African Diaspora Journal of Mathematics
Special Volume in Honor of Prof. Augustin Banyaga ISSN 1539-854X
Volume 14, Number 2, pp. 76–81 (2012) www.math-res-pub.org/adjm

Sur les Feuilletages de Lie Nilpotents

Hamidou DATHE*
Department of Mathematics, UCAD,
Dakar, BP 5005, SENEGAL

Ameth NDIAYE†
Department of Mathematics, UCAD,
Dakar, BP 5005, SENEGAL

Abstract

On construit sur une variété compacte un feuilletage de Lie nilpotent et non abélien de codimension 4 qui n'admet pas de déformation résoluble non nilpotente.

Abstract

We construct on a compact manifold a nilpotent (non abélien) Lie foliation of codimension four which cannot be deformed to a non nilpotent solvable one.

Keywords: Feuilletage de Lie, groupe de Lie rsoluble groupe de Lie nilpotent.

English summary. Let $\mathcal{F}$ be a G-Lie foliation of codimension q on a compact manifold V. Denote $\omega = (\omega^1, \omega^2, ..., \omega^q)$ the vector valued 1-form in the Lie algebra $\mathcal{G}$ of G which defines $\mathcal{F}$. One have the following équation:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

where C^i_{jk} are structure constants of $\mathcal{G}$. We can deform $\mathcal{F}$ in two ways: The first is a deformation with fixed transverse group G, such deformations have been studied by Tischler (see [10]) who proved that if $G = \mathbb{R}^q$ the foliation $\mathcal{F}$ can be deformed into a fibration over $\mathbb{T}^q$. In [6], D. Lehmann gives an example of a Lie foliation whose transverse group is the three dimensional Heisenberg group N which cannot be deformed into a fibration over some compact quotient of the transverse group by a lattice. With J.F.Quint we generalize in [3] the Lehmann construction for all nilpotent and nonabelian Lie groups and we construct a versal family of deformations for such foliations.

The second kind of deformation of $\mathcal{F}$ is one for which both the foliation and the model Lie group G are allowed to change. These deformations were introduced by E. Ghys in [4] and studied more extensively in [5]. More precisely a deformation of $\mathcal{F}$ is given by a

*E-mail address: hamidou.dathe@yahoo.fr
†E-mail address: ameth.ndiaye@gmail.com

collection of 1-forms $(\omega_t^1, ..., \omega_t^q)$ linearly independent and varying smoothly with $t \in \mathbb{R}$ and a set of smooth functions $C_{ij}^k(t)$ such that:

$$d\omega_t^i = -\frac{1}{2} C_{jk}^i(t) \omega_t^j \wedge \omega_t^k.$$

The functions $C_{ij}^k(t)$ define a family of Lie algebras $\mathcal{G}_t$ of same dimension and $\omega_0 = \omega$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$.

For any connected simply connected and nilpotent group G containing a lattice Γ we can obtained a foliation as follows (see [3] for details): Let $\mathbf{G}$ be the $\mathbb{Q}$ algebraic unipotent group whose real extension is G. Take $\lambda > 0$ an integer without square factor and σ the unique non trivial inner automorphism of $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$. Denote by Δ the set of $(g, \sigma(g))$ contained in $\mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]) \times \mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Let ρ be a $\mathbb{Q}$-faithful representation of $\mathbf{G}$ in a $\mathbb{Q}$-vector space E. Choose a base b of E and let Γ be the set of $(g, \sigma(g))$ contained in Δ such that the coefficients of $\sigma(g)$ in b are in $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. By a theorem of Borel-Harish-Chandra (see [1]), Γ is a co-compact lattice of $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$. If $\mathbf{H}$ is the $\mathbb{Q}$-unipotent group whose group of real points is H associated to the choice of the lattice Γ in H, we have $\mathbf{H}(\mathbb{Q}) = \Delta$. Then no nontrivial subgroup of $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \times \{e\}$ and $\mathrm{G}_2 = \{e\} \times \mathrm{G}$ is defined over $\mathbb{Q}$ for the $\mathbb{Q}$-structure $\mathbf{H}$. The foliation $\mathcal{F}$ by G_2-orbits of H/Γ is a G-Lie foliation whose holonomy group is the natural injection of Γ into G. When G is dimension three, that is G = N, $\mathcal{F}$ is the Lehmann foliation $\mathcal{L}$ constructed in [6]. In [3] we prove that $\mathcal{L}$ can be obtained as a deformation of an $\mathbb{R}^3$-Lie foliation and in [2] we prove that $\mathcal{L}$ cannot deformed into a non nilpotent foliation. Here we obtain the following

Theorem 2.2. When G is dimension four the foliation $\mathcal{F}$ cannot be deformed into a solvable and nonnilpotent one.

1 Introduction

Soit V une variété compacte connexe et G un groupe de Lie (simplement connexe). Un G-feuilletage de Lie de V est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de couples (U, f), où U est un ouvert de V et $f : U \longrightarrow \mathrm{G}$ une submersion, ayant les propriétés suivantes: (i) les ouverts U recouvrent V; (ii) pour tous (U, f) et (W, h) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G tel que, pour tout $x \in U \cap W$, on ait $f(x) = h(x)g$. En particulier les surfaces de niveaux des submersions f, pour (U, f) dans $\mathcal{F}$, se recollent pour former un feuilletage de V. Pour éviter les ambiguités, on supposera en outre que $\mathcal{F}$ est maximal au sens suivant: si U est un ouvert de V et $f : U \longrightarrow \mathrm{G}$ une submersion, si, pour tout (W, h) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G avec $f = h.g$ sur $U \cap W$, on a $(U, f) \in \mathcal{F}$.

Soit $\tilde{V}$, le revêtement universel de V, $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé d'un G-feuilletage $\mathcal{F}$ et $\tilde{\omega}$ la 1-forme associée. Fixons un point x_0 de V et un relevé $\tilde{x}_0$ de x_0, et notons Γ le groupe fondamental de V en x_0, qui agit naturellement sur $\tilde{V}$. Il existe alors une submersion $D : \tilde{V} \longrightarrow \mathrm{G}$ avec $D(x_0) = e$ et un morphisme $h : \Gamma \longrightarrow \mathrm{G}$ tels que $\tilde{\omega} = dD$ et que, pour tout x dans $\tilde{V}$ et pour tout γ dans Γ, on ait $D(\gamma x) = D(x)h(\gamma)^{-1}$. Les autres couples (D', h') associés aux autres choix de points bases sont de la forme $x \longrightarrow (D(x)g, g^{-1}h(x)g)$ où g est un élément de G; on dit que D est la développante de $\mathcal{F}$ et h son morphisme d'holonomie. Réciproquement, la donnée d'un couple (D, h) où D est une submersion de $\tilde{V}$ dans G et h

un morphisme de Γ dans G ayant les propriétés ci-dessus définit bien un G-feuilletage de Lie de V.

Ces notions et ces résultats sont dus principalement à E.Fedida. Le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de P.Molino,[[8],4.2].

Dans [6], D. Lehmann a construit un exemple de feuilletage de Lie sur une variété compacte V dont le groupe transverse est le groupe de Heisenberg N de dimension 3 et qui n'est approchable par aucun N-feuilletage de Lie sur V à holonomie discrète. Dans [2] nous avons étudié des déformations de ce feuilletage dans lesquelles le groupe transverse varie et nous avons montré que de telles déformations restent nilpotentes.

Ces déformations sont aussi considérées par E. Ghys dans [4] et étudiées plus en détails dans [5].

Dans ce travail on construit sur des variétés compactes des feuilletages de lie nilpotents non abéliens de codimension 4 qui n'admettent pas de déformation résoluble non nilpotente.

2 Deformations

Definition 2.1. Soit $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie de codimension q sur une variété compacte V de dimension n. On note $\omega = (\omega^1, \omega^2, ...\omega^q)$ la 1-forme vectorielle à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe de Lie G qui définit $\mathcal{F}$. On a:

$$d\omega^i = \frac{-1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

où C^i_{jk} sont les constantes de structures de $\mathcal{G}$. Soit pour $t \geqslant 0$, $\omega_t = (\omega_t^1, \omega_t^2, ..., \omega_t^q)$ une collection de 1-formes réelles linéairement indépendantes vérifiant:

$$d\omega_t^i = \frac{-1}{2} C^i_{jk}(t) \omega_t^j \wedge \omega_t^k$$

où les $C^i_{jk}(t)$ sont des fonctions de classe C^∞ de t qui représentent les constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ telle que $\omega_0 = \omega$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ et pour tout $t > 0$, $dim\mathcal{G}_t = dim\mathcal{G}$. La 1-forme vectorielle ω_t définit alors une famille $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{G}_t$-feuilletages de Lie telle que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ qu'on appelle une déformation de $\mathcal{F}$.

Dans toute la suite N désigne le groupe de Heisenberg, c'est-à- dire le groupe des matrices carrées unipotentes triangulaires supérieures. Dans [5], A. E. Kacimi, O. Guasp et M. Nicolau ont donné un exemple de flot abélien qui se déforme en un N-flot. Dans [3] nous avons construit un exemple de feuilletage de Lie abélien de dimension 3 qui se déforme en un N-feuilletage de Lie et la déformation obtenue est précisément le feuilletage de D. Lehmann construit dans [6].

Dans toute la suite G est un groupe de Lie nilpotent non abélien connexe et simplement connexe possédant des réseaux. On note par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{N}$ les algèbres de lie de G et N.

Soit **G** le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique unipotent dont l'extension réelle est G. Fixons un entier $\lambda > 0$ sans facteur carré, et soit σ l'unique automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$ défini par: $\sigma(a + b\sqrt{\lambda}) = (a - b\sqrt{\lambda})$ et Δ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ dans $G(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]) \times G)\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Soit enfin ρ une $\mathbb{Q}$-représentation fidèle de **G** dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, fixons une base b de V et notons Γ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ dans Δ où les coefficients de $\rho(g)$ dans la base b sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. D'après un théorème de Borel-Harish-Chandra (voir[1]), Γ est un réseau co-compact de $\mathrm{H} = \mathrm{G}\times\mathrm{G}$. Notons $\mathbf{H}$ le $\mathbb{Q}$-groupe unipotent dont l'extension réelle associée à Γ est H. On a $\mathbf{H}(\mathbb{Q}) = \Delta$. En particulier, aucun sous-espace non trivial de $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}\times\{e\}$ et de $\mathrm{G}_2 = \{e\}\times\mathrm{G}$ n'est défini sur $\mathbb{Q}$ pour la $\mathbb{Q}$-structure $\mathbf{H}$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ en G_2-orbites de H/Γ possède une structure naturelle de G-feuilletage de Lie dont le groupe d'holonomie est l'injection de Γ dans G, qui est d'image dense. Si G est de dimension 3, on a montré dans [3] que $\mathcal{F}$ est la déformation d'un feuilletage abélien. Toujours dans le cas où G est de dimension 3, on a prouvé dans [2] que $\mathcal{F}$ n'admet pas de déformation non nilpotente.

Dans cette note on montre le

Theorem 2.2. *Si* G *est de dimension quatre,* $\mathcal{F}$ *n'admet pas de déformation résoluble non nilpotente.*

Pour la démonstration nous aurons besoin de la définition et des lemmes suivants:

Lemma 2.3. *[9] Une algèbre de Lie résoluble non abélienne de dimension* 4 *dont une base est* (e_1,e_2,e_3,e_4)*, a une des présentations suivantes (où les crochets non écrits sont nuls).*

$\mathcal{G}_1$: $[e_1,e_2] = e_3$
$\mathcal{G}_2$: $[e_1,e_2] = e_2, [e_1,e_3] = e_2 + e_3$
$\mathcal{G}_3$: $[e_1,e_2] = e_2$, $[e_1,e_3] = \lambda e_3$ $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$
$\mathcal{G}_4$: $[e_1,e_2] = \gamma e_2 - e_3$, $[e_1,e_3] = e_2 + \gamma e_3$ $\gamma \geqslant 0$
$\mathcal{G}_5$: $[e_1,e_2] = e_2$, $[e_3,e_4] = e_4$
$\mathcal{G}_6$: $[e_4,e_1] = e_2$, $[e_4,e_2] = e_3$
$\mathcal{G}_7$: $[e_4,e_1] = e_1$, $[e_4,e_2] = e_1 + e_2$, $[e_4,e_3] = e_2 + e_3$
$\mathcal{G}_8$: $[e_4,e_1] = e_1$, $[e_4,e_2] = \mu e_2$, $[e_4,e_3] = e_2 + \mu e_3$, $\mu \in \mathbb{R}$
$\mathcal{G}_9$: $[e_4,e_1] = e_1$, $[e_4,e_2] = \alpha e_2$, $[e_4,e_3] = \beta e_3$, $-1 < \alpha \leq \beta \leq 1 (\alpha\beta \neq 0)$, $-1 = \alpha \leq \beta \leq 0$
$\mathcal{G}_{10}$: $[e_4,e_1] = e_1$,$[e_4,e_2] = \gamma e_2 - \delta e_3$, $[e_4,e_3] = \delta e_2 + \gamma e_3$, $\gamma \in \mathbb{R}, \delta > 0$
$\mathcal{G}_{11}$: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_4,e_1] = e_1$, $[e_4,e_2] = -e_2$
$\mathcal{G}_{12}$: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_4,e_3] = e_3$, $[e_4,e_1] = \lambda e_1$, $[e_4,e_2] = (1-\lambda)e_2$, $\lambda \geq \frac{1}{2}$
$\mathcal{G}_{13}$: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_4,e_1] = \frac{\delta}{2}e_1 - e_2$, $[e_4,e_3] = \delta e_3$, $[e_4,e_2] = e_1 + \frac{\delta}{2}e_2$, $\delta \geq 0$
$\mathcal{G}_{14}$: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_4,e_3] = e_3$, $[e_4,e_1] = \frac{1}{2}e_1$, $[e_4,e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2$
$\mathcal{G}_{15}$: $[e_1,e_3] = e_3$, $[e_1,e_4] = e_4$, $[e_2,e_3] = e_4$, $[e_2,e_4] = -e_3$.

Definition 2.4. Un groupe de Lie résoluble G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dit complètement résoluble si tous les opérateurs linéaires adjoints ad_X $(X \in \mathcal{G})$ ne possèdent que des valeurs propres réelles.

Par exemple tout groupe de Lie nilpotent est complètement résoluble (voir [11]).

Lemma 2.5. *(Théorème de Saito [11]) Soit* G *et* G' *deux groupes de Lie résolubles, simplement connexes et complètement résolubles tel que* G *contient un réseau* Γ*. Tout homomorphisme* $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{G}'$ *s'étend de manière unique en un homomorphisme* $\tilde{\alpha} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$.

Preuve Soit $\mathcal{F}_t$ une $\mathcal{G}_t$-déformation de $\mathcal{F}$. Supposons que pour $t > 0$ les algèbres de Lie $\mathcal{G}_t$ soient résolubles non nilpotentes de dimension 4 et $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. Pour tout t le groupe de Lie simplement connexe G_t d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ est le groupe transverse du feuilletage de Lie

$\mathcal{F}_t$ et $G_0 = G$. On note respectivement par ρ et ρ_t les morphismes d'holonomie de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t$. On a $\rho_0 = \rho : \Gamma \longrightarrow G$ et pour tout $t > 0$ et suffisamment petit $\rho_t : \Gamma \longrightarrow G_t$:

On Désigne par G_i avec $i = 1, ..., 15$ les groupes de lie simplement connexes respectivement associés àux l'algèbres de Lie $\mathcal{G}_i$ du lemme 2.3.

On distingue deux cas possibles pour $\mathcal{G}$ puisque dans la liste du lemme2.3 il y a deux groupes nilpotents que sont G_1 et G_6.

1^{er} *cas:* $G = G_1$. On distingue deux sous-cas.

- Supposons $G_t = G_i$ avec $i \neq 4, 6, 10, 13$. Comme les G_i pour $i \neq 4, 10, 13$ sont complètement résolubles, d'après le lemme 2.5 ρ_t se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\rho}_t : H \longrightarrow G_i$ qui sera surjectif puisque Γ est uniforme dans H. Donc les G_i pour $i \neq 4, 6, 10, 13$ sont nilpotentes, ce qui est absurde car ces groupes ne sont pas nilpotentes sauf pour $i = 6$ qui est un cas exclus puisque les déformations sont supposées non nilpotentes.

- Supposons que $G_t = G_i$ avec $i = 4, 10, 13$. Par construction, la restriction de ρ au centre Z de Γ est non trivial. Il en est de même pour ρ_t. En effet, si $\rho_t(Z)$ est trivial, comme l'id'eal dérivé de Γ est contenu dans Z, $\rho_t(\Gamma)$ est abélien, ce qui est impossible. Donc $\rho_t(Z)$ est non trivial. Comme $\rho_t(\Gamma)$ est cntenu dans le centralisateur d'un élément non trivial $\rho_t(\gamma)$ qui est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{R}^3$ ou à N et n'est donc pas uniforme, $\rho_t(\Gamma)$ ne peut être uniforme et $\mathcal{F}$ ne peut se déformer en un G_i-feuilletage de Lie.

2^{eme} *cas:* $G = G_6$. Les déformations étant supposées non nilpotentes, le cas $G_t = G_1$ est exclus, on distingue ainsi deux sous-cas:

- Supposons $G_t = G_i$ avec $i \neq 4, 10, 13$, on conclut de la même manière que le premier sous-cas du premier cas.

- Supposons que $G_t = G_i$ avec $i = 4, 10, 13$. Dans ce cas comme $Z \subset [\Gamma, \Gamma]$, si $\rho_t(Z)$ est trivial, on a $\rho_t([\Gamma, \Gamma]/Z)$ est abélien, donc $\rho_t[\Gamma, \Gamma]$ est abélien et donc $\rho_t(\Gamma)$ est abélien puisque $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ est abélien. Ainsi $\rho_t(Z)$ n'est pas trivial et donc $\rho_t(\Gamma)$ ne peut être uniforme et le feuilletage $\mathcal{F}$ ne peut se déformer en un G_i-feuilletage de Lie. Ce qui termine la preuve du théorème 2.2.

References

[1] A. Borel, Harish, chandra *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Annals of mathematics, **75**, (1962).

[2] H. Dathe, *Sur le feuilletage de Lehmann*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I, vol **349**, no 5-6, p.337-340 (2011).

[3] H.Dathe, J. F. Quint, *Exemples de feuilletages de Lie*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, **14**, No2 p.203-215

[4] E. Ghys, *Riemannian foliations: examples and problems, Appendice E de Riemannian foliations, par P. Molino*, Progress in Mathematics **73**, Birkhauser, Boston (1988).

[5] A.E. Kacimi, G. Guasp, M. Nicolau, *On deformations of transversely homogenous foliations*, Topology, **40** p.0363-1393 (2001).

[6] D. Lehmann, *Sur l'approximation de certains feuilletages nilpotents par des fibrations*, Compte rendus de l'Académie de sciences serie A, **286**, p.251-254 (1978).

[7] J. Milnor, *Curvatures of left invariants metrics on Lie groups*, Advances in Mathematics, **21**, p.293-329 (1976).

[8] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics **73**, Birkhauser, Boston (1988).

[9] G. Ovando, *Four dimensional symplectic Lie algebras*, Contributions to Algebras and Geommetry, **47**, p.419-434 (2006).

[10] D.Tischler, *On fibering certain manifold over the circle*, Topology **9**, p.153-154 (1970).

[11] A. Tralle, *A note on solvable Lie groups without lattices and the Felix-Thomas models of fibrations*, Arxiv.math.DG/**0009105 V1**; (2000).