Functiones et Approximatio
XXXII (2004), 71–77

SUR LES J-DIVISEURS TOPOLOGIQUES DE ZÉRO DANS LES ALGÈBRES DE JORDAN MÉTRISABLES

Abdelaziz Tajmouati & Ahmed Zinedine

Abstract: In this paper we study the notion of J-topological divisors of zero (J-d.t.z) in metrisable locally convex Jordan algebras. We give, among other things, several characterisations of these elements.
Keywords: topological algebras, Jordan algebras, divisors of zero.

1. Introduction

La notion de diviseur topologique de zéro (d.t.z) est une des plus intéressantes notions de la théorie des algèbres topologiques et plus particulièrement dans les algèbres de Banach. C'est la généralisation topologique naturelle de la notion de diviseur (algébrique) de zéro. Son intêret vient du fait qu'elle fournit des solutions topologiques à certains problèmes qui paraîssent de nature algébrique. Par exemple, elle intervient dans la caractérisation des éléments singuliers permanents. En particulier, si A est une algèbre de Banach, alors les éléments singuliers permanents de A dans la classe des algèbres de Banach (i.e. non inversibles dans aucune extension de A) sont exactement les diviseurs topologiques de zéro dans A (C'est le fameux théorème d'Arens [2].). Les diviseurs topologiques de zéro interviennent aussi de manière essentielle dans le théorème de Kaplansky, généralisant le théorème de Gelfand-Mazur, et disant qu'une algèbre de Banach sans d.t.z est triviale (i.e. isomorphe à $\mathbb{C}$ dans le cas complexe et à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (quaternion) dans le cas réel) ([10]).

Cette notion de diviseur topologique de zéro a été étendue au cas des algèbres de Jordan par Viola Devapakkiamm [9] et a été largement étudiée par plusieurs mathématiciens (voir par exemple [5], [8], [9], et [13]). La plupart des résultats sur les d.t.z dans le cas associatif restent vrais pour les J-d.t.z (le J- pour référer au cas Jordan; voir Définition 1).

Notre but dans ce papier est de contribuer à étudier la notion de J-d.t.z dans la classe des algèbres localement convexes métrisables. Parmi d'autres résultats,

2001 Mathematics Subject Classification: 46H05.

nous donnons des caractérisations des J-d.t.z en utilisant la suite suivante (voir préliminaires):

$$\chi_n(x) = \inf_y \left[d(0, xy) \frac{1 + p_n(y)}{p_n(y)} \right].$$

Ces caractérisations étendent bien les résultats de [1] au cas Jordan.

Notons ici que Galusinski ([3]) a utilisé cette suite dans le cas de l'algèbre ξ des fonctions de classe C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^k$ dans le but de résoudre le problème de la division des distributions.

2. Préliminaires

Algèbres de Jordan

Toutes les algèbres considérées sont des algèbres sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 1.. Une algèbre de Jordan est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire de $A \times A$ dans A, $(a, b) \longrightarrow ab$ telle que

1) $ab = ba$,
2) $a^2(ab) = (a^2b)a$, où $a^2 = aa$,

pour tout a, b dans A.

Soit A une algèbre de Jordan. Pour tout a dans A, on définit l'opérateur U_a de A dans A définie pour tout $y \in A$ par $U_a(y) = 2a(ay) - a^2y$. Cet opérateur joue un rôle fondamental dans la théorie des algèbres de Jordan. On a les résultats suivants (voir par exemple [6]):

1) $U_{U_x(a)} = U_x U_a U_x \quad \forall a,\ x \in A$.
2) $U_{a^p} = (U_a)^p \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

J-inversibilité

La définition usuelle de l'inversibilité connue dans le cas associatif n'est plus valable dans le cas non associatif. Elle n'assure même pas l'unicité de l'inverse. Pour surmonter ce problème Jacobson a introduit la définition suivante:

Soit A une algèbre de Jordan unitaire. Un élément a de A est dit J-inversible dans A s'il existe un élément b de A tel que: $ab = e$et $a^2b = a$. Cet élément est alors unique, appelé J-inverse de a et noté a^{-1}. On a les propriétés suivantes:

— a est J-inversible dans A si, et seulement si, U_a est J-inversible dans $L(A)$ (l'algèbre des endomorphismes de A) et on a $U_{a^{-1}} = (U_a)^{-1}$.

— Deux éléments a et b sont J-inversibles si, et seulement si, $U_a(b)$ est J-inversible (Cependant, on ne peut rien conclure à propos de la J-inversibilité de ab.).

Algèbres de Jordan topologiques

Une algèbre de Jordan topologique est une algèbre de Jordan munie d'une topologie τ d'espace vectoriel topologique séparé telle que l'application $A \times A \longrightarrow$ $\longrightarrow A$, $(x, y) \longrightarrow U_x(y)$ soit séparément continue. C'est-à-dire les applications $x \longrightarrow U_x(b)$ et $y \longrightarrow U_a(y)$ sont continues pour tout a et b dans A.

Si τ est localement convexe (resp. métrisable), alors A est dite algèbre de Jordan localement convexe (resp. métrisable). La topologie d'une algèbre de Jordan localement convexe peut-être donnée par une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes. Si elle est en plus métrisable, cette famille peut être choisie dénombrable et croissante et dans ce cas τ peut-être donnée par la distance d invariante par translation où:

$$d(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}\quad \forall x,y\in A.$$

J-diviseurs topologiques de zéro

Définition 2. Soient A une algèbre de Jordan topologique et $x\in A$. x est dit J-diviseur topologique de zéro (J-d.t.z) s'il existe une suite généralisée $(z_\alpha)_\alpha$ ne convergeant pas vers 0 et telle que $(U_x(z_\alpha))_\alpha$ converge vers 0.

Cette définition généralise bien celle de diviseur topologique de zéro. En effet, soit A^+ l'espace vectoriel sous-jacent de A muni de la multiplication $a.b=$ $=\frac{1}{2}(ab+ba)$. On peut vérifier que si A est associative, alors x est un J-d.t.z dans A^+ si, et seulement si, x est un d.t.z à droite ou à gauche dans A. Ça découle du fait que, dans ce cas on a $U_x(x_\alpha)=x_\alpha x x_\alpha$.

Proposition 1. *Soient A une algèbre de Jordan topologique, $z\in A$ et p un entier naturel non nul. Alors:*

1) z est un J-diviseur topologique de zéro si, et seulement si, z^p l'est aussi.

2) Si z est un J-diviseur topologique de zéro alors l'ensemble $U_z(A)$ est formé entiérement de J-diviseurs topologiques de zéro.

Preuve. Soient $z\in A$ et $p\geqslant 1$.

1) Si z est un J-d.t.z, alors il existe une suite généralisée (z_α) ne convergeant pas vers 0 et telle que $(U_z(z_\alpha))$ converge vers 0. Alors $U_{z^p}(z_\alpha)=(U_z)^p(z_\alpha)=$ $=(U_z)^{p-1}(U_z(z_\alpha))$. Donc $U_{z^p}(z_\alpha)$ converge vers 0 (car U_z^{p-1} est continu). D'où z^p est un J-d.t.z.

Inversement, si z^p est un J-d.t.z, avec une suite généralisée convenable (z_α), on considère le plus petit q tel que $U_z^q(z_\alpha)\longrightarrow 0$ et $U_z^{q-1}(z_\alpha)$ ne converge pas vers 0. On voit que $U_z(U_z^{q-1}(z_\alpha))_\alpha$ converge vers 0 et z est alors un J-d.t.z.

2) Soit (z_α) une suite ne convergeant pas vers 0 et telle que $U_z((z_\alpha))$ converge vers 0. Soit $a\in A$. On a

$$U_{U_z(a)}(z_\alpha)=U_zU_aU_z(z_\alpha)\quad\forall\alpha.$$

Et puisque U_z et U_a sont continus, $(U_zU_aU_z(z_\alpha))_\alpha$ converge vers 0. Donc $U_z(a)$ est un J-d.t.z. ∎

Remarquons qu'un J-d.t.z ne peut être inversible ni dans A ni dans une de ses extensions. On dit qu'il est singulier permanent.

Problème. Dans la classe des algèbres de Jordan-Banach, est-ce que tout élément singulier permanent est un J-d.t.z? Autrement dit, est-ce que le théorème d'Arens est valable aussi dans le cas Jordan?

Pour savoir plus sur les J-d.t.z, on peut se referer à [5], [8], [9], et [13].

3. Caractérisation des J-d.t.z d'une algèbre de Jordan localement convexe métrisable

Soit A une algèbre de Jordan localement convexe métrisable et soit $(p_n)_n$ une suite de semi-normes définissant sa topologie. A tout élément x de A on associe la suite d'applications définie par:

$$\chi_n(x) = \inf_{y\in A}\left[d(0, U_x(y))\frac{1+p_n(y)}{p_n(y)}\right]$$

où d est la distance définie dans les préliminaires. Nous obtenons alors les résultats suivants qui étendent les résultats de [1] au cas des algèbres de Jordan.

Théorème 1. *Soit A une algèbre de Jordan localement convexe métrisable. Alors un élément x de A est un d.t.z si, et seulement si, il existe un entier naturel n tel que $\chi_n(x) = 0$.*

Preuve. Soit x un d.t.z de A. Il existe alors une suite $(x_m)_m$ qui ne converge pas vers 0 et telle que $(U_x(x_m))_m$ converge vers 0. D'où l'existance d'un entier n tel que $(p_n(x_m))_m$ ne converge pas vers 0 et $(d(0, U_x(x_m)))_m$ converge vers 0. Par conséquent, $\left(\frac{p_n(x_m)}{1+p_n(x_m)}\right)_m$ ne converge pas vers 0. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous suite (x_{m_i}) de $(x_m)_m$ tels que

$$\frac{p_n(x_{m_i})}{1+p_n(x_{m_i})} > \varepsilon \quad \forall i\in\mathbb{N}.$$

Donc

$$d(0, U_x(x_{m_i}))\frac{1+p_n(x_{m_i})}{p_n(x_{m_i})} < \frac{1}{\varepsilon}d(0, U_x(x_{m_i})) \quad \forall i\in\mathbb{N}.$$

et par suite $\chi_n(x) = 0$.

Inversement, supposons qu'il existe n_0 tel que $\chi_{n_0}(x) = 0$. Alors pour tout m dans $\mathbb{N}$, il existe $x_m \in A$ tel que

$$0 \leqslant d(0, U_x(x_m))\frac{1+p_{n_0}(x_m)}{p_{n_0}(x_m)} \leqslant \frac{1}{m+1}.$$

Comme $\frac{1+p_{n_0}(x_m)}{p_{n_0}(x_m)} > 1$, $(d(0, U_x(x_m)))_m$ converge vers 0. Deux cas sont possibles:

1) si $(x_m)_m$ ne converge pas vers 0, alors x est un d.t.z de A.

2) si $(x_m)_m$ converge vers 0, alors $(p_{n_0}(x_m))_m$ converge vers 0. On peut donc supposer que, $p_{n_0}(x_m) \leqslant 1, \forall m \in \mathbb{N}$. Or on a

$$d(0, U_x(x_m)) = d(0, p_{n_0}(x_m) U_x(\frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)})) \geqslant p_{n_0}(x_m) d(0, U_x(\frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)})).$$

Donc

$$\frac{1+p_{n_0}(x_m)}{p_{n_0}(x_m)} d(0, U_x(x_m)) > d(0, U_x(\frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)})).$$

Par conséquent $(d(0, U_x(\frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)})))$ converge vers 0, alors que $(\frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)})_m$ ne converge pas vers 0. Donc x est un J-d.t.z de A. ■

Théorème 2. *Soient A une algèbre de Jordan localement convexe métrisable et $x \in A$. Alors x n'est pas un J-d.t.z si, et seulement si, il existe une suite $(k_n)_n$ de réels strictement positifs telle que:*

$$(*) \qquad d(0, U_x(y)) \geqslant k_n \frac{p_n(y)}{1+p_n(y)} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in A.$$

Preuve. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n(x) \neq 0$. Posons, pour tout entier n, $k_n = \chi_n(x)$. Alors, pour tout entier n, $k_n > 0$ et d'après la définition de $\chi_n(x)$ on a pour tout n

$$k_n \leqslant d(0, U_x(y)) \frac{1+p_n(y)}{p_n(y)} \quad \forall y \in A.$$

Donc, pour tout n on a

$$d(0, U_x(y)) \geqslant k_n \frac{p_n(y)}{1+p_n(y)} \quad \forall y \in A.$$

Inversement, si $(*)$ est vérifiée. Alors on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d(0, U_x(y)) \frac{1+p_n(y)}{p_n(y)} \geqslant k_n \quad \forall y \in A.$$

Donc

$$\chi_n(x) \geqslant k_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et alors x n'est pas un J-d.t.z d'aprés le théorème 2. ■

Théorème 3. *Soient A une algèbre de Jordan localement convexe métrisable et $x \in A$. Alors x n'est pas un J-d.t.z si, et seulement si, pour tout ε strictement positif, il existe un réel strictement positif $C_{(x,\varepsilon)}$ tel que*

$$C_{(x,\varepsilon)} d(0, U_x(y)) \geqslant d(0,y) - \varepsilon \quad \forall y \in A.$$

Preuve. Supposons que x n'est pas un J-d.t.z de A. Alors il existe une suite $(k_n)_n$ de réels strictement positifs telle que

$$d(0, U_x(y)) \geqslant k_n \frac{p_n(y)}{1 + p_n(y)} \quad \forall y \in A.$$

Donc, pour tout n on a

$$\frac{2^{-n}}{k_n} d(0, U_x(y)) \geqslant \frac{1}{2^n} \frac{p_n(y)}{1 + p_n(y)}, \quad \forall y \in A.$$

Or la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2_n}$ est convergente. Donc, pour tout ε strictement positif, il existe un entier naturel N tel que

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \quad \forall y \in A.$$

Donc

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(y)}{1 + p_n(y)} < \varepsilon \quad \forall y \in A.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(y)}{1 + p_n(y)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{-n}}{k_n} d(0, U_x(y)) \quad \forall y \in A.$$

Par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(y)}{1 + p_n(y)} < \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{-n}}{k_n} d(0, U_x(y)) \quad \forall y \in A.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2^{-n}}{k_n} d(0, U_x(y)) > d(0,y) - \varepsilon \quad \forall y \in A.$$

Donc

$$C_{(x,\varepsilon)} d(0, U_x(y)) > d(0,y) - \varepsilon, \quad \forall y \in A.$$

Où $C_{(x,\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{-n}}{k_n}$. ∎

References

[1] M. Akkar et A. Tajmouati, *Sur les diviseurs topologiques de zéro dans les algèbres localement convexes métrisables*, Functiones et Approximatio, XXV (1997), 211–216.

[2] R. Arens, *Inverse producing extensions of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 536–548.

[3] G. Galusinski, *Espaces vectoriels topologiques et diviseurs topologiques de zéro dans la théorie des distributions*, Thèse à l'Université Bordeaux I (1969).

[4] N. Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, (1968).

[5] A. M. Kaidi, *Bases para una theoria de las algebras non associatives normadas*, Thesis doctoral. Univ. de Granada, (1977).

[6] J. M. Moreno, *Sobre álgebras de Jordan normadas completas*, Thesis doctoral, Univ. de Granada, 149 (1977).

[7] A. Tajmouati, *Sur les diviseurs topologiques ou bornologiques de zéro*, Thèse de 3^{ieme} cycle, E.N.S. Souissi-Rabat, Maroc, (1986).

[8] A. Tajmouati, *Sur les diviseurs topologiques ou bornologiques de zéro, la bornitude automatique des opérateurs et les multiplicateurs dans certaines algèbres non associatives.* Thèse d'état SC. Math. Fac. des Sciences de Rabat, Maroc, (1995).

[9] C. Viola Divapakkiam, *Jordan algebra with continuous inverse*, Math. Japan **16** (1971), 115-125.

[10] W. Żelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lectures notes, serie 31 (1971). Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus.

[11] W. Żelazko, *On topological divisors of zero in p-normed algebras without unit*, Colloq. Math. **16** (1967), 231-234.

[12] W. Żelazko, *Banach algebras*, Elsevier, Amsterdam (1973).

[13] A. Zinedine, *Eléments singuliers permanents et idéaux non relevables dans certaines classes d'algèbres topologiques ou bornologiques*, Thèse doctorale, Université de Fès (2001).

Address: Département de mathématiques et informatique, Université S.M. BenAbdellah, Faculté des sciences Dhar-Mehraz, B.P. 1796 Fès-Atlas, Fès (MAROC).

E-mail: `atajmouati@yahoo.fr`

Received: 3 April 2003; **revised:** 20 January 2004