Functiones et Approximatio
XXXVII.1 (2007), 31–38

SOMMES D'EXPONENTIELLES FRIABLES D'ARGUMENTS RATIONNELS

Régis de la Bretèche & Gérald Tenenbaum

Á Jean-Marc Deshouillers,
en notant bien que l'amitié
ne nécessite aucun argument rationnel

Abstract: Le $\mathcal{M}$ denote the class of multiplicative functions with values in the unit disk, and, for $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, let $S(x,y)$ designate the set of y-friable positive integers not exceeding x. We provide, as x and y tend to infinity in prescribed ranges, upper bounds for exponential sums of the form

$$E_f(x,y;\vartheta) := \sum_{n \in S(x,y)} f(n)\mathrm{e}^{2\pi i n\vartheta}$$

whenever $f \in \mathcal{M}$ and ϑ is a rational number with denominator not exceeding a fixed power of $\log x$.

Keywords: friable integers, exponential sums, exponential sums with multiplicative coefficients.

1. Introduction

L'étude des entiers friables, i.e. sans grand facteur premier, a connu ces dernières années un essor remarquable, en raison des multiples applications de cette théorie dans plusieurs branches de l'analyse et de la théorie des nombres. Les sommes d'exponentielles figurent en bonne place dans la liste, que ce soit dans le cadre de la méthode du cercle (voir par exemple [14], [15], [16]) ou pour d'autres types d'utilisation, comme dans [4] ou [5].

Désignons par $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique n, avec la convention $P^+(1) = 1$ et notons $S(x,y) := \{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\}$ l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x. Soit f une fonction arithmétique multiplicative. Le problème de l'évaluation des sommes

$$E_f(x,y;\vartheta) := \sum_{n \in S(x,y)} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta),$$

où nous avons posé traditionnellement $\mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2\pi i t}$ $(t \in \mathbb{R})$, entre dans le cadre plus général des sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs (voir Montgomery

---

2000 Mathematics Subject Classification: 11L03, 11L07, 11N25, 11N37.

& Vaughan [13], Bachman [1], [2], Maier & Sankaranarayanan [12]) puisque la restriction f_y de f à l'ensemble des entiers y-friables est également multiplicative. Cependant, ce cas particulier nécessite des techniques spécifiques, notamment pour les grandes valeurs du paramètre

$$u := (\log x)/\log y \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{1.1}$$

À fins de référence ultérieure, nous proposons ici d'explorer les limites, en termes de domaine de validité en q, x, y, d'une majoration non triviale pour $E_f(x,y;\vartheta)$ lorsque $\vartheta = a/q \in \mathbb{Q}\smallsetminus\mathbb{Z}$ et f appartient à la classe $\mathcal{M}$ des fonctions multiplicatives à valeurs dans le disque unité.

Un survol succinct, non exhaustif, des évaluations de $E_f(x,y;\vartheta)$ disponibles dans la littérature peut être présenté comme suit. Nous nous limitons aux estimations les plus simples à énoncer et qui comparent explicitement $E_f(x,y;\vartheta)$ à $E_{|f|}(x,y;0)$.

Nous désignons par $\Psi(x,y)$ le cardinal de $S(x,y)$, et employons systématiquement la notation (1.1). La fonction nombre des facteurs premiers distincts d'un entier naturel q est dénotée $q \mapsto \omega(q)$, l'indicatrice d'Euler $q \mapsto \varphi(q)$. La fonction arithmétique constante prenant la valeur 1 pour chaque entier est désignée par $\mathbf{1}$. Enfin, nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Dans [9], Fouvry et Tenenbaum établissent une formule asymptotique pour $E_{\mathbf{1}}(x,y;a/q)$ qui implique en particulier la validité de l'estimation

$$E_{\mathbf{1}}(x,y;a/q) \ll \frac{2^{\omega(q)}(\log q)\log\{u+1\}}{\varphi(q)\log y}\Psi(x,y) \tag{1.2}$$

uniformément pour

$$x \geqslant 3, \quad \exp\{b(\log_2 x)^2\} \leqslant y \leqslant x, \quad 2 \leqslant q \leqslant (\log x)^A, \quad (a,q)=1, \tag{1.3}$$

où $b = b(A)$ est une constante assez grande.

Dans [3], La Bretèche précise la formule asymptotique mentionnée plus haut, et en déduit (corollaire 5 de [3]), pour des constantes positives convenables c_4, c_5, c_6, notant $q := q(\vartheta;x,y)$ le plus grand dénominateur n'excédant pas $x\mathrm{e}^{-c_5\sqrt{\log y}}$ d'une réduite de ϑ, la validité de l'estimation

$$E_{\mathbf{1}}(x,y;\vartheta) \ll \Psi(x,y)\bigg(\frac{2^{\omega(q)}(\log q)\log(u+1)}{\varphi(q)\log y} + \mathrm{e}^{-c_4\sqrt{\log y}}\bigg) \tag{1.4}$$

uniformément dans le domaine

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\{c_6(\log x\log_2 x)^{2/3}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{1.5}$$

Il obtient également une amélioration de (1.4) sous l'hypothèse supplémentaire $\omega(q) \geqslant 2$. Le même travail contient aussi une estimation effective de $E_\mu(x,y;\vartheta)$, où μ désigne la fonction de Möbius, dans le domaine $\exp\{(\log x)^{1/2+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x$, $\vartheta \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$.

La majoration (1.4) est exploitée dans [7] grâce à la généralisation, établie dans le même article, de l'inégalité de Turán–Kubilius au cas friable. Nous y obtenons en particulier, pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ fixé, l'estimation

$$E_f(x,y;\vartheta) = o\big(\Psi(x,y)\big)$$

uniformément pour $f \in \mathcal{M}$ (et en fait sous une condition significativement plus faible) lorsque x et y tendent vers l'infini dans le domaine (1.5).

Dans [11], Maier établit que la majoration

$$E_f(x,y;a/p) \ll \Psi(x,y)/\sqrt{p} \tag{1.6}$$

est valable, pour tous $A > 0$, $\varepsilon > 0$, uniformément sous les conditions $f \in \mathcal{M}$, p premier, $p \nmid a$, $x \geqslant 3$, $\exp\{(\log x)^{\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$. Il utilise à cette fin des propriétés fines des partitions de l'ensemble des facteurs premiers des entiers friables. C'est l'un des objets de ce travail que de généraliser (1.6) au cas d'arguments rationnels de dénominateurs quelconques — incidemment par une méthode plus simple dans son principe et sa mise en œuvre.

2. Énoncé et démonstration

Nous obtenons le résultat suivant.

Théoréme 2.1. *Soit $A > 0$. Il existe une constante b telle que, uniformément pour $f \in \mathcal{M}$, $\vartheta = a/q$, $2 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$, $(a,q) = 1$, $\exp\{b(\log_2 x)^2\} \leqslant y \leqslant x$, on ait*

$$E_f(x,y;\vartheta) \ll \frac{\Psi(x,y)}{\sqrt{\log_2 3q}}\cdot \tag{2.1}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et sous la condition supplémentaire $\mathrm{e}^{(\log x)^{\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x/q$, nous avons

$$E_f(x,y;\vartheta) \ll \frac{2^{\omega(q)/2}\Psi(x,y)}{\{q\varphi(q)\}^{1/4}}\cdot \tag{2.2}$$

Remarques. (i) Une restriction du type $y \leqslant x/q^c$ est certainement nécessaire à la validité de (2.2), comme l'atteste l'exemple de la fonction multiplicative f définie par

$$f(p^{\nu}) := \begin{cases} \mathrm{e}(-ap/q) & \text{si } \sqrt{x} < p \leqslant y, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On a alors, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$ fixé, si $q \asymp (\log x)^{1/\varepsilon}$ et $y > x/q^{1/2-2\varepsilon}$,

$$E_f(x,y;a/q) = \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant y} 1 \gg_{\varepsilon} \frac{x}{q^{1/2-2\varepsilon}\log x} \gg \frac{\Psi(x,y)}{q^{1/2-\varepsilon}}\cdot$$

(ii) La majoration (2.1) peut paraître faible. En pratique, cependant, l'objectif essentiel est souvent l'obtention d'une majoration non triviale. La qualité de celle-ci n'entre en jeu que lorsque le facteur de gain est comparable à $1/q$, de manière, par exemple, à obtenir par resommation un résultat sur les progressions arithmétiques. Le contre-exemple explicité à la remarque précédente nous indique que le facteur de gain d'une formule uniforme dans le domaine de validité de (2.1) est nécessairement $\gg_\varepsilon 1/q^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(iii) C'est l'utilisation du théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques qui fournit la borne inférieure pour y dans le domaine de validité de (2.2). Sous l'hypothèse de Riemann généralisée, on peut remplacer cette borne inférieure par $\exp\{b(\log_2 x)^2\}$.

Démonstration. Commençons par établir (2.1). Comme dans [7], nous utilisons la méthode de Daboussi exposée dans [8]. Nous introduisons le point-selle $\alpha = \alpha(x, y)$, unique solution de l'équation

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x$$

et la fonction $g_p(\alpha) := 1 - 1/p^\alpha$.

Appliquons la forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius établie au théorème 1.2 de [7] en choisissant $a_n := f(n)\mathrm{e}(n\vartheta)$ et en restreignant la sommation du membre de gauche aux nombres premiers n'excédant pas $\sqrt{q}$. Nous obtenons, pour $2 \leqslant y \leqslant x$,

$$\sum_{p < \sqrt{q}} p^\alpha \left| \frac{g_p(\alpha)}{p^\alpha} E_f(x, y; \vartheta) - \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ p \| n}} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta) \right|^2 \ll \Psi(x, y)^2 \tag{2.3}$$

où le membre de droite a été évalué grâce à l'hypothèse $|f| \leqslant 1$.

D'après les estimations classiques de α (voir par exemple le lemme 3.1 de [7]), on a

$$\alpha = 1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big) = 1 + O\Big(\frac{1}{\log q}\Big)$$

dans le domaine en x, y considéré, donc

$$L(q) := \sum_{p < \sqrt{q}} \frac{g_p(\alpha)}{p^\alpha} = \log_2 3q + O(1). \tag{2.4}$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous déduisons donc de (2.3) que

$$\sum_{p < \sqrt{q}} \left| \frac{g_p(\alpha)}{p^\alpha} E_f(x, y; \vartheta) - \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ p \| n}} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta) \right| \ll \Psi(x, y)\sqrt{L(q)},$$

d'où

$$E_f(x,y;\vartheta)=\frac{1}{L(q)}\sum_{p<q}\sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p\nmid m}} f(p)f(m)\mathrm{e}(mp\vartheta)+O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\sqrt{L(q)}}\Big). \tag{2.5}$$

Désignons la somme double par T. Comme

$$\sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p\,|\,m}} |f(m)|\leqslant \Psi\Big(\frac{x}{p^2},y\Big)\ll\frac{\Psi(x,y)}{p^{3/2}}$$

d'après le théorème 2.4 de [6], et comme $\alpha\geqslant\frac34$ pour x, y assez grands sous les conditions de l'énoncé, nous avons

$$T=T_1+O\big(\Psi(x,y)\big), \tag{2.6}$$

avec

$$T_1:=\sum_{p<\sqrt{q}}\sum_{m\in S(x/p,y)} f(p)f(m)\mathrm{e}(mp\vartheta).$$

Maintenant une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit

$$\begin{aligned}|T_1|^2&\leqslant\bigg\{\sum_{m\in S(x,y)}|f(m)|\bigg|\sum_{\substack{p<\sqrt{q}\\ p\leqslant x/m}} f(p)\mathrm{e}(mp\vartheta)\bigg|\bigg\}^2\\ &\leqslant\Psi(x,y)\sum_{p,\,p'<\sqrt{q}}\bigg|\sum_{m\in S(x/\max(p,p'),y)}\mathrm{e}(m(p-p')\vartheta)\bigg|\\ &\ll\Psi(x,y)\bigg\{\sum_{p<\sqrt{q}}\Psi(x/p,y)+\sum_{\substack{p,\,p'<\sqrt{q}\\ p'<p}}|E_{\mathbf{1}}(x/p,y;(p-p')\vartheta)|\bigg\}\\ &\ll\Psi(x,y)^2\bigg\{L(q)+\frac{2^{\omega(q)}\log(u+1)\log q}{\varphi(q)\log y}\sum_{p'<p<\sqrt{q}}\frac{(q,p-p')}{p}\bigg\}\end{aligned}$$

d'après (1.2). La somme double vaut

$$\sum_{\substack{d|q\\ d<\sqrt{q}}}\varphi(d)\sum_{\substack{p'<p<\sqrt{q}\\ p\equiv p'\ (\mathrm{mod}\ d)}}\frac1p\ll\sum_{\substack{d|q\\ d<\sqrt{q}}}\varphi(d)\sum_{d<p<\sqrt{q}}\frac{1}{\varphi(d)\log(2p/d)}\ll\tau(q)\sqrt{q}$$

où $\tau(q)$ désigne le nombre des diviseurs de q. Nous avons donc établi que

$$T_1\ll\sqrt{L(q)}\Psi(x,y).$$

Reportons dans (2.6) puis (2.5) en tenant compte de (2.4) : nous obtenons bien la majoration annoncée (2.1).

Il reste à établir (2.2). L'identité de Buchstab permet d'écrire

$$E_f(x,y;\vartheta)=\mathrm{e}(\vartheta)+\sum_{p^\nu\in S(x,y)} f(p^\nu)\sum_{m\in S(x/p^\nu,p-1)} f(m)\mathrm{e}(mp^\nu\vartheta).$$

Posons $\delta:=1/q$. Introduisant les nombres K de la forme $\mathrm{e}^{\delta j}$ pour $1\leqslant j\leqslant(\log y)/\delta$, nous pouvons écrire, pour tout $z<y$,

$$E_f(x,y;\vartheta)\ll\Psi(x,z)+\sum_{z<K\leqslant y}|W_K|$$

avec

$$W_K:=\sum_{\nu\geqslant1}\sum_{K<p\leqslant\mathrm{e}^\delta K}\Big|\sum_{m\in S(x/p^\nu,p-1)} f(m)\mathrm{e}(mp^\nu\vartheta)\Big|.$$

Choisissons $z:=\mathrm{e}^{\sqrt{\log y}}$, de sorte que $z>q^2$ pour x ou y assez grand. On a classiquement $\Psi(x,z)\ll x\varrho(u\sqrt{\log y})\ll\Psi(x,y)/q$. Lorsque $K>z$, la contribution à W_K des entiers $\nu\geqslant 2$ n'excède pas

$$\sum_{z<p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant2}\Psi\Big(\frac{x}{p^\nu},p-1\Big)\ll\sum_{\nu\geqslant2}\frac{1}{z^{(\nu-1)\alpha}}\sum_{z<p\leqslant y}\Psi\Big(\frac{x}{p},p\Big)\ll\frac{\Psi(x,y)}{q}$$

Pour $\nu=1$ et toujours $z<K\leqslant y$, nous pouvons remplacer la condition de sommation sur m dans W_K par $m\in S(x/K,K)$: l'erreur commise n'excède pas

$$\Psi(x/K,\mathrm{e}^\delta K)-\Psi(x\mathrm{e}^{-\delta}/K,K-1)\ll\delta\Psi(x/K,K)$$

en vertu de la majoration de Hildebrand [10] pour les petits accroissements de $x\mapsto\Psi(x,y)$ — applicable ici puisque $x\delta/K\geqslant1$ — et des estimations classiques relatives aux variations de la fonction de Dickman. Désignons par W_K^* la somme correspondante, de sorte que

$$E_f(x,y;\vartheta)\ll\frac{\Psi(x,y)}{q}+\sum_{z<K\leqslant y}|W_K^*|.$$

Nous avons

$$|W_K^*|^2\ll\frac{\delta K}{\log K}\sum_{m,\,m'\in S(x/K,K)}\Big|\sum_{K<p\leqslant\mathrm{e}^\delta K}\mathrm{e}((m-m')\vartheta p)\Big|.$$

Lorsque $(m-m',q)=q/d$ le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques sous une forme forte implique que la somme intérieure en p est

$$\ll\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\frac{\delta K}{\log K}.$$

Pour chaque d fixé, les indices de la somme extérieure peuvent être décomposés en introduisant le diviseur t de q/d tel que $(m,q/d) = q/dt$, de sorte que $m = qh/dt$, $m' = qh'/dt$ avec $dt|q$, $(h,t) = 1$, $h' \equiv h \,(\mathrm{mod}\, t)$. Pour chaque m, nous bornons le nombre des entiers m' admissibles à l'aide des estimations de Fouvry–Tenenbaum [9] sur la répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques. Il vient

$$\sum_{\substack{m'\in S(x/K,K)\\ (m'-m,q)=q/d}} 1 = \sum_{\substack{h'\in S(xdt/qK,K)\\ h'\equiv h (\mathrm{mod}\, t)}} 1 \ll \frac{1}{\varphi(t)} \sum_{\substack{m\in S(xdt/qK,K)\\ (m,t)=1}} 1 \ll \frac{d}{q}\Psi\Big(\frac{x}{K},K\Big).$$

(Notons que nous avons utilisé ici les inégalités $x/qK \geqslant x/qy \geqslant 1$.) De même, nous avons ensuite

$$\sum_{\substack{m\in S(x/K,K)\\ (m,q/d)=q/dt}} 1 = \sum_{\substack{h\in S(xdt/qK,K)\\ (h,t)=1}} 1 \ll \frac{d\varphi(t)}{q}\Psi\Big(\frac{x}{K},K\Big).$$

Nous obtenons donc

$$|W_K^*|^2 \ll \frac{\sigma(q)K^2\delta^2}{(\log K)^2}\Psi\Big(\frac{x}{K},K\Big)^2$$

avec

$$\sigma(q) := \frac{1}{q^2}\sum_{dt|q}\frac{d^2\varphi(t)\mu(d)^2}{\varphi(d)} = \frac{1}{q}\sum_{d|q}\frac{d\mu(d)^2}{\varphi(d)} = \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)}\prod_{p|q}\Big(1-\frac{1}{2p}\Big) \ll \frac{2^{\omega(q)}}{\sqrt{q\varphi(q)}}.$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_f(x,y;\vartheta) &\ll \frac{\Psi(x,y)}{q} + \frac{2^{\omega(q)/2}}{\{q\varphi(q)\}^{1/4}}\sum_{z<K\leqslant y}\frac{\delta K}{\log K}\Psi\Big(\frac{x}{K},K\Big) \\ &\ll \frac{\Psi(x,y)}{q} + \frac{2^{\omega(q)/2}}{\{q\varphi(q)\}^{1/4}}\sum_{z<K\leqslant y}\sum_{K<p\leqslant \mathrm{e}^\delta K}\Psi(x/p,p) \\ &\ll \frac{2^{\omega(q)/2}}{\{q\varphi(q)\}^{1/4}}\Psi(x,y). \end{aligned}$$ ■

Bibliographie

[1] G. Bachman, Exponential sums with multiplicative coefficients, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **5** (1999), 128–135.

[2] G. Bachman, On exponential sums with multiplicative coefficients, II, *Acta Arith.* **106** (2003), n°1, 41–57.

[3] R. de la Bretèche, Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier, *Proc. London Math. Soc.* (3) **77** (1998), 39–78.

[4] R. de la Bretèche, Sommes sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **88** n°1 (1999), 1–14.

[5] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, *J. Anal. Math.* **92** (2004), 1–79.

[6] R. de la Bretéche & G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.

[7] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.

[8] H. Daboussi & H. Delange, On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one, *J. London Math. Soc.* (2) **26** (1982), n° 2, 245–264.

[9] É. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.

[10] A. Hildebrand, On the local behaviour of $\Psi(x, y)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), 729–751.

[11] H. Maier, Exponential sums with multiplicative coefficients over smooth integers, *Functiones et Approximatio* **35**, (2006), 209–218.

[12] H. Maier & A. Sankaranarayanan, On a certain general exponential sum, *Int. J. Number Theory* **1** (2005), no. 2, 183–192.

[13] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Exponential sums with multiplicative coefficients, *Invent. Math.* **43** (1977), n° 1, 69–82.

[14] R.C. Vaughan, A new iterative method in Waring's problem, *Acta Math.* **162** (1989), 1–71.

[15] R.C. Vaughan & T.D. Wooley, Waring's problem: a survey, *Number theory for the millennium*, III (Urbana, IL, 2000), 301–340, A. K. Peters, Natick, MA, 2002.

[16] T.D. Wooley, On exponential sums over smooth numbers. *J. reine angew. Math.* **488** (1997), 79–140.

Addresses: Régis de la Bretèche, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Case 7012, Université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France;
Gérald Tenenbaum, Institut Élie Cartan, Université de Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France

E-mail: breteche@math.jussieu.fr; gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr

Received: 12 October 2006; **revised:** 4 June 2007