African Diaspora Journal of Mathematics ISSN 1539-854X
Volume 13, Number 2, pp. 100–107 (2012) www.math-res-pub.org/adjm

Sur les déformations d'un feuilletage de codimension 1 en structures de contact

Hamidou Dathe*
Department of Mathematics, UCAD
Dakar, Sénégal

Cheikh Khoulé†
Department of Mathematics, UCAD
Dakar, Sénégal

Abstract

Dans cet article on étudie quelques déformations particulières d'un feuilletage de codimension 1 en structures de contact. Ces déformations dites affines sont un peu plus générales que les déformations linéaires (voir [3]) au sens de Dathe-Rukimbira. Elles permettent aussi de donner dans une variété de contact compacte de dimension $2n+1$, une condition nécéssaire et suffisante de déformabilité d'une 1-forme intégrable quelconque en structures de contact.

AMS Subject Classification: 62G05; 62G20.

Keywords: déformations, déformations affines, feuilletage de codimension 1, structures de contact.

1 Introduction

Dans ce texte, V d'esignera toujours une variété différentiable de classe C^∞ orientée. Les champs d'hyperplans tangents qu'on considérera sur V seront supposés transversalement orientés. Un tel champ ξ pourra toujours être vu comme le noyau d'une 1-forme η, appelée équation de ξ, unique à multiplication près par une fonction positive.
Si η satisfait la condition d'intégrabilité de Frobénuis à savoir $\eta \wedge d\eta = 0$, alors ξ est dit un feuilletage de codimension 1 de V.
Si V est de dimension impaire 2n + 1, on dit que ξ est une structure de contact sur V si $\eta \wedge (d\eta)^n$ est une forme volume sur V. Une telle forme η est appelée forme de contact sur V et (V,ξ) une variété de contact. Si η est une forme de contact sur V, alors il existe un unique champ de vecteurs Z tel que $\eta(Z) = 1$ et $i_Z d\eta = 0$, appelé champ de Reeb de η. On supposera dans la suite sur V, que toute forme de contact η est positive (ie : $\eta \wedge (d\eta)^n > 0$).

*E-mail address: hamidou.dathe@yahoo.fr
†E-mail address: chthioune@yahoo.fr

Une variété de contact (V,η,Z) de forme de contact η et de champ de Reeb Z admet aussi une métrique riemanniènne g et un champ de tenseur J de type $(1,1)$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées (voir [1]): $JZ = 0, \eta(Z) = 1, J^2 = -id_{TV} + \eta \otimes Z, \eta(X) = g(Z,X), g(JX,JY) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), g(X,JY) = d\eta(X,Y)$.
Une telle métrique g est appelée **une métrique de contact**. Si Z est **Killing** (ie son groupe local à un paramétre est formé par des isométries) relativement à une certaine métrique de contact g ; on dit que V est une **K-variété** de contact.

A première vue , la théorie des feuilletages de codimension 1 et celle des structures de contact sur une vartiété V de dimension 2n+1 appartiennent entièrement à deux mondes différents. Cependant le développement des deux théories a fait apparaitre de nombreux points communs. De plus la théorie des feuilletacts (ou confoliations ie : des structures définies par des 1-formes η telles que $\eta \wedge (d\eta)^n \geq 0$, voir [4]) d'Eliashberg et Thurston est un pont direct entre les deux domaines qui leur permet notamment de montrer le théorème suivant dit de perturbation d'Eliashberg-Thurston.

Théorème 1.1. [4] *Sur une variété V fermée de dimension 3, tout feuilletage de classe au moins C^2, tranversalement orientable de codimension 1, différent du feuilletage produit de $S^2 \times S^1$ par les sphéres $S^2 \times p$, $p \in S^1$ est C^0−proche d'une structure de contact.*

Rappelons que si ξ est un feuilletage de codimension 1, défini par une 1-forme non singulière α sur une variété V de dimension 2n+1, alors on dit que ξ est déformable en structures de contact, s'il existe sur V une famille à un paramétre réel de champs d'hyperplans $(\xi_t)_{t\geq 0}$ définis par des 1-formes α_t telle que $\xi_0 = \xi$ et pour tout $t > 0$, α_t est de contact. Selon Dathe et Rukimbira (voir [2]), si ξ_t est défini par une 1-forme $\alpha_t = \alpha + t\beta$ où β est une 1-forme non singulière indépendante de t, alors ξ est dit linéairement déformable.
Dans [4], Eliashberg et Thurston, optimistes quant à la possibilité de trouver mieux qu'une approximation C^0, posent la question suivante : ***Est - il toujours possible de déformer un feuilletage en structure de contact ?*** A défaut de répondre positivement à cette question, il serait intéressant de trouver une condition nécessaire et suffisante de déformabilité d'un feuilletage en structures de contact. Dathe et Rukimbira ont réussi dans [3] à démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1.2. [3] *Etant données V une variété différentielle fermée de dimension 2n+1, α une 1-forme fermée non singulière sur V et β une 1-forme quelconque sur V. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Les 1-formes $\alpha_t = \alpha + t\beta$ données dans une déformation linéaire de α en structure de contact sont des formes de contact pour tout $t > 0$.
(ii) La 1-forme β est de contact et $\alpha(Z) = 0$ où Z est le champ de Reeb de β.

Le théorème 1.3 suivant compléte le théorème 1.2, en effet il permet d'établir que si la fonction $\alpha(Z)$ n'est pas identiquement nulle, alors on ne peut effectuer de déformations linéaires à l'aide de la forme de contact β.

Théorème 1.3. [3] *Soit (V,β,Z) une variété de contact fermée de dimension 2n+1, où Z est le champ de Reeb de β. Soit α une 1-forme fermée non singulière sur V telle que $\alpha(Z)$*

soit non identiquement nulle. Alors il existe $\varepsilon > 0$ *tel que la 1-forme* $\alpha_t = \alpha + t\beta$ *ne soit pas de contact pour tout* $0 \leq t \leq \varepsilon$.

Le but de cet article est d'étudier quelques déformations particulières dites affines qui sont un peu plus générales que les déformations linéaires au sens de Dathe-Rukimbira. On donne d'abord une condition nécessaire et suffisante de déformabilité affine d'une 1-forme intégrable quelconque en structures de contact, dans une variété de contact compacte de dimension 2n+1 (voir théorème 2.2). Ces déformations nous permettent aussi d'étendre pour les 1-formes fermées non singulières les théorèmes 1.2 et 1.3 ci-dessus.

2 Déformations affines

Dans toute la suite C et B vérifient respectivement : $C : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ continue en 0 avec $C(0) = 1$ et $B : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ avec $B(0) = 0$.

Définition 2.1. *Un feuilletage* ξ *défini par une 1-forme non singulière* α *sur une variété V de dimension 2n+1, admet une* ***déformation affine*** *en structures de contact s'il existe sur V une 1-forme* β *non singulière et indépendante de t et une famille à un paramétre réel de champs d'hyperplans* $(\xi_t)_{t\geq 0}$ *définis par des 1-formes* $\alpha_t = C(t)\alpha + B(t)\beta$ *telles que* $\alpha_0 = \alpha$ *et pour tout* $t > 0$, α_t *soit une forme de contact.*

En particulier si $C(t) = 1$ et $B(t) = t$ on retrouve les déformations linéaires au sens de Dathe-Rukimbira.

Théorème 2.2. *Soit* (V,β,Z) *une variété de contact compacte de dimension 2n+1, où Z est le champ de Reeb de* β*. Une 1-forme* α *intégrable sur V admet une déformation affine à l'aide de* β *si et seulement si*

$$\alpha \wedge (d\beta)^n + n\beta \wedge (d\alpha) \wedge (d\beta)^{n-1} \geq 0. \tag{2.1}$$

Pour la preuve du théorème 2.2 démontrons d'abord le lemme 2.3 suivant :

Lemme 2.3. *Soit* γ, δ *deux 2-formes sur V alors on a*

$$(\gamma + \delta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \gamma^k \wedge \delta^{n-k}$$

Preuve. L'ensemble $\Omega^2(V)$ des 2-formes différentielles sur V est une sous algébre commutative de l'ensemble $\Omega(V)$ des formes différentielles sur V. Donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton sur $\Omega^2(V)$ et par suite on a le résultat voulu. ◃

Preuve du théorème 2.2 **:** Considérons la famille à un paramétre réel t de champs d'hyperplans $(\xi_t)_{t\geq 0}$ définis par les 1-formes $\alpha_t = C(t)\alpha + B(t)\beta$ où C et B sont définies comme précédemment. Si $t = 0$ on a

$$\alpha_0 = C(0)\alpha + B(0)\beta = \alpha.$$

Et $\forall t > 0$

$$\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (C(t)\alpha + B(t)\beta) \wedge (C(t)d\alpha + B(t)d\beta)^n.$$

Donc en appliquant le résultat du lemme 2.3 on a

$$\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (C(t)\alpha + B(t)\beta) \wedge (\sum_{k=0}^{n} C_n^k (C(t))^k (B(t))^{n-k} (d\alpha)^k \wedge (d\beta)^{n-k}) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (C(t))^k (B(t))^{n-k} [C(t)\alpha \wedge (d\alpha)^k \wedge (d\beta)^{n-k} + B(t)\beta \wedge (d\alpha)^k \wedge (d\beta)^{n-k}].$$

Puisque α est intégrable alors on peut écrire

$$\alpha \wedge (d\alpha)^k \wedge (d\beta)^{n-k} = 0, \quad \forall k \in \{1, ..., n\} \tag{2.2}$$

et

$$d(\alpha \wedge (d\alpha)^{k-1} \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-k}) = 0, \quad \forall k \in \{2, ..., n\}$$

cette dernière implique que

$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \quad \beta \wedge (d\alpha)^k \wedge (d\beta)^{n-k} - \alpha \wedge d((d\alpha)^{k-1} \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-k}) = 0.$$

Ainsi on déduit toujours de l'intégrabilité de α que

$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \quad \alpha \wedge d((d\alpha)^{k-1} \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-k}) = 0.$$

Par suite

$$\beta \wedge (d\alpha)^k \wedge (d\beta)^{n-k} = 0, \quad \forall k \in \{2, ..., n\}. \tag{2.3}$$

Donc (2.2) et (2.3) simplifient la valeur de $\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n$ ci-dessus et on a :

$$\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (B(t))^n [(C(t)(\alpha \wedge (d\beta)^n + n\beta \wedge d\alpha \wedge (d\beta)^{n-1}) + B(t)\beta \wedge (d\beta)^n].$$

Ainsi si $\alpha \wedge (d\beta)^n + n\beta \wedge d\alpha \wedge (d\beta)^{n-1} \geq 0$ alors $\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n > 0$.

Inversement si $\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n > 0$ alors

$$[(C(t)(\alpha \wedge (d\beta)^n + n\beta \wedge d\alpha \wedge (d\beta)^{n-1}) + B(t)\beta \wedge (d\beta)^n] > 0.$$

Donc en passant à la limite lorsque $t \to 0$ et en tenant compte des continuités de B et C en 0 on a :

$$\alpha \wedge (d\beta)^n + n\beta \wedge d\alpha \wedge (d\beta)^{n-1} \geq 0. \triangleleft$$

Corollaire 2.4. *Soit (V,β,Z) une variété de contact fermée de dimension 2n+1, où Z est le champ de Reeb de β. Une 1-forme fermée non singulière α sur V, admet une déformation affine à l'aide de la forme de contact β en structures de contact si et seulement si $\alpha(Z) = 0$.*

Pour la preuve du corollaire 2.4 démontrons d'abord le lemme 2.5 suivant :

Lemme 2.5. *Soit (V,β,Z) une variété de contact fermée de dimension 2n+1, où Z est le champ de Reeb de β. Pour toute 1-forme fermée α sur V si la fonction $\alpha(Z)$ garde un signe constant alors elle est nulle.*

Preuve. En effet β étant une forme de contact de champ de Reeb Z on a :

$$0 = i_Z(\alpha \wedge \beta \wedge (d\beta)^n) = \alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n - \alpha \wedge (d\beta)^n,$$

c'est à dire que $\alpha \wedge (d\beta)^n = \alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n$. Ainsi puisque α fermée alors on a :

$$d(\alpha \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}) = -\alpha \wedge (d\beta)^n = -\alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n.$$

Par suite d'après un théorème de "Stokes" on a :

$$\int_V \alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n = -\int_V d(\alpha \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}) = 0.$$

Ceci entraine alors que si $\alpha(Z)$ garde un signe constant elle est nulle. ◁

Preuve du corollaire 2.4 **:** En effet puisque α est fermée ($d\alpha = 0$), alors la condition nécéssaire et suffisante du théorème 2.2 devient

$$\alpha \wedge (d\beta)^n = \alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n \geq 0.$$

Par suite le lemme 2.5 permet de conclure. ◁

Etant donnée V une variété fermée comme dans le corollaire 2.4, si on ne fixe pas à priori la forme de contact β, alors la condition de déformabilité du corollaire sera retrouvée moyennant les théorèmes 2.6 et 2.9 ci-dessous, qui pourront respectivement être vus comme des extensions aux déformations affines des théorèmes 1.2 et 1.3 de Dathe et Rukimbira.

Théorème 2.6. *Etant données V une variété fermée de dimension 2n+1, α une 1-forme fermée non singulière sur V et β une 1-forme quelconque sur V. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) Les 1-formes $\alpha_t = C(t)\alpha + B(t)\beta$ données dans une déformation affine de α en structures de contact sont des formes de contact pour tout $t > 0$.
(b) La 1-forme β est de contact et $\alpha(Z) = 0$ où Z est le champ de Reeb de β.

Preuve. Puisque α est fermée, par un calcul simple on a :

$$\forall t > 0\,, \alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (B(t))^n[C(t)\alpha \wedge (d\beta)^n + B(t)\beta \wedge (d\beta)^n]. \tag{2.4}$$

Si on fixe une forme volume ω sur V, alors il existe deux fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ $g, h : V \to \mathbb{R}$ telles que $\alpha \wedge (d\beta)^n = g\omega$ et $\beta \wedge (d\beta)^n = h\omega$.
Supposons (a) vraie alors pour tout $t > 0\,, \alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n > 0$, ceci équivaut à $C(t)g + B(t)h > 0$ et ainsi en passant à la limite lorsque $t \to 0$ on a $g \geq 0$ et donc

$$\alpha \wedge (d\beta)^n \geq 0. \tag{2.5}$$

Ainsi comme V est fermée alors d'après un théorème de "Stokes" on a

$$\int_V \alpha \wedge (d\beta)^n = -\int_V d(\alpha \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}) = 0.$$

Par suite (2.5) donne

$$\alpha \wedge (d\beta)^n = 0. \tag{2.6}$$

D'où (2.4) entraine que $(B(t))^{n+1}\beta \wedge (d\beta)^n > 0$, c'est à dire que β est une forme de contact sur V et de plus si Z est le champ de Reeb de β on a

$$0 = i_Z(\alpha \wedge \beta \wedge (d\beta)^n) = \alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n - \alpha \wedge (d\beta)^n \tag{2.7}$$

Donc (2.7) et (2.6) donnent

$$\alpha(Z)\beta \wedge (d\beta)^n = \alpha \wedge (d\beta)^n = 0. \tag{2.8}$$

Ce qui implique $\alpha(Z) = 0$.
Inversement supposons (b) vraie. D'après (2.4) et (2.7) on a

$$\forall t > 0\,,\, \alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (B(t))^n[C(t)\alpha(Z) + B(t)]\beta \wedge (d\beta)^n.$$

D'où les hypothéses β contact et $\alpha(Z) = 0$ entrainent que

$$\forall t > 0\,,\, \alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (B(t))^{n+1}\beta \wedge (d\beta)^n > 0. \triangleleft$$

Exemple 2.7. *Toute 3-variété fermée munie d'une forme de contact avec une métrique de contact plate porte un feuilletage de codimension 1 qui admet une déformation affine en structures de contact.*

Preuve. Si on considére une 3-variété fermée munie d'une forme de contact avec une métrique de contact plate, elle porte un feuilletage ξ de dimension 2 totalement géodésique et parallélisable par deux champs de vecteurs Z_1 et Z_2 orthogonaux qui sont champs de Reeb des deux formes de contact respectives β_1 et β_2 (voir [2]). D'après le théorème 2.6 les familles à un paramétre réel $t \geq 0$ de 1-formes $\alpha_t^1 = C(t)\alpha + B(t)\beta_1$ et $\alpha_t^2 = C(t)\alpha + B(t)\beta_2$ sont des déformations affines de α en structures de contact. $\triangleleft$

Exemple 2.8. *Soit (V,β,Z,g) une K - variété de contact fermée de métrique de contact g, où Z est le champ de Reeb de β. Alors toute 1-forme fermée non singulière et harmonique α relativement à g, admet une déformation affine en structures de contact.*

Preuve. En effet si α est fermée non singulière et harmonique relativement à g et Z est Killing relativement à g, alors $\alpha(Z) = 0$ (voir [1]). Puis on conclut par le théorème 2.6. $\triangleleft$

De même qu'entre les théorèmes 1.2 et 1.3, le théorème 2.9 ci-dessous compléte aussi le théorème 2.6.

Théorème 2.9. *Soit (V,β,Z) une variété de contact fermée de dimension 2n+1, où Z est le champ de Reeb de β. Soit α une 1-forme fermée non singulière sur V telle que $\alpha(Z)$ soit non identiquement nulle. Alors pour tout C et B, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 \leq t \leq \varepsilon$, la 1-forme $\alpha_t = C(t)\alpha + B(t)\beta$ ne soit pas de contact.*

Preuve du théorème 2.9 : D'après ce qui précéde on a

$$\forall t > 0\,,\, \alpha_t \wedge (d\alpha_t)^n = (B(t))^n [C(t)\alpha(Z) + B(t)]\beta \wedge (d\beta)^n. \tag{2.9}$$

De par le lemme 2.5, comme $\alpha(Z)$ est non identiquement nulle, il existe des constantes $a < 0$ et $b > 0$ telle que

$$a \leq \alpha(Z) \leq b \tag{2.10}$$

Pour tout $0 \leq t \leq B^{-1}(-a)$, puisque B est continue et strictement croissante alors

$$0 \leq B(t) \leq -a. \tag{2.11}$$

Par ailleurs la stricte positivité de C, (2.10) et (2.11) donnent

$$aC(t) \leq C(t)\alpha(Z) + B(t) \leq \; bC(t) - a.$$

De plus comme $aC(t) < 0$ et $bC(t) - a > 0$, alors pour tout $0 \leq t \leq B^{-1}(-a)$, il existe une partie de V notée Σ_t sur laquelle la fonction $C(t)\alpha(Z) + B(t)$ s'annule. D'où d'après (2.9), la 1-forme $\alpha_t = C(t)\alpha + B(t)\beta$ n'est pas de contact dans Σ_t, pour tout $0 \leq t \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = B^{-1}(-a)$. ◁

Exemple 2.10. *Ecrivons le tore T^3 comme $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{Z}^3$ muni des coordonnées $x, y, \theta \in [0, 2\pi[$, deux champs de vecteurs constants sur $\mathbb{R}^3$, linéairement indépendants, induisent une action non singulière de $\mathbb{R}^2$ sur T^3. En particulier, considérons le cas suivant d'une action induite par les champs de vecteurs :*

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial \theta} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

a et b étant des nombres irrationnels, rationnellement indépendants. Toutes les orbites de cette action sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ et denses dans T^3. On l'appelle une action irrationnelle associée au couple (a,b) (voir [5] pour plus de détails concernant ces actions). Le feuilletage associée à cette action peut être défini par la 1-forme $\alpha_0 = d\theta - adx - bdy$. Considérons le tore T^3 muni des formes de contact

$$\beta_n = \cos(n\theta)dx + \sin(n\theta)dy \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Le champ de Reeb R_n de chaque β_n est de la forme

$$R_n = \cos(n\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(n\theta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

On remarque que

$$\alpha_0(R_n) = -a\cos(n\theta) - b\sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

n'est pas identiquement nulle. Donc d'après le théorème 2.9 il existe $\varepsilon > 0$ tel que la 1-forme $\alpha_t = C(t)\alpha_0 + B(t)\beta_n$ ne soit pas de contact pour tout $0 \leq t \leq \varepsilon$.

Dans [5] Robert Roussarie montre le théorème 2.11 suivant :

Théorème 2.11. [5] *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de T^3, de classe C^2 au moins, dont toutes les feuilles sont difféomorphes à $\mathbb{R}^2$, et tel que $\mathcal{F}$ soit transversalement orientable. Alors $\mathcal{F}$ est topologiquement conjugué au feuilletage défini par une action irrationnelle sur T^3.*

Le feuilletage $\mathcal{F}$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.11 est dit un feuilletage de Reeb sur T^3 (voir [5]) et on a la proposition suivante :

Proposition 2.12. *Considérons T^3 muni d'une des formes de contact β_n comme dans l'exemple* 2.10. *Alors pour tout feuilletage de Reeb sur T^3, il n'existe pas de déformations affines en structure de contact à l'aide de β_n avec $n \in \mathbb{N}^*$, fixé.*

Preuve. En effet il suffit d'abord de remarquer que si $\mathcal{F}$ est topologiquement conjugué à un feuilletage défini par une 1-forme fermée qui admet une déformation affine en structures de contact à l'aide d'une forme de contact donnée alors $\mathcal{F}$ l'est aussi. Puis grâce au théorème 2.11 et l'exemple 2.10 ci-dessus, on conclut. ◃

Proposition 2.13. *Soit V une variété fermée de dimension 2n+1, les fibrations de V sur le cercle $\mathbb{S}^1$, dont les fibres ont une caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle, n'admettent pas de déformations affines en structures de contact.*

Preuve. En effet soit α une 1-forme fermée définissant une fibration π de V sur le cercle $\mathbb{S}^1$, dont les fibres ont une caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle. Supposons qu'il existe une déformation affine de α en structures de contact à l'aide d'une forme de contact β de champ de Reeb Z. Alors d'après le théorème 2.6 on a $\alpha(Z) = 0$, c'est à dire que Z est tangent aux fibres de la fibration π. Donc ceci implique que chaque fibre de π admet une caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Ce qui est absurde, par suite on a le résultat cherché. ◃

References

[1] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhauser 2002.

[2] H.Dathe, *Feuilletages des variétés fibrées et Structures de contact*, Thèse soutenue le 23 mars 2003 à l'Université de Bretagne Sud(France).

[3] H.Dathe and P.Rukimbira, *Foliations and contact structure*, Advances in Geometry vol4, No.1(2004), 75-81.

[4] Y. Eliashberg and W. P. Thurston, *Confoliations*, University Lectures Series, Amer. Math. Soc. 13(1998)

[5] R. Roussarie, *Sur les feuilletages des variétés de dimension trois*, Annales de l'institut Fourrier, tome 21, no.3(1971), p.13-82.