J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
12 (1977) 253-300

LES VARIETES DE POISSON ET LEURS ALGEBRES DE LIE ASSOCIEES

ANDRE LICHNEROWICZ

Introduction

On sait l'intérêt présent porté aux variétés symplectiques. L'origine de cet intérêt est double, d'une part élaboration d'une dynamique géométrique adaptée aux problèmes globaux de la mécanique analytique classique, qu'il s'agisse de systèmes à liaisons indépendantes ou dépendant du temps, en vue d'applications à la mécanique quantique (Kostant, Maslov, Leray), d'autre part étude de l'une des plus intéressantes parmi les algèbres de Lie infinies classiques (Arnold, Gelfand; voir aussi [3], [4], [11]). A partir de l'étude des transformations canoniques, j'ai été amené récemment à introduire la notion géométrique nouvelle de *variété canonique* (voir [12], [9]) et à étudier certaines des algèbres de Lie associées. Variété symplectique et variété canonique sont des cas particuliers d'une structure géométrique plus générale, celle de *variété de Poisson* qui a été introduite épisodiquement dans [9]. Il s'agit, grosso modo, de la structure géométrique la plus générale qui permet de définir, sur l'espace des fonctions à valeurs réelles définies sur une variété, un crochet de Poisson généralisé.

Ce papier est consacré à l'étude générale des variétés de Poisson qui posent des problèmes de géométrie différentielle naturels qui sont loin d'être triviaux.

Après avoir défini la structure (W, G) de variété de Poisson à partir d'un 2-tenseur contravariant antisymétrique G de rang constant, vérifiant $[G, G] = 0$ au sens du crochet de Schouten, ainsi que la G-cohomologie correspondante sur les tenseurs contravariants antisymétriques, on étudie les différentes algèbres de Lie attachées à une variété de Poisson et on détermine leurs *dérivations*. Plus généralement on étudie la cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie dynamique N d'une variété de Poisson. Conjointement avec un théorème important concernant les 1-cochaines de N à cobord d-différentiable (section III), cette étude permet celle des *déformations* de l'algèbre de Lie N.

Ces différents résultats englobent nos résultats antérieurs [4], [9] concernant variétés symplectiques et variétés canoniques, à quelques particularités près.

En vue d'applications à la théorie quantique des champs, Dirac [7] a développé, dans un contexte local et non invariant, une théorie que nous reprenons: il s'agit de la dynamique associée à une sous-variété largement arbitraire

Communicated September 22, 1975.

d'une variété symplectique (section VI) et elle conduit à la mise en évidence du *crochet de Dirac* que nous interprétons géométriquement. Cette approche conduit à la mise en évidence naturelle d'une *structure de Poisson* et à l'étude de déformations linéaires rigoureuses faisant passer du crochet de Poisson au crochet de Dirac, au moins sur un ouvert de $\boldsymbol{R}^{2n}$.

Je remercie vivement M. Flato et D. Sternheimer pour d'utiles discussions au cours de l'élaboration de cet article.

I. VARIETES DE POISSON

1. Notion de variété de Poisson

(a) Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension m et classe C^∞. Tous les éléments considérés ici sont supposés C^∞. Nous posons $N = C^\infty(W; R)$ et désignons par $\{x^A\}$ $(A, B, \cdots = 1, \cdots, m)$ une carte locale de W de domaine U. Pour abréger nous appelons *i-tenseur* un tenseur contravariant antisymétrique d'ordre i.

Sur de tels tenseurs, Schouten [15] et Nijenhuis [14] ont introduit un crochet (le crochet de Schouten-Nijenhuis) qui, à tout couple A, B d'un i-tenseur et d'un j-tenseur fait correspondre un $(i + j - 1)$-tenseur noté $[A, B]$ qui peut être défini de la manière suivante: pour toute $(i + j - 1)$-forme *fermée* β, on a

$$i([A, B])\beta = (-1)^{ij+j} i(A)di(B)\beta + (-1)^i i(B)di(A)\beta \,, \tag{1.1}$$

où $i(\,.\,)$ est le produit intérieur. Pour $i = 1$, $[A, B] = \mathscr{L}(A)B$, où $\mathscr{L}(\,.\,)$ est l'opérateur de dérivation de Lie. On vérifie immédiatement sur (1.1) qui l'on a

$$[A, B] = (-1)^{ij}[B, A] \,. \tag{1.2}$$

De plus si C est un k-tenseur, on a "l'identité de Jacobi"

$$(-1)^{ij}[[B, C], A] + (-1)^{jk}[[C, A], B] + (-1)^{ki}[[A, B], C] = 0 \,. \tag{1.3}$$

Un calcul élémentaire fournit pour composantes de $[A, B]$ sur le domaine d'une carte locale arbitraire:

$$\begin{aligned}[A, B]^{K_2\cdots K_{i+j}} = {} & \frac{1}{(i-1)!\, j!} \varepsilon^{K_2\cdots K_{i+j}}_{I_2\cdots I_i J_1 \cdots J_j} A^{RI_2\cdots I_i} \partial_R B^{J_1\cdots J_j} \\ & + \frac{(-1)^i}{i!\,(j-1)!} \varepsilon^{K_2\cdots K_{i+j}}_{I_1\cdots I_i J_2\cdots J_j} B^{RJ_2\cdots J_j} \partial_R A^{I_1\cdots I_i} \,,\end{aligned} \tag{1.4}$$

où ε est l'indicateur antisymétrique de Kronecker et où $\partial_R = \partial/\partial x^R$.

(b) Donnons-nous sur W un 2-*tenseur* G partout de rang $2n$ ($G^{n+1} = 0$, G^n est partout $\neq 0$). Nous posons dans la suite $h = m - 2n$; nous notons p, q, r, s des indices prenant $2n$ valeurs, a, b, c, des indices prenant h valeurs.

Sur l'espace $N = C^\infty(W; R)$, introduisons l'application bilinéaire alternée (on crochet de Poisson généralisé) $N \times N \to N$ définie par

$$\{u, v\}_G = i(G)(du \wedge dv) , \qquad (u, v \in N) . \tag{1.5}$$

Si $u, v, w \in N$, étudions la fonction

$$t = S\{\{u, v\}_G, w\}_G ,$$

où S désigne la sommation après permutation circulaire. On a explicitement sur U

$$\{\{u, v\}_G, w\}_G = G^{DC}\partial_D(G^{AB}\partial_A u \partial_B v)\partial_C w .$$

Un calcul direct donne

$$t|_U = (G^{RA}\partial_R G^{BC} + G^{RB}\partial_R G^{CA} + G^{RC}\partial_R G^{AB})\partial_A u \partial_B v \partial_C w .$$

Or il résulte de (1.4) que les composante de $[G, G]$ sur U sont données par

$$\tfrac{1}{2}[G, G]^{ABC} = G^{RA}\partial_R G^{BC} + G^{RB}\partial_R G^{CA} + G^{RC}\partial_R G^{AB} . \tag{1.6}$$

On a ainsi

$$t|_U = \tfrac{1}{2}[G, G]^{ABC}\partial_A u \partial_B v \partial_C w .$$

Ainsi pour que (1.5) vérifie l'identité de Jacobi, il faut et il suffit que $[G, G] = 0$. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante

Définition. On appelle variété de Poisson une variété W, de dimension m, munie d'un 2-tenseur G de rang constant $2n$ (avec $h = m - 2n$) vérifiant

$$[G, G] = 0 . \tag{1.7}$$

Sur une variété de Poisson (W, G), le crochet (1.5) défini par G détermine sur N une structure d'algèbre de Lie. Cette algèbre est dite l'algèbre de Lie dynamique de la variété de Poisson.

De telles variété ont été introduites et étudiées sommairement dans [9, § 3]. Les variétés symplectiques ($h = 0$) et les variétés canoniques ($h = 1$) sont des cas particuliers des variétés de Poisson. Dans la suite, nous supprimerons dans (1.5) l'indice G lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

(c) Examinons le cas des variétés symplectiques. Une structure symplectique est définie en général sur une variété W de dimension $2n$ par une 2-forme F de rang $2n$, *fermée* ($dF = 0$). Nous notons $\mu: TW \to T^*W$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par $\mu(X) = -i(X)F$, où $X \in TW$. Cet isomorphisme s'étend naturellement aux fibrés tensoriels. Soit G le 2-tenseur $\mu^{-1}(F)$ de rang $2n$; le crochet de Poisson de (W, F) est défini par (1.5) et G vérifie (1.7). Inversement une structure symplectique peut être définie sur W de dimension $2n$ par un 2-tenseur G de rang $2n$ vérifiant (1.7) (définition comme variété de Poisson) ; G définit directement μ^{-1} et par suite μ. De plus si A est un i-tenseur, on a (voir [11, § 3])

$$\mu([G, A]) = d\mu(A) . \tag{1.8}$$

On sait qu'il existe sur une variété symplectique des atlas de cartes canoniques $\{x^p\} = \{x^\alpha, x^{\bar\alpha}\}$ ($\alpha = 1, \cdots, n$; $\bar\alpha = \alpha + n$); dans une telle carte, F a pour seules composantes non nulles

$$F_{\alpha\bar\alpha} = -F_{\bar\alpha\alpha} = 1 ,$$

d'où l'on déduit un résultat analogue pour G. On a le lemme suivant, utile sous cette forme.

Lemme. *Soit V un domaine de R^{2n} muni d'un 2-tenseur G de rang $2n$ vérifiant $[G, G] = 0$. Si $x \in V$, il existe une carte $\{x^p\} = \{x^\alpha, x^{\bar\alpha}\}$ de domaine $U \subset V$, où $x \in U$, tel que G admette pour seules composantes non nulles:*

$$G^{\alpha\bar\alpha} = -G^{\bar\alpha\alpha} = 1 . \tag{1.9}$$

2. Feuilletage et coordonnées canoniques pour une variété de Poisson

(a) Soit (W, G) une variété de Poisson telle que $h \neq 0$. Si U est un domaine contractile de W il existe sur U, d'après la condition portant sur le rang de G, h 1-formes $\omega^{(a)}$ ($a = 1, \cdots, h$) linéairement indépendantes, telles que

$$G^{DA}\omega^{(a)}_A = 0 . \tag{2.1}$$

On déduit de (1.7) à partir de (1.6):

$$G^{DB}\partial_D G^{CA}\cdot\omega^{(a)}_A + G^{DC}\partial_D G^{AB}\cdot\omega^{(a)}_A = 0 ,$$

soit, d'après (2.1),

$$G^{BD}G^{CA}(\partial_D\omega^{(a)}_A - \partial_A\omega^{(a)}_D) = 0 ,$$

c'est-à-dire,

$$G^{BD}G^{CE}(d\omega^{(a)})_{DE} = 0 . \tag{2.2}$$

Adoptons sur U des corepères privilégiés $\{\omega^{(A)}\}$ de la forme $\{\omega^{(a)}, \omega^{(p)}\}$. On a dans ces corepères $G^{Ba} = 0$ et dét $(G^{pq}) \neq 0$. La relation invariante (2.2) s'écrit

$$G^{pr}G^{qs}(d\omega^{(a)})_{rs} = 0 \ ,$$

soit

(2.3) $$(d\omega^{(a)})_{rs} = 0 \ .$$

(2.3) exprime que le système différentiel $\omega^{(a)} = 0$ ($a = 1, \cdots, h$) est *complétement intégrable*. Il existe sur U des cartes locales $\{x^a, x^p\}$ telles que pour ces cartes :

(2.4) $$G^{Ba} = 0 \ .$$

Le tenseur G définit ainsi un champ intégrable de $2n$-plans et par suite un feuilletage de W de codimension h, dont les feuilles sont les intégrales maximales du champ. Soit $\Sigma(x)$ la composante connexe de x de la feuille passant par x ; d'après (2.4), G définit sur $\Sigma(x)$ un 2-tenseur $G_{\Sigma(x)}$ partout de rang $2n$ vérifiant

(2.5) $$[G_{\Sigma(x)}, G_{\Sigma(x)}] = 0 \ .$$

$\Sigma(x)$ est donc une variété symplectique dont nous désignons par $F_{\Sigma(x)}$ la 2-forme fermée de structure.

Proposition. *Une variété de Poisson* (W, G) *admet un feuilletage régulier de codimension* h *par des variétés symplectiques.*

(b) Dans la carte locale $\{x^a, x^p\}$ de domaine U pour laquelle (2.4) est satisfait, la relation (1.7) s'écrit

$$G^{tp}\partial_t G^{qr} + G^{tq}\partial_t G^{rp} + G^{tr}\partial_t G^{pq} = 0 \ .$$

Pour $x^a =$ const., on peut, d'après le lemme du § 1, effectuer un changement des coordonnées x^p tel que les composantes de G soient canoniques au sens de (1.9). Il existe ainsi des changements de cartes de la forme

$$x^{a'} = x^a \ , \qquad x^{q'} = x^{q'}(x^a, x^p) \ ,$$

tel que, par rapport à $\{x^{a'}, x^{q'}\} = \{x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}\}$, le 2-tenseur G de W admette comme seules composantes non nulles

$$G^{\alpha\bar{\alpha}} = -G^{\bar{\alpha}\alpha} = 1 \ .$$

Une telle carte sera dite une *carte canonique* pour la variété de Poisson (W, G). Nous avons établi

Proposition. *Une variété de Poisson* (W, G) *admet des atlas de cartes canoniques.*

En particulier, elle admet des atlas de cartes pour lesquelles G a des composantes constantes.

3. G-cohomologie d'une variété de Poisson

(a) Soit (W, G) une variété de Poisson. Il résulte de (1.3) appliqué au i-tenseur A et aux 2 tenseurs $B = C = G$ que, pour tout A, on a sur (W, G)

$$[G, [G, A]] = 0 \ . \tag{3.1}$$

Introduisons sur les tenseurs contravariants antisymétriques, l'opérateur ∂ qui, à tout i-tenseur A fait correspondre le $(i+1)$-tenseur

$$\partial A = -[G, A] \ . \tag{3.2}$$

(3.1) exprime que ∂ est un opérateur de cohomologie ($\partial^2 = 0$).

Soit U le domaine d'une carte pour laquelle G a des composantes constantes. Si A est un i-tenseur sur $U, \partial A$ a pour composantes

$$(\partial A)^{B_0\cdots B_i} = -\frac{1}{i!}\varepsilon^{B_0\cdots B_i}_{C_0\cdots C_i} G^{C_0 R}\partial_R A^{C_1\cdots C_i} \ . \tag{3.3}$$

On a

Lemme. *Si A et B sont respectivement un i-tenseur et un j-tenseur*

$$\partial(A \wedge B) = \partial A \wedge B + (-1)^i A \wedge \partial B \ . \tag{3.4}$$

En effet sur U

$$(A \wedge B)^{C_1\cdots C_{i+j}} = \frac{1}{i!\, j!}\varepsilon^{C_1\cdots C_{i+j}}_{A_1\cdots A_i B_1\cdots B_j} A^{A_1\cdots A_i} B^{B_1\cdots B_j} \ . \tag{3.5}$$

D'autre part

$$\{\partial(A \wedge B)\}^{D_0\cdots D_{i+j}} = \frac{1}{(i+j)!}\varepsilon^{D_0\cdots D_{i+j}}_{C_0\cdots C_{i+j}} G^{C_0 R}\partial_R (A \wedge B)^{C_1\cdots C_{i+j}} \ ,$$

soit, d'après (3.5),

$$\{\partial(A \wedge B)\}^{D_0\cdots D_{i+j}} = \frac{1}{i!\, j!}\varepsilon^{D_0\cdots D_{i+j}}_{C_0 A_1\cdots A_i B_1\cdots B_j}(G^{C_0 R}\partial_R A^{A_1\cdots A_i} B^{B_1\cdots B_j} + G^{C_0 R} A^{A_1\cdots A_i}\partial_R B^{B_1\cdots B_j}) \ .$$

Ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned}\{\partial(A \wedge B)\}^{D_0\cdots D_{i+j}} \\ = \frac{1}{(i+1)!\, j!}\varepsilon^{D_0\cdots D_{i+j}}_{E_0\cdots E_i B_1\cdots B_j}\left(\frac{1}{i!}\varepsilon^{E_0\cdots E_i}_{A_0 A_1\cdots A_i} G^{A_0 R}\partial_R A^{A_1\cdots A_i}\right) B^{B_1\cdots B_j} \\ + \frac{(-1)^i}{i!\,(j+1)!}\varepsilon^{D_0\cdots D_{i+j}}_{A_1\cdots A_i F_0\cdots F_j} A^{A_1\cdots A_i}\left(\frac{1}{j!}\varepsilon^{F_0\cdots F_j}_{B_0 B_1\cdots B_j} G^{B_0 R}\partial_R B^{B_1\cdots B_j}\right) ,\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que (3.4).

La cohomologie définie par ∂ sur l'algèbre extrérieure des tenseurs contravariants antisymétriques sera dite *la G-cohomologie de la variété de Poisson.*

Dans le cas particulier d'une variété symplectique (c'est-à-dire si $m = 2n$), cette G-cohomologie est isomorphe d'après (1.8) à la cohomologie de G. de Rham de la variété W (voir [11, § 3]).

(b) Examinons, dans le cas général, le caractère localement trivial de la G-cohomologie. Soit U un domaine contractile et $\{x^A\} = \{x^a, x^p\}$ une carte canonique de domaine U. Si A est un i-tenseur sur U, décomposons A selon les types relatifs à la carte $\{x^a, x^p\}$. Nous sommes amenés à distinguer deux cas:

$$\text{I.} \qquad A = \sum_{l=0}^{h} A_{(l)} \qquad \text{pour } i > h \ ,$$

$$\text{II.} \qquad A = \sum_{l=0}^{i-1} A_{(l)} + A_{(i)} \qquad \text{pour } i \leq h \ ,$$

où $A_{(l)}$ est un i-tenseur de type $(l, i - l)$ par rapport à la carte, soit

$$A_{(l)} = \{A^{a_1 \cdots a_l p_{l+1} \cdots p_i}\} \ .$$

Il résulte de (3.3), soit

$$(3.6) \qquad (\partial A)^{B_0 \cdots B_i} = -\frac{1}{i!} \varepsilon^{B_0 \cdots B_i}_{q C_1 \cdots C_i} G^{qr} \partial_r A^{C_1 \cdots C_i} \ ,$$

que $\partial A_{(l)}$ est un $(i + 1)$-tenseur de type $(l, i - l + 1)$. Pour que $\partial A = 0$, il faut et il suffiit que $\partial A_{(l)} = 0$ pour tout l, c'est-à-dire que

$$(3.7) \qquad \frac{1}{(i - l)!} \varepsilon^{q_l \cdots q_i}_{r_l \cdots r_i} G^{r_l s} \partial_s A_{(l)}^{a_1 \cdots a_l r_{l+1} \cdots r_i} = 0 \ .$$

D'après le lemme de Poincaré et les résultats du cas symplectique (voir a) il existe sur U, *pour* $l \leq i - 1$, un tenseur $B_{(l)}$ de type $(l, i - l - 1)$ tel que

$$A_{(l)} = \partial B_{(l)} \qquad (l \leq i - 1) \ .$$

On a dans le cas I:

$$A = \partial B \quad \text{où} \quad B = \sum_{l=0}^{h} B_{(l)} \ ,$$

et dans le cas II:

$$A = \partial B + A_{(i)} \quad \text{où} \quad B = \sum_{l=0}^{i-1} B_{(l)} \ ,$$

où $A_{(i)} = \{A^{a_1 \cdots a_i}\}$ n'admet que les composantes de type $(i, 0)$ constantes sur les feuilles. Un tel tenseur sera dit *constant pour le feuilletage*. On a

Proposition. *Soit (W, G) une variété de Poisson à feuilletage de codimension h. Sur un domaine contractile U de W*

(1°) *Si $i > h$, tout i-tenseur A cocycle ($\partial A = 0$) est un cobord (locale trivialité).*

(2°) *Si $i \leq h$, tout i-tenseur A cocycle est somme d'un cobord et d'un tenseur constant pour le feuilletage.*

(c) Nous notons dans la suite $H^i(W, G)$ *le i^e espace de G-cohomologie de* (W, G), quotient de l'espace des i-tenseurs cocycles de (W, G) par l'espace des i-tenseurs cobords. Nous interpréterons ces espaces en termes de cohomologie de l'algèbre de Lie dynamique N de la variété de Poisson.

Donnons-nous un i-tenseur A et un j-tenseur B de W et appliquons (1.3) aux trois tenseurs A, B et G. On obtient

$$\partial[A, B] = -[\partial A, B] - (-1)^i[A, \partial B] \ . \tag{3.8}$$

Il en résulte que le crochet de Schouten induit un crochet sur l'espace des classes de G-cohomologie.

II. COHOMOLOGIE 1-DIFFERENTIABLE DE N

4. Cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie N

(a) La cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie N est définie de la manière suivante: les i-cochaines C de N sont les applications i-linéaires alternées de N^i dans N, les o-cochaines s'identifiant à des éléments de N. Le cobord de la i-cochaine C est la $(i + 1)$-cochaine ∂C définie par [6]

$$\begin{aligned} \partial C(u_0, \cdots, u_i) = & \frac{1}{i!}\varepsilon^{\lambda_0 \cdots \lambda_i}_{0 \cdots i}\{u_{\lambda_0}, C(u_{\lambda_1}, \cdots, u_{\lambda_i})\} \\ & - \frac{1}{2(i-1)!}\varepsilon^{\lambda_0 \cdots \lambda_i}_{0 \cdots i} C(\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}, u_{\lambda_2}, \cdots, u_{\lambda_i}) \ , \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $u_\lambda \in N$. L'espace des 1-cocycles de N est, par définition, l'espace des *dérivations* de N, celui des 1-cocycles exacts est celui des *dérivations intérieures* de N.

Une i-cochaîne C est dite *locale* si, pour tout élément u_1 de N tel que $u_1|_U = 0$ sur un domaine U de W, on a $C(u_1, \cdots, u_i)|_U = 0$; si C est locale, ∂C est locale.

(b) Une i-cochaine C est dite 1-*différentiable* si elle est définie à partir d'opérateurs différentiels du premier ordre sur les éléments de N. Toute i-cochaîne 1-différentiable C de N (voir [11, § 3]) admet une décomposition de la forme $C = A + B$, où A et B sont respectivement définis par un i-tenseur et un $(i - 1)$-tenseur désignés par la même notation, de telle sorte que, sur le domaine U d'une carte locale $\{x^K\}$, on ait

$$A(u_1, \cdots, u_i)|_U = A^{K_1 \cdots K_i} \partial_{K_1} u_1 \cdots \partial_{K_i} u_i \, ,$$

$$B(u_1, \cdots, u_i)|_U = \frac{1}{(i-1)!} \varepsilon^{\lambda_1 \cdots \lambda_i}_{1 \cdots i} B^{K_2 \cdots K_i} u_{\lambda_1} \partial_{K_2} u_{\lambda_2} \cdots \partial_{K_i} u_{\lambda_i} \, .$$

Une i-cochaîne 1-différentiable telle que sa partie de type B soit nulle est dite *pure*.

Nous sommes ainsi conduits à étudier la cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie N.

5. Cohomologie 1-différentiable de N

(a) Des calculs identiques à ceux détaillés dans [11, § 3], c conduisent immédiatement à la proposition suivante:

Proposition. *Le cobord d'une i-cochaîne 1-différentiable pure définie par un i-tenseur A est la $(i + 1)$-cochaîne 1-différentiable pure définie par le $(i + 1)$-tenseur $\partial A = -[G, A]$.*

Il y a donc cohérence des notations concernant les cobords. Nous obtenons ainsi une interprétation de la G-cohomologie, donnée par l'énoncé suivant:

Théorème. *Let i^e espace de cohomologie 1-différentiable pure $H^i_{(p)}(N)$ de l'algèbre de Lie N, à valeurs dans N, est isomorphe au i^e espace de cohomologie $H^i(W; G)$ de la variété de Poisson (W, G).*

(b) Soit $e(G)$ l'opérateur sur les tenseurs contravariants antisymétriques défini par le produit extérieur par G. Il résulte du lemme du § 3 (formule (3.4)) que $e(G)$ agit sur les classes de G-cohomologie de la variété (W, G). Nous sommes conduits à introduire le sous-espace $P^i(W; G)$ de $H^i(W; G)$ *noyau* de $e(G)$ et le sous-espace $Q^i(W; G)$ de $H^i(W; G)$ *image* par $e(G)$ de $H^{i-2}(W; G)$.

Soit $C = (A, B)$ une i-cochaîne 1-différentiable arbitraire sur N. Des calculs identiques à ceux de [11, § 4], montrent que le cobord ∂C est la $(i + 1)$-cochaîne 1-différentiable definie par

$$\partial C = (-[G, A] + G \wedge B, [G, B]) \, . \tag{5.1}$$

Pour que (A, B) soit un i-cocyle, il faut et il suffit d'après (5.1) que

$$\partial A = -G \wedge B \, , \qquad \partial B = 0 \, . \tag{5.2}$$

Pour que (A, B) soit un i-cocycle exact, il faut et il suffit qu'il existe une $(i - 1)$-cochaîne (D, E) telle que

$$A = \partial D + G \wedge E \, , \qquad B = -\partial E \, . \tag{5.3}$$

Soit (A, B) un i-cocycle ; d'après (5.2), $e(G)B$ est exact et la classe de B appartient à $P^{i-1}(W; G)$. Tous les i-cocycles admettant B comme second élément sont de la forme $(A + R, B)$ avec $\partial R = 0$.

Si le i-cocycle (A, B) est exact, B est exact et il existe un $(i - 2)$-tenseur E, défini à $E \to E + S$ près (avec $\partial S = 0$) tel que $B = -\partial E$. Choisissons un E ; on déduit de (5.2) :

$$A - G \wedge E = R , \qquad (\partial R = 0) . \tag{5.4}$$

D'après (5.3), (A, B) est exacte si et seulement si le i-tenseur

$$G \wedge E + R - G \wedge E - G \wedge S = R - G \wedge S$$

est exact. Ainsi (A, B) est exacte si B est exact $(B = -\partial E)$ et si la classe de $R = A - G \wedge E$ appartient à $Q^i(W; G)$. Nous avons établi

Théorème. *Le i^e espace de cohomologie 1-différentiable $H^i(N)$ de l'algèbre de Lie dynamique N d'une variété de Poisson (W, G) est isomorphe à l'espace*

$$P^{i-1}(W; G) \oplus H^i(W; G)/Q^i(W; G) ,$$

où $P^{i-1}(W; G)$ est le noyau de l'opérateur $e(G): H^{i-1}(W; G) \to H^{i+1}(W; G)$ et où $Q^i(W; G)$ est l'image par $e(G)$ de $H^{i-2}(W; G)$ dans $H^i(W; G)$. Si G est exact, on a $P^{i-1}(W; G) = H^{i-1}(W; G)$ et $Q^i(W, G) = \{0\}$; $H^i(N)$ est alors isomorphe à $H^{i-1}(W; G) + H^i(W; G)$.

(c) On peut définir sur la cohomologie envisagée de N une structure d'algèbre en introduisant le produit extérieur

$$(A, B) \wedge (A', B') = (A \wedge A', B \wedge A' + (-1)^i A \wedge B') , \tag{5.5}$$

où (A, B) est une i-cochaîne sur N, (A', B') une j-cochaîne. On vérifie immédiatement [11, § 5, c] que

$$(A', B') \wedge (A, B) = (-1)^{ij}(A, B) \wedge (A', B') . \tag{5.6}$$

En ce qui concerne le cobord, il vient

$$\begin{aligned} &\partial\{(A, B) \wedge (A', B')\} \\ &\quad = \partial(A, B) \wedge (A', B') + (-1)^i (A, B) \wedge \partial(A', B') . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il en résulte

Proposition. *Le produit extérieur (5.5) induit, sur l'espace des classes de cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie N, une structure d'algèbre de cohomologie.*

III. 1-COCHAINES DE N A COBORD D-DIFFERENTIABLE

6. 1-cochaînes de $N(U)$ à cobord d-différentiable

En reprenant les raisonnement de [8, § II], nous allons établir pour les variétés de Poisson un théorème semblable à celui concernant les 1-cochaînes locales sur l'algèbre de Lie dynamique d'une variété symplectique.

(a) Soit $\{x^A\} = \{y^a, x^p\} = \{y^a, x^\alpha, x^{\bar\alpha}\}$, $(A = 1, \cdots, m;\ a = 1, \cdots, h;\ \alpha = 1, \cdots, n)$, une carte canonique donnée de (W, G) de domaine U. Dans cette section, nous notons exceptionnellement $\{y^a\}$ les coordonnées locales constantes le long des feuilles. Si $N(U)$ est l'algèbre de Lie dynamique de la variété de Poisson $(U, G|_U)$, donnons-nous un endomorphisme T_U de $N(U)$ tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne d-différentiable $(d \geq 1)$, en un sens évident, de $N(U)$. Désignons par K une suite de m entiers $(k_1, \cdots, k_m)$ positifs ou nuls et posons $|K| = k_1 + \cdots + k_m$. Pour tout $u, v \in N(U)$, on a sur U

$$(6.1)\qquad T_U(\{u, v\}) - \{T_U(u), v\} - \{u, T_U(v)\} = C_d(u, v)$$

la 2-cochaîne d-différentiable $C_d(u, v)$ s'exprimant par

$$C_d(u, v) = A^{KL}(\partial_K u \partial_L v - \partial_K v \partial_L u) + B^L(u\partial_L v - v\partial_L u)\ ,$$

où K, L sont des indices de différentiation vérifiant $1 \leq |K| \leq d$, $1 \leq |L| \leq d$.

On établit comme dans [8, § 3] a

Lemme 1. *T_U et la carte canonique $\{x^A\}$ de domaine U étant donnés, il existe un opérateur différentiel unique P_U d'ordre d sur $N(U)$ tel que*

$$T_U^d = T_U - P_U$$

annule les polynômes de degré d en les coordonnées canoniques; P_U vérifie (6.1) *pour une* 2*-cochaîne d-différentiable convenable et est invariant par translation de la carte canonique.*

(b) Soit $\mathscr{A}(U)$ l'anneau des fonctions $a \in N(U)$ telles que $[G|_U, a] = 0$; a ne dépend que des y^a. Nous allons établir

Lemme 2. *L'endomorphisme T_U^d du lemme* 1 *agissant sur les polynômes de degré* $(d + 1)$ *en les coordonnées canoniques fournit un élément de $\mathscr{A}(U)$.*

Ce lemme n'est en fait utile que pour $d = 1$ et T_U^d opérant sur les polynômes de degré 2.

Soit $x_0 \in U$ le point de coordonnées nulles dans la carte canonique envisagée. On note M un monôme générique de degré $(d + 1)$

$$(6.2)\qquad M = (y^1)^{k_1} \cdots (y^h)^{k_h}(x^1)^{l_1}(x^{\bar 1})^{l_1} \cdots (x^n)^{l_n}(x^{\bar n})^{l_n}$$

avec

$$k_1 + \cdots + k_h + l_1 + \bar{l}_1 + \cdots + l_n + \bar{l}_n = d + 1 \geq 2 .$$

Ecrivons (6.1) appliqué à T_U^d pour $u = M$, $v = x^{\bar\alpha}$; $\{M, x^{\bar\alpha}\}$ étant un polynôme de degré d, il vient

$$\{T_U^d(M), x^{\bar\alpha}\} = -C_d(M, x^{\bar\alpha}) ,$$

soit

$$\partial_\alpha T_U^d(M) = -C_d(M, x^{\bar\alpha}) .$$

Le même raisonnement est valable pour $v = x^\alpha$. La 2-cochaîne C_d étant d-différentiable, on a en x_0

$$(\partial_p T_U^d(M))(x_0) = 0 ,$$

soit

$$[G|_U, T_U^d(M)](x_0) = 0 .$$

Par translation de la carte canonique, il en résulte que $T_U^d(M) \in \mathscr{A}(U)$, ce qui démontre le lemme.

(c) **Lemme 3.** *Si T_U^d est l'endomorphisme défini par le lemme* 1 *et si $u \in N(U)$ admet un d-jet $j^d(u)$ nul en $x_0 \in U$, $T_U^d(u)$ est nul en x_0.*

Par translation, nous pouvons supposer que x_0 a des coordonnées nulles dans la carte canonique envisagée. Si $j^d(u)(x_0) = 0$, la fonction u peut s'écrire sur U

$$u = M\mathscr{X}(x^A) . \tag{6.3}$$

On peut développer $\mathscr{X}(x^A)$ selon les puissances de $x^{\bar 1}$ par exemple, par la formule de Taylor:

$$\mathscr{X}(x^A) = \mathscr{X}_0(x^I) + x^{\bar 1}\mathscr{X}_1(x^I) + \cdots + (x^{\bar 1})^g\mathscr{X}_g(x^I) + (x^{\bar 1})^{g+1}\mathscr{X}_{g+1}(x^A) ,$$

où $I \neq \bar 1$. On peut supposer ou bien $k_1 + \cdots + k_h = d + 1$ dans M, ou bien qu'un indice l, l_1 par exemple, est ≥ 1. En substituant le développement précédent dans (6.3), on voit qu'il suffit d'étudier les éléments u de $N(U)$ des trois types suivants:

$$u_{\mathrm{I}} = N\varphi(x^I) \qquad (I \neq \bar 1) \tag{I}$$

avec

$$N = (y^1)^{k_1} \cdots (y^h)^{k_h}(x^1)^{l_1}(x^{\bar 1})^{\bar l_1} \cdots (x^n)^{l_n}(x^{\bar n})^{\bar l_n} ,$$

où

$$k_1 + \cdots + k_h + l_1 + \bar{l}_1 + \cdots + l_n + \bar{l}_n \geq d + 1 , \qquad l_1 \geq 1 .$$

$$\text{(II)} \qquad u_{\mathrm{II}} = (x^{\bar{1}})^{d+2}\psi(x^A) ,$$

$$\text{(III)} \qquad u_{\mathrm{III}} = (y^1)^{k_1} \cdots (y^h)^{k_h}\mathscr{X}(x^I) ,$$

où

$$k_1 + \cdots + k_h = d + 1 , \qquad k_1 \geq 1 .$$

Pour obtenir une fonction v_{I} telle que $\{(x^1)^2, v_{\mathrm{I}}\} = u_{\mathrm{I}}$, c'est-à-dire telle que $2x^1\partial_{\bar{1}}\, v_{\mathrm{I}} = N\varphi(x^I)$ il suffit de prendre

$$v_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2(\bar{l}_1 + 1)}(y^1)^{k_1} \cdots (y^h)^{k_h}(x^1)^{l_1-1}(x^{\bar{1}})^{l_1+1} \cdots (x^n)^{l_n}(x^{\bar{n}})^{l_n}\varphi(x^I) .$$

Avec ce choix, on a d'après (6.1) appliquée à T_U^d:

$$T_U^d(u_{\mathrm{I}}) = T_U^d\{(x^1)^2, v_{\mathrm{I}}\} = \{T_U^d((x^1)^2), v_{\mathrm{I}}\} + \{(x^1)^2, T_U^d(v_{\mathrm{I}})\} + C_d((x^1)^2, v_{\mathrm{I}}) .$$

D'après le lemme 2, $T_U^d((x^1)^2) \in \mathscr{A}(U)$ et le premier terme du dernier membre est nul. On en déduit qu'en x_0

$$(T_U^d(u_{\mathrm{I}}))(x_0) = 0 .$$

Considérons maintenant la fonction u_{II}; pour que $\{(x^{\bar{1}})^2, v_{\mathrm{II}}\} = u_{\mathrm{II}}$ il faut et il suffit que

$$\partial_1 v_{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}(x^{\bar{1}})^{d+1}\psi(x^A) .$$

Si $\Psi(x^A)$ est une primitive en x^1 de $\psi(x^A)$, on peut prendre

$$v_{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}(x^{\bar{1}})^{d+1}\Psi(x^A) .$$

Avec ce choix, on a d'après (6.1) appliquée à T_U^d

$$T_U^d(u_{\mathrm{II}}) = T_U^d\{(x^{\bar{1}})^2, v_{\mathrm{II}}\} = \{T_U^d((x^{\bar{1}})^2), v_{\mathrm{II}}\} + \{(x^{\bar{1}})^2, T_U^d(v_{\mathrm{II}})\} + C_d((x^{\bar{1}})^2, v_{\mathrm{II}}) .$$

On voit encore qu'en x_0

$$(T_U^d(u_{\mathrm{II}}))(x_0) = 0 .$$

Cherchons enfin une fonction v_{III} telle que $\{y^1, x^1, v_{\mathrm{III}}\} = y^1\{x^1, v_{\mathrm{III}}\} = u_{\mathrm{III}}$, soit

$$\partial_{\bar{1}} v_{\mathrm{III}} = (y^1)^{k_1-1}(y^2)^{k_2} \cdots (y_h)^{k_h}\mathscr{X}(x^I) .$$

Nous prenons

$$v_{\mathrm{III}} = (y^1)^{k_1-1}(y^2)^{k_2} \cdots (y^h)^{k_h}x^{\bar{1}}\mathscr{X}(x^I) ,$$

où le facteur de $\mathscr{X}$ est de degré $d + 1$. On a d'après (6.1) appliqué à T_U^d

$$T_U^d(u_{\mathrm{III}}) = T_U^d\{y^1x^1, v_{\mathrm{III}}\} = \{T_U^d(y^1x^1), v_{\mathrm{III}}\} + \{y^1x^1, T_U^d(v_{\mathrm{III}})\} + C_d(y^1x^1, v_{\mathrm{III}}) ,$$

et l'on en déduit qu'en x_0

$$(T_U^d(u_{\mathrm{III}}))(x_0) = 0 ,$$

ce qui démontre le lemme.

(d) On en déduit la proposition suivante.

Proposition. *Si T_U est un endomorphisme de $N(U)$ tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne d-différentiable ($d \geq 1$) de $N(U)$, on a*

$$T_U = P_U ,$$

où P_U est un opérateur différentiel d'ordre d sur $N(U)$.

Soit x un point arbitraire de U, $\{x^A\}$ une carte canonique de domaine U. A T_U correspond par cette carte l'opérateur différentiel P_U d'ordre d tel que l'endomorphisme $T_U^d = T_U - P_U$ annule les polynômes de degré d en les coordonnées canoniques (lemme 1).

Soit u un élément de $N(U)$. Il existe sur U un polynôme $\hat{u}$, de degré d en les coordonnées canoniques, tel que

$$j^d(u)(x) = j^d(\hat{u})(x) .$$

Il résulte du lemme 3 que l'on a

$$(T_U^d(u))(x) = (T_U^d(\hat{u}))(x) = 0 .$$

Ainsi $T_U^d(u)$ est nul en x, donc sur U et, pour tout $u \in N(U)$, on a $T_U(u) = P_U(u)$, où P_U est un opérateur différentiel d'ordre d.

7. 1-cochaîne locale de N à cobord d-différentiable

Une i-cochaîne locale de N est dite *d-différentiable* si elle induit, pour tout domaine U de W, une i-cochaîne d-différentiable de $N(U)$. Considérons une cochaîne *locale* T de N telle que ∂T soit une 2-cochaîne d-différentiable de N.

Soit U un domaine de W. Si $u_U \in N(U)$, soit $u \in N$ telle que $u|_U = u_U$; l'endomorphisme local T de N induit sur U par $T_U(u_U) = T(u)|_U$ un endomorphisme T_U de $N(U)$ tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne d-différentiable de $N(U)$. D'après la proposition précédente, il existe sur $N(U)$ un opérateur différentiel P_U d'ordre d tel que $T_U = P_U$.

Introduisons un recouvrement localement fini $\{U_\nu\}$ de W par des domaines de cartes canoniques. On pose $T_\nu = T_{U_\nu}$, $P_\nu = P_{U_\nu}$. Pour $u \in N$, on a pour $x \in U_\nu$

$$(T_\nu(u|_{U_\nu}))(x) = (P_\nu(u|_{U_\nu}))(x) .$$

Pour $x \in U_\nu \cap U_{\nu'}$, il vient

$$(P_{\nu'}(u|_{U_{\nu'}}))(x) = (P_\nu(u|_{U_\nu}))(x) = (T(u))(x) .$$

Il en résulte que les P_ν définissent sur N un opérateur différentiel P d'ordre d tel que pour tout $u \in N$, on ait $T(u) = Pu$. Nous énonçons

Théorème. *Si T est une* 1-*cochaîne locale de N telle que ∂T soit une* 2-*cochaîne d-différentiable* ($d \geq 1$), *T est elle-même d-différentiable.*

Toute dérivation locale de N étant un 1-cocycle, on peut lui appliquer le théorème précédent avec $d = 1$. Il vient

Corollaire. *Tout dérivation locale de l'algèbre de Lie N est* 1-*différentiable.*

IV. ALGEBRES DE LIE ATTACHEES A UNE VARIETE DE POISSON DERIVATIONS

8. Les algèbres de Lie L_G, L, L^*

(a) Soit (W, G) une variété de Poisson. Etudions les espaces de cohomologie $H^0(W; G)$ et $H^1(W; G)$ correspondant à la G-cohomologie.

Pour que a (0-tenseur) élément de N définisse un 0-cocycle, il faut et il suffit que

$$[G, a] = 0 . \tag{8.1}$$

Les fonctions a satisfaisant (8.1) définisse un anneau $\mathscr{A}$ et $H^0(W; G)$ est isomorphe à $\mathscr{A}$.

Pour que le vecteur X définisse un 1-cocycle, il faut et il suffit que l'on ait

$$[G, X] = 0 , \tag{8.2}$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{L}(X)G = 0 . \tag{8.3}$$

Un tel champ de vecteurs définit un automorphisme infinitésimal de la variété de Poisson (W, G). L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de (W, G) sera noté L_G, celle des automorphismes infinitésimaux à *supports compacts* $(L_G)_0$; L_G et $(L_G)_0$ sont des $\mathscr{A}$-modules. Un élément X de L_G sera encore dit une *transformation infinitésimale* (*t.i.*) *de Poisson.*

Soit $\{x^a, x^p\}$ une carte canonique de (W, G) de domain U. Si $X \in L_G$, il résulte de (8.2) d'une part que

$$\partial_p X^a = 0 ,$$

et X^a *appartient à* $\mathscr{A}(U)$, d'autre part que

$$G^{rp}\partial_r X^q - G^{rq}\partial_r X^p = 0 ,$$

et, d'après l'étude du § 3, il existe une fonction $u_U \in N(U)$ telle que

(8.4) $$X^p = [G|_U, u_U]^p .$$

(b) Soit L (resp. L_0) le sous-espace de L_G (resp. $(L_0)_0$) défini par les *éléments tangents au feuilletage*; L et L_0 sont encore des $\mathscr{A}$-modules.

Si $X \in L_G$, $y \in L$, il résulte du a que l'on a sur le domaine U

$$[X, Y]^b = X^A\partial_A Y^b - Y^A\partial_A X^b = 0 ,$$

puisque $Y^a = 0$ et $[L_G, L] \subset L$. Ainsi *l'algèbre de Lie L (resp. L_0) des t.i. de Poisson tangentes au feuilletage (resp. à supports compacts) est un idéal de L_G.*

Soit Σ une feuille connexe du feuilletage. Si X_Σ est le champ de vecteurs induit sur Σ par $X \in L$, le 2-tenseur G_Σ définissant la structure symplectique de Σ vérifie

$$\mathscr{L}(X_\Sigma)G_\Sigma = 0 .$$

Ainsi, si X est une t.i. de Poisson tangente au feuilletage, elle induit sur chaque feuille de (W, G) une t.i. *symplectique*.

Si μ_Σ est l'isomorphisme entre vecteurs et 1-formes de Σ déterminé par G_Σ, l'élément X de L définit une famille régulière $\xi = \{\xi_\Sigma\}$ de 1-formes *fermées* $\xi_\Sigma = \mu_\Sigma\,(X_\Sigma)$ de Σ. Nous notons ce fait

(8.5) $$\bar{d}\xi = 0 ,$$

où $\bar{d}$ est la différentielle extérieure la long des feuilles.

(c) Soit $X_1, X_2 \in L$, ξ_1, ξ_2 les deux familles de 1-formes correspondantes vérifiant

(8.6) $$\bar{d}\xi_1 = 0 , \qquad \bar{d}\xi_2 = 0 .$$

Dans la carte canonique $\{x^a, x^p\}$ de domaine U, nous avons

$$X_1^q = G^{rq}\xi_{1r} , \qquad X_2^q = G^{rq}\xi_{2r} .$$

On en déduit

$$[X_1, X_2]^p = G^{rq}\xi_{1r}\partial_q(G^{rp}\xi_{2s}) - G^{rq}\xi_{2r}\partial_q(G^{sq}\xi_{1s}) ,$$

ce qui peut s'écrire, compte-tenu de (8.6),

$$[X_1, X_2]^p = G^{sp}\partial_s(G^{qr}\xi_{1q}\xi_{2r}) .$$

Or

$$w_U = G^{qr}\xi_{1q}\xi_{2r}$$

est la restriction à U d'une fonction $w \in N$ notée

$$w = i(G)(\xi_1 \wedge \xi_2) \ . \tag{8.7}$$

Si F_Σ est la 2-forme de Σ définie par G_Σ, on a pour tout $x \in W$

$$w(x) = i(X_1(x) \wedge X_2(x))F_{\Sigma(x)} \ .$$

On a donc

$$[X_1, X_2] = [G, w] \ , \qquad (w \in N) \ . \tag{8.8}$$

Soit N_0 le sous-espace de N défini par les fonctions à supports compacts. Nous sommes conduits à introduire l'espace L^* (resp. L_0^*) des champs de vecteurs X définis par

$$X = [G, u] \ , \tag{8.9}$$

où u est un élément arbitraire de N (resp. N_0) ; L^* et L_0^* sont des $\mathscr{A}$-modules. Si $Z \in L_G$ et $X \in L^*$, on a

$$[Z, X] = \mathscr{L}(Z)X = \mathscr{L}(Z)[G, u] = [G, \mathscr{L}(Z)u] \ ,$$

et $[L_G, L^*] \subset L^*$, $[L_G, L_0^*] \subset L_0^*$. Il résulte d'autre part de (8.9) que

$$[L, L] \subset L^* \ , \qquad [L, L_0] \subset L_0^* \ .$$

Ainsi

Proposition. (1) *L^* est un idéal de L_G et L/L^* est abélien.*

(2) *On a $[L_G, L_0^*] \subset L_0^*$, $[L, L_0] \subset L_0^*$; L_0^* est un idéal de L_G et L_0/L_0^* est abélien.*

Notons que, pour que le 1-cocycle défini par $X \in L_G$ soit *exact*, il faut et il suffit qu'il existe $u \in N$ tel que $X = [G, u]$, c'est-à-dire que X appartienne à L^*. Ainsi *$H^1(W ; G)$ est isomorphe à L_G/L^*.*

(d) Soit $\bar{N}$ l'espace des classes de fonctions de N, modulo les fonctions additives appartenant à $\mathscr{A}$. C'est encore un $\mathscr{A}$-module. Nous notons $\pi : u \in N \to \pi(u) = \bar{u} \in \bar{N}$ la projection canonique de N sur $\bar{N}$. Si $u \in N$, sa différentielle $\bar{d}u$ tangente aux feuilles ne dépend que de la classe $\bar{u}$ de u ; nous la notons éventuellement $\bar{d}\bar{u}$.

Si $u, v \in N$, leur crochet

$$\{u, v\} = i(G)(\bar{d}\bar{u} \wedge \bar{d}\bar{v})$$

ne dépend que des classes $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{N}$ de u, v et il induit par suite sur $\bar{N}$ *une structure d'algèbre de Lie*. L'isomorphisme naturel du $\mathscr{A}$-module L^* sur le $\mathscr{A}$-module $\bar{N}$ est, d'après (8.7), (8.8), un *isomorphisme d'algèbres de Lie*.

9. Dérivations locales de N et algèbre de Lie L^c

(a) Soit $\mathscr{D}$ une dérivation *locale* de N, c'est-à-dire un endomorphisme local de N vérifiant pour tout $u, v \in N$ la condition

$$\mathscr{D}\{u, v\} = \{\mathscr{D}u, v\} + \{u, \mathscr{D}v\} , \tag{9.1}$$

qui exprime que $\partial\mathscr{D} = 0$. D'après le corollaire du § 7, $\mathscr{D}$ est nécessairement un cocycle 1-différentiable: si nous posons $\mathscr{D} = (X, a)$, où X est un vecteur et a un scalaire, on a pour $u \in N$

$$\mathscr{D}u = \mathscr{L}(X)u + au . \tag{9.2}$$

Pour que (9.1) soit satisfaite, il faut et il suffit d'après (5.1) que

$$\partial\mathscr{D} = (-[G, X] + aG, [G, a]) = 0 ,$$

c'est-à-dire que

$$\mathscr{L}(X)G = aG , \qquad [G, a] = 0 .$$

Il est clair que les dérivations *intérieures* de N sont données par $\mathscr{D} = (X, 0)$ où $X \in L^*$.

(b) Nous dirons que le vecteur X définit une *t.i. conforme de Poisson* s'il existe $a_x \in \mathscr{A}$ telle que

$$\mathscr{L}(X)G = a_X G . \tag{9.3}$$

Soit $\{x^a, x^p\}$ une carte canonique de (W, G) de domaine U. Si X est une t.i. conforme de Poisson, on déduit de (9.3) comme au § 8, a, que $\partial_p X^a = 0$ et que, par suite, les composantes X^a appartiennent à $\mathscr{A}(U)$. Il en résulte que si $b \in \mathscr{A}$, on a

$$\mathscr{L}(X)b \in \mathscr{A} . \tag{9.4}$$

Si X, Y sont deux t.i. conformes de Poisson:

$$\mathscr{L}(X)G = a_X G , \qquad \mathscr{L}(Y)G = a_Y G ,$$

où $a_X, a_Y \in \mathscr{A}$. On en déduit

$$\mathscr{L}([X, Y])G = (\mathscr{L}(X)\mathscr{L}(Y) - \mathscr{L}(Y)\mathscr{L}(X))G = \mathscr{L}(X)(a_Y G) - \mathscr{L}(Y)a_X G)$$

soit, après simplifications:

$$\mathscr{L}([X, Y])G = (\mathscr{L}(X)a_Y - \mathscr{L}(Y)a_X)G , \tag{9.5}$$

où

$$\mathscr{L}(X)a_Y - \mathscr{L}(Y)a_X \in \mathscr{A} .$$

Les t.i. conformes de Poisson définissent ainsi, pour le crochet naturel, *une algèbre de Lie notée L^c.*

Nous avons établi

Proposition 1. *L'algèbre de Lie naturelle des dérivations locales de N est isomorphe à l'algèbre de Lie L^c des transformations infinitésimales conformes de Poisson pour l'isomorphisme défini de la manière suivante: si $X \in L^c$, on a $\mathscr{L}(X)G = a_x G$ (avec $a_x \in \mathscr{A}$) et X donne la dérivation*

$$\mathscr{D}_X = \mathscr{L}(X) + a_X . \tag{9.6}$$

On note qu'avec les notations du § 5, $H^1(N)$ est isomorphe à L^c/L^*. Désignons par $\mathscr{B}$ le sous-anneau de $\mathscr{A}$ (qui est un $\mathscr{A}$-module) défini par les fonctions b de $\mathscr{A}$ telles que bG soit *exact*. D'après le théorème du § 5, $H^1(N)$ est isomorphe à $\mathscr{B} \oplus L_G/L^*$.

(c) Pour $X \in L^c$, $Y \in L$, on a d'après (9.5)

$$\mathscr{L}([X, Y])G = 0 .$$

D'autre part, dans une carte canonique $\{x^a, x^p\}$ de domaine U, il vient

$$[X, Y]^b = X^A \partial_A Y^b - Y^A \partial_A X^b = 0 ,$$

et $[X, Y]$, tangent au feuilletage, appartient à L. Ainsi *les algèbres de Lie L et L_0 sont des idéaux de L^c.*

Pour $X \in L^c$, $Y = [G, v] \in L^*$ (avec $v \in N$), on a

$$[X, Y] = \mathscr{L}(X)Y = \mathscr{L}(X)[G, v] = [a_X G, v] + [G, \mathscr{L}(X)v] .$$

soit

$$[X, Y] = [G, \mathscr{L}(X)v + a_X v] , \tag{9.7}$$

où $\mathscr{L}(X)v + a_x v \in N$. On en déduit que L^* et L_0^* sont des idéaux de L^c.

Proposition 2. *Si L^c est l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales conformes de Poisson de la variété (W, G), les algèbres de Lie L, L_0, L^*, L_0^* sont des idéaux de L^c.*

10. Caractère local des dérivations de L^c, L, L^*

Nous nous proposons, dans la suite, de déterminer les dérivations des algèbres de Lie L^c, L, L^* et nous voulons d'abord établir le caractère local des dérivations de ces algèbres.

Une dérivation de l'algèbre de Lie L^c est un endomorphisme $D^c: L^c \to L^c$ tel que pour tout $X, Y \in L^c$, on ait

$$D^c[X, Y] = [D^cX, Y] + [X, D^cY] \; . \tag{10.1}$$

Mêmes définitions pour une dérivation D de L, D^* de L^*, $\mathscr{D}$ de N, $\bar{\mathscr{D}}$ de $\bar{N}$.

Soit D^c une dérivation de L^c, X un élément de L^c tel que $X|_U = 0$ pour un domaine U de W. Donnons-nous un élément Y de L_0^* à support $S(Y) \subset U$. On a $[X, Y] = 0$ et $[X, D^cY]|_U = 0$. Il résulte de (10.1) que l'on a

$$[D^cX, Y] = 0 \; . \tag{10.2}$$

Soit x un point de U. Donnons-nous une carte canonique $\{x^a, x^p\}$ de domaine V tel que $x \in V \subset U$ pour laquelle x admet des coordonnées nulles. Prenons $Y = [G, v]$ où $v \in N_0$ est à support $S(v) \subset U$ et est tel que $(\bar{d}v)(x) = 0$. On a alors $Y(x) = 0$ et (10.2) peut s'écrire en x

$$((D^cX)^A \partial_A Y^p)(x) = 0 \; .$$

Or on a

$$\partial_A Y^p = G^{rp} \partial_{rA} v \; .$$

La relation précédente s'écrit donc

$$((D^cX)^A \partial_{rA} v)(x) = 0 \; . \tag{10.3}$$

Choisissons pour v une fonction à support compact $S(v) \subset U$ et qui dans le voisinage V de x s'écrive $v|_V = x^B x^p$. On a sur V

$$\partial_A v = (\delta_A^B x^p + \delta_A^p x^B) \; , \qquad \partial_{rA} v = (\delta_A^B \delta_r^p + \delta_A^p \delta_r^B) \; .$$

Il vient en x

$$(D^cX)^A(x)(\delta_A^B \delta_r^p + \delta_A^p \delta_r^B) = 0 \; ,$$

soit

$$(D^cX)^B(x) \cdot \delta_r^p + (D^cX)^p(x) \cdot \delta_r^B = 0 \; . \tag{10.4}$$

Prenons $B = r \neq p$; il vient $(D^cX)^p(x) = 0$ et (10.4) se réduit à

$$(D^cX)^b(x) \cdot \delta_r^p = 0 \; .$$

Il vient $(D^cX)^b(x) = 0$. Ainsi $(D^cX)(x) = 0$ et par suite $D^cX|_U = 0$. Le même raisonnement s'applique aux dérivations de L_G, L, L^*. Nous avons établi

Proposition. *Toute dérivation de L^c, L_G, L, L^* est un opérateur local.*

Pour une dérivation $\mathscr{D}$ de N ou $\bar{\mathscr{D}}$ de $\bar{N}$, nous obtenons seulement par ce type de raisonnement (S support)

$$S(\bar{d}\mathscr{D}u) \subset S(\bar{d}u) \; , \qquad S(\bar{d}\bar{\mathscr{D}}\bar{u}) \subset S(\bar{d}\bar{u}) \; , \tag{10.5}$$

où $u \in N$, $\bar{u} \in \bar{N}$. En particulier si $a \in \mathscr{A}$, on a $\mathscr{D}a \in \mathscr{A}$.

11. Etude de $N(V)$

Le caractère local des dérivations que nous voulons déterminer nous conduit à procéder à une étude purement locale. Soit $\{y^a, y^p\}$ une carte canonique de domaine V; nous supposons que sur V, $\{y^a\}$ décrit un pavé I^h de $\boldsymbol{R}^h$ et que $\{y^p\}$ décrit un domaine contractile V_Σ de $\boldsymbol{R}^{2n}$. La domaine $V \simeq I^h \times V_\Sigma$ sera dit un *domaine contractile produit* de W.

Considérant $(V, G|_V)$ comme une variété de Poisson, nous nous proposons essentiellement d'étudier son algèbre de Lie dynamique $N(V)$ et l'algèbre de Lie $L(V) = L^*(V)$ des t.i. de Poisson tangentes au feuilletage. Nous noterons $L_G(V)$ (resp. $L^c(V)$) l'algèbre de Lie des t.i. (resp. conformes) de Poisson de $(V, G|_V)$.

(a) Introduisons sur V l'élément auxiliaire défini par la h-forme

$$\pi = \prod_{a=1}^{h} dy^a \; . \tag{11.1}$$

Nous notons I_π l'idéal de l'algèbre extérieure des formes φ sur V admettant en facteur la forme π, c'est-à-dire telles qu'il existe une forme ψ de V pour laquelle

$$\varphi = \pi \wedge \psi \; . \tag{11.2}$$

Nous allons montrer que si φ est une $(h+i)$-forme *fermée* de I_π, elle est la différentielle d'une $(h+i-1)$-forme de I_π. En effet on peut supposer dans (11.2) ψ de type $(0, i)$ par rapport à la carte

$$\psi = \psi(y^a, y^p)_{q_1 \ldots q_i} dy^{q_1} \wedge \cdots \wedge dy^{q_i} \; ,$$

φ étant fermée, on a $\bar{d}\psi = 0$ et il existe une $(i-1)$-forme x de V de type $(0, i-1)$ telle que $\omega = d\chi$. Il vient

$$\varphi = \pi \wedge \bar{d}\chi = \pi \wedge d\chi \; ,$$

et par suite

$$\varphi = (-1)^h d(\pi \wedge \chi) \; ,$$

ce qui démontre la propriété.

(b) Introduisons sur V la m-forme élément de volume η_V définie par

$$\eta_V(x) = \pi(x) \wedge \eta_\Sigma(x) \qquad (x \in V) \; ,$$

où $\eta_\Sigma = F_\Sigma^n / n!$ est l'élément de volume symplectique de la feuille Σ. On sait que la donnée d'un élément de volume η_V définit un isomorphisme $* : A \to i(A)\eta_V$ de l'espace des i-tenseurs de V sur l'espace des $(m-i)$-formes; $\delta = (-1)^i *^{-1} d*$ définit alors l'opérateur divergence sur les i-tenseurs ($\delta^2 = 0$). En coordonnées canoniques, on a

(11.3) $$(\delta A)^{B_2\cdots B_i} = -\partial_R A^{RB_2\cdots B_i} .$$

Toute m-forme de V peut s'écrire $u\eta_V$, où $u \in N(V)$; elle est fermée et appartient à I_π. Il existe par suite une $(m-1)$-forme ψ de V telle que

(11.4) $$u\eta = d\psi$$

avec

(11.5) $$\psi = \pi \wedge \chi .$$

Posons $Z = -*^{-1}\psi$; (11.4) peut s'écrire

$$u = -*^{-1}d*Z ,$$

soit

(11.6) $$u = \delta Z .$$

Il résulte de (11.5) que $dy^a \wedge \psi = 0$ pour tout a, soit $i(Z)dy^a = 0$ et Z est tangent au feuilletage. Nous avons

Lemme 1. *Pour l'élément de volume η_V, tout élément u de $N(V)$ peut s'écrire*

$$u = \delta Z ,$$

où Z est un champ de vecteurs sur V tangent au feuilletage.

En coordonnées canoniques

(11.7) $$u = -\partial_p Z^p .$$

L'élément de volume symplectique η_Σ définit sur Σ une divergence δ_Σ sur les i-tenseurs de Σ. Si Z_Σ est le champ de vecteurs induit par Z sur Σ, il résulte de (11.7) que

(11.8) $$u|_\Sigma = \delta_\Sigma Z_\Sigma .$$

(c) Si $X \in L(V)$, on a $\mathscr{L}(X)\pi = 0$ et par suite η_V est invariant par X, ce qui se traduit par

(11.9) $$\delta X = 0 .$$

Pour $X, Y \in L(V)$, on a $X = [G, u]$, $Y = [G, v]$, avec $u, v \in N(V)$ et la fonction $\{u, v\}$ associée au crochet $[X, Y]$ peut s'écrire

(11.10) $$\{u, v\} = \mathscr{L}(X)v = -\delta(vX) .$$

Si $N_0(V)$ est le sous-espace de $N(V)$ défini par les fonctions à supports compacts, nous sommes conduits à la définition suivante,

Définition. On note $N_1(V)$ le sous-espace de $N_0(V)$ défini par les fonctions u pour lesquelles il existe un vecteur Z à support compact $S(Z) \subset V$ tangent au feuilletage tel que

$$u = \delta Z . \tag{11.11}$$

Il résulte de (11.10) que l'on a

$$\{N(V), N_0(V)\} \subset N_1(V) . \tag{11.12}$$

La relation (11.11) peut s'écrire

$$u|_\Sigma = \delta_\Sigma Z_\Sigma ,$$

où Z_Σ est à support compact et il vient

$$\int_\Sigma u|_\Sigma \eta_\Sigma = 0 . \tag{11.13}$$

Inversement si $u \in N(V)$ vérifie (11.13) pour toute feuille, u appartient à $N_1(V)$.

Cela posé, on établit exactement comme dans [4, § 8], à partir de la caractérisation (11.13) des éléments de $N_1(V)$, le lemme suivant qui est un instrument important.

Lemme principal 2. *Soit U, U' deux sous-domaines contractiles produits du domaine V, avec $\bar{U}' \subset U$. Donnons-nous $2n$ fonctions $w^{(p)} \in N_1(V)$, à supports $S(w^{(p)}) \subset U$ telles que $\{y^a, x^p = w^{(p)}|_{U'}\}$ définisse une carte locale de domaine U'.*

Si u est un élément de $N_1(V)$ tel que $S(u) \subset U'$, il existe $2n$ fonctions $v_{(p)} \in N_1(V)$, à supports $S(v_{(p)}) \subset U$ telles que

$$u = \sum_p \{v_{(p)}, w^{(p)}\} . \tag{11.14}$$

En particulier, si U est un sous-domaine contractile produit de V et si u est un élément de $N_1(V)$ tel que $S(u) \subset U$, on peut trouver $2n$ couples $(v_{(p)}, w^{(p)})$ d'éléments de $N_1(V)$ *à* supports dans U, tels que (11.14) soit satisfaite.

(d) Donnons-nous un recouvrement $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ de V par des domaines contractiles produits vérifiant la condition suivante (*recouvrement de Palais*) : il existe une partition de I en une collection finie de sous ensembles I_μ ($\mu = 1, \cdots, k$) telle que, pour chaque μ, les domaines pour lesquels $\nu \in I_\mu$ soient deux à deux disjoints. Soit $\{\varphi_\nu\}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement ; nous posons

$$\tau_\mu = \sum_{\nu \in I_\mu} \varphi_\nu .$$

Si $u \in N(V)$, il existe sur V, d'après le lemme 1, un champ de vecteurs Z tangent au feuilletage tel que $u = \delta Z$. Posons

$$Z_\mu = \tau_\mu Z \,, \qquad u_\mu = \delta Z_\mu \,.$$

Considérons, pour μ fixé, les domaines $\{U_\nu\}_{\nu \in I_\mu}$ deux à deux disjoints ; en appliquant à $u_\mu|_{U_\nu}$ le lemme principal, on voit que u_μ est la somme des crochets de $2n$ couples $(v_{(p)}, w^{(p)})$ d'élément de $N(V)$. Ainsi $u_\mu \in \{N(V), N(V)\}$ et u, some finie d'éléments de $\{N(V), N(V)\}$ appartient à $\{N(V), N(V)\}$. On en déduit

$$(11.15) \qquad \{N(V), N(V)\} = N(V) \,, \qquad [L(V), L(V)] = L(V) \,.$$

Proposition. *Pour un domaine contractile produit V d'une variété de Poisson, $N(V)$ et $L(V)$ coïncident avec leurs idéaux dérivés.*

12. Dérivations de $L(V)$

(a) Etudions d'abord les dérivations $\mathscr{D}_1$ de $N_1(V)$. Soit U un sous-domaine contractile produit du domaine V. Si $u \in N_1(V)$ est à support $S(u) \subset U$, il résulte du lemme principal (§ 11) qu'il existe $2n$ couples $(v_{(p)}, w^{(p)})$ d'éléments de $N_1(v)$ à supports dans U tels que

$$(12.1) \qquad u = \sum_p \{v_{(p)}, w^{(p)}\} \,.$$

On en déduit

$$\mathscr{D}_1 u = \sum_p \{\mathscr{D}_1 v_{(p)}, w^{(p)}\} + \sum_p \{v_{(p)}, \mathscr{D}_1 w^{(p)}\} \,.$$

De l'expression du second membre, il résulte que $S(u) \subset U$ implique $S(\mathscr{D}_1 u) \subset U$.

Cela posé, soit u un élément arbitraire de $N_1(V)$. Il existe un champ de vecteurs Z, à support compact $S(Z)$, tangent au feuilletage, tel que $u = \delta Z$. Introduisons un recouvrement fini $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ d'un voisinage ouvert de $S(Z)$ par des domaines contractiles produits et soit $\{\varphi_\nu\}$ une partition de l'unité subordonnée. Posons $Z_\nu = \varphi_\nu Z$, $u_\nu = \delta Z_\nu$. On a $\mathscr{D}_1 u = \sum \mathscr{D}_1 u_\nu$, où $S(\mathscr{D}_1 u_\nu) \subset U_\nu$. Il en résulte

$$(12.2) \qquad S(\mathscr{D}_1 u) \subset S(Z) \,.$$

Soit $\hat{U}$ un domaine contractile produit tel que $u|_{\hat{U}} = 0$. On a $\delta Z|_{\hat{U}} = \delta(Z|_{\hat{U}}) = 0$. Il existe sur $\hat{U}$ un 2-tenseur $A_{\hat{U}}$ tangent au feuilles et tel que $Z|_{\hat{U}} = \delta A_{\hat{U}}$. Choisissons sur V un 2-tenseur B à support compact, tangent aux feuilles et tel que $B|_{\hat{U}} = A_{\hat{U}}$. Nous pouvons substituer à Z le vecteur $\hat{Z} = Z - \delta B$, à support compact, tangent aux feuilles et tel que $u = \delta\hat{Z}$, $\hat{Z}|_{\hat{U}} = 0$. Il résulte de (12.2) appliqué à $\hat{Z}$ que $\mathscr{D}_1 u|_{\hat{U}} = 0$.

Ainsi $\mathscr{D}_1$ *est un opérateur local.*

(b) Soit $\mathscr{D}$ une dérivation de $N(V)$ et étudions sa restriction à $N_1(V)$. Soit $U \subset V$ un domaine contractile produit ; si $u \in N_1(v)$ est à support $S(u) \subset U$, on a (12.1) et par suite

$$\mathscr{D}u = \sum \{\mathscr{D}v_{(p)}, w^{(p)}\} + \sum \{v_{(p)}, \mathscr{D}w^{(p)}\} ,$$

et l'on voit que $\mathscr{D}u \in N_1(V)$.

Si u est un élément arbitraire de $N_1(V)$, on voit à partir d'un recouvrement fini $\{U_\nu\}$ semblable à celui du a, que $\mathscr{D}u$ est somme finie d'éléments $\mathscr{D}u_\nu$ appartenant à $N_1(V)$, d'après ce qui précède, donc que $\mathscr{D}u \in N_1(V)$. Ainsi *la restriction de $\mathscr{D}$ à $N_1(V)$ est une dérivation $\mathscr{D}_1$ de $N_1(V)$.*

Inversement soit $\mathscr{D}_1$ la dérivation de $N_1(V)$. Si $u \in N(V)$, introduisons $u_1 \in N_1(V)$ telle que pour un domaine U, on ait $u|_U = u_1|_U$. En posant $\mathscr{D}u|_U = \mathscr{D}_1 u_1|_U$ on définit, d'après le caractère local de $\mathscr{D}_1$, une dérivation nécessairement locale $\mathscr{D}$ de $N(V)$, dont la restriction à $N_1(V)$ coïncide avec $\mathscr{D}_1$. Une telle dérivation locale de $N(V)$ est manifestement unique.

Proposition. *Toute dérivation $\mathscr{D}_1$ de $N_1(V)$ est nécessairement locale. L'espace des dérivations de $N_1(V)$ est l'espace des restrictions à $N_1(V)$ des dérivations de $N(V)$. Il est isomorphe à l'espace des dérivations locales de $N(V)$.*

(c) Soit $\mathscr{D}$ une dérivation de $N(V)$. A partir de $\mathscr{D}$ et compte-tenu de (10.5), on peut définir par $\bar{\mathscr{D}}\bar{u} = \overline{\mathscr{D}u}$ une dérivation $\bar{\mathscr{D}}$ de $\bar{N}(V)$ telle que $\bar{\mathscr{D}} \circ \pi = \pi \circ \mathscr{D}$. Inversement, donnons-nous une dérivation $\bar{\mathscr{D}}$ de $\bar{N}(V)$. Cherchons un endomorphisme $\mathscr{D}_1$ de $N_1(V)$ tel que, pour tout $u_1 \in N_1$, on ait $\overline{\mathscr{D}_1 u_1} = \bar{\mathscr{D}}\bar{u}_1$. Un tel endomorphisme est unique: si $d\mathscr{D}_1 u_1 = 0$, on a sur une feuille Σ de v

$$\mathscr{D}_1 u_1|_\Sigma = C = \text{const.}$$

D'après (11.13),

$$\int_\Sigma \mathscr{D}_1 u_1|_\Sigma \, \eta_\Sigma = 0 ,$$

et par suite $\mathscr{D}_1 u_1 = 0$. D'autre part $\bar{\mathscr{D}}$ étant une dérivation de $\bar{N}(V)$, on a de même

$$\mathscr{D}_1\{u_1 v_1\} - \{\mathscr{D}_1 u_1, v_1\} - \{u_1, \mathscr{D}_1 v_1\}|_\Sigma = \text{const.} = 0 ,$$

pour tout $u_1, v_1 \in N_1(V)$. Ainsi $\mathscr{D}_1$, *si elle existe, est une dérivation bien déterminée de $N_1(V)$.*

Soit $U \subset V$ un domaine contractile produit. Si $u \in N_1(V)$ est à support $S(u) \subset U$, on a (12.1) et on peut poser par définition:

$$\mathscr{D}_1 u = \sum_p \{\bar{\mathscr{D}}\bar{v}_{(p)}, \bar{w}^{(p)}\} + \sum_p \{\bar{v}_{(p)}, \bar{\mathscr{D}}\bar{w}^{(p)}\} \in \bar{\mathscr{D}}\bar{u} ,$$

où $\mathscr{D}_1 u \in N_1(V)$.

Soit u un élément arbitraire de $N_1(V)$. Avec le même recouvrement qu'au A, on pose $\mathscr{D}_1 u = \sum_\nu \mathscr{D}_1 u_\nu$ où les $\mathscr{D}_1 u_\nu$ sont définis comme ci-dessus. On a $\mathscr{D}_1 u \in N_1(V)$ et

$$\overline{\mathscr{D}_1 u} = \sum \bar{\mathscr{D}} \bar{u}_\nu = \bar{\mathscr{D}} \bar{u} \ .$$

La dérivation $\mathscr{D}_1$ de $N_1(V)$ ainsi construite est la restriction à $N_1(V)$ d'une dérivation locale $\mathscr{D}$ de $N(V)$. Si $u \in N(V)$, introduisons $u_1 \in N_1(V)$ telle que, pour un domaine U de V, on ait $u|_U = u_1|_U$. On a $\mathscr{D}u|_U = \mathscr{D}_1 u_1|_U$ et, d'après (10.5), $\bar{d}\bar{\mathscr{D}}\bar{u}|_U = \bar{d}\bar{\mathscr{D}}\bar{u}_1|_U$. Ainsi $\overline{\mathscr{D}u} = \bar{\mathscr{D}}\bar{u}$ et $\mathscr{D}$ vérifie

$$\pi \circ \mathscr{D} = \bar{\mathscr{D}} \circ \pi \ . \tag{12.3}$$

La dérivation *locale* $\mathscr{D}$ vérifiant (12.3) est manifestement unique. On a $\mathscr{D} = \mathscr{L}(X) + a_X$, où $X \in L^c(V)$ avec $\mathscr{L}(X)G - a_X G = 0$. On peut poser

$$\mathscr{L}(X)\bar{u} = \overline{\mathscr{L}(X)u} \ , \qquad a_X \bar{u} = \overline{a_X u} \ .$$

Il résulte de (12.3) qu'avec ces notations, toute dérivation $\bar{\mathscr{D}}$ de $\bar{N}(V)$ peut s'écrire

$$\bar{\mathscr{D}} = \mathscr{L}(X) + a_X \qquad (X \in L^c(V)) \ . \tag{12.4}$$

On déduit de (9.7) et de l'isomorphisme entre $\bar{N}(V)$ et $L(V)$ que l'on a

Proposition. *Toute dérivation de $L(V)$ est donnée par $Y \in L(V) \to [X, Y] \in L(V)$, où $X \in L^c(V)$.*

13. Détermination des dérivations de L, L^*, L^c

(a) Etant donné un domaine contractile produit V de W, tout élément Y_V de $L(V)$ peut être prolongé en un vecteur Y de L et, en particulier, en un vecteur de L^*.

Cela posé, soit D une dérivation de L dont nous savons qu'elle est nécessairement *locale*. Donnons-nous un recouvrement $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ de W par des domaines contractiles produits et désignons par l'indice ν les éléments relatifs à U_ν. Si $Y_\nu \in L(U_\nu)$, il existe $Y \in L$ tel que $Y|_{U_\nu} = Y_\nu$. Compte-tenu du caractère local de D, en posant

$$D_\nu Y_\nu = DY|_{U_\nu}$$

on définit une dérivation D_ν de $L(U_\nu)$. Il résulte de la proposition précédente (§ 12) qu'il existe $X_\nu \in L^c(U_\nu)$ tel que D_ν soit défini par

$$D_\nu Y_\nu = [X_\nu, Y_\nu] \ .$$

Si Y est un élément de L, on a donc

$$DY|_{U_\nu} = [X_\nu, Y|_{U_\nu}] \ .$$

Pour $x \in U_\nu \cap U_{\nu'}$, il vient

$$(DY)(x) = [X_\nu, Y|_{U_\nu}](x) = [X_{\nu'}, Y|_{U_{\nu'}}](x) .$$

Pour tout $Y \in L$ et tout $x \in U_\nu \cap U_{\nu'}$, on a donc

$$[X_{\nu'} - X_\nu, Y](x) = 0 . \tag{13.1}$$

De la relation (13.1), on déduit par un raisonnement identique à celui du § 10

$$X_{\nu'}(x) = X_\nu(x) , \qquad x \in U_\nu \cap U_{\nu'} .$$

On voit qu'il existe sur W un champ de vecteurs X unique, élément de L^c, tel que $X_\nu = X|_{U_\nu}$. On en déduit, le même raisonnement étant valable pour L^*.

Théorème 1. *Toute dérivation de* L *(resp.* L^**) est donnée par* $Y \to [X, Y]$, *où* $X \in L^c$.

(b) Soit maintenant D^c une dérivation, nécessairement locale, de L^c. La restriction D de D^c à L définit une application linéaire locale de L dans L^c que nous allons étudier.

Soit V un domaine contractile produit arbitraire de W. Si $Y_V \in L(V)$, il existe $Y \in L$ tel que $Y|_V = Y_V$. Compte-renu du caractère local de D, en posant

$$D_V Y_V = DY|_V , \tag{13.2}$$

on définit une application linéaire D_V de $L(V)$ dans $L^c(V)$ qui, pour tout couple $Y_V, Z_V \in L(V)$ vérifie la relation

$$D_V[Y_V, Z_V] = [D_V Y_V, Z_V] + [Y_V, D_V Z_V] . \tag{13.3}$$

Le second membre appartient nécessairement à $L(V)$, idéal de $L^c(V)$. Ainsi

$$D_V[L(V), L(V)] \subset L(V) .$$

Comme $[L(V), L(V)] = L(V)$ (§ 11, d) on voit que D_V est un endomorphisme de $L(V)$ vérifiant (13.3), c'est-à-dire une dérivation de $L(V)$.

Il en résulte d'après (13.2) que, pour tout $Y \in L$, DY laisse G invariant et est tangent au feuilletage, c'est-à-dire est un élément de L. Ainsi la restriction D de D^c à L est une dérivation de L. D'après le théorème 1, nous pouvons la définir par l'action d'un élément X de L^c.

Pour $Y \in L^c$, $Z \in L$, on a avec nos notations

$$D^c[Y, Z] = [D^c Y, Z] + [Y, D^c Z] ,$$

soit

$$\mathscr{L}(X)[Y, Z] = [D^c Y, Z] + [Y, \mathscr{L}(X)Z] .$$

Or $\mathscr{L}(X)$ définissant une dérivation intérieure de L^c :

$$\mathscr{L}(X)[Y,Z] = [\mathscr{L}(X)Y,Z] + [Y,\mathscr{L}(X)Z] \ .$$

Il en résulte par différence que, pour tout $Z \in L$,

$$[(D^c - \mathscr{L}(X))Y,Z] = 0 \ .$$

On en déduit par un raisonnement encore identique à celui du § 10

$$D^cY = \mathscr{L}(X)Y \ ,$$

et D^c est une dérivation intérieure de L^c. On a

Théorème 2. *Toute dérivation de l'algèbre de Lie L^c est intérieure.*

14. Dérivations de L_G

(a) La détermination des dérivations de L_G peut procéder comme celle des dérivations de L^c. Soit D la restriction à L d'une dérivation D_G de L_G. On établit comme au § 13, b que D est nécessairement une dérivation de L; elle peut donc être définie par l'action d'un élément convenable X de L^c. On établit alors comme précédemment que l'on a nécessairement

$$D_G = \mathscr{L}(X) \ . \tag{14.1}$$

Mais on doit noter que L_G n'est pas un idéal de L^c en général. Pour que $\mathscr{L}(X)$ (avec $X \in L^c$) définisse une dérivation de L_G, il faut et il suffit que ce soit un endomorphisme de L_G, c'est-à-dire que $\mathscr{L}(X)Y \in L_G$ pour tout $Y \in L_G$. Il en résulte

Théorème 3. *Toute dérivation de L_G est donnée par $Y \in L_G \to [X,Y] \in L_G$, où X appartient au normalisateur $\mathscr{N}(L_G; L^c)$ de L_G dans L^c.*

Pour que $X \in L^c$ appartienne à $\mathscr{N}(L_G; L^c)$, il faut et il suffit que l'on ait, avec les notations du § 9

$$\mathscr{L}(Y)a_X = 0 \ , \tag{14.2}$$

pour tout Y de L_G.

(b) Intéressons-nous aux dérivations de $L_G(V)$, où V est un domaine contractile produit de W; (14.2) s'écrit

$$Y^b\partial_b a_X = 0 \ ,$$

et doit être vérifié pour tout $Y^b \in \mathscr{A}(V)$. Il en résulte $a_X = K_X =$ const.

Dans ce cas, $\mathscr{N}(L_G(V); L^c(V))$ est donné par les vecteurs X de V vérifiant

$$\mathscr{L}(X)G = K_XG \ . \tag{14.3}$$

Pour une variété de Poisson (W, G) arbitraire, $\mathscr{N}(L_G; L^c)$ contient l'algèbre de Lie L^c_1 des vecteurs X vérifiant (14.3).

15. Etude des dérivations de l'algèbre de Lie N

En ce qui concerne les dérivations de N, les résultats concernant les variétés canoniques se transposent sans difficultés. Soit $\mathscr{D}$ une dérivation de N; nous avons vu (§ 12, c) qu'il lui correspond une dérivation unique $\bar{\mathscr{D}}$ de $\bar{N}$ telle que $\pi \circ \mathscr{D} = \bar{\mathscr{D}} \circ \pi$.

Soit X l'élément de L^c définissant $\bar{\mathscr{D}}$, a_X l'élément de $\mathscr{A}$ correspondant. Pour la dérivation locale de N donnée par

$$\mathscr{D}' = \mathscr{L}(X) + a_X ,$$

on a $\pi \circ (\mathscr{D} - \mathscr{D}') = 0$, c'est-à-dire $\mathscr{D}u - \mathscr{D}'u \in \mathscr{A}$ pour tout élément u de N. Ainsi, étant donnée une dérivation $\mathscr{D}$ de N, il existe $X \in L^c$ et une application linéaire A *non locale* de N dans $\mathscr{A}$ telle que

$$\mathscr{D} = \mathscr{L}(X) + a_X + A . \tag{15.1}$$

Pour que $\mathscr{D}$ donnée par (15.1) soit une dérivation de N, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour A, c'est-à-dire que pour tout $u, v \in N$

$$A\{u, v\} = \{Au, v\} + \{u, Av\} ,$$

où le second membre est nul. Ainsi il faut et il suffit que A soit nul sur $\{N, N\}$.

Théorème. *Toute dérivation de N peut s'écrire d'une manière unique*

$$\mathscr{D} = \mathscr{L}(X) + a_X + A ,$$

où X est un élément de L^c et où A est une application linéaire non locale de N dans $\mathscr{A}$, nulle sur $\{N, N\}$.

En général $\{N, N\}$ diffère de N (comme le montre l'exemple des variétés symplectiques compactes). Si V est un domaine contractile produit de W, on a $\{N(V), N(V)\} = N(V)$. Par suite toute dérivation de $N(V)$ est de la forme $\mathscr{D} = \mathscr{L}(X) + a_X$, où $X \in L^c(V)$.

V. DEFORMATIONS DE L'ALGEBRE DE LIE N

16. Déformations formelles 1-différentiables de N

(a) Soit $E(N; \lambda)$ l'espace des fonctions formelles en λ à coefficients dans N. Considérons une application bilinéaire alternée $N \times N \to E(N; \lambda)$ qui donne une série formelle en λ:

$$[u, v]_\lambda = \{u, v\} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_r(u, v) , \tag{16.1}$$

où les $C_r(u, v)$ sont des 2-cochaînes sur N qui s'étendent naturellement à $E(N; \lambda)$; (16.1) définit une *déformation formelle* de l'algèbre de Lie N si l'identité de Jacobi est formellement satisfaite

$$S[[u, v]_\lambda, w]_\lambda = 0 , \tag{16.2}$$

où S est la sommation après permutation circulaire. On sait, d'après Gerstenhaber [17], que (16.2) peut être traduit par

$$\partial C_t = E_t \qquad (t = 1, 2, \cdots) , \tag{16.3}$$

où

$$E_t(u, v, w) = \sum_{\substack{r+s=t \\ r,s\geq 1}} SC_s(C_r(u, v), w) . \tag{16.4}$$

Si (16.3) est satisfaite pour $t = 1, \cdots, q-1$, on a $\partial E_q = 0$ et E_q est un 3-cocycle de N. On peut trouver une 2-cochaîne C_q vérifiant (16.3) pour $t = q$ si et seulement si le 3-cocycle E_q est *exact*. La classe définie par E_q est l'obstruction à l'ordre q à la construction d'une déformation formelle de N [17].

On dit que

$$[u, v]_\lambda = \{u, v\} + \lambda C(u, v) \tag{16.5}$$

définit une *déformation infinitésimale* de N si l'identité de Jacobi correspondante est satisfaite à l'ordre 2, c'est-à-dire si C est un 2-cocycle de N.

Une déformation formelle (resp. infinitésimale) de N est 1-*différentiable* si les 2-cochaînes C_r de (16.1) (resp. C de (16.5)) sont supposées 1-différentiables. Il résulte de (16.4) et du lemme suivant que cette restriction fournit un cadre cohérent pour les déformations.

Lemme. *Si C, C' sont des 2-cochaînes 1-différentiables sur N, la 3-cochaîne D définie par*

$$2D(u, v, w) = SC(C'(u, v), w) + SC'(C(u, v), w)$$

est 1-différentiable. De plus si $C' = C = (A, B)$, on a

$$D = (\tfrac{1}{2}[A, A] - B \wedge A, \ -[B, A]) . \tag{16.6}$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle donnée dans [8, § 8]. Si (16.3) est satisfaire pour $t = 1, \cdots, q-1$ par des 2-cochaînes 1-différentiables, il résulte du lemme que E_q est un 3-cocycle 1-différentiable sur N. L'élément de $H^3(N)$ défini par E_q est l'obstruction à l'ordre q à la construction d'une déformation formelle 1-différentiable de N.

(b) Considérons une série formelle en λ

$$T_\lambda = \mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s \,, \tag{16.7}$$

où les T_s sont des opérateurs différentiels d'ordre s sur N, T_λ opère naturellement sur $E(N; \lambda)$. Nous dirons que (16.1) est une *déformation formelle triviale* de N s'il existe (16.7) tel que l'identité

$$T_\lambda[u, v]_\lambda - \{T_\lambda u, T_\lambda v\} = 0 \tag{16.8}$$

soit formellement satisfaite. On déduit du théorème du § 7 par un raisonnement identique à celui de [8, § 9] la cohérence de cette définition.

La *déformation infinitésimale* (16.5) est dite *triviale* s'il existe une 1-cochaîne 1-différentiable T telle que

$$T_\lambda = \mathrm{Id} + \lambda T \tag{16.9}$$

vérifie (16.8) à l'ordre 2. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe T telle que $C = \partial T$, c'est-à-dire que le 2-cocyle C soit exact dans la cohomologie 1-différentiable de N. La trivialité définit sur les déformations infinitésimales une relation d'équivalence et l'on a

Proposition. *L'espace des déformations infinitésimales* 1-*différentiables de* N, *modulo les déformations triviales, est isomorphe à* $H^2(N)$, *soit*

$$P^1(W; G) \oplus H^2(W; G)/Q^2(W; G) \,.$$

17. Déformations formelles et infinitésimales inessentielles

(a) Considérons une série formelle en λ

$$G_\lambda = G + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r G_r \,, \tag{17.1}$$

où les G_r sont des 2-tenseurs de W tels que l'identité

$$[G_\lambda, G_\lambda] = 0 \tag{17.2}$$

soit formellement satisfaite. Il est équivalent de dire que le crochet

$$\{u, v\}_{G_\lambda} = i(G_\lambda)(du \wedge dv) \,, \qquad (u, v \in N) \,, \tag{17.3}$$

satisfait formellement l'identité de Jacobi; (17.3) définit aussi une déformation formelle 1-différentiable de N qui se déduit d'une déformation formelle de la structure géométrique de variété de Poisson; (17.3) est dite une *déformation formelle de Poisson de N*.

Une déformation formelle 1-différentiable $[u, v]_\lambda$ de N est dite *inessentielle* s'il existe G_λ et T_λ tels que

(17.4) $$T_\lambda[u, v]_\lambda - \{T_\lambda u, T_\lambda v\}_{G_\lambda} = 0 .$$

(b) Soit G_1 un 2-cocycle pur sur N et T une 1-cochaîne 1-différentiable tels que pour une déformation infinitésimale 1-différentiable (16.5),

$$G_\lambda = G + \lambda G_1 , \qquad T_\lambda = \mathrm{Id} + \lambda T$$

vérifient (17.4) à l'ordre 2. La déformation infinitésimale (16.5) est alors dite *inessentielle*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que C soit homologue dans $H^2(N)$ au 2-cocycle pur $(G_1, 0)$. L'inessentialité définit sur les déformations infinitésimales une relation d'équivalence et l'on établit comme dans [8, § 10]

Théorème. *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de N, modulo les déformations inessentielles, est isomorphe à $P^1(W; G)$.*

Pour qu'une déformation formelle 1-différentiable de N soit inessentielle, il est nécessaire que la déformation infinitésimale définie par sa partie d'ordre 1 le soit.

(c) Supposons *G exact dans la G-cohomologie*. D'après une remarque du § 5, b, on a

$$H^2(N) = H^1(W; G) \oplus H^2(W; G) ,$$
$$H^3(N) = H^2(W; G) \oplus H^3(W; G) ,$$

où $H^1(W; G)$ est isomorphe à L_G/L^*. On déduit du théorème précédent

Corollaire. *Soit (W, G) une variété de Poisson telle que G soit exact dans la G-cohomologie (variété de Poisson exacte). Si L_G/L^* est $\neq \{0\}$ et si $H^2(W; G) = H^3(W; G) = \{0\}$, l'algèbre de Lie dynamique N admet des déformations formelles 1-différentiables essentielles (et en particulier non triviales)*

VI. VARIETE SYMPLECTIQUE ET DYNAMIQUE ASSOCIEE A UNE SOUS-VARIETE

18. Sous-variété symplectiquement régulière

Dans un article classique [7], Dirac a été amené à étudier la dynamique analytique associée à une sous-variété d'une variété symplectique dans un contexte local et non invariant. Sniatycki [16] et Tulczyjew ont étudié récemment la géométrie globale sous-jacente. Nous nous proposons ici de reprendre cette étude en la précisant et de déterminer la dynamique associée à cette géométrie. Nous préservons autant que possible la terminologie initiale de Dirac.

Soit (W, F) une variété symplectique de dimension $2n$, de 2-forme fondamentale F ; nous posons encore $G = \mu^{-1}(F)$ (notations du § 1, c). Nous nous donnons une sous-variété régulière fermée M de W de codimension h (variété des états permis). Nous nous proposons d'étudier la dynamique analytique correspondant à M et définie à partir d'un hamiltonien $H \in N = C^\infty(W; R)$. Nous analysons d'abord la situation géométrique.

(a) Soit U un domaine contractile de W tel que $M \cap U \neq \emptyset$. On note $\mathscr{C}_U$ (espace des contraintes pour U) le sous-espace de $C^\infty(U; R)$ défini par les fonctions f telle que $f_{M \cap U} = \text{const.}$; C_U est ici l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens $X = \mu_U^{-1}(df)$, définis sur U, associées aux $f \in \mathscr{C}_U$. On peut trouver sur U des systèmes $\{x^a\}$, $a = 1, \cdots, h$, de h fonctions indépendantes de $\mathscr{C}_U$ tels que M soit définie sur U par $x^a = 0$; il existe alors des cartes locales de W de domaine U de la forme $\{x^a, x^i\}$, $i = h + 1, \cdots, 2n$.

Si $f \in \mathscr{C}_U$, on déduit de $df|_{M \cap U} = 0$ que le vecteur $x = \mu_U^{-1}(df) \in C_U$ est tel qu'en $x \in M \cap U$ on a $i(X_x)F|_M = 0$. Par suite X_x appartient à l'espace vectoriel

$$K_x = \{V \in T_x(W); i(V)F|_M (x) = 0\} \qquad (x \in M) .$$

Inversement si $V \in K_x$, on peut trouver, pour un domaine convenable U tel que $x \in M \cap U$, un élément $f \in \mathscr{C}_U$ tel que pour le vecteur correspondant $X_x = V$. Nous sommes conduits à introduire l'ensemble

$$K = \{V \in T(W)|_M; i(V)F|_M = 0\} ,$$

qui admet une structure naturelle de fibré vectoriel sur M et dont la fibre K_x est de dimension h.

On note $\mathscr{B}_U$ (*espace des fonctions de première classe* pour U) le sous-espace de $C^\infty(U; R)$ défini par les fonctions f telles que, pour tout élément g de $\mathscr{C}_U$, on ait $\{f, g\}_{M \cap U} = 0$; B_U est l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens $X = \mu_U^{-1}(df)$ associés aux $f \in \mathscr{B}_U$. La relation de définition de $\mathscr{B}_U$ exprime que, pour tout $X \in \mathscr{B}_U$, $X|_{M \cap U}$ est *tangent à* M.

On note $\mathscr{A}_U$ (*espace des contraintes de première classe* pour U) l'intersection $\mathscr{A}_U = \mathscr{B}_U \cap \mathscr{C}_U$; A_U est l'intersection $B_U \cap C_U$. Le lemme suivant est immédiat.

Lemme. (1°) *Si* $f \in \mathscr{B}_U$, $g \in \mathscr{C}_U$, *alors* $\{f, g\} \in \mathscr{C}_U$.

(2°) *Le crochet de Poisson munit* $\mathscr{B}_U$ *d'une structure d'algèbre de Lie.*

(3°) $\mathscr{A}_U$ *est un idéal de l'algèbre de Lie* $\mathscr{B}_U$.

Le 3° résulte des 1° et 2°. Il suffit d'établir le 2° qui est une conséquence immédiate de l'identité de Jacobi pour les crochets de Poisson, appliquée à deux éléments de $\mathscr{B}_U$ et un élément de $\mathscr{C}_U$. Ainsi B_U est une sous-algèbre de l'algèbre des champs hamiltoniens sur U et A_U est un idéal de B_U.

(b) Nous faisons dans la suite de cette section, l'hypothèse suivante.

Hypothèse (H_1). *La 2-forme fermée* F_M *induite sur* M *par* F *est de rang fixe* $(2n - h - k)$.

$h + k$ (ou $h - k$) est ainsi pair. Pour que $V \in T_x(M)$ annule F_M en $x \in M$, il faut et il suffit que V appartienne à

$$Q_x = \{V \in T_x(M)\,;\, i(V)F|_M\,(x) = 0\} = T_x(M) \cap K_x\ .$$

Il en résulte que sous l'hypothèse (H_1), Q_x a la dimension k et $Q = T(M) \cap K$ est un fibré vectoriel sur M. S'il en est ainsi, nous pouvons introduire le fibré vectoriel

$$P = T(M) + K\ ,$$

dont la fibre est de dimension $(2n - k)$.

Q définit sur M un champ-encore noté Q-de k-plans Q_x. Si X, Y sont des sections locales de Q, on a $i(X)F_M = 0$, $i(Y)F_M = 0$ et on en déduit $i([X, Y])F_M = 0$ puisque F_M est fermée. Il résulte du théorème de Frobenius que le champ Q est intégrable et définit un feuilletage de M en sous-variétés intégrales maximales. Si R est la relation d'équivalence définie sur M par le feuilletage précédent, les points équivalents de M décrivent un même état dynamique (avec "changement de jauge"). Soit $\hat{M} = M/R$ l'espace quotient ; $p\colon M \to \hat{M}$ est la projection correspondante. Nous supposons

Hypothèse (H_2). *La projection p munit $\hat{M}$ d'une structure de variété différentiable de dimension $(2n - h - k)$ telle que p soit elle-même de rang $(2n - h - k)$ (submersion).*

Nous posons [13]

Definition. La sous-variété M de (W, F) est dite symplectiquement régulière si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont satisfaites.

Supposons qu'il en soit ainsi ; si X est une section locale de Q, on a $i(X)F_M = 0$, $dF_M = 0$. Il existe par suite une 2-forme fermée $\hat{F}$ de $\hat{M}$, de rang $(2n - h - k)$, telle que

$$F_M = p^*\hat{F}\ . \tag{18.1}$$

La variété symplectique $(\hat{M}, \hat{F})$ est la *variété des états dynamiques* définis par M.

(c) Si $f \in \mathscr{A}_U$, le vecteur $X = \mu_U^{-1}(df)$ est tel qu'en $x \in M \cap U$, on ait $X_x \in T_x(M) \cap K_x = Q_x$.

Sous l'hypothèse (H_1), on peut trouver une carte locale de W de domaine U de la forme $\{x^a, x^i\} = \{x^a, x^{\lambda}, x^p\}$, $(a = 1, \cdots, h\,;\, i = h + 1, \cdots, 2n\,;\, \bar{\lambda} = h + 1, \cdots, h + k\,;\, p = h + k + 1, \cdots, 2n\,;\, A = 1, \cdots, 2n)$, telle que sur la variété M (qui est définie par $x^a = 0$ dans U), le feuilletage soit défini dans U par $x^p =$ const. Il en résulte

$$F_{\lambda i} = 0\ . \tag{18.2}$$

La matrice $(F_{\lambda a})$ est de rang k puisque $V^{\lambda}F_{\lambda a} = 0$, équivalent à $V^{\lambda}F_{\lambda A} = 0$ implique $V^{\lambda} = 0$.

Pour $\bar{\lambda}$ fixé, considérons une fonction $y^{\bar{\lambda}}$ telle que sur $M \cap U$

$$y^{\bar{\lambda}}(0, x^i) = 0 , \qquad (\partial_a y^{\bar{\lambda}})(0, x^i) = F_{\bar{\lambda}a}(x^i) .$$

Nous pouvons poser par exemple sur U:

$$y^{\bar{\lambda}}(x^a, x^i) = x^a F_{\bar{\lambda}a}(x^i) . \tag{18.3}$$

La fonction $y^{\bar{\lambda}}$ s'annule sur $M \cap U$ et est telle que le champ $X^{(\bar{\lambda})} = \mu_U^{-1}(dy^{\bar{\lambda}})$ est tangent à M sur $M \cap U$ puisqu'il admet les composantes ($X^{(\bar{\lambda})a} = 0$, $X^{(\bar{\lambda})\bar{\lambda}} = 1$, $X^{(\bar{\lambda})\bar{\mu}} = 0$ pour $\bar{\mu} \neq \bar{\lambda}$, $X^{(\bar{\lambda})p} = 0$). Ainsi $y^{\bar{\lambda}}$ appartient à $\mathscr{A}_U$. Pour $x \in M \cap U$

$$\left(\frac{\partial y^{\bar{\lambda}}}{\partial x^a}\right)(x) = F_{\bar{\lambda}a}(x) , \qquad \left(\frac{\partial y^{\bar{\lambda}}}{\partial x^i}\right)(x) = 0 ,$$

où $(\partial y^{\bar{\lambda}}/\partial x^a)$ est de rang k. On peut construire une carte de W, de domaine U au besoin réduit, $\{y^a, x^i\}$ où $\{y^a\}$ est de la forme $\{y^{\bar{\lambda}}, y^{\alpha}\}$, ($\bar{\lambda} = 1, \cdots, k$; $\alpha = k + 1, \cdots, h$). On en déduit en particulier le lemme suivant.

Lemme. *Si $V \in Q_x$ (avec $x \in M \cap U$), on peut trouver une fonction $f \in \mathscr{A}_U$ telle que le champ de vecteurs $X = \mu_U^{-1}(df)$ vérifie $X_x = V$.*

19. Hamiltonien admissible et dynamique correspondant á M

(a) Etant donnée une sous-variété symplectiquement régulière M de (W, F), considérons une fonction $H \in N = C^\infty(W ; R)$ et désignons par $Z = \mu^{-1}(dH)$ le champ hamiltonien correspondant. Nous introduisons la définition suivante [13].

Définition. H est dit un hamiltonien admissible pour M si $Z|_M$ est une section du fibré vectoriel P.

Supposons qu'il en soit ainsi et soit U un domaine de W tel que $M \cap U$ soit $\neq \emptyset$; H étant admissible, Z admet des décompositions de la forme

$$Z|_{M \cap U} = \bar{Z}_{M \cap U} + X_{M \cap U} , \tag{19.1}$$

où $\bar{Z}_{M \cap U}$ et $X_{M \cap U}$ sont des sections locales respectivement de $T(M)$ et de K.

Les décompositions (19.1) nous conduisent au lemme suivant.

Lemme. *Si H est un hamiltonien admissible pour M, $H|_U$ admet des décompositions de la forme*

$$H|_U = \bar{H}_U + f_U , \tag{19.2}$$

où $\bar{H}_U \in \mathscr{B}_U$, $f_U \in \mathscr{C}_U$. Une telle décomposition est définie à $\bar{H}_U \to \bar{H}_U + g_U$, $f_U \to f_U - g_U$ près, où $g_U \in \mathscr{A}_U$. Elle définit par passage aux champs hamiltoniens correspondants et restriction à M une décomposition (19.1). *Inversement toute décomposition* (19.1) *de $Z_{M \cap U}$ peut être ainsi définie.*

En effet partons d'une décomposition (19.1) de $Z|_{M\cap U}$. Introduisons une carte locale $\{x^a, x^i\}$ de W de domaine U telle que $M \cap U$ soit définie par $x^a = 0$, $a = 1, \cdots, h$. Sur $M \cap U$, $\mu_U(X_{M\cap U})$ définit une 1-forme ξ de composantes $\xi_a(x^i)$; considérons sur U la fonction $f_U \in \mathscr{C}_U$ donnée par

$$f_U = \xi_a(x^i)x^a \ .$$

Soit x un point de $M \cap U$. En ce point $x^a(x) = 0$ et l'on a

$$df_U(x) = \xi_a(x^i)dx^a = \xi(x) \ .$$

On en déduit

$$X_{M\cap U}(x) = (\mu_U^{-1}(df_U))(x) \ .$$

Pour cette fonction f_U, posons sur U

$$H|_U = \bar{H}_U + f_U \ , \quad \bar{Z}_U = \mu_U^{-1}(d\bar{H}_U) \ , \quad X_U = \mu_U^{-1}(df_U)$$

de telle sorte que $Z|_U = \bar{Z}_U + X_U$. Sur $M \cap U$, X_U se réduit à $X_{M\cap U}$ et par suite $\bar{Z}_U$ se réduit à $\bar{Z}_{M\cap U}$ *tangent à* M. Nous avons bien mis en évidence une décomposition de $H|_U$ en somme d'un élément $\bar{H}_U$ de $\mathscr{B}_U$ et d'un élément f_U de $\mathscr{C}_U$, décomposition (19.2) qui donne naissance à la décomposition (19.1) donnée de $Z|_{M\cap U}$. Notre lemme est établi.

(b) En dynamique analytique classique, sous sa forme élémentaire locale, un mouvement dans $(U, F|_U)$, soumis aux contraintes $x^a = 0$ et associé à l'hamiltonien $H|_U$, s'obtient à partir d'un hamiltonien sur U de la forme

$$\bar{H}_U = H|_U - \sum_a \lambda_a x^a \ , \tag{19.3}$$

où les λ_a sont les multiplicateurs associés aux x^a. Sur $M \cap U$, on a

$$\bar{Z}_U|_{M\cap U} = \bar{Z}_{M\cap U} = Z|_{M\cap U} - \sum_a \lambda_a \mu_U^{-1}(dx^a) \ ,$$

où les λ_a sont choisis de façon que $\bar{Z}_{M\cap U}$ soit *tangent à* M ; (19.3) fournit une décomposition de $H|_U$ du type (19.2), puisque $\bar{H}_U \in \mathscr{B}_U$, $f_U = \sum \lambda_a x^a \in \mathscr{C}_U$.

(c) Dans le contexte et avec les notations du lemme du a, nous sommes ainsi conduits à nous intéresser aux trajectoires de $\bar{Z}_{M\cap U}$, tangent à M, défini à partir de $\bar{H}_U \in \mathscr{B}_U$; $\bar{Z}_U \in B_U$ est défini modulo un élément de A_U et détermine une classe élément de B_U/A_U. Si Y_U est un élément de A_U, on a d'après le lemme du § 18, a

$$[\bar{Z}_U, Y_U] \in A_U \ . \tag{19.4}$$

Il résulte de (19.4) et de l'étude du § 18, c que les $\bar{Z}_{M\cap U}$ passent au quotient par R et détermine sur $\hat{M}$ un *champ global* $\hat{Z}$.

Soit g_U une fonction locale de W telle que $\{g_U, h_U\}|_M = 0$ pour tout $h_U \in \mathscr{A}_U$. La restriction à M d'une telle fonction est, d'après § 18, c, l'image réciproque par p d'une fonction locale de $\hat{M}$. Il en est en particulier ainsi pour tout élément de $\mathscr{B}_U$, donc pour $\bar{H}_U$. Il existe une fonction locale $\hat{H}_U$ de $\hat{M}$ telle que $\bar{H}_U|_M = p^*\hat{H}_U$ et les $d\hat{H}_U$ définissent sur $\hat{M}$ une 1-forme fermée globale φ telle que $\hat{\mu}^{-1}(\varphi) = \hat{Z}$, où $\hat{\mu}$ est l'isomorphisme défini par la structure symplectique de $(\hat{M}, \hat{F})$. Nous énonçons

Théorème. *Soit M une sous-variété symplectiquement régulière de la variété symplectique (W, F) et soit H un hamiltonien admissible pour M. Le champ hamiltonien $Z = \mu^{-1}(dH)$ détermine sur la variété $(\hat{M}, \hat{F})$ des états dynamiques un champ global unique $\hat{Z}$, localement hamiltonien dont les trajectoires définissent le mouvement dans la variété des états dynamiques; Z est dit le champ dynamique.*

20. Sous-variété de seconde classe et crochets de Dirac

Une sous-variété M de la variété symplectique (W, F) est dite de *première classe* si $Q = K$, c'est-à-dire si $k = h$. Elle est dite de *seconde classe* si Q est de fibre nulle, c'est-à-dire si $k = 0$; h est alors pair et nous posons $h = 2h'$. Si M est de seconde classe, la forme F_M induite par F sur M est de rang $2(n - h')$ et la variété (M, F_M) est *symplectique*.

(a) Sniatycki [16] a établi substantiellement la proposition suivante.

Proposition. *Soit M une sous-variété symplectiquement régulière de (W, F). Il existe des sous-variétés symplectiques $(\tilde{W}, \tilde{F})$ de seconde classe de (W, F) telles que M soit une sous-variété de première classe de $(\tilde{W}, \tilde{F})$,*

Nous affectons d'un $\sim$ les éléments relatifs à $\tilde{W}$; $\tilde{F}$ est ici la 2-forme induite par F sur $\tilde{W}$ et $\tilde{G} = \tilde{\mu}^{-1}(\tilde{F})$.

La variété symplectique (W, F) et la sous-variété M symplectiquement régulière étant données, nous allons montrer que, malgré l'arbitraire sur le choix de $\tilde{W}$, on peut utiliser la variété $(\tilde{W}, \tilde{F})$ comme intermédiaire pour obtenir la dynamique relative à M donnée par le théorème du § 19.

En effet considérons $\tilde{W}$ comme sous-variété de (W, F) au sens du § 18; comme $k = 0$, il n'y a pas de passage au quotient et $(\tilde{W}, \tilde{F})$ est sa propre variété des états dynamiques. Un hamiltonien H arbitraire de (W, F) est toujours admissible pour $\tilde{W}$. On peut écrire d'une manière et d'une seule

$$Z|_{\tilde{W}} = \tilde{Z} + \tilde{X}\ , \tag{20.1}$$

où, pour $\tilde{x} \in \tilde{W}$, on a $\tilde{Z}(\tilde{x}) \in T_{\tilde{x}}(\tilde{W})$, $\tilde{X}(\tilde{x}) \in \tilde{K}_{\tilde{x}}$.

Soit U un domaine de W tel que $\tilde{W} \cap U \neq \emptyset$; $\tilde{\mathscr{A}}_U$ se compose de constantes. Nous notons $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ une carte locale de W de domaine U telle que $\tilde{W}$ soit définie par $x^a = 0$. La 2-forme $\tilde{F}$, restriction de F à $\tilde{W}$ admet sur $\tilde{W} \cap U$ les composantes $\tilde{F}_{ij} = F_{ij}$, $(i, j = h + 1, \cdots, 2n)$. D'après le raisonnement du § 19, $H|_U$ admet une décomposition de la forme (19.2), relativement à $\tilde{W}$, soit

$$H|_U = \bar{H}_U + \tilde{f}_U , \tag{20.2}$$

où les fonctions $\bar{H}_U \in \mathscr{B}_U$, $\tilde{f}_U \in \tilde{\mathscr{C}}_U$ sont définies à une constante additive près. Les vecteurs bien définis sur U

$$\bar{Z}_U = \mu^{-1}(d\bar{H}_U) , \qquad \tilde{X}_U = p^{-1}(d\tilde{f}_U) ,$$

se réduisent sur $\tilde{W} \cap U$ respectivement à $\tilde{Z}|_U$ et $\tilde{X}|_U$. D'après la définition de $\bar{Z}_U$, $\mu(\tilde{Z})|_U$ admet en $\tilde{x} \in \tilde{W} \cap U$ les composantes

$$\mu(\tilde{Z})_A(\tilde{x}) = (\tilde{Z}^j F_{Aj})(\tilde{x}) = (\partial_A \bar{H}_U)(\tilde{x}) .$$

Il en résulte que $\tilde{\mu}(\tilde{Z})|_U$ admet en $\tilde{x}$ les composantes

$$\tilde{\mu}(\tilde{Z})_i(\tilde{x}) = (\tilde{Z}^j \tilde{F}_{ij})(\tilde{x}) = (\tilde{Z}^j F_{ij})\tilde{x} = (\partial_i \bar{H}_U)(\tilde{x}) = (\partial_i H)(\tilde{x}) .$$

Si $\tilde{H}$ est la restriction de H à $\tilde{W}$, on obtient ainsi sur $\tilde{W}$

$$\tilde{Z} = \tilde{\mu}^{-1}(d\tilde{H}) . \tag{20.3}$$

Le champ hamiltonien $\tilde{Z}$ est le champ dynamique pour $(\tilde{W}, \tilde{F})$ considérée comme variété des états.

(b) Cela posé, revenons à M, sous-variété symplectiquement régulière de (W, F) et sous-variété de première classe de $(\tilde{W}, \tilde{F})$. La forme F_M peut être considérée comme induite sur M par $\tilde{F}$ et M est symplectiquement régulière dans $(\tilde{W}, \tilde{F})$. Il résulte de plus de l'étude de $\tilde{Z}$ au *a* que

$$Z|_M = \tilde{Z}|_M + Y . \tag{20.4}$$

où $Y(x) \in K_x$ pour tout x de M. On en déduit que pour que l'hamiltonien H de (W, F) soit admissible pour M, il faut et il suffit que sa restriction $\tilde{H}$ à $\tilde{W}$ soit admissible pour M considérée comme sous-variété de $(\tilde{W}, \tilde{F})$. D'autre part, d'après (20.4), le champ dynamique $\hat{Z}$ sur $\hat{M}$ peut être déduit de $\tilde{Z}$ conformément au § 19. Nous énonçons

Théorème. *Sous les hypothèses du théorème du* § 19, *soit* $(\tilde{W}, \tilde{F})$ *une sous-variété de seconde classe de* (W, F) *telle que* M *soit une sous-variété de première classe de* $(\tilde{W}, \tilde{F})$. *La variété* $(\hat{M}, \hat{F})$ *des états dynamiques peut être définie en considérant* M *comme sous-variété symplectiquement régulière de* $(\tilde{W}, \tilde{F})$. *Si* H *est un hamiltonien sur* (W, F) *admissible pour* M, *le champ dynamique* $\hat{Z}$ *de* $\hat{M}$ *peut être défini à partir de la restriction* $\tilde{H}$ *de* H *à* $\tilde{W}$. *Ainsi, pour tout choix de* $\tilde{W}$, *la dynamique associée à* M, *sous-variété de* $(\tilde{W}, \tilde{F})$, *et à l'hamiltonien* $\tilde{H}$ *coïncide avec la dynamique associée à* M, *sous-variété de* (W, F), *et à l'hamiltonien* H.

(c) L'étude précédente montre l'intérêt des sous-variétés de seconde classe qui déterminent en fait l'essentiel de la dynamique envisagée, puisque l'introduction des contraintes de première classe ne se traduit que par un passage au quotient.

Dans la suite, nous nous limit ons à l'étude de sous-variété de *seconde classe* $(\tilde{W}, \tilde{F})$, de codimension $h = 2h'$, de la variété symplectique donnée (W, F), de dimension $2n$, de 2-tenseur fondamental $G = \mu^{-1}(F)$. Nous adoptons pour $\tilde{W}$ des notations identiques à celles relatives à M. Il vient, $\tilde{W}$ étant de seconde classe

$$T(W)|_{\tilde{W}} = T(\tilde{W}) \oplus K \ . \tag{20.5}$$

Nous notons $\Pi: V \in T(W)|_{\tilde{W}} \to \tilde{V} \in T(\tilde{W})$ le projecteur défini par la décomposition (20.5). Ce projecteur s'étend naturellement aux 2-tenseurs. Nous montrerons que le 2-tenseur ΠG de $\tilde{W}$ n'est autre que le 2-tenseur fondamental $\tilde{G} = \tilde{\mu}^{-1}(\tilde{F})$ de la variété symplectique $(\tilde{W}, \tilde{F})$; il en résulte que ce qu'on nomme *crochet de Dirac* est directement défini à partir du crochet ordinaire de Poisson relatif à $(\tilde{W}, \tilde{F})$.

21. Une étude locale

(a) U étant un domaine contractile de (W, F), considérons la variété symplectique $(U, F|_U)$ que nous notons dans ce paragraphe, par abus de notation, (U, F). Soit $\tilde{U}$ une sous-variété de *seconde classe* de (U, F) définie par $x^a = 0$, où les h fonctions de contraintes $x^a \in C^\infty(U; R)$, $a = 1, \cdots, h$, sont indépendantes. Nous introduisons sur U les h vecteurs

$$P^{(a)} = u^{-1}(dx^a) \ . \tag{21.1}$$

Il existe sur U des cartes $\{x^A\}$ de la forme $\{x^a, x^i\}$ (avec $A, B, \cdots = 1, \cdots, 2n; a, b, \cdots = 1, \cdots, h; i, j, \cdots = h + 1, \cdots, 2n$). Dans une telle carte, les $P^{(a)}$ ont pour composantes

$$P^{(a)B} = G^{aB} = \{x^a, x^B\} \ .$$

En particulier,

$$P^{(a)b} = G^{ab} = \{x^a, x^b\} \ . \tag{21.2}$$

Pour $x \in \tilde{U}$, les $P^{(a)}(x)$ définissent une base de l'espace K_x relatif à $\tilde{U}$. Pour $V \in T_x(U)$, on peut, d'après (20.5), écrire d'une manière unique

$$V = \tilde{V} + \sum_a \lambda_a P^{(a)}(x) \ , \tag{21.3}$$

oú $\tilde{V} \in T_x(\tilde{U})$, c'est-à-dire admet des composantes $\{\tilde{V}^b = 0, \tilde{V}^i\}$ dans la carte envisagée. Il en résulte que pour tout ensemble $\{V^b\}$, le système de h équations linéaires aux h inconnues λ_a

$$\sum_a \lambda_a P^{(a)b}(x) = V^b \tag{21.4}$$

admet une solution unique. Ainsi la matrice $h \times h$ définie par (21.2) est *inversible* sur $\tilde{U}$, donc *sur* U, au besoin réduit. L'inversibilité sur $\tilde{U}$ de la matrice $(\{x^a, x^b\})$ traduit ainsi le caractère de sous-variété de seconde classe de $\tilde{U}$.

(b) Nous sommes conduits à considérer *le feuilletage de* U de codimension h défini par $x^a = \text{const.}, a = 1, \cdots, h$. Il résulte des considérations précédentes que la feuille $\tilde{U}(x)$ passant par $x \in U$ de ce feuilletage est une sous-variété de seconde classe de (U, F). C'est à ce feuilletage que nous nous intéressons maintenant; le même feuilletage peut être défini, en substituant à l'ensemble $\{x^a\}$ des fonctions de contraintes, un autre ensemble $\{x^{b'} = x^{b'}(x^a)\}$ de fonctions de contraintes indépendantes, à jacobien non nul.

Soit $C = (C_{ab})$ la matrice inverse de (21.2). On a

$$C_{ac}G^{bc} = C_{ac}\{x^b, x^c\} = \delta_a^b \, . \tag{21.5}$$

Si X est un champ de vecteurs sur U, on écrit d'une manière et d'une seule

$$X = \tilde{X} + \sum_a \lambda_a P^{(a)} \, ,$$

où $\tilde{X}$ est tangent au feuilletage, $\sum \lambda_a P^{(a)}$ est une section du fibré $\mathscr{K}$ sur U, défini par les différents K et où

$$\lambda_a = C_{ab} i(X) dx^b \, .$$

Sur U est défini le projecteur $\Pi : X \to \tilde{X}$ *ne dépendant que du feuilletage*, qui s'exprime par

$$\Pi : X \to \tilde{X} = X - C_{ab}P^{(a)} \cdot (i(X)dx^b) \, , \qquad \text{(sommation en } a, b) \, .$$

Dans une carte locale $\{x^A\}$ *arbitraire*, Π admet pour composantes

$$\Pi_C^A = \delta_C^A - C_{ab}P^{(a)A}\partial_C x^b \, .$$

Evaluons le 2-tenseur ΠG tangent aux feuilles et qui ne dépend, d'après sa définition, que du feuilletage. Il vient dans la carte $\{x^A\}$

$$(\Pi G)^{AB} = (\delta_C^A - C_{ab}P^{(a)A}\partial_C x^b)(\delta_D^B - C_{cd}P^{(c)B}\partial_D x^d)G^{CD} \, .$$

En développant et simplifiant, compte-tenu de (21.5), on obtient

$$(\Pi G)^{AB} = G^{AB} - C_{ab}P^{(a)A}P^{(b)B} \, . \tag{21.6}$$

(21.6) est, aux notations près, la formule écrite par Dirac donnant le 2-tenseur définissant son crochet. Si nous posons

$$\Gamma = \tfrac{1}{2} C_{ab} P^{(a)} \wedge P^{(b)} . \tag{21.7}$$

Il vient

$$\Pi G = G - \Gamma , \tag{21.8}$$

où Γ, comme ΠG ne dépend que du feuilletage.

(c) Soit $\tilde{F}$ la 2-forme induite par F sur une feuille $\tilde{U}$. Dans une carte locale adaptée au feuilletage, ΠG vérifie

$$(\Pi G)^{aB} = 0 , \tag{21.9}$$

et l'on a

$$(\Pi G)^{ik} \tilde{F}_{jk} = (G^{ik} - C_{ab} P^{(a)i} P^{(b)k}) F_{jk} ,$$

soit

$$(\Pi G)^{ib} \tilde{F}_{jk} = G^{iA} F_{jA} - G^{ia} F_{ja} - C_{ab} G^{ai} (G^{bA} F_{jA} - G^{bc} F_{jc}) .$$

Il en résulte

$$(\Pi G)^{ik} \tilde{F}_{jk} = \delta^i_j - G^{ia} F_{ja} + G^{ia} F_{ja} ,$$

c'est-à-dire

$$(\Pi G^{ik}) \tilde{F}_{jk} = \delta^i_j . \tag{21,10}$$

On a montré que la restriction de ΠG à chaque feuille coïncide avec le 2-tenseur fondamental $\tilde{\mu}^{-1}(\tilde{F})$ de la feuille. Nous noterons dans la suite $\tilde{G}$ le 2-tenseur ΠG de U. Il résulte des considérations précédentes que sur U

$$[\tilde{G}, \tilde{G}] = 0 , \tag{21.11}$$

et que pour toute fonction de contrainte

$$[\tilde{G}, x^a] = 0 . \tag{21.12}$$

Ainsi $\tilde{G}$ définit sur U une *structure de Poisson*, dont le feuilletage associé est le feuilletage donné de U en sous-variétés de seconde classe. Le crochet de Dirac n'est autre que le crochet défini par cette structure : si $u, v \in C^\infty(U ; R)$, le crochet de Dirac $\{u, v\}_D$ est donné par

$$\{u, v\}_D = i(\tilde{G})(du \wedge dv) .$$

(d) L'étude précédente entraîne, avec les notations du § 20, c.

Proposition. *Si $\tilde{W}$ est une sous-variété de seconde classe de la variété symplectique (W, F), le 2 tenseur ΠG de $\tilde{W}$ n'est autre que le 2-tenseur fondamental de la variété symplectique $(\tilde{W}, \tilde{F})$. Son expression locale est donnée par* (21.6) *ou* (21.8) *et ne dépend que de $\tilde{W}$.*

22. Cas d'un feuilletage donné en sous-variété de seconde classe

(a) Soit (W, G) une variété symplectique de dimension $2n$. Supposons donné un feuilletage de W de codimension $h = 2h'$ *en sous-variétés $\tilde{W}(x)$ de seconde classe*. Du raisonnement du § 21, il résulte que G et le feuilletage définissent sur W un 2-tenseur $\tilde{G} = G - \Gamma$ de rang $(2n - 2h')$, vérifiant

$$[\tilde{G}, \tilde{G}] = [G - \Gamma, G - \Gamma] = 0 , \tag{22.1}$$

c'est-à-dire une *structure de Poisson* dont le feuilletage associé est le feuilletage de W en sous-variétés de seconde classe donné ; (22.1) peut s'écrire

$$2[G, \Gamma] = [\Gamma, \Gamma] . \tag{22.2}$$

Introduisons le 2-tenseur

$$G_\lambda = G - \lambda\Gamma ,$$

qui se réduit à G pour $\lambda = 0$, à $\tilde{G}$ pour $\lambda = 1$. Si l'on a

$$[G_\lambda, G_\lambda] = 0 , \tag{22.3}$$

le crochet $\{u, v\}_{G_\lambda} = i(G_\lambda)(du \wedge dv)$ définit une *déformation rigoureuse* (inessentielle) de l'algèbre de Lie dynamique de la variété symplectique (W, G) en l'algèbre de Lie dynamique de la variété de Poisson $(W, \tilde{G})$. Pour que (22.3) soit satisfaite, il faut et il suffit que

$$[G, \Gamma] = 0 , \qquad [\Gamma, \Gamma] = 0 . \tag{22.4}$$

D'après (22.2) l'une de ces conditions entraîne l'autre ; en particulier il faut et il suffit que Γ soit un 2-cocycle.

Le § 18, a nous conduit à considérer le $2h'$-plan K_x défini en chaque point x de W par

$$K_x = \{V \in T_x(W) ; i(V)F|_{\tilde{W}(x)}(x) = 0\} .$$

Nous avons ainsi défini sur la variété W un champ K de $2h'$-plans. Nous allons établir

Théorème. *Pour que $G_\lambda = (G - \lambda\Gamma)$ définisse une déformation rigoureuse du crochet de Poisson en le crochet de Dirac, il faut et il suffit que le champ K soit un champ intégrable*

En effet supposons le champ K intégrable. Sur un domaine U de W, on peut définir les feuilles du feuilletage par $x^a = \text{const.}$, $a, b, c, \cdots = 1, \cdots, 2h'$, les intégrales maximales de K par $x^i = \text{const.}$ $(i = 2h' + 1, \cdots, 2n)$, $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ définissant une carte locale de domaine U. Le champ K restreint à U est engendré par les champs de vecteurs $P^{(a)}$ et l'on a par suite

$$P^{(a)i} = G^{ai} = 0 \ .$$

Le 2-tenseur Γ a pour composantes

$$\Gamma^{cd} = C_{ab}G^{ac}G^{bd} = G^{cd} \ .$$

La relation $[G, G] = 0$ s'écrit sur U

$$SG^{da}\partial_d G^{bc} + SG^{ia}\partial_i G^{bc} = 0 \ ,$$

oú S est la sommation après permutation circulaire sur (a, b, c), soit

$$S\Gamma^{da}\partial_d \Gamma^{bc} = 0 \ ,$$

ce qui exprime que $[\Gamma, \Gamma] = 0$ et (22.4) est satisfaite.

Inversement, supposons (22.4) satisfaite. Il est équivalent, d'après (1.8), de dire que la 2-forme

$$\Omega = \mu(\Gamma)$$

est *fermée*.

Introduisons une carte locale $\{x^a, x^i\}$ de domaine U telle que les feuilles du feuilletage soient définis par $x^a = \text{const.}$, $(a, b, \cdots = 1, \cdots, 2h' ; i = 2h' + 1, \cdots, 2n)$. On a sur U

$$\Omega|_U = \tfrac{1}{2}C_{ab}dx^a \wedge dx^b ;$$

Ω étant fermée, il vient $\partial_i C_{ab} = 0$ et par suite, d'après (21.5), $\partial_i G^{ab} = 0$, soit

$$\partial_i\{x^a, x^b\} = 0 \ . \tag{22.5}$$

D'autre part, pour que K restreint à U soit intégrable, il faut et il suffit d'après le théorème de Frobenius que $[P^{(a)}, P^{(b)}]$ soit une combinaison linéaire des $P^{(c)}$, c'est-à-dire, par image par μ, que

$$d\{i(G)(dx^a \wedge dx^b)\} = d\{x^a, x^b\}$$

soit une combinaison linéaire des dx^c, ce qui est équivalent à (22.5). Notre théorème est établi.

23. Mise en évidence d'un feuilletage local adapté aux déformations

Reprenons la situation du § 21, a: U étant un domaine contractile de W, considérons la variété symplectique induite sur U par la 2-forme, variété que nous notons (U, F) et introduisons dans (U, F) *une sous-variété* $\tilde{U}$ *de seconde classe* définie par $x^a = 0$, $(a, b, \cdots = 1, \cdots, 2h')$. Nous nous proposons de définir sur U un feuilletage de codimension $2h'$ conduisant à des déformations rigoureuses au sens du § 22 et tel que $\tilde{U}$ soit une feuille de ce feuilletage.

(a) Soit $x^1 \in C^\infty(U\,; R)$ une fonction de contrainte de $\tilde{U}$, nulle sur $\tilde{U}$. Nous posons

$$P^{(1)} = \mu^{-1}(dx^1) .$$

Introduisons une hypersurface Σ_1 de U, contenant $\tilde{U}$ et transverse à $P^{(1)}$. Nous considérons la fonction f, solution de

$$\mathscr{L}(P^{(1)})f = i(P^{(1)})df = 1 \tag{23.1}$$

nulle sur Σ_1; cette fonction est indépendante de x^1. Nous pouvons poser $x^{\bar{1}} = f$ et

$$P^{(\bar{1})} = \mu^{-1}(dx^{\bar{1}}) .$$

Nous notons S_1 la sous-variété de U de codimension 2 définie par $x^1 = x^{\bar{1}} = 0$; S_1 contient $\tilde{U}$.

Soit K_1 le champ de 2-plans défini sur U par les deux champs de vecteurs indépendants $P^{(1)}$ et $P^{(\bar{1})}$. Comme (23.1) se traduit par $\{x^1, x^{\bar{1}}\} = 1$, on a

$$[P^{(1)}, P^{(\bar{1})}] = 0 . \tag{23.2}$$

Le champ K_1 est donc *intégrable* et l'on peut trouver sur U une carte $\{x^1, x^{\bar{1}}, x^{i_1}\}$ telle que les intégrales du champ K_1 soient définies par $x^{i_1} = \text{const}$. On a dans cette carte

$$\begin{gathered} P^{(1)1} = G^{11} = 0 , \quad P^{(1)\bar{1}} = G^{1\bar{1}} = 1 , \quad P^{(\bar{1})\bar{1}} = G^{\bar{1}\bar{1}} = 0 , \\ P^{(1)i_1} = G^{1i_1} = 0 , \qquad P^{(\bar{1})i_1} = G^{\bar{1}i_1} = 0 . \end{gathered} \tag{23.3}$$

Introduisons sur U le 2-tenseur

$$\Gamma_1 = P^{(1)} \wedge P^{(\bar{1})} . \tag{23.4}$$

Ce 2-tenseur vérifie par construction, d'après le § 22,

$$[G, \Gamma_1] = 0 , \qquad [\Gamma_1, \Gamma_1] = 0 . \tag{23.5}$$

On vérifie immédiatement qu'on a pour la 2-forme F, dans la carte envisagée:

$$F_{1\bar{1}} = 1 \ , \qquad F_{1i_1} = F_{\bar{1}i_1} = 0 \ .$$

La forme F s'écrit par suite dans cette carte:

$$F = dx^1 \wedge dx^{\bar{1}} + \tfrac{1}{2} F_{i_1 j_1} dx^{i_1} \wedge dx^{j_1} \ . \tag{23.6}$$

On a ainsi mis en évidence un feuilletage de U de codimension 2, défini par $x^1 = \text{const.}$, $x^{\bar{1}} = \text{const.}$, admettant S_1 (contenant $\tilde{U}$) comme feuille et vérifiant la condition du théorème du § 22.

(b) Choisissons une fonction x^2 parmi les x^{i_1} et posons

$$P^{(2)} = \mu^{-1}(dx^2) \ .$$

Introduisons une hypersurface Σ_{21} de S_1, contenant $\tilde{U}$ et transverse à $P^{(2)}$, d'équation $h(x^{i_1}) = 0$. On en déduit une hypersurface Σ_2 de U, contenant $\tilde{U}$, définie dans la carte $\{x^1, x^{\bar{1}}, x^{i_1}\}$ par l'équation $h(x^{i_1}) = 0$, x^1 et $x^{\bar{1}}$ prenant des valeurs arbitraires. Nous considérons la fonction g solution de

$$\mathscr{L}(P^{(2)})g = i(P^{(2)})dg = 1 \tag{23.7}$$

nulle sur Σ_2 et vérifiant par suite sur Σ_2

$$\partial_1 g|_{\Sigma_2} = 0 \ , \qquad \partial_{\bar{1}} g|_{\Sigma_2} = 0 \ . \tag{23.8}$$

On a $\{x^1, x^2\} = G^{12} = 0$ et par suite, $[P^{(1)}, P^{(2)}] = 0$. En faisant opérer $\mathscr{L}(P^{(1)})$ sur (23.7) il vient

$$\mathscr{L}(P^{(2)})(\mathscr{L}(P^{(1)})g) = 0 \ , \tag{23.9}$$

où, dans la carte envisagée, $\mathscr{L}(P^{(1)}) = \partial_{\bar{1}} g$. Il résulte de (23.9) et (23.8) que l'on a sur U pour notre carte

$$\mathscr{L}(P^{(1)})g = \partial_{\bar{1}} g = 0 \ .$$

On a de même

$$\mathscr{L}(P^{(\bar{1})})g = -\partial_1 g = 0 \ .$$

Ainsi la fonction g ne dépend que des x^{i_1}; elle est de plus indépendante de x^2. Si nous posons $x^{\bar{2}} = g$, (23.7) se traduit par

$$\{x^2, x^{\bar{2}}\} = 1 \ .$$

Nous posons

$$P^{(\bar{2})} = \mu^{-1}(dx^{\bar{2}}) \ ,$$

et nous notons S_2 la sous-variété de U de codimension 4 définie par $x^1 = x^{\bar{1}} = x^2 = x^{\bar{2}} = 0$; S_2 contient $\tilde{U}$.

Soit K_2 le champ de 4-plans défini sur U par les quatre champs de vecteurs indépendants $P^{(1)}, P^{(\bar{1})}, P^{(2)}, P^{(\bar{2})}$. On vérifie immédiatement que

$$[P^{(a)}, P^{(b)}] = 0 , \qquad (a, b = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}) .$$

Le champ K_2 est donc *intégrable* et on peut trouver sur U une carte $\{x^1, x^{\bar{1}}, x^2, x^{\bar{2}}, x^{i_2}\}$ telle que les intégrales du champ K_2 soient définies par $x^{i_2} = \text{const.}$; les seules composantes non nulles des quatre vecteurs envisagés sont alors:

$$P^{(1)\bar{1}} = 1 , \quad P^{(\bar{1})1} = -1 , \qquad P^{(2)\bar{2}} = 1 , \qquad P^{(\bar{2})2} = -1 .$$

La forme F s'écrit dans la carte envisagée:

$$F = dx^1 \wedge dx^{\bar{1}} + dx^2 \wedge dx^{\bar{2}} + \tfrac{1}{2} F_{i_2 j_2} dx^{i_2} \wedge dx^{j_2} . \tag{23.10}$$

Introduisons sur U le 2-tenseur

$$\Gamma_2 = P^{(2)} \wedge P^{(\bar{2})} . \tag{23.11}$$

Ce 2-tenseur vérifie par construction

$$[G, \Gamma_2] = 0 , \qquad [\Gamma_2, \Gamma_2] = 0 , \tag{23.12}$$

et de plus

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = 0 . \tag{23.13}$$

Il en résulte que, pour toute valeur des paramètres λ_1, λ_2, le 2-tenseur

$$G_{\lambda_1 \lambda_2} = G - \lambda_1 \Gamma_1 - \lambda_2 \Gamma_2 \tag{23.14}$$

vérifie

$$[G_{\lambda_1 \lambda_2}, G_{\lambda_1 \lambda_2}] = 0 . \tag{23.15}$$

On a ainsi mis en évidence un feuilletage de U de codimension 4, défini par $x^1 = \text{const.}$, $x^{\bar{1}} = \text{const.}$, $x^2 = \text{const.}$, $x^{\bar{2}} = \text{const.}$, admettant S_2 (contenant $\tilde{U}$) comme feuille et tel que $G_{\lambda_1 \lambda_2}$ satisfasse (23.15).

(c) En poursuivant le processus, on définit sur U une carte $\{x^1, x^{\bar{1}}, \cdots, x^{h'}, x^{\bar{h}'}, x^i\}$ jouissant de la propriété suivante: si nous posons

$$P^{(\lambda)} = \mu^{-1}(dx^{\lambda}) , \quad P^{(\bar{\lambda})} = \mu^{-1}(dx^{\bar{\lambda}}) , \qquad (\lambda = 1, \cdots, h') ,$$

et

$$\Gamma_\lambda = P^{(\lambda)} \wedge P^{(\bar{\lambda})} ,$$

le 2-tenseur

$$G_{\lambda_1\cdots\lambda_{h'}} = G - \lambda_1 \Gamma^1 - \cdots - \lambda_{h'} \Gamma_{h'}$$

vérifie

$$[G_{\lambda_1\cdots\lambda_{h'}}, G_{\lambda_1\cdots\lambda_{h'}}] = 0 \,, \tag{23.16}$$

et le feuilletage de U, de codimension $2h'$, défini par $x^\lambda =$ const., $x^{\bar\lambda} =$ const. ($\lambda = 1, \cdots, h'$) admet $\tilde U$ comme feuille. Pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{h'} = 1$, la restriction de $G_{\lambda_1\cdots\lambda_{h'}}$, à $\tilde U$ définit la structure symplectique de cette sous-variété de seconde classe. Nous avons

Théorème. *Etant donnée, dans la variété symplectique (U, F) une sous-variété $\tilde U$ de seconde classe, on peut définir un feuilletage de U, de codimension $2h'$, en sous-variétés de seconde classe, admettant $\tilde U$ pour feuille, tel que si $\tilde G = G - \Gamma$ définit la structure de Poisson correspondante de U, le 2-tenseur $G_\lambda = G - \lambda\Gamma$ vérifie pour tout λ*

$$[G_\lambda, G_\lambda] = 0 \,.$$

On a même montré qu'il existe sur U un 2-tenseur $G_{\lambda_1\cdots\lambda_{h'}}$ dépendant linéairement de h' paramètres, vérifiant (23.16) et se réduisant à G_λ pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{h'} = \lambda$. On peut donc relier G à $\tilde G$ par une famille linéaire à h' paramètres de structures de Poisson.

References

[1] R. Abraham & J. Marsden, *Foundations of mechanics,* Benjamin, New York, 1967.

[2] V. I. Arnold, *One-dimensional cohomologies of Lie algebras of nondivergent vector fields and rotation numbers of dynamic systems,* Functional Anal. Appl. **3** (1969) 319–321.

[3] A. Avez & A. Lichnerowicz, *Dérivations et premier groupe de cohomologie pour des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **275** (1972) 113–118.

[4] A. Avez, A. Lichnerowicz & A. Diaz-Miranda, *Sur l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique,* J. Differential Geometry **9** (1974) 1–40.

[5] E. Calabi, *On the group of automorphisms of a symplectic manifold,* Problems in Analysis, A sympos. in honor of S. Bochner, Princeton University Press, Princeton, 1970, 1–26.

[6] C. Chevalley & S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948) 85–124.

[7] P. A. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics,* Canad. J. Math. **2** (1959) 129–148; *Lectures on quantum mechanics,* Yeshiva University, New York, 1964.

[8] M. Flato, A. Lichnerowicz & D. Sternheimer, *Déformations 1-différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **279** (1974) 877–881; *Déformations 1-différentiables des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact,* Compositio Math. **31** (1975) 47–82.

[9] ——, *Algèbres de Lie attachées à une variété canonique,* J. Math. Pures Appl. **54** (1975) 445–480.

[10] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique,* Hermann, Paris, 1969.

[11] A. Lichnerowicz, *Cohomogie 1-différentiable d'algèbres de Lie associées à une variété symplectique,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **277** (1973) 215–219; *Cohomologie 1-différentiable des algèbres attachées à une variété symplectique ou de contact,* J. Math. Pures Appl. **53** (1974) 459–484.

[12] ——, *Variétés canoniques et transformations canoniques,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **280** (1975) 37–40; *Variétés symplectiques, variétés canoniques et systemes dynamiques,* Topics in differential geometry, Academic Press, New York, 1976, 51–84; *Cohomogie 1-différentiable et déformations de l'algèbre de Lie dynamique d'une variété canonique,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **280** (1975) 1217–1220.

[13] ——, *Variété symplectique et dynamique associée à une sous-variété,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **280** (1975) 523–527.

[14] A. Nijenhuis, *Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields.* I, Indag. Math. **17** (1955) 390–403.

[15] J. A. Schouten, *On the differential operators of first order in tensor calculus,* Convengo Intern. Geometria Differenziale Italia, 1953, Ed. Cremonese, Roma, 1954, 1–7.

[16] J. Sniatycki, *Dirac brackets in geometric dynamics,* Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A, **20** (1974) 365–372.

[17] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras,* Ann. of Math. **79** (1964) 59–103.

College de France, Paris