

SUR LES DILATATIONS ENTIÈRES DE LA FONCTION « PARTIE FRACTIONNAIRE »

MICHEL BALAZARD

Pour Eduard Wirsing,
en témoignage d'admiration

Résumé: En posant $\mathbf{e}_n(t) = \{t/n\}$ et $\mathcal{H} := L^2(0, +\infty; t^{-2}dt)$, nous démontrons
 $\frac{6}{5} + O(n^{-1}) \leq n^2 \cdot \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}_n, \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})) \leq \frac{3}{4} \log n + O(1)$.

Mots clés: espace de Hilbert, partie fractionnaire.

Abstract: With $\mathbf{e}_n(t) = \{t/n\}$ and $\mathcal{H} := L^2(0, +\infty; t^{-2}dt)$, we prove
 $\frac{6}{5} + O(n^{-1}) \leq n^2 \cdot \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}_n, \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})) \leq \frac{3}{4} \log n + O(1)$.

Keywords: Hilbert space, fractional part.

1. Introduction

Considérons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := L^2(0, +\infty; t^{-2}dt).$$

Pour $\alpha > 0$, la fonction

$$\mathbf{e}_\alpha : t \mapsto \{t/\alpha\}, \quad t > 0,$$

où $\{\}$ désigne la partie fractionnaire, appartient à \mathcal{H} .

Théorème. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{6}{5} + O(n^{-1}) \leq n^2 \cdot \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}_n, \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})) \leq \frac{3}{4} \log n + O(1).$$

Ce résultat provient d'une tentative de démonstration de l'hypothèse de Riemann (HR) selon le plan suivant.

a) Le critère de Báez-Duarte [1] affirme que (HR) équivaut au fait que la distance

$$d_n := \text{dist}_{\mathcal{H}}(\chi, \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n))$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini, où $\chi := \chi_{(1,+\infty)}$ est la fonction valant 0 pour $0 < t < 1$ et 1 pour $t \geq 1$.

b) On a

$$d_n^2 = \frac{\text{Gram}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \chi)}{\text{Gram}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} =: \frac{A_n}{B_n},$$

où $\text{Gram}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ désigne le déterminant de $\text{Gram} \det(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

c) Posons

$$\frac{A_n/A_{n-1}}{B_n/B_{n-1}} = 1 - \varepsilon_n, \quad n \geq 2.$$

D'une part l'inégalité $d_n \leq d_{n-1}$ entraîne que $\varepsilon_n \geq 0$. D'autre part, d'après le critère de Báez-Duarte, (HR) équivaut à

$$\sum_{n \geq 2} \varepsilon_n = +\infty.$$

d) On a

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}_n, \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \chi))$$

et

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}_n, \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})).$$

On peut se proposer d'estimer séparément chacun de ces deux quotients, et plus précisément d'obtenir des inégalités

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta_n \leq \frac{B_n}{B_{n-1}},$$

où les quantités α_n et β_n seraient faciles à comparer et vérifieraient

$$\alpha_n \leq (1 - \delta_n)\beta_n,$$

avec

$$\sum \delta_n = +\infty,$$

ce qui entraînerait (HR).

Notre théorème donne ainsi un premier encadrement de

$$L_n := n^2 \frac{B_n}{B_{n-1}}.$$

Pour espérer conclure en suivant le plan a) b) c) d), il serait indispensable d'obtenir un encadrement beaucoup plus précis de L_n . La détermination de l'ordre de grandeur de L_n est déjà un problème non trivial. Les expériences numériques décrites au §2 vont nous permettre de formuler une question à ce sujet.

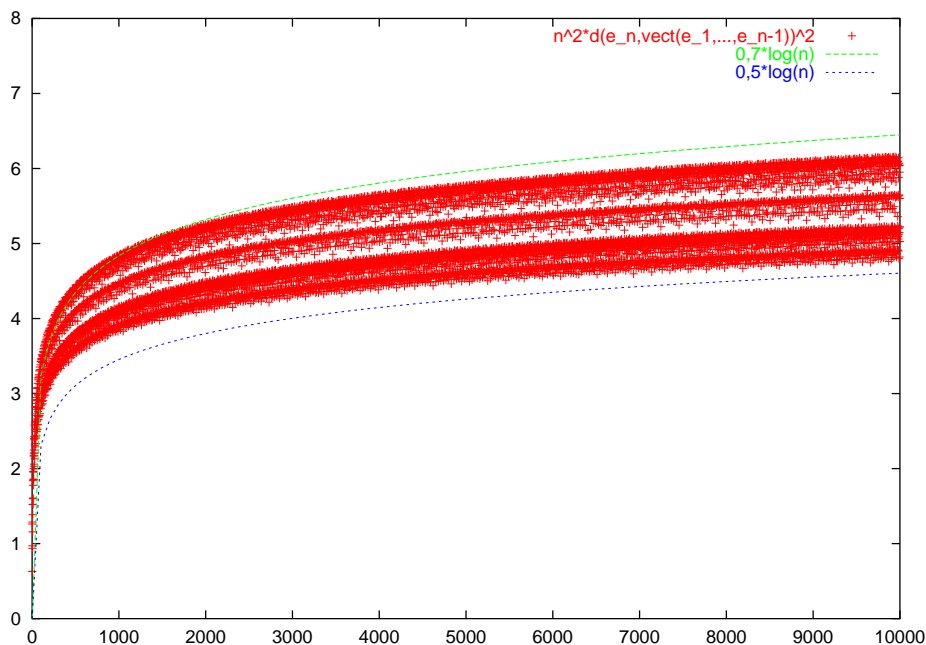
Le §3 donne une expression de L_n en termes de polynômes de Dirichlet. Les deux derniers paragraphes sont dévolus aux démonstrations de la majoration et de la minoration de L_n constituant le théorème.

2. Calculs numériques de L_n pour $1 \leq n \leq 10000$

La formule de Vassiounine (cf. [4] et [2])

$$\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{\log(2\pi) - \gamma}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) + \frac{n-m}{2mn} \log \left(\frac{m}{n} \right) - \frac{\pi d}{2mn} \sum_{k=1}^{m_0-1} \left\{ \frac{kn_0}{m_0} \right\} \cot \frac{\pi k}{m_0} - \frac{\pi d}{2mn} \sum_{k=1}^{n_0-1} \left\{ \frac{km_0}{n_0} \right\} \cot \frac{\pi k}{n_0}, \quad (1)$$

où $d = \text{pgcd}(m, n)$, $m_0 = m/d$ et $n_0 = n/d$, permet de calculer numériquement L_n . En suivant les principes exposés au paragraphe 8 de [2], Bernard Landreau a obtenu la représentation graphique suivante (L_n en fonction de n). Nous le remercions de nous autoriser à la reproduire ici.



Ainsi la borne supérieure $\frac{3}{4} \log n$ du théorème semble assez proche de la réalité, alors que la borne inférieure $6/5$ est visiblement très mauvaise. Cette représentation graphique nous amène à formuler la question suivante

Question. *A-t-on $L_n \gg \log n$?*

D'autre part, cette représentation graphique fait apparaître un comportement oscillant qui suggère que le terme principal de L_n doit probablement tenir compte des propriétés arithmétiques de n .

3. Polynômes de Dirichlet

Le théorème peut être interprété comme une assertion concernant les polynômes de Dirichlet. En effet, la transformation de Mellin-Plancherel associée à toute fonction $f \in \mathcal{H}$ une fonction Mf définie presque partout sur $\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$ par

$$Mf(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{-s-1}dt,$$

(où $\int_0^{+\infty}$ signifie en fait $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/T}^T$ dans $L^2 := L^2(1/2 + i\mathbb{R}; |ds|/2\pi)$) et $f \mapsto Mf$ est une isométrie bijective entre \mathcal{H} et L^2 . Comme $M\mathbf{e}_n(s) = -n^{-s}\zeta(s)/s$, on a

$$L_n = n^2 \min_{D \in \mathcal{D}_n} \int_{\text{Res}=1/2} |\zeta(s)D(s)|^2 \frac{|ds|}{2\pi|s|^2},$$

où \mathcal{D}_n désigne l'ensemble des polynômes de Dirichlet de la forme $\sum_{k=1}^n c_k k^{-s}$, avec $c_k \in \mathbb{C}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $c_n = 1$.

4. Majoration de L_n

Si la famille (\mathbf{e}_n) était orthogonale, on aurait $L_n = n^2 \|\mathbf{e}_n\|^2$. Malheureusement elle est « très peu » orthogonale et la complexité de la formule de Vassioune (1) rend problématique l'explicitation d'une base orthogonale du sous-espace qu'elle engendre dans \mathcal{H} . Nous nous contentons ici de la remplacer par une suite (\mathbf{f}_n) « un peu plus » orthogonale :

$$\mathbf{f}_n := (n+1)\mathbf{e}_{n+1} - n\mathbf{e}_n, \quad n \geq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{n+1} &\leq \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{f}_n, \text{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1})) \\ &\leq \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{f}_n, \mathbb{C}\mathbf{f}_k), \end{aligned}$$

pour $1 \leq k \leq n$. Nous choisisons $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Rappelons la formule générale

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{u}, \mathbb{C}\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \|\mathbf{v}\|^{-2}.$$

Enfin, observons que la définition de \mathbf{f}_n a un sens dès que n est un nombre réel positif.

Proposition 1. *On fixe deux nombres entiers p et q , positifs et premiers entre eux, $\lambda = p/q$, et deux nombres réels a et b . Alors,*

$$\langle \mathbf{f}_{k+b}, \mathbf{f}_{\lambda k+a} \rangle = -\frac{c_0(a - \lambda b, \lambda)}{2p} \log k + O(1), \quad k \rightarrow +\infty,$$

où

$$c_0(x, \lambda) := |x + 1 - \lambda| - |x - \lambda| - |x + 1| + |x|.$$

Démonstration. Posons

$$A(t) := \int_0^{+\infty} \{u\} \{\lambda u\} \frac{du}{u^2}, \quad t > 0,$$

C'est la fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » (cf. [3]).

On a

$$\langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \frac{1}{\alpha} A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} A\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

donc

$$\langle \mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_\beta \rangle = (\beta + 1) \left(A\left(\frac{\alpha + 1}{\beta + 1}\right) - A\left(\frac{\alpha}{\beta + 1}\right) \right) - \beta \left(A\left(\frac{\alpha + 1}{\beta}\right) - A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \right),$$

et

$$\begin{aligned} k^{-1} \langle \mathbf{f}_{k+b}, \mathbf{f}_{\lambda k+a} \rangle &= (1 + (b + 1)t) \left(A\left(\frac{\lambda + (a + 1)t}{1 + (b + 1)t}\right) - A\left(\frac{\lambda + at}{1 + (b + 1)t}\right) \right) \\ &\quad - (1 + bt) \left(A\left(\frac{\lambda + (a + 1)t}{1 + bt}\right) - A\left(\frac{\lambda + at}{1 + bt}\right) \right), \end{aligned}$$

avec $t = 1/k$.

Le développement limité

$$A(\lambda + u) = A(\lambda) + \frac{|u| \log |u|}{2p} + O(u), \quad u \rightarrow 0,$$

(cf. [3], Proposition 3) entraîne successivement pour t tendant vers 0 par valeurs positives

$$(1 + bt) A\left(\frac{\lambda + at}{1 + bt}\right) = A(\lambda) + \frac{|a - \lambda b|}{2p} t \log t + O(t),$$

puis

$$\begin{aligned} &(1 + (b + 1)t) \left(A\left(\frac{\lambda + (a + 1)t}{1 + (b + 1)t}\right) - A\left(\frac{\lambda + at}{1 + (b + 1)t}\right) \right) \\ &\quad - (1 + bt) \left(A\left(\frac{\lambda + (a + 1)t}{1 + bt}\right) - A\left(\frac{\lambda + at}{1 + bt}\right) \right) \\ &= \frac{c_0(a - \lambda b, \lambda)}{2p} t \log t + O(t), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Il est maintenant facile de démontrer la majoration $L_n \leq \frac{3}{4} \log n + O(1)$. On a d'abord :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}_n\|^2 &= \log n + O(1); \\ \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_{2n} \rangle &= \frac{1}{2} \log n + O(1); \\ \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_{2n+1} \rangle &= \frac{1}{2} \log n + O(1).\end{aligned}$$

puis, pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}\text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{f}_{2n+\varepsilon}, \mathbb{C}\mathbf{f}_n) &= \|\mathbf{f}_{2n+\varepsilon}\|^2 - |\langle \mathbf{f}_{2n+\varepsilon}, \mathbf{f}_n \rangle|^2 \|\mathbf{f}_n\|^{-2} \\ &= \log(2n + \varepsilon) + O(1) - \frac{(\frac{1}{2} \log n + O(1))^2}{\log n + O(1)} \\ &= \frac{3}{4} \log n + O(1),\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}L_{2n+\varepsilon+1} &\leq \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{f}_{2n+\varepsilon}, \mathbb{C}\mathbf{f}_n) \\ &= \frac{3}{4} \log n + O(1).\end{aligned}$$

Le lecteur pourra facilement améliorer cette constante $3/4$; en utilisant par exemple la majoration

$$L_{n+1} \leq \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{f}_n, \text{Vect}(\mathbf{f}_{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbf{f}_{\lfloor n/3 \rfloor})),$$

on obtient

$$L_n \leq \frac{23}{32} \log n + O(1).$$

5. Minoration de L_n

Commençons par remplacer la famille (\mathbf{e}_n) par une nouvelle famille (\mathbf{e}'_n) .

Proposition 2. On a

$$L_n = \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1})),$$

où $\mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}_{1/\alpha}$, c'est à dire $\mathbf{e}'_\alpha(t) = \{\alpha t\}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}B_n &= \det((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{1 \leq i, j \leq n}) \\ &= \det\left(\frac{1}{i} A\left(\frac{i}{j}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \det\left(\frac{1}{ij} \frac{1}{j} A\left(\frac{1/j}{1/i}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= n!^{-2} \text{Gram}_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{B_{n-1}} &= \frac{n!^{-2} \text{Gram}_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)}{(n-1)!^{-2} \text{Gram}_{\mathcal{H}}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1})} \\ &= n^{-2} \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1})), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

L'intérêt de cette nouvelle famille est que la fonction \mathbf{e}'_n est discontinue en des points où toutes les fonctions \mathbf{e}_k , $1 \leq k \leq n-1$ sont continues (les nombres rationnels m/n , avec $(m, n) = 1$), ce qui n'était pas le cas avec la famille (\mathbf{e}_n) . Le principe de la démonstration de la minoration $L_n \geq 6/5 + O(1/n)$ est fondé sur le lemme évident suivant.

Proposition 3. *Soit E et F deux espaces métriques et $T : E \rightarrow F$ une application lipschitzienne de rapport r . Si $x_0 \in E$ et $Y \subset E$, $Y \neq \emptyset$, on a*

$$\text{dist}_E(x_0, Y) \geq r^{-1} \cdot \text{dist}_F((T(x_0), T(Y)))$$

Nous choisirons $E = F = \mathcal{H}$, $x_0 = \mathbf{e}'_n$, $Y = \text{Vect}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1})$, et $T = T_a$ sera la projection orthogonale sur $L^2(0, a; dt/t^2)$, c'est-à-dire l'opérateur de restriction à l'intervalle $(0, a)$. C'est une application lipschitzienne de rapport 1. Notre démarche consiste à calculer exactement la distance

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(T_a \mathbf{e}'_n, \text{Vect}(T_a \mathbf{e}'_1, \dots, T_a \mathbf{e}'_{n-1}));$$

nous y parvenons pour le choix

$$a = \frac{1}{\lceil n/2 \rceil - 1}.$$

Nous utiliserons les trois propositions auxiliaires suivantes, dont les démonstrations sont laissées au lecteur.

Proposition 4. *Si $n \geq 5$, les $\lceil n/2 \rceil + 3$ premiers éléments de la suite de Farey \mathcal{F}_n sont*

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\lceil n/2 \rceil}, \quad \frac{2}{2\lceil n/2 \rceil - 1}, \quad \frac{1}{\lceil n/2 \rceil - 1}.$$

Proposition 5. *Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_n et z des indéterminées. On a*

$$\begin{vmatrix} z & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \cdot \left(z - \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\lambda_k} \right).$$

Proposition 6. *Pour $m \geq 2$, on a*

$$\sum_{k=2}^m \left(\log \frac{2m-k}{2m-k-1} \right)^2 = \frac{1}{2m} + O(m^{-2}).$$

5.1. Le cas de n pair. Posons $n = 2m$, avec m entier supérieur ou égal à 3. D'après la proposition 4, les $m+3$ premiers éléments de la suite de Farey \mathcal{F}_n sont

$$\frac{1}{2m}, \quad \frac{1}{2m-1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{m}, \quad \frac{2}{2m-1}, \quad \frac{1}{m-1}.$$

5.1.1. Les vecteurs ι et χ_k , $1 \leq k \leq m+2$. Pour $1 \leq k \leq m$, soit χ_k la fonction indicatrice de l'intervalle

$$\left(\frac{1}{2m-k+1}, \frac{1}{2m-k} \right).$$

Définissons en outre χ_{m+1} et χ_{m+2} comme les fonctions indicatrices de

$$\left(\frac{1}{m}, \frac{2}{2m-1} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{2m-1}, \frac{1}{m-1} \right)$$

respectivement, et $\iota(t) := t$ pour $0 < t < 1/(m-1)$.

Les fonctions χ_k , $1 \leq k \leq m+2$, forment un système orthogonal dans \mathcal{H} et:

$$\begin{aligned} \|\chi_k\|^2 &= \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = m+1 \text{ ou } k = m+2; \end{cases} \\ \|\iota\|^2 &= \frac{1}{m-1}; \\ \langle \iota, \chi_k \rangle &= \begin{cases} \log \frac{2m-k+1}{2m-k}, & 1 \leq k \leq m \\ \log \frac{2m}{2m-1}, & k = m+1 \\ \log \frac{2m-1}{2m-2}, & k = m+2. \end{cases} \end{aligned}$$

5.1.2. Projection orthogonale sur $L^2(\mathbf{0}, (m-1)^{-1}; t^{-2} dt)$. Soit T la projection orthogonale de $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty; t^{-2} dt)$ sur $\mathcal{K} := L^2(0, (m-1)^{-1}; t^{-2} dt)$. D'après les propositions 2 et 3, on a

$$\begin{aligned} L_n &= \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1})) \\ &\geq \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(T\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1})). \end{aligned} \quad (2)$$

On a

$$T\mathbf{e}'_k(t) = \begin{cases} kt & 1 \leq k \leq m-1, \\ kt - \sum_{i=2m+1-k}^{m+2} \chi_i & m \leq k \leq 2m-2, \\ kt - \sum_{i=2m+1-k}^{m+2} \chi_i - \chi_{m+2} & k = 2m-1, \\ kt - \sum_{i=2m+1-k}^{m+2} \chi_i - \chi_{m+1} - \chi_{m+2} & k = 2m. \end{cases}$$

L'espace $\text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1})$ est engendré par les vecteurs :

$$t; \quad \chi_{m+1} + \chi_{m+2}; \quad \chi_m; \quad \chi_{m-1}; \quad \dots; \quad \chi_3; \quad \chi_2 + \chi_{m+2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} T\mathbf{e}'_n &= n t - (\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_m + 2\chi_{m+1} + 2\chi_{m+2}) \\ &= -\chi_1 - \chi_2 + \text{un élément de } \text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\text{dist}_{\mathcal{K}}^2(T\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1})) \\ &= \frac{\text{Gram}(t, \chi_1 + \chi_2, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})}{\text{Gram}(t, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})}. \end{aligned} \quad (3)$$

5.1.3. Calculs de déterminants de Gram.

- Commençons par le calcul du dénominateur de (3).

$$\text{Gram}(t, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{m-1} & 2 \log \frac{2m-1}{2m-2} & \log \frac{2m-2}{2m-3} & \dots & \log \frac{m+1}{m} & \log \frac{m}{m-1} \\ 2 \log \frac{2m-1}{2m-2} & \frac{3}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \log \frac{2m-2}{2m-3} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \log \frac{m+1}{m} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \log \frac{m}{m-1} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nous retranchons de la deuxième colonne la dernière colonne multipliée par $1/2$; puis nous retranchons de la deuxième ligne la dernière ligne multipliée par $1/2$, pour obtenir l'égalité suivante.

$$\text{Gram}(t, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{m-1} & a & \log \frac{2m-2}{2m-3} & \dots & \log \frac{m+1}{m} & \log \frac{m}{m-1} \\ a & \frac{5}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \log \frac{2m-2}{2m-3} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \log \frac{m+1}{m} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \log \frac{m}{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

où

$$a := 2 \log \frac{2m-1}{2m-2} - \frac{1}{2} \log \frac{m}{m-1}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer les propositions 5 et 6.

$$\begin{aligned}
& \text{Gram}(\iota, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2}) \\
&= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{(2 \log \frac{2m-1}{2m-2} - \frac{1}{2} \log \frac{m}{m-1})^2}{5/4} - \sum_{k=2}^m (\log \frac{2m-k}{2m-k-1})^2 \right) \\
&= \frac{5}{8m} + O(m^{-2}). \tag{4}
\end{aligned}$$

- Calculons maintenant le numérateur de (3).

$$\text{Gram}(\iota, \chi_1 + \chi_2, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{m-1} & \log \frac{m}{m-1} & 2 \log \frac{2m-1}{2m-2} & \log \frac{2m-2}{2m-3} & \dots & \log \frac{m+1}{m} & \log \frac{m}{m-1} \\ \log \frac{m}{m-1} & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 \log \frac{2m-1}{2m-2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \log \frac{2m-2}{2m-3} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \log \frac{m+1}{m} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \log \frac{m}{m-1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De même que plus haut, on se ramène par des manipulations élémentaires à un déterminant bordant celui d'une matrice diagonale.

$$\text{Gram}(\iota, \chi_1 + \chi_2, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{m-1} & b & c & \log \frac{2m-2}{2m-3} & \dots & \log \frac{m+1}{m} & \log \frac{m}{m-1} \\ b & \frac{6}{5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & \frac{5}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \log \frac{2m-2}{2m-3} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \log \frac{m+1}{m} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \log \frac{m}{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

où

$$b := \frac{7}{5} \log \frac{m}{m-1} - \frac{8}{5} \log \frac{2m-1}{2m-2}, \quad c := 2 \log \frac{2m-1}{2m-2} - \frac{1}{2} \log \frac{m}{m-1}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer les propositions 5 et 6.

$$\begin{aligned}
 & \text{Gram}(\iota, \chi_1 + \chi_2, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2}) \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{(\frac{7}{5} \log \frac{m}{m-1} - \frac{8}{5} \log \frac{2m-1}{2m-2})^2}{6/5} - \frac{(2 \log \frac{2m-1}{2m-2} - \frac{1}{2} \log \frac{m}{m-1})^2}{5/4} \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=2}^m \left(\log \frac{2m-k}{2m-k-1} \right)^2 \right) = \frac{3}{4m} + O(m^{-2}). \tag{5}
 \end{aligned}$$

5.1.4. Minoration de L_{2m} .

Proposition 7. Pour $m \geq 3$, on a

$$L_{2m} \geq \frac{6}{5} + O(m^{-1}).$$

Démonstration. C'est une conséquence de (2), (3), (4) et (5). ■

5.2. Le cas de n impair. Posons $n = 2m - 1$, avec m entier supérieur ou égal à 2. D'après la proposition 4 les $m + 2$ premiers éléments de la suite de Farey \mathcal{F}_n sont

$$\frac{1}{2m-1}, \frac{1}{2m-2}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{2}{2m-1}, \frac{1}{m-1}.$$

5.2.1. Les vecteurs ι et χ_k , $2 \leq k \leq m+2$. Pour $2 \leq k \leq m$, soit χ_k la fonction indicatrice de l'intervalle

$$\left(\frac{1}{2m-k+1}, \frac{1}{2m-k} \right).$$

Définissons en outre χ_{m+1} et χ_{m+2} comme les fonctions indicatrices de

$$\left(\frac{1}{m}, \frac{2}{2m-1} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{2m-1}, \frac{1}{m-1} \right)$$

respectivement, et $\iota(t) := t$ pour $0 < t < 1/(m-1)$.

Les fonctions χ_k , $2 \leq k \leq m+2$, forment un système orthogonal et:

$$\begin{aligned}
 \|\chi_k\|^2 &= \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \leq k \leq m \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = m+1 \text{ ou } k = m+2; \end{cases} \\
 \|\iota\|^2 &= \frac{1}{m-1}; \\
 \langle \iota, \chi_k \rangle &= \begin{cases} \log \frac{2m-k+1}{2m-k}, & 2 \leq k \leq m \\ \log \frac{2m}{2m-1}, & k = m+1 \\ \log \frac{2m-1}{2m-2}, & k = m+2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

5.3. Projection orthogonale sur $L^2(0, (m-1)^{-1}; t^{-2} dt)$. Soit T la projection orthogonale de $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty; t^{-2} dt)$ sur $\mathcal{K} := L^2(0, (m-1)^{-1}; t^{-2} dt)$. D'après la Proposition 3, on a

$$\begin{aligned} L_n &= \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1})) \\ &\geq \text{dist}_{\mathcal{H}}^2(T\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1})). \end{aligned} \quad (6)$$

On a

$$T\mathbf{e}'_k(t) = \begin{cases} k\ell & 1 \leq k \leq m-1, \\ k\ell - \sum_{i=2m+1-k}^{m+2} \chi_i & m \leq k \leq 2m-2, \\ k\ell - \sum_{i=2m+1-k}^{m+2} \chi_i - \chi_{m+2} & k = 2m-1. \end{cases}$$

L'espace $\text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1})$ est engendré par les vecteurs :

$$\ell; \quad \chi_{m+1} + \chi_{m+2}; \quad \chi_m; \quad \chi_{m-1}; \quad \dots; \quad \chi_3.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} T\mathbf{e}'_n &= n\ell - (\chi_2 + \chi_3 + \dots + \chi_{m+1} + 2\chi_{m+2}) \\ &= -\chi_2 - \chi_{m+2} + \text{un élément de } \text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\text{dist}_{\mathcal{K}}^2(T\mathbf{e}'_n, \text{Vect}(T\mathbf{e}'_1, \dots, T\mathbf{e}'_{n-1})) \\ &= \frac{\text{Gram}(\ell, \chi_2 + \chi_{m+2}, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})}{\text{Gram}(\ell, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2})}. \end{aligned} \quad (7)$$

5.4. Calculs de déterminants de Gram.

- Commençons par le calcul du dénominateur de (7).

$$\begin{aligned} &\text{Gram}(\ell, \chi_3, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} + \chi_{m+2}) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{m-1} & \log \frac{2m-2}{2m-3} & \dots & \log \frac{m+1}{m} & \log \frac{m}{m-1} \\ \log \frac{2m-2}{2m-3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \log \frac{m+1}{m} & \vdots & \dots & 1 & 0 \\ \log \frac{m}{m-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{m-1} - \sum_{k=2}^m \left(\log \frac{2m-k}{2m-k-1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} + O(m^{-2}), \end{aligned} \quad (8)$$

d'après les Propositions 5 et 6.

- Le numérateur de (7) est identique au dénominateur de (3) et vaut donc

$$\frac{5}{8m} + O(m^{-2}), \quad (9)$$

d'après (4).

5.5. Minoration de L_{2m-1} .

Proposition 8. *Pour $m \geq 3$, on a*

$$L_{2m-1} \geq \frac{5}{4} + O(m^{-1}).$$

Démonstration. C'est une conséquence de (6), (7), (8) et (9). ■

5.6. Minoration de L_n .

Proposition 9. *Pour $n \geq 2$, on a*

$$L_n \geq \frac{6}{5} + O(n^{-1}).$$

Démonstration. Cela résulte des Propositions 7 et 8. ■

Remerciements. L'auteur remercie Bernard Landreau pour les calculs numériques et la représentation graphique du §2, et Eric Saias pour de nombreuses conversations sur le sujet abordé dans cet article.

References

- [1] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9), **14** (2003), 5–11.
- [2] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 3*, Advances in Mathematics **149** (2000), 130–144.
- [3] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias, *Etude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »*, Ramanujan Journal **9** (2005), 215–240.
- [4] V. Vasyunin, *On a biorthogonal system associated with the Riemann hypothesis*, St-Petersburg Math. J. **7** (1996), 405–419.

Address: C.N.R.S., Laboratoire de Théorie des Nombres, Université de Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

et

Laboratoire J-V. Poncelet, Université Indépendante, Bolchoï Vlassievski pereulok, 11, 119002 Moscou, Russie

E-mail: balazard@math.u-bordeaux1.fr

Received: 22 December 2005; **revised:** 4 May 2006