pour tout $(k,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,* $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n)$ *est un groupe topologique ouvert de l'espace affine de Banach $Id + \mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ et l'application $g \mapsto g^{-1}$ est de classe C^j de* $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^{k+j}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

3. $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est un groupe de Lie de classe C_F^∞, régulier et ouvert de l'espace affine de Fréchet $Id + \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, son algèbre de Lie est $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ munie du crochet $[\xi,\eta] = \sum_{1\le i\le n}\left(\eta^i\partial_i\xi - \xi^i\partial_i\eta\right)$.*

L'existence des solutions maximales (en la variable t) de l'équation (1) constitue l'objectif de la

Proposition 2.3. *1. Si la fonction f vérifie les conditions (2), (3) et (4), alors pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cap C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, il existe un intervalle ouvert $\mathcal{I}_\varphi$ contenant* 0 *et une unique fonction $u \in C^k\left(\mathcal{I}_\varphi \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m\right)$ solution maximale du problème $(\mathcal{P})$.*

2. *Si f vérifie les conditions (2), (3) et (5), alors pour toute fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cap C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ $(k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, il existe un intervalle ouvert $\mathcal{I}_\varphi$ contenant* 0 *et une unique fonction $u \in C^k\left(\mathcal{I}_\varphi \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m\right)$ solution maximale du problème $(\mathcal{P})$.*

Proof. On remarque d'abord que $F(t,\cdot) \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{n+m})$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $F^1(t,\cdot,y) \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $s \in \mathbb{R}$, le flot de l'équation différentielle

$$F_s'(t) = (f(t+s, F_s(t)), 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

est donné par la fomule

$$\begin{aligned} F_s(t,x,y) &= F\left(t+s, F(s,\cdot)^{-1}(x,y)\right) \\ &= F\left(t+s, F^1(s,\cdot,y)^{-1}(x), y\right), (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Soit $u \in C^1(]a,b[\times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ une solution de l'équation (1) telle que pour un certain $s \in]a,b[$, $u(s,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.1, on montre qu'il existe un intervalle ouvert $J_{u(s,\cdot)}$ contenant s tel que, pour tout $t \in J_{u(s,\cdot)}$, $\widetilde{\Phi}_t \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$, où

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_t(x) &= F^1(t, F_s(-s,x,u(s,x))) \\ &= F^1\left(t, F(s,\cdot)^{-1}(x,u(s,x))\right), (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

et que

$$u(t,x) = u\left(s, \widetilde{\Phi}_t^{-1}(x)\right), t \in]a,b[\cap J_{u(s,\cdot)}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Par suite, si $v \in C^1(]c,d[\times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ une autre solution de (1) telle que $v(s,\cdot) = u(s,\cdot)$, alors

$$u(t,x) = v(t,x), t \in]a,b[\cap]c,d[\cap J_{u(s,\cdot)}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi donc, pour terminer cette démonstration, il suffit de vérifier que si $u \in C^1(]a,b[\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ est une solution de $(\mathcal{P})$, alors $u(t,\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ quel que soit $t\in\,]a,b[$.

Soit $u \in C^1(]a,b[\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ une solution de $(\mathcal{P})$ et $t\in\,]a,b[$. D'après "(3), (4), (6), (7), (8), et (10)" ou "(3), (5), (6), (7), (8), et (10)", il existe $R>0$ tel que Φ_t soit un difféomrphisme de classe C^k de $\{\|x\|_2>R\}$ dans $\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})$ et que

$$\sup_{y\in\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})}\left\|\left(\partial_k\left(\Phi_t^{-1}\right)^j(y)\right)\right\|_2<\infty. \tag{12}$$

Posons $a=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\|\int_0^t f\left(\tau,F^1(\tau,x,\varphi(x)),\varphi(x)\right)d\tau\right\|_2$. Nous allons vérifier d'abord que, pour tout $M>R+a$, $\{\|y\|_2\geq M\}\subset\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})$.

En effet, soit $M>R+a$ et $z\in\overline{\{\|y\|_2\geq M\}\cap\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})}$. Il existe une suite $\left(x_j\right)\subset\{\|x\|_2>R\}$ telle que $\left(\Phi_t\left(x_j\right)\right)\subset\{\|y\|_2\geq M\}$ et $\Phi_t\left(x_j\right)\to z$ quand $j\to\infty$. Par conséquent, $\|z\|_2\geq M$. D'autre part, comme $\left(x_j\right)$ est bornée, on peut supposer que $x_j\to x$ lorsque $j\to\infty$. Par suite, $\Phi_t(x)=z$ et $\|x\|_2\geq\|z\|_2-a\geq M-a>R$. D'où $z\in\{\|y\|_2\geq M\}\cap\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})$, ce qui prouve que l'ensemble $\{\|y\|_2\geq M\}\cap\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$. Mais cet ensemble est ouvert dans $\{\|y\|_2\geq M\}$ et n'est pas vide puisque $\|\Phi_t(x)\|_2\to\infty$ lorsque $\|x\|_2\to\infty$, donc comme $\{\|y\|_2\geq M\}$ est connexe, on a $\{\|y\|_2\geq M\}\cap\Phi_t(\{\|x\|_2>R\})=\{\|y\|_2\geq M\}$.

Fixons $M>R+a$. Grâce à (9), on a la formule

$$u(t,x)=\varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right),\|x\|_2\geq M,$$

qui montre, avec (12), que $u(t,\cdot)\in C^1(\{\|x\|_2>M\};\mathbb{R}^m)$. Par conséquent, $u(t,\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. □

On donne maintenant la définition, qu'on a adopté dans cet article, pour les flots.

Soit M une variété différentiable modelée sur des espaces topologiques localement convexes complets, Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times M$ contenant $\{0\}\times M$ et $X:(t,x)\in\Omega\mapsto X(t,x)\in TM$ une section telle que $\pi_M\circ X(t,x)=x$ pour tout $(t,x)\in\Omega$, où π_M est la projection naturelle de TM dans M. On dit que l'équation

$$u'(t)=X(t,u(t)),$$

possède un flot dans Ω s'il existe un ouvert $U\subset\mathbb{R}\times M$ contenant $\{0\}\times M$ et une application $F_X:U\subset\mathbb{R}\times M\to M$ de classe C^∞_{conv} (ou de classe C^∞_F) tels que, pour tout $x\in M$, l'ensemble $I_x=\{t\in\mathbb{R}:(t,x)\in U\}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et la courbe $t\in I_x\mapsto F_X(t,x)\in M$ constitue une solution unique maximale du problème

$$\begin{cases} u'(t)=X(t,u(t)),\\ u(0)=x.\end{cases}$$

Théorème 2.4. *Supposons que f vérifie les conditions (2), (3) et (4). Alors l'équation (1) admet un flot de classe C^∞_{conv} sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.*

Dans la démonstration de ce théorème, on va utiliser les deux lemmes suivants, dont le premier parmi eux est un cas particulier du lemme 42.5 dans [15].

Lemme 2.5. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors l'espace des courbes $C^\infty(I;\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^m))$ coïncide avec le sous-espace des fonctions $\gamma\in C^\infty(I\times\Omega;\mathbb{R}^m)$ possédant la propriété: pour tout intervalle $[a,b]\subset I$, il existe un compact $K\subset\Omega$ tel que $\gamma(t,x)=0$ pour tout $t\in[a,b]$ et tout $x\in\mathbb{R}^n-K$.*

Lemme 2.6. *L'application $(t,\varphi)\mapsto\Phi_t$ est continue de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.*

Proof. Soit $(t,s)\in\mathbb{R}^2$ et $(\varphi,\psi)\in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)^2$. On a

$$\begin{aligned}\Phi_t-\Psi_s &= F^1(t,\cdot,\varphi(\cdot))-F^1(s,\cdot,\psi(\cdot))\\ &= (t-s)\int_0^1 \partial_t F^1(s+\theta(t-s),\cdot,\psi(\cdot)+\theta(\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)))\,d\theta\\ &\quad+\sum_{1\le j\le m}\left(\varphi^j(\cdot)-\psi^j(\cdot)\right)\\ &\quad\times\int_0^1 \partial_{y^j}F^1(s+\theta(t-s),\cdot,\psi(\cdot)+\theta(\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)))\,d\theta.\end{aligned}$$

Comme $\partial_t F^1(\cdot,\cdot,\cdot)=f\left(\cdot,F^1(\cdot,\cdot,\cdot),\cdot\right)$, alors d'après (2) et (8), on peut écrire l'inégalité

$$\|\Phi_t-\Psi_s\|_{L^\infty}\le \mathrm{const}(t,s,\varphi,\psi)\left(|t-s|+\|\varphi-\psi\|_{L^\infty}\right),$$

où const est une fonction localement bornée de $\mathbb{R}^2\times C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)^2$ dans $\mathbb{R}_+$. Ceci prouve que l'application $(t,\varphi)\mapsto\Phi_t$ est localement Lipschitzienne de $\mathbb{R}\times C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, cette application est continue de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Fixons $(s,\psi)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et soit $k\in\{1,\dots,n\}$. Selon (10) pour tout $\varphi\in\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, on a

$$\partial_{x^k}\Phi_t(\cdot)=\Theta(t,\cdot,\varphi(\cdot),\partial_1\varphi(\cdot),\dots,\partial_n\varphi(\cdot)),$$

où $\Theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{nm}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue. Soit $\varepsilon>0$. D'après (3), (4), (6), (7), et (8), il existe $R>0$ tel

$$\left\|\partial_{x^k}\Phi_t(x)\right\|_2\le\frac{\varepsilon}{2},\|x\|_2\ge R,|t-s|\le 1,\|\varphi-\psi\|_{C^1}\le 1.$$

Posons $b=1+\|\psi\|_{C^1}$. Comme la fonction Θ est uniformment continue dans l'ensemble

$$[s-1,s+1]\times\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2\le R\}\times\{y\in\mathbb{R}^m:\|y\|_2\le b\}^{n+1},$$

on peut trouver $0<\delta\le 1$ tel que

$$\left\|\partial_{x^k}\Phi_t(x)-\partial_{x^k}\Psi_t(x)\right\|_2\le\varepsilon,\|x\|_2\le R,|t-s|\le\delta,\|\varphi-\psi\|_{C^1}\le\delta.$$

Par suite,

$$\left\|\partial_{x^k}\Phi_t(x)-\partial_{x^k}\Psi_t(x)\right\|_2\le\varepsilon,x\in\mathbb{R}^n,|t-s|\le\delta,\|\varphi-\psi\|_{C^1}\le\delta,$$

ou encore

$$\left\|\partial_{x^k}\Phi_t-\partial_{x^k}\Psi_t\right\|_{L^\infty}\le\varepsilon,|t-s|\le\delta,\|\varphi-\psi\|_{C^1}\le\delta.$$

Ceci prouve que l'application $(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\mapsto\partial_{x^k}\Phi_t\in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est continue en tout point (s,ψ). D'où le résultat désiré. □

Démonstration du théorème 2.4. Si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, l'unique solution du problème $(\mathcal{P})$, qui est de classe C^∞ de $\mathcal{I}_\varphi\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, sera notée $\mathfrak{F}(\cdot,\varphi)$.

Soit $[\alpha,\beta]\subset\mathcal{I}_\varphi$ où $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. D'après (3), (4), (6), (7), (8), et (10), il existe $M>0$ tel que

$$\Phi_t^{-1}(x)\in\mathbb{R}^n-\mathrm{supp}\varphi,t\in[\alpha,\beta],\|x\|_2>M.$$

D'où, selon (9), on a

$$\mathfrak{F}(t,\varphi)(x)=\varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right)=0,t\in[\alpha,\beta],\|x\|_2>M,$$

ce qui prouve, grâce au lemme 2.5, que $\mathfrak{F}(\cdot,\varphi)\in C^\infty\left(\mathcal{I}_\varphi;\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\right)$.

Vérifions que l'ensemble $D = \left\{(t,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) : t \in \mathcal{I}_\varphi\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. On note Λ l'ensemble des nombres réels $\lambda > 0$ ayant la propriété: pour tout $t_0 \in [0,\lambda[$, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un ouvert $O \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ contenant φ_0 tels que $\mathfrak{F}$ soit continue de $I\times O$ dans $C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ (complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$).

Etant donné $R > 0$, comme dans les démonstrations des propositions 2.1 et 2.3, on utilise (3), (4), (7), (8) et (10) pour montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ avec $\|\varphi-\varphi_0\|_{C^1} < R$, on a $t \in I_\varphi \subset \mathcal{I}_\varphi$. D'où

$$]-\varepsilon,\varepsilon[\times O_R =]-\varepsilon,\varepsilon[\times\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) : \|\varphi-\varphi_0\|_{C^1} < R\} \subset D.$$

D'après la proposition 2.2 et le lemme 2.6, l'application $(t,\varphi) \mapsto \Phi_t^{-1}$ est continue de $]-\varepsilon,\varepsilon[\times O_R$ dans $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, on sait, grâce à la proposition 2.2, que l'application $(\xi,\eta) \mapsto \xi(Id+\eta)$ est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\times\left(Id+\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\right)$ dans $C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. D'où $(t,\varphi) \mapsto \mathfrak{F}(t,\varphi) = \varphi\circ\Phi_t^{-1}$ est continue de $]-\varepsilon,\varepsilon[\times O_R$ dans $C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, ce qui signifie que $]0,\varepsilon[\subset \Lambda$ et que Λ n'est pas vide.

Vérifions par l'absurde que $\sup\mathcal{I}_{\varphi_0} = \sup\Lambda$. L'inégalité $\sup\Lambda \le \sup\mathcal{I}_{\varphi_0}$ est évidente. Si $0 < \lambda = \sup\Lambda < \sup\mathcal{I}_{\varphi_0}$, alors $\lambda \in \mathcal{I}_{\varphi_0}$ et $(\lambda,\varphi_0) \in D$. Posons donc $\tilde\varphi_0 = \mathfrak{F}(\lambda,\varphi_0)$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ avec $\|\varphi-\tilde\varphi_0\|_{C^1} < \varepsilon$, $t \in I_\varphi \subset \mathcal{I}_\varphi$. Comme dans le début de la démonstration de la proposition 2.3, on peut écrire

$$\mathfrak{F}(t,\varphi_0) = \tilde\varphi_0\circ\widetilde{\Phi}_t^{-1}, t \in \mathcal{I}_{\varphi_0}\cap J_{\tilde\varphi_0},$$

où $J_{\tilde\varphi_0}$ est un intervalle ouvert contenant λ et

$$\widetilde{\Phi}_t(x) = F^1(t,F_\lambda(-\lambda,x,\tilde\varphi_0(x))), (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

On vérifie, en utilisant les mêmes techniques de la preuve du lemme 2.6, que l'application $t \mapsto \widetilde{\Phi}_t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $Id+\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. D'où, d'après la proposition 2.2, on a

$$\lim_{t\to\lambda}\mathfrak{F}(t,\varphi_0) = \lim_{t\to\lambda}\tilde\varphi_0\circ\widetilde{\Phi}_t^{-1} = \tilde\varphi_0\circ\widetilde{\Phi}_\lambda^{-1} = \tilde\varphi_0,$$

dans $C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, ce qui implique qu'on peut trouver $\delta \in]0,\min(\varepsilon,\lambda)[$ tel que

$$\lambda-\delta < t \le \lambda \Rightarrow \|\mathfrak{F}(t,\varphi_0)-\tilde\varphi_0\|_{C^1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $t_0 \in]\lambda-\delta,\lambda[$. D'après la définition de Λ, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un ouvert $O \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ contenant φ_0 tels que l'application $\mathfrak{F} : I\times O \subset D \to C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ est continue. On peut choisir O de sorte que

$$\forall\varphi \in O, \|\mathfrak{F}(t_0,\varphi)-\mathfrak{F}(t_0,\varphi_0)\|_{C^1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall\varphi \in O, \|\mathfrak{F}(t_0,\varphi)-\tilde\varphi_0\|_{C^1} < \varepsilon,$$

ce qui nous permet de poser

$$g(t,\varphi) = \mathfrak{F}(t-t_0,\mathfrak{F}(t_0,\varphi)) = \mathfrak{F}(t_0,\varphi)\circ\Phi_{t-t_0}^{-1}, |t-t_0| < \varepsilon, \varphi \in O.$$

La fonction g est continue de $]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times O$ dans $C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, de plus, pour toute $\varphi \in O$, $g(\cdot,\varphi)(\cdot)$ est une solution de (1) avec $g(t_0,\varphi) = \mathfrak{F}(t_0,\varphi)$. Alors grâce à l'unicité, on a $]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times O \subset D$ et

$$g(t,\varphi) = \mathfrak{F}(t,\varphi), (t,\varphi) \in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times O,$$

ce qui constitue une contradiction puisque $\lambda < t_0 + \varepsilon$. D'où $\sup \mathcal{I}_{\varphi_0} = \sup \Lambda$.

De façon similaire, on vérifie que, pour tout $t_0 \in \left]\inf \mathcal{I}_{\varphi_0}, 0\right[$, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un ouvert $O \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ contenant φ_0 tels que $\mathfrak{F}$ soit continue de $I \times O$ dans $C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Ainsi, on a vérifie que l'ensemble D est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et que $\mathfrak{F}$ est continue de D dans $C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Il reste donc à montrer que $\mathfrak{F}$ est de classe C^∞_{conv} de D dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Soit $\gamma = \left(\gamma^1, \gamma^2\right) \in C^\infty(\mathbb{R}; D)$ et $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$. Comme γ^2 est une courbe de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, il existe, grâce au le lemme 2.5, un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$\gamma^2(t)(x) = 0, \forall t \in [\alpha,\beta], \forall x \in \mathbb{R}^n - K.$$

D'après ce fait et les relations (3), (4), (6), (7), (8) et (10), il existe $M > 0$ tel que

$$\Phi^{-1}_{\gamma^1(t)}(x) \in \mathbb{R}^n - K, \forall t \in [\alpha,\beta], \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 > M,$$

où $\Phi_{\gamma^1(t)}(\cdot) = F^1\left(\gamma^1(t), \cdot, \gamma^2(t)(\cdot)\right)$. D'où, selon (9), on a

$$\mathfrak{F} \circ \gamma(t)(x) = \gamma^2(t) \circ \Phi^{-1}_{\gamma^1(t)}(x) = 0, t \in [\alpha,\beta], \|x\|_2 > M,$$

ce qui entraîne, grâce au le lemme 2.5, que $\mathfrak{F} \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$. D'où $\mathfrak{F} \in C^\infty_{\text{conv}}(D; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$. □

Corollaire 2.7. *Supposons que f vérifie les conditions (2), (3) et (4) et ne dépend pas de t. Alors l'opérateur différentiel $u \mapsto -D_2u(\cdot)(f(\cdot, u(\cdot)))$ est un champ de vecteurs de classe C^∞_{conv} sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ possédant un flot de classe C^∞_{conv}.*

Proof. On note A l'opérateur $u \mapsto -D_2u(\cdot)(f(\cdot, u(\cdot)))$ et soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$. Il est évident que $Au \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. D'autre part, si $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, il existe, d'après le lemme 2.5, un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$u(t,x) = 0, \forall t \in [\alpha,\beta], \forall x \in \mathbb{R}^n - K.$$

Par suite,

$$Au(t,x) = 0, \forall t \in [\alpha,\beta], \forall x \in \mathbb{R}^n - K,$$

ce qui entraîne (toujours selon le lemme 2.5) que $Au \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$. D'où

$$A \in C^\infty_{\text{conv}}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m); \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)).$$

□

Remarque 2.8. Dans la démonstration du théorème 2.4, on a vérifié, en réalité, que l'ensemble

$$\left\{(t,\varphi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) : t \in \mathcal{I}_\varphi\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et que $\mathfrak{F}$ est continue de cet ensemble dans $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Ce résultat sera amélioré dans la section suivante.

Remarque 2.9. L'équation (1) n'est en général pas complète sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, ce qui signifie que son flot $\mathfrak{F}$ n'est pas forcément défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ tout entier. On peut justifier ce fait à travers le célèbre exemple suivant.

On suppose que $n = m = 1$ et que

$$f(t,x,y) = y, (t,x,y) \in \mathbb{R}^3.$$

Dans ce cas, l'équation (1) coïncide avec l'équation de Riemann suivante, qui s'appelle aussi "inviscid Burgers' equation".

$$\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0.$$

On trouve cette équation simple dans la théorie des dynamiques des gaz.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On a

$$\Phi_t(x) = x + t\varphi(x), (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent, la relation (9) nous montre que l'unique solution maximale $u \in C^\infty\left(\mathcal{I}_\varphi \times \mathbb{R};\mathbb{R}\right)$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \\ u(t,\cdot) = \varphi, \end{cases}$$

vérifie

$$u(t, x + t\varphi(x)) = \varphi(x), (t,x) \in \mathcal{I}_\varphi \times \mathbb{R}. \tag{13}$$

Ceci signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, u est consante sur le segment droit $\left\{(t, x+t\varphi(x)) : t \in \mathcal{I}_\varphi\right\}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Pour $t = y - x/(\varphi(x) - \varphi(y))$, on a $(t, x+t\varphi(x)) = (t, y+t\varphi(y))$. Donc si $t \in \mathcal{I}_\varphi$, la relation (13) donne

$$\varphi(x) = u(t, x+t\varphi(x)) = u(t, y+t\varphi(y)) = \varphi(y),$$

ce qui constitue une contradiction. D'où $t = y - x/(\varphi(x) - \varphi(y)) \notin \mathcal{I}_\varphi$ et $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathbb{R}$. On résume alors: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{R}) | \{0\}$, $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathbb{R}$, et en général, pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ non constante, $\mathcal{I}_\varphi \neq \mathbb{R}$.

3 Existence du flot dans les espaces $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$

Dans cette section, on va considérer la condition suivante sur la fonction f:

$$\sup_{\substack{|t| \leq R, \|y\|_2 \leq R \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left\| \partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(t,x,y) \right\|_2 < \infty, \forall (j,\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{1+n+m}, \forall R > 0, \tag{14}$$

En supposant que f vérifie (3) et (14) (et donc (6)) et en dérivant la relation

$$F^1(t,x,y) = x + \int_0^t f\left(\tau, F^1(\tau,x,y), y\right) d\tau, (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

on obtient

$$\sup_{\substack{|t| \leq R, \|y\|_2 \leq R \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left\| \partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_y^\beta F^1(t,x,y) \right\|_2 < \infty, (j,\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{1+n+m} - 0, R > 0. \tag{15}$$

Dans le théorème qui suit, on remplace la dérivabilité convenable, qu'on a utilisé dans le théorème 2.4, par la dérivabilité de Michal-Bastiani.

Théorème 3.1. *Supposons que la fonction f vérifie les conditions (3) et (14), alors l'équation (1) admet un flot de classe C_F^∞ sur les espaces de Fréchet $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.*

On a besoin de quelques lemmes pour faire la démonstration de ce théorème, qui est similaire à celle du théorème 2.4.

Lemme 3.2. *L'application $(t,\varphi) \mapsto \Phi_t$ est de classe C_F^∞ de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.*

Proof. Soit $k,\ N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(t,s)\in\mathbb{R}^2$ et tout $(\varphi,h)\in\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)^2$, on peut écrire d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned}&F^1(s+t,\cdot,\varphi(\cdot)+h(\cdot))-F^1(s,\cdot,\varphi(\cdot))\\&=\textstyle\sum_{1\le j+|\alpha|<N}\frac{t^jh(\cdot)^\alpha}{j!\alpha!}\partial_t^j\partial^\alpha F^1(s,\cdot,\varphi(\cdot))+N\sum_{j+|\alpha|=N}\frac{t^jh(\cdot)^\alpha}{j!\alpha!}\\&\times\textstyle\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\partial_t^j\partial^\alpha F^1(s+\theta t,\cdot,\varphi(\cdot)+\theta h(\cdot))\,d\theta.\end{aligned}\tag{16}$$

Selon (15), les applications

$$(s,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\mapsto\partial_t^j\partial^\alpha F^1(s,\cdot,\varphi(\cdot))\in\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ j+|\alpha|\ge1,$$

sont Lipschitzienne et donc continues. De même, selon (15), les applications

$$\begin{aligned}&((s,\varphi),(t,h))\\\mapsto\ &\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\partial_t^j\partial^\alpha F^1(s+\theta t,\cdot,\varphi(\cdot)+\theta h(\cdot))\,d\theta,\ j+|\alpha|=N,\end{aligned}$$

sont Lipschitzienne de $\left(\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\right)^2$ dans $\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Par conséquent, les applications

$$(s,\varphi)\mapsto\left((t,h)\mapsto\frac{t^jh(\cdot)^\alpha}{j!\alpha!}\partial_t^j\partial^\alpha F^1(s,\cdot,\varphi(\cdot))\right),\ j+|\alpha|\ge1,$$

sont continues de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $\mathrm{Poly}_{j+|\alpha|}\left(\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m);\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\right)$ (l'espace des polynômes homogènes de dégré $j+|\alpha|$), et les applications

$$\begin{aligned}&((s,\varphi),(t,h))\mapsto\\&\left(\left(\tilde t,\tilde h\right)\mapsto\frac{\tilde t^j\tilde h(\cdot)^\alpha}{j!\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\partial_t^j\partial^\alpha F^1(s+\theta t,\cdot,\varphi(\cdot)+\theta h(\cdot))\,d\theta\right),\end{aligned}$$

$j+|\alpha|=N$, sont continues de $\left(\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\right)^2$ dans $\mathrm{Poly}_N\left(\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m);\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\right)$. Ainsi donc, d'après la réciproque du théorème de Taylor et (16), $(t,\varphi)\mapsto\Phi_t$ est de classe C^N de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, et comme N est arbitraire, cette application est donc de classe C^∞ de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. D'autre part, on sait que l'injection naturelle $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\hookrightarrow\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ est de classe C_F^∞. Par conséquent, $(t,\varphi)\mapsto\Phi_t$ est de classe C_F^∞ de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. D'où $(t,\varphi)\mapsto\Phi_t$ est de classe C_F^∞ de $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ dans $Id+\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ puisque k est arbitraire. □

Lemme 3.3. *On note E l'un des espaces fonctionnels de Fréchet indiqués dans le théorème 3.1. Alors $\mathfrak{F}(t,\varphi)\in E$ pour tout $\varphi\in E$ et tout $t\in\mathcal{I}_\varphi$.*

Proof. Soit $\varphi\in E$ et $t\in\mathcal{I}_\varphi$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.3, on peut trouver $R>0$ tel que Φ_t soit un difféomrphisme de $\{\|y\|_2>R\}$ dans $\Phi_t(\{\|y\|_2>R\})$ et tel que on ait (12). Comme $E\subset\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, on a $\Phi_t\in Id+\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ selon le lemme précédent. En utilisant ce fait et (12), on vérifie que

$$\sup_{x\in\Phi_t(\{\|y\|_2>R\})}\left\|\partial_x^\alpha\Phi_t^{-1}(x)\right\|<\infty,\forall\alpha\in\mathbb{N}^n-0.$$

D'où, en dérivant la relation

$$\mathfrak{F}(t,\varphi)(x)=\varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right),x\in\Phi_t(\{\|y\|_2>R\}),$$

qui est valable d'après (9), on obtient

$$\partial_x^\alpha \{\mathfrak{F}(t,\varphi)\}(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \psi_\beta(x) \partial_x^\beta \varphi\left(\Phi_t^{-1}(x)\right), x \in \Phi_t(\{\|y\|_2 > R\}),$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et ψ_β sont des fonctions de classe C^∞ et bornées sur l'ouvert $\Phi_t(\{\|y\|_2 > R\})$. Grace à ces formules et les propriétés

$$\lim_{\|x\|_2 \to \infty} \frac{\left\|\Phi_t^{-1}(x)\right\|_2}{\|x\|_2} = 1,$$

et

$$\{\|x\|_2 \geq M\} \subset \Phi_t(\{\|y\|_2 > R\}), M > R + a,$$

avec $a = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \int_0^t f\left(\tau, F^1(\tau, x, \varphi(x)), \varphi(x)\right) d\tau \right\|_2$, il n'est pas difficile de conclure que $\mathfrak{F}(t,\varphi) \in E$. □

Le lemme suivant se démontre comme le lemme 2.1 dans [12].

Lemme 3.4. *L'application* $(\varphi, \Phi) \in E \times (Id + \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)) \mapsto \varphi \circ \Phi \in E$ *est de classe* C_F^∞.

Démonstration du théorème 3.1. On va vérifier que l'ensemble $D_E = \left\{(t,\varphi) \in \mathbb{R} \times E : t \in \mathcal{I}_\varphi\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et que $\mathfrak{F} \in C_F^\infty(D_E; E)$.

Soit $\varphi_0 \in E$. On note Λ l'ensemble des nombres réels $\lambda > 0$ ayant la propriété: pour tout $t_0 \in [0, \lambda[$, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un ouvert $O \subset E$ contenant φ_0 tels que $I \times O \subset D_E$ et $\mathfrak{F} \in C_F^\infty(I \times O; E)$.

Soit $R > 0$. En utilisant (3), (4), (7), (8) et (10), on montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et tout $\varphi \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ avec $\|\varphi - \varphi_0\|_{C^1} < R$, on a $t \in I_\varphi \subset \mathcal{I}_\varphi$. D'où

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\times O_{E,R} =]-\varepsilon, \varepsilon[\times \{\varphi \in E : \|\varphi - \varphi_0\|_{C^1} < R\} \subset D_E.$$

Selon la proposition 2.2 et le lemme 3.2, l'application $(t,\varphi) \mapsto \Phi_t^{-1}$ est de classe C_F^∞ de $]-\varepsilon, \varepsilon[\times O_{E,R}$ dans $\mathrm{Diff}\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, et selon le lemme 3.4, l'application $(\xi, \eta) \mapsto \xi(Id + \eta)$ est de classe C_F^∞ de $E \times (Id + \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$ dans E. Par conséquent, $(t,\varphi) \mapsto \mathfrak{F}(t,\varphi) = \varphi \circ \Phi_t^{-1}$ est de classe C_F^∞ de $]-\varepsilon, \varepsilon[\times O_{E,R}$ dans E. Donc $]0, \varepsilon[\subset \Lambda$, ce qui prouve que Λ n'est pas vide.

On va vérifier par l'absurde que $\sup \mathcal{I}_{\varphi_0} = \sup \Lambda$. On suppose que $\lambda = \sup \Lambda \in \left]0, \sup \mathcal{I}_{\varphi_0}\right[$ et on pose $\tilde{\varphi}_0 = \mathfrak{F}(\lambda, \varphi_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et tout $\varphi \in E$ avec $\|\varphi - \tilde{\varphi}_0\|_{C^1} < \varepsilon$, $t \in I_\varphi \subset \mathcal{I}_\varphi$. Comme $\lim_{t \to \lambda} \mathfrak{F}(t, \varphi_0) = \tilde{\varphi}_0$ dans $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, on peut trouver $\delta \in]0, \min(\varepsilon, \lambda)[$ tel que

$$\lambda - \delta < t \leq \lambda \Rightarrow \|\mathfrak{F}(t, \varphi_0) - \tilde{\varphi}_0\|_{C^1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $t_0 \in]\lambda - \delta, \lambda[$. D'après la définition de Λ, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un ouvert $O \subset E$ contenant φ_0 tels que $\mathfrak{F} \in C_F^\infty(I \times O; E)$. On choisit O tel que

$$\forall \varphi \in O, \|\mathfrak{F}(t_0, \varphi) - \mathfrak{F}(t_0, \varphi_0)\|_{C^1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme

$$\forall \varphi \in O, \|\mathfrak{F}(t_0, \varphi) - \tilde{\varphi}_0\|_{C^1} < \varepsilon,$$

on peut donc définir une fonction g par

$$g(t,\varphi) = \mathfrak{F}(t - t_0, \mathfrak{F}(t_0, \varphi)) = \mathfrak{F}(t_0, \varphi) \circ \Phi_{t-t_0}^{-1}, |t - t_0| < \varepsilon, \varphi \in O.$$

La fonction g est de classe C_F^∞ de $]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times O$ dans E, de plus, pour toute $\varphi\in O$, $g(\cdot,\varphi)(\cdot)$ est une solution de (1) avec $g(t_0,\varphi)=\mathfrak{F}(t_0,\varphi)$. Alors grâce à l'unicité, on a $]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times O\subset D_E$ et

$$g(t,\varphi)=\mathfrak{F}(t,\varphi),(t,\varphi)\in\,]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times O,$$

ce qui constitue une contradiction puisque $\lambda<t_0+\varepsilon$. D'où $\sup\mathcal{I}_{\varphi_0}=\sup\Lambda$.

De façon analogue, on vérifie que, pour tout $t_0\in\left]\inf\mathcal{I}_{\varphi_0},0\right[$, il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un ouvert $O\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ contenant φ_0 tels que $\mathfrak{F}$ soit de classe C_F^∞ de $I\times O$ dans E.

La démonstration du théorème est terminée. □

Corollaire 3.5. *Supposons que la fonction f vérifie les conditions (3) et (14) et ne dépend pas de la variable t. Alors l'opérateur différentiel $A:u\mapsto -D_2u(\cdot)(f(\cdot,u(\cdot)))$ est un champ de vecteurs de classe C_F^∞ sur E possédant un flot de classe C_F^∞.*

Proof. Etant donné $k\in\mathbb{N}^*$, on note E_k l'un des espaces de Banach suivants:

- $\mathcal{S}_k$, l'espace des fonctions $u\in C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ telles que

$$\lim_{\|x\|_2\to\infty}\langle x\rangle^k\left\|\partial^\alpha u(x)\right\|_2=0,\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\le k,$$

- $C_0^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, ou bien de $C_c^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, dans l'espace d'Hölder $C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$,
- $HC_0^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)=H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\cap C_0^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$,
- $\mathfrak{C}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Il n'est pas difficile de voir que $E=\cap_{k\in\mathbb{N}^*}E_k$ est l'un des espaces considérés dans le théorème 3.1. En utilisant la réciproque du théorème de Taylor, on vérifie que A est de classe C^∞ de E_k dans E_{k-1} quel que soit $k\ge2$. Mais comme les injections naturelles $E\hookrightarrow E_k$, $k\ge1$, sont de classe C_F^∞, on a alors $A\in C_F^\infty(E;E_k)$ pour tout $k\ge1$. Par conséquent, $A\in C_F^\infty(E;E)$. □

4 Existence du flot dans $C^\infty(M;N)$

Dans cette section, on considère une variété fermé M et une variété paracompacte sans bord N, et on munit l'ensemble $C^\infty(M;N)$ de sa structure différentielle naturelle, qui est une structure de Fréchet (voir [11], [15] et [31]). Le groupe de difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$ est un groupe de Lie-Fréchet de classe C_F^∞, régulier (au sens de Milnor) et ouvert de $C^\infty(M;M)$, son algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{Diff(M)}=\mathfrak{X}(M)$ munie du crochet $[X,Y]=Y\circ X-X\circ Y$ (voir [15], [22], [31], [32], [33] et [35]).

On a le

Théorème 4.1. *Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R}\times M\times N\to TM)$ est une section de classe C^∞. Alors l'équation (1) admet un flot de classe C_F^∞ sur $C^\infty(M;N)$.*

Proof. Comme M est compacte, le flot $F=\left(F^1,F^2\right)$ de l'équation différentielle

$$F'(t)=\left(f(t,F(t)),0_{F^2(t)}\right)\in TM\times TN,$$

est défini sur $\mathbb{R}\times M\times N$ tout entier. Pour $\varphi\in C^\infty(M;N)$ et $t\in\mathbb{R}$, on note $\Phi_t(\cdot)$ l'application $F^1(t,\cdot,\varphi(\cdot))$. On vérifie, comme dans la démonstration de la proposition 2.1, que l'intervalle $I_\varphi\subset\mathbb{R}$ défini par

$$\begin{aligned} t &\in I_\varphi\cap\mathbb{R}_+\Leftrightarrow\forall s\in[0,t];\Phi_s\in\mathrm{Diff}(M),\\ t &\in I_\varphi\cap\mathbb{R}_-\Leftrightarrow\forall s\in[t,0];\Phi_s\in\mathrm{Diff}(M),\end{aligned}$$

est ouvert dans $\mathbb{R}$ et que la fonction $(t,x) \in I_\varphi \times M \mapsto \varphi \circ \Phi_t^{-1}(x) \in N$ constitue une solution de $(\mathcal{P})$.

Le résultat de la proposition 2.3 est facile à établir ici puisque la variété M est compacte. En effet, si $u \in C^\infty(]a,b[\times M;N)$ est une solution de $(\mathcal{P})$ avec $\varphi \in C^\infty(M;N)$, alors pour tout $s \in]a,b[$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$u(t,x) = u\left(s, \widetilde{\Phi}_t^{-1}(x)\right), (t,x) \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\times M,$$

où

$$\widetilde{\Phi}_t(x) = F^1\left(t, F(s,\cdot)^{-1}(x, u(s,x))\right), (t,x) \in \mathbb{R}\times M.$$

Ceci montre que, pour toute $\varphi \in C^\infty(M;N)$, il existe un intervalle maximale $\mathcal{I}_\varphi$ contenant 0 et une solution unique $\mathfrak{F}(\cdot,\varphi)(\cdot) \in C^\infty\left(\mathcal{I}_\varphi \times M;N\right)$ de $(\mathcal{P})$.

On utilise la réciproque du théorème de Taylor, comme dans la démonstration du lemme 3.2, pour vérifier que l'application $(t,\varphi) \mapsto \Phi_t(\cdot)$ est de classe C_F^∞ de $\mathbb{R}\times C^\infty(M;N)$ dans $C^\infty(M;M)$. On peut considérer encore ce résultat comme une conséquence de ce qu'on appelle, dans l'analyse globale, 'Omega Lemma' (voir [29] et [31]).

Maintenant, on suit exactement les étapes de la preuve du théorème 3.1 pour vérifier que l'ensemble $D = \left\{(t,\varphi) \in \mathbb{R}\times C^\infty(M;N) : t \in \mathcal{I}_\varphi\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}\times C^\infty(M;N)$ et que $\mathfrak{F} \in C_F^\infty(D; C^\infty(M;N))$. □

Dans l' appendice suivant, on exposera le théorème classique de Taylor, qu'on a utilisé dans ce travail, pour justifier quelques résultats. Ce théorème constitue l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse mathématique.

5 Appendice: Théorème de Taylor

Soit E et F deux espaces de Banach. Pour $k \geq 1$, on désigne par $\mathcal{L}^k(E;F)$ l'espace des applications k-linéaires et continues de E dans F et par $\mathrm{Poly}^k(E;F)$ l'espace des polynômes homogènes de degré k de E dans F. On rappelle que $\mathrm{Poly}^k(E;F)$ est défini comme suit:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Poly}^k(E;F) \\ = \; &\left\{P : E \to F : \exists B \in \mathcal{L}^k(E;F), P(x) = B(x,\ldots,x), x \in E\right\}. \end{aligned}$$

Pour chaque ouvert Ω de E, on pose

$$\widetilde{\Omega} = \{(x,v) \in \Omega\times E : \|v\| < d(x,\partial\Omega)\},$$

où $d(x,\partial\Omega)$ est la distance entre x et $\partial\Omega$. L'ensemble $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert de $\Omega\times E$ grâce à la continuité de la fonction $x \mapsto d(x,\partial\Omega)$.

Théorème 5.1 (Théorème de Taylor)**.** *Etant donné deux espaces de Banach E et F, un ouvert $\Omega \subset E$ et une fonction $f : \Omega \to F$, les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1. *f est de classe C^k, $k \geq 1$.*
2. *Il existe des fonctions $\Phi_j \in C^0\left(\Omega; \mathrm{Poly}^j(E;F)\right)$ $(1 \leq j \leq k)$ et $R_k \in C^0\left(\widetilde{\Omega}; \mathrm{Poly}^k(E;F)\right)$ tels que*

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{1\leq j\leq k} \Phi_j(x)(v) + R_k(x,v)(v), (x,v) \in \widetilde{\Omega},$$

et que $R_k(x,0) = 0$ quel que soit $x \in \Omega$.

Si l'une des deux conditions précédentes est vraie, on a nécessairement:

$$\Phi_j(x)(v) = \frac{D^j f(x)(v)^j}{j!}, (x, v) \in \Omega \times E, 1 \leq j \leq k$$

et

$$R_k(x, v)(w) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D^k f(x+tv)(w)^k dt - \frac{D^k f(x)(w)^k}{k!}, (x, v) \in \widetilde{\Omega}, w \in E.$$

L'implication 2 ⇒ 1 est connue sous le nom 'réciproque du théorème de Taylor'. Pour une démonstration de ce théorème voir par exemple [29], [31] et [36].

Remerciements L'auteur est vraiment très reconnaissant au référé d'abord pour sa lecture attentive du premier manuscrit et deuxièmement pour avoir contribué à améliorer la présentation de la seconde version.

References

[1] D. Amadori, W. Shen, *An integro-differential conservation law arising in a model of granular flow*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, March 2012, Vol. 09, No. 01, pp. 105-131.

[2] D. S. Anikonov, S. G. Kazantsev, D. S. Konovalova, *Differential properties of a generalized solution to a hyperbolic system of first-order differential equations*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, July 2013, Volume 7, Issue 3, pp 313-325.

[3] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 250, Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] A. Bastiani, *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie*, J. Anal. Math., 13 (1964), 1–114.

[5] C. Bauzet, G. Vallet, P. Wittbold, *The Cauchy problem for conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, December 2012, Vol. 09, No. 04, pp. 661-709.

[6] C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, 3rd edn., Springer, Heidelberg, 2010.

[7] C. M. Dafermos, *N-Waves in Hyperbolic Balance Laws*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 9, No. 2 (2012) 339-354.

[8] P. M. N. Dharmawardane, *Global solutions and decay property of regularity-loss type for quasi-linear hyperbolic systems with dissipation*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 03/2013, 10(01), 37-76.

[9] A. Frölicher, A. Kriegl, *Linear spaces and differentiation theory*, Pure and Applied Mathematics, J. Wiley, Chichester 1988.

[10] J. Glimm, P. D. Lax, *Decay of solutions of systems of nonlinearhyperbolic conservation laws*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 101, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.

[11] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 65-222.

[12] N. Hermas, S. Djebali, *Existence de géodésiques d'un groupe de difféomorphismes muni d'une métrique de Sobolev*, African Diaspora J. Math, Volume 9, Number 1, pp. 50–63 (2010).

[13] T. Kato, *The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30. IX. 1975, Volume 58, Issue 3, pp 181-205.

[14] H. H. Keller, *Differential calculus in locally convex spaces*, Lecture Notes in Math. 417, Springer-Verlag, 1974.

[15] A. Kriegl, P. W. Michor, *The Convenient Setting for Global Analysis*, AMS, Providence, 1997, Surveys and Monographs 53.

[16] A. N. Kochubei, *Fractional-hyperbolic systems*, Fractional Calculus and Applied Analysis, December 2013, Volume 16, Issue 4, pp 860-873.

[17] P. D. Lax, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, CPAM 7, 1954, 159-193.

[18] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), 537-566.

[19] P. D. Lax, *The Theory of Hyperbolic Equations*, Stanford Lecture Notes, 1963.

[20] P. D. Lax, *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, J. Math. Phys. 5 (1964), 611-613.

[21] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1973.

[22] J. Leslie, *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*, Topology 6 (1967), 264-271.

[23] J. Leslie, *On the Lie subgroups of infinite dimensional Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), Volume 16, Number 1, January 1987.

[24] J. Leslie, *Some integrable subalgebras of the Lie algebras of infinite dimensional Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc, Volume 333, Number 1, September 1992.

[25] P.-L. Lions, *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, London, Pitman,1982.

[26] P.-L. Lions, B. Perthame, P. E. Souganidis, *Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996), 599-638.

[27] P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. AMS 7 (1994), 169-191.

[28] A. J. Majda, *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[29] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer-Verlag Publishing Company, Inc., 2001.

[30] A. D. Michal, *Differential calculus in linear topological spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., 24 (1938), 340–342.

[31] P. W. Michor, *Manifolds of differentiable mappings*, Shiva, Orpington, 1980c.

[32] J. Milnor, *On infinite-dimensional Lie groups*, Preprint Institute of Advanced Study, Princeton, 1982.

[33] J. Milnor, *Remarks on infinite dimensional Lie groups, Relativity, Groups, and Topology II*, Les Houches, 1983, B.S. DeWitt, R. Stora, Eds., Elsevier, Amsterdam, 1984.

[34] K.-H. Neeb, *Nancy lectures on infinite-dimensional Lie groups*, preprint, 2002.

[35] K.-H. Neeb, *Monastir Summer School: Infinite-Dimensional Lie Groups*, Monastir Summer School, July 2005.

[36] E. Nelson, *Topics in Dynamics I: Flows*, Princeton University Press, Princeton, 1969.

[37] J. Szilasi, R. L. Lovas, *Some aspects of differential theories*, Handbook of Global Analysis, Elsevier, 2008.

[38] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1996.