

LE THÉORÈME DE FROBENIUS FORMEL

JUNIA BORGES BOTELHO

Introduction

L'étude des algèbres de Lie filtrées non transitives a fait apparaître une certaine classe d'algèbres de Lie que semble avoir une grande importance dans cette théorie. Géométriquement ces algèbres de Lie correspondent aux pseudo-groupes infinitésimaux associés aux distributions involutives, i.e., complètement intégrables. Il serait donc souhaitable d'avoir pour ces algèbres de Lie un théorème correspondant au théorème de Frobenius classique pour les distributions. Dans ce travail on montre que chaque telle algèbre de Lie (appelée distribution involutive) est isomorphe à une distribution "canonique". D'une manière plus précise, soit V un espace vectoriel de dimension finie et $\hat{S}(V^*)$ l'algèbre de séries formelles à coefficients dans le dual V^* de V . Considérons l'algèbre de Lie $D(V)$ des dérivations de $\hat{S}(V^*)$ munie de la structure naturelle de $\hat{S}(V^*)$ -module. Une distribution involutive L sur V sera une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ qui est au même temps un sous-module libre de $D(V)$ satisfaisant en plus à une condition de régularité. Le résultat principal de ce travail est que L est égal, à un automorphisme de $D(V)$ près, à un sous-module de $D(V)$ engendré par des dérivations de la forme $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p$, où $x_i \in V$. La preuve de ce résultat s'écarte de ce qui serait une traduction formelle de la démonstration du théorème de Frobenius classique et on peut s'attendre à ce que notre méthode puisse servir de point de départ pour l'étude algébrique des systèmes différentiels avec des singularités. L'outil principal utilisé est la cohomologie de Spencer d'un sous-espace U de V à valeurs dans $\text{gr } D(V)$. Dans le § 2 on montre que cette cohomologie est triviale. Dans le paragraphe final on réduit le problème, en se servant de résultats cohomologiques, à un problème de prolongement d'homomorphisme d'algèbres de Lie transitives. On en déduit notre théorème en utilisant des résultats de Rim [7] et Hayashi [5].

Comme application du théorème formel de Frobenius on peut donner une démonstration immédiate du Troisième Théorème Fondamental de Cartan [3], [8], dans le cas particulier où l'algèbre de Lie en considération est une distribution involutive. D'ailleurs, nous croyons pouvoir l'utiliser dans l'étude des algèbres de Lie filtrées non transitives.

Ce travail, effectué à l'Université de São Paulo, contient les principaux résultats de la thèse de doctorat de l'auteur, faite sous l'orientation du Professeur Alexandre A. M. Rodrigues. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à A. Petitjean pour des nombreuses conversations sur ce travail.

1. Distributions

Dans tout ce travail K représentera un corps commutatif de caractéristique nulle et V un K -espace vectoriel de dimension finie n . Nous munirons K de la topologie discrète.

Soient $\hat{S}(V^*)$ l'algèbre locale des séries formelles à coefficients dans le dual V^* de V et \mathcal{M} son idéal maximal. On note \mathcal{M}^k , $k > 0$, la k^e puissance de \mathcal{M} ; on posera $\mathcal{M}^k = \hat{S}(V^*)$ pour $k \leq 0$. Alors $\{\mathcal{M}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une filtration décroissante sur $\hat{S}(V^*)$ et $\hat{S}(V^*)$ munie de la topologie associée à cette filtration est une algèbre topologique complète sur K .

Soit $D(V)$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\hat{S}(V^*)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $D^k(V)$ l'ensemble des $X \in D(V)$ tels que $X(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}^{k+1}$. Alors $\{D^k(V)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une filtration décroissante sur $D(V)$ qui confère à $D(V)$ une structure d'algèbre de Lie filtrée transitive et complète. Si L est une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ on notera par $\{L^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ la filtration induite sur L par la filtration de $D(V)$. Par ailleurs, $D(V)$ possède une structure naturelle de $\hat{S}(V^*)$ -module libre de rang n dont la loi externe est définie par $(fX)(g) = f \cdot X(g)$, pour $f, g \in \hat{S}(V^*)$ et $X \in D(V)$.

1.1. Définition. Une distribution de rang p sur V est un sous- $\hat{S}(V^*)$ -module libre L de rang p de $D(V)$ tel que $\dim_K L/L^0 = p$. Si en plus la distribution L est une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ on dira qu'elle est involutive.

Remarquons que si $\{Y_1, \dots, Y_p\}$ est une base d'une distribution L de rang p , la condition $\dim_K L/L^0 = p$ s'exprime en disant que $\pi(Y_1), \dots, \pi(Y_p)$ sont linéairement indépendants dans V où $\pi: D(V) \rightarrow D(V)/D^0(V) \simeq V$ est la projection canonique.

On note $\text{Aut } \hat{S}(V^*)$ (resp. $\text{Aut } D(V)$) le groupe des automorphismes de l'algèbre filtrée $\hat{S}(V^*)$ (resp. de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$). Il est facile de voir que si $H \in \text{Aut } \hat{S}(V^*)$, alors $H_*: X \in D(V) \rightarrow H \circ X \circ H^{-1} \in D(V)$ appartient à $\text{Aut } D(V)$.

Rappelons [6, th. 2.5, p. 456] le théorème

1.2. *Pour tout $h \in \text{Aut } D(V)$, il existe $H \in \text{Aut } \hat{S}(V^*)$ et un seul tel que $h = H_*$. Il en résulte*

1.3. Lemme. *Si $h \in \text{Aut } D(V)$ et L est une distribution involutive de rang p , alors $h(L)$ est aussi une distribution involutive de rang p .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 1.2 et de la formule $H_*(fX) = H(f)H_*(X)$ où $H \in \text{Aut } \hat{S}(V^*)$.

Si $x \in V$, on note $\partial/\partial x$ la dérivation suivant le vecteur x , c'est à dire, la dérivation de $\hat{S}(V^*)$ définie par

$$\theta_1 \cdots \theta_k \in S^k(V^*) \rightarrow \sum_{i=1}^k \theta_i(x) \theta_1 \cdots \hat{\theta}_i \cdots \theta_k \in S^{k-1}(V^*) .$$

L l'application injective $x \in V \rightarrow \partial/\partial x \in D(V)$ nous permet d'identifier V a une sous-algèbre abélienne de $D(V)$.

Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une famille libre de vecteurs de V . Il est immédiat que le sous- $\hat{S}(V^*)$ -module de $D(V)$ engendré par $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p$ est une distribution involutive de rang p . Le but de ce travail est de montrer que toute distribution involutive sur V est de cette forme, à un automorphisme de $D(V)$ près.

La proposition suivante nous donne une caractérisation des distributions involutives.

1.4. Proposition. *Une distribution L est involutive si et seulement si il existe une $\hat{S}(V^*)$ -base $\{X_1, \dots, X_p\}$ de L telle que $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq p$.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, soit $\{Y_1, \dots, Y_p\}$ une base quelconque de la distribution involutive L . Par le remarque au-dessus, il existe une base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$ du $\hat{S}(V^*)$ -module $D(V)$ dans laquelle $x_i = \pi(Y_i)$ pour $1 \leq i \leq p$, où $\pi: D(V) \rightarrow V$ est la projection canonique. On peut donc exprimer $Y_j = \sum_{k=1}^n a_j^k \partial/\partial x_k$ où $a_j^k \in \hat{S}(V^*)$. Il est clair que la matrice carrée $(a_j^k)_{1 \leq j, k \leq p}$ est inversible. Soit $(b_r^j)_{1 \leq r, j \leq p}$ son inverse et posons, pour $1 \leq r \leq p$, $X_r = \sum_{j=1}^p b_r^j Y_j$; on vérifie que $\{X_1, \dots, X_p\}$ est une base de L et que l'on a $X_r = \partial/\partial x_r + \sum_{k=p+1}^n c_r^k \partial/\partial x_k$ où $c_r^k \in \hat{S}(V^*)$. Il en résulte que $[X_i, X_j]$ est une combinaison $\hat{S}(V^*)$ -linéaire de $\{\partial/\partial x_{p+1}, \dots, \partial/\partial x_n\}$. D'autre part, puisque L est supposée involutive et $\{X_1, \dots, X_p\}$ est une base de L , on peut écrire $[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^p h_{ij}^r X_r$ où $h_{ij}^r \in \hat{S}(V^*)$. Compte-tenu des expressions antérieures des X_r , $[X_i, X_j]$ s'écrit sous la forme $[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^p h_{ij}^r \partial/\partial x_r + \sum_{k=p+1}^n l_{ij}^k \partial/\partial x_k$ et, par suite on a, pour $1 \leq r \leq p$, $h_{ij}^r = 0$, c'est à dire $[X_i, X_j] = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq p$.

2. Cohomologie de Spencer d'un sous-espace U de V à valeurs dans $\text{gr } D(V)$

Soit $\text{gr } D(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_k D(V)$ l'algèbre de Lie graduée associée à l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$. On se propose de calculer la cohomologie de U à valeurs dans $\text{gr } D(V)$ où U est un sous-espace vectoriel de V .

Rappelons [6, p. 454] qu'il existe un isomorphisme canonique Φ de l'espace vectoriel $V \otimes \hat{S}(V^*)$ sur $D(V)$ défini par $\Phi(x \otimes f) = f\partial/\partial x$. Au moyen de Φ on transporte sur $V \otimes \hat{S}(V^*)$ la structure d'algèbre de Lie filtrée de $D(V)$. Le crochet ainsi défini sur $V \otimes \hat{S}(V^*)$ est donc donné par $[x \otimes f, y \otimes g] = y \otimes (f\partial g/\partial x) - x \otimes (g\partial f/\partial y)$ et la filtration par $(V \otimes \hat{S}(V^*))^k = V \otimes \mathcal{M}^{k+1}$. On identifiera par la suite les algèbres de Lie filtrées $D(V)$ et $V \otimes \hat{S}(V^*)$ au moyen de Φ . Il s'ensuit que $\text{gr}_k D(V)$ sera égale a $V \otimes S^{k+1}(V^*)$. Plus précisément,

un élément $Y \in \text{gr}_k D(V)$ s'identifiera a l'élément de $V \otimes (S^{k+1}(V))^* \simeq V \otimes S^{k+1}(V^*)$ défini par

$$y_1 \cdots y_{k+1} \in S^{k+1}(V) \rightarrow [y_{k+1}, [\cdots [y_1, Y] \cdots]] \in V .$$

Soit maintenant U un sous-espace vectoriel de V et $\{x_1, \dots, x_n\}$ une base de V telle que $\{x_1, \dots, x_p\}$ soit une base de U . On note $\{x^1, \dots, x^n\}$ la base duale de $\{x_1, \dots, x_n\}$ et i l'inclusion de U dans V .

Définissons $\delta^{k+1} : V \otimes S^{k+1}(V^*) \rightarrow V \otimes S^k(V^*) \otimes V^*$ par $\delta^{k+1}(X)(x) = [x, X]$ où $X \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$ et $x \in V$. On posera $d^{k+1,0} = (\text{id} \otimes i^*) \circ \delta^{k+1} : V \otimes S^{k+1}(V^*) \rightarrow V \otimes S^k(V^*) \otimes U^*$ et l'on définira, pour $1 \leq m \leq p - 1$, $d^{k+1-m,m} : V \otimes S^{k+1-m}(V^*) \otimes \wedge^m U^* \rightarrow V \otimes S^{k-m}(V^*) \otimes \wedge^{m+1} U^*$ par $d^{k+1-m,m}(X \otimes w) = d^{k+1-m,0}(X) \wedge w$ où $X \in V \otimes S^{k+1-m}(V^*)$ et $w \in \wedge^m U^*$. On vérifie que, pour $t \otimes P \otimes w \in V \otimes S^{k+1-m}(V^*) \otimes \wedge^m U^*$, on a $d^{k+1-m,m}(t \otimes P \otimes w) = \sum_{i=1}^n t \otimes \partial P / \partial x_i \otimes i^*(x^i) \wedge w$ et par suite on peut écrire $d^{k+1-m,m} = \text{id}_V \otimes \partial^{k+1-m,m}$ où $\partial^{k+1-m,m} : S^{k+1-m}(V^*) \otimes \wedge^m U^* \rightarrow S^{k-m}(V^*) \otimes \wedge^{m+1} U^*$, que l'on notera simplement ∂ , s'exprime par $\partial(P \otimes w) = \sum_{i=1}^n \partial P / \partial x_i \otimes i^*(x^i) \wedge w$. Il est facile de voir que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} S^{k+1}(V^*) &\xrightarrow{\partial} S^k(V^*) \otimes U^* \xrightarrow{\partial} S^{k-1}(V^*) \otimes \wedge^2 U^* \longrightarrow \\ &\dots \longrightarrow S^{k+1-p}(V^*) \otimes \wedge^p U^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

est un complexe, i.e., $\partial \circ \partial = 0$. En plus $d^{k+1-m,m}$, que l'on notera simplement d , n'est autre que l'opérateur cobord du complexe de Spencer d'ordre k de U a valeurs dans $\text{gr } D(V)$:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} 0 &\longrightarrow V \otimes S^{k+1}(V^*) \xrightarrow{d} V \otimes S^k(V^*) \otimes U^* \\ &\xrightarrow{d} V \otimes S^{k-1}(V^*) \otimes \wedge^2 U^* \longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow V \otimes S^{k+1-p}(V^*) \otimes \wedge^p U^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et dont on notera $H^{sr}(U, D(V))$ la cohomologie en $V \otimes S^r(V^*) \otimes \wedge^s U^*$.

On va montrer que ces groupes de cohomologie sont nuls en considérant le complexe dual de (2.1).

2.3. Lemme. Soit $\partial^* : S^{r-1}(V) \otimes \wedge^{m+1} U \rightarrow S^r(V) \otimes \wedge^m U$ l'application transposée de l'opérateur ∂ de (2.1). Si $Q \in S^{r-1}(V)$, on a

$$\begin{aligned} \partial^*(Q \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{m+1}}) \\ = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j+1} (x_{i_j} Q) \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{x}_{i_j} \wedge \cdots \wedge x_{i_{m+1}} . \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme est immédiate.

2.4. Lemme. Pour tout $r > 1$ et tout $m \geq 1$, la suite suivante est exacte :

$$(2.5) \quad S^{r-1}(V) \otimes \wedge^{m+1} U \xrightarrow{\partial^*} S^r(V) \otimes \wedge^m U \xrightarrow{\partial^*} S^{r+1}(V) \otimes \wedge^{m-1} U .$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $\dim U$. L'exactitude est immédiate si $\dim U = 1$. On suppose que (2.5) est exacte pour $\dim U = s - 1$. Soit maintenant U de dimension s .

On considère un sous-espace U' de U de codimension 1 et l'on prend $x_s \in U - U'$. Soit V' un sous-espace de codimension 1 de V contenant U' et ne contenant pas x_s . Si $t \in S^j(V) \otimes \wedge^k U'$ et $x \in U$, on définit $x \cdot t$ et $t \wedge x$ de la façon évidente. En utilisant ces notations, posons $A^{r,m} = S^r(V') \otimes \wedge^m U'$, $B^{r,m} = x_s \cdot (S^{r-1}(V) \otimes \wedge^m U')$ et $C^{r,m} = (S^r(V) \otimes \wedge^{m-1} U') \wedge x_s$.

Il est clair $S^r(V) \otimes \wedge^m U = A^{r,m} \oplus B^{r,m} \oplus C^{r,m}$ et que $\partial^* A^{r,m} \subset A^{r+1,m-1}$, $\partial^* B^{r,m} \subset B^{r+1,m-1}$ et $\partial^* C^{r,m} \subset B^{r+1,m-1} \oplus C^{r+1,m-1}$. Soit $t \in S^r(V) \otimes \wedge^m U$, $t = t_A + t_B + t_C$ où $t_A \in A^{r,m}$, $t_B \in B^{r,m}$ et $t_C \in C^{r,m}$. En écrivant $t_B = x_s \cdot t'_B$ et $t_C = t'_C \wedge x_s$, on obtient $\partial^* t = \partial^* t_A + x_s \cdot \partial^* t'_B + (-1)^{m+1} x_s \cdot t'_C + \partial^* t'_C \wedge x_s$. Si $\partial^* t = 0$, on a donc $\partial^* t_A = 0$, $x_s \cdot (\partial^* t'_B + (-1)^{m+1} t'_C) = 0$ et $\partial^* t'_C \wedge x_s = 0$ c'est à dire $\partial^* t_A = 0$, $\partial^* t'_B + (-1)^{m+1} t'_C = 0$ et $\partial^* t'_C = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, t_A est un cobord, i.e., $t_A = \partial^* \eta_A$ où $\eta_A \in A^{r-1,m+1}$. On a alors $t_B + t_C = x_s \cdot t'_B + (-1)^m \partial^* t'_B \wedge x_s = (-1)^m \partial^* (t'_B \wedge x_s)$, donc $t = \partial(\eta_A + (-1)^m t'_B \wedge x_s)$.

On en déduit

2.6. Théorème. *Pour tout $s \geq 1$ et tout $r \geq 0$, $H^{s,r}(U, D(V)) = 0$.*

3. Théorème de Frobenius formel

Soit L une distribution involutive de rang p sur V . Compte-tenu de la proposition 1.4, il existe une base $\{X_1, \dots, X_p\}$ de L telle que $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq p$. On se propose de construire une base du $\hat{S}(V^*)$ -module $D(V)$ en adjoignant à X_1, \dots, X_p une suite X_{p+1}, \dots, X_n telle que $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

3.1. Proposition. *Pour $1 < k \leq n$, soient $X_1, \dots, X_{k-1} \in D(V)$ tels que $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq k - 1$ et $\{\pi(X_1), \dots, \pi(X_{k-1})\}$ soit libre sur K . Il existe alors $X \in D(V)$ tel que, pour $1 \leq i \leq k - 1$, $[X_i, X] = 0$ et que $\{\pi(X_1), \dots, \pi(X_{k-1}), \pi(X)\}$ soit libre sur K .*

Démonstration. On note $X^r \in V \otimes S^{r+1}(V^*)$ la composante homogène d'ordre r d'un élément $X \in D(V)$. Si $Y \in D(V)$, remarquons que la composante homogène d'ordre r de $[Y, X]$ est $[Y^{-1}, X^{r+1}] + [Y^0, X^r] + \dots + [Y^{r+1}, X^{-1}]$. Par suite, dire que $[Y, X] = 0$ équivaut à dire que, pour tout $r \geq -1$, $[Y^{-1}, X^{r+1}] + [Y^0, X^r] + \dots + [Y^{r+1}, X^{-1}] = 0$.

On cherche un élément X de $D(V)$ tel que, pour $1 \leq i \leq k - 1$ et pour tout $r \geq -1$

$$(3.1)_r \quad [X_i^{-1}, X^{r+1}] + [X_i^0, X^r] + \dots + [X_i^{r+1}, X^{-1}] = 0 .$$

Pour cela choisissons $X^{-1} = x_k$ où $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de V telle que,

pour $1 \leq i \leq k-1$, $x_i = \pi(X_i)$. On définit $X^0 \in V \otimes V^*$ par $X^0(x_i) = X_i^0(x_k)$ pour $1 \leq i \leq k-1$; $X^0(x_i) = 0$ pour $k \leq i \leq n$. Il est clair que $(3.1)_{-1}$ est satisfaite. On continue par récurrence en supposant connues les composantes $X^{-1}, X^0, \dots, X^{q-1}$ de X satisfaisant $(3.1)_i$ pour $i = 0, \dots, q-2$ et on calculera X^q . Soit U le sous-espace de V engendré par $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. On considère le complexe défini en (2.2)

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow V \otimes S^{q+1}(V^*) \xrightarrow{d} V \otimes S^q(V^*) \otimes U^* \\ &\xrightarrow{d} V \otimes S^{q-1}(V^*) \otimes \wedge^2 U^* \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

La condition $(3.1)_{q-1}$ nous amène à définir $Z^q \in V \otimes S^q(V^*) \otimes U^*$ par

$$Z^q(x_i) = \sum_{s=-1}^{q-1} [X^s, X_i^{q-s-1}], \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Un calcul direct montre que $dZ^q = 0$. (Rappelons que $dZ^q \in V \otimes S^{q-1}(V^*) \otimes \wedge^2 U^*$ s'exprime par $dZ^q(x_i \wedge x_j) = [x_i, Z^q(x_j)] - [x_j, Z^q(x_i)]$). D'après le théorème 2.6, il existe $X^q \in V \otimes S^{q+1}(V^*)$ tel que $dX^q = Z^q$. Il est alors immédiat que $X^{-1}, X^0, \dots, X^{q-1}, X^q$ vérifient $(3.1)_{q-1}$.

De ce qui précède et de la proposition 1.4, il résulte

3.2. Corollaire. *Soit L une distribution involutive de rang p sur V . Il existe une base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $D(V)$ telle que $\{X_1, \dots, X_p\}$ soit une base de L et que $[X_i, X_j] = 0$, pour $1 \leq i, j \leq n$.*

On peut maintenant énoncer et démontrer notre résultat central.

3.3. Théorème de Frobenius formel. *Soit L une distribution involutive de rang p sur V . Si $\{y_1, \dots, y_n\}$ est une base de V , il existe un automorphisme h de $D(V)$ tel que $h(L)$ soit engendré par $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}$.*

Démonstration. Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ une base de $D(V)$ satisfaisant aux conditions du corollaire 3.2. On considère les sous-espaces vectoriels M et N de $D(V)$ engendrés par $\{X_1, \dots, X_n\}$ et $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n\}$ respectivement. Il est clair que M et N sont des sous-algèbres de Lie abéliennes et transitives de $D(V)$. On considère l'isomorphisme $h_1: M \rightarrow N$ d'algèbres de Lie filtrées défini par $h_1(X_i) = \partial/\partial y_i$, pour $1 \leq i \leq n$. D'après [5, th. 1, p. 8] il existe une extension unique de h_1 en un automorphisme h de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$. D'après 1.2 la distribution involutive $h(L)$ est engendrée par $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}$.

3.4. Exemple. Soient V un espace vectoriel de dimension 2, $\{x_1, x_2\}$ une base de V et $\{x^1, x^2\}$ sa base duale. Soit $L = \hat{S}(V^*)X_1$ où $X_1 = \partial/\partial x_1 + x^1\partial/\partial x_2$. Il est clair que L est une distribution involutive de rang 1 qui ne contient aucune dérivation de la forme $\partial/\partial x$ avec $x \in V$. Soit H l'automorphisme de $\hat{S}(V^*)$ défini par

$$H(x^1) = x^1, \quad H(x^2) = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2.$$

Posons $h = H_*$. Alors la distribution involutive $h(L)$ est engendrée par $\partial/\partial x_1$.

4. Notations

- $\hat{S}(V^*)$: algèbre des séries formelles à coefficients dans le dual V^* d'un espace vectoriel V
 \mathcal{M} : idéal maximal de $\hat{S}(V^*)$
 $\{\mathcal{M}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$: filtration de $\hat{S}(V^*)$
 $D(V)$: algèbre de Lie filtrée des dérivations de $\hat{S}(V^*)$
 $\{D(V)\}_{k \in \mathbb{Z}}$: filtration de $D(V)$
 $\text{Aut } \hat{S}(V^*)$: groupe des automorphismes de l'algèbre filtrée $\hat{S}(V^*)$
 $\text{Aut } D(V)$: groupe des automorphismes de algèbre de Lie filtrée $D(V)$
 $\text{gr } (V) = \bigoplus \text{gr}_k D(V)$: algèbre de Lie graduée associée à $D(V)$
 X^r : composante homogène d'ordre r d'un élément X de $D(V)$
 $\{L^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$: filtration sur la sous-algèbre L de $D(V)$ induite par $\{D(V)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 $\text{gr}_k L$: noyau de l'épimorphisme canonique $L/L^k \rightarrow L/L^{k-1}$
 $\text{gr } L = \bigoplus \text{gr}_k L$: algèbre de Lie graduée associée à $\{L^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 ∂ : opérateur cobord du complexe (2.1)
 d : opérateur cobord du complexe de Spencer de U à valeurs dans $\text{gr } D(V)$
 $H^{s,r}(U, D(V))$: cohomologie du complexe de Spencer de U à valeurs dans $\text{gr } D(V)$
 π : projection canonique de $D(V)$ sur $D(V)/D^0(V)$
 H_* : automorphisme de $D(V)$ dérivé de $H \in \text{Aut } \hat{S}(V^*)$

Bibliographie

- [1] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1950, chap. 3.
[2] ———, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1967, chap. 4.
[3] H. Goldschmidt, *Sur la structure des équations de Lie: I. Le troisième théorème fondamental*, J. Differential Geometry **6** (1972) 357–373.
[4] V. Guillemin & S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.
[5] I. Hayashi, *Embedding and existence theorems of infinite Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970) 1–14.
[6] A. Petitjean, *Prolongements d'homomorphismes d'algèbres de Lie filtrées transitives*, J. Differential Geometry **9** (1974) 451–464.
[7] D. S. Rim, *Deformations of transitive Lie algebras*, Ann. of Math. **83** (1966) 339–357.
[8] A. M. Rodrigues, *Théorème de réalisation pour les algèbre de Lie filtrées transitives*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B, **270** (1970) A192–A194.

