

INVARIANTS DIFFERENTIELS D'UN PSEUDOGRUPE DE LIE. II

A. KUMPERA

CHAPITRE III. LES FAISCEAUX DE LIE ET LEURS INVARIANTS DIFFERENTIELS

Dans ce chapitre nous définissons les invariants différentiels associés à un faisceau de Lie (pseudogroupe infinitésimal) et démontrons les théorèmes de finitude. Il est à remarquer que la structure des invariants est liée non seulement à la structure du faisceau de Lie \mathcal{L} opérant sur la variété P mais aussi à la façon dont celui-ci opère relativement à la fibration $\pi: P \rightarrow M$. Les théorèmes reposent, par conséquent, sur des hypothèses de régularité portant sur l'action de \mathcal{L} sur π . Leur démonstration comporte essentiellement deux étapes. La première, de nature algébrique, consiste à démontrer la stabilité asymptotique des noyaux de prolongements holonomes successifs de \mathcal{L} , autrement dit, les noyaux de prolongements suffisamment grands deviennent les espaces déduits (prolongements algébriques) des noyaux précédents. La deuxième étape consiste à relier les prolongements algébriques des noyaux avec les dérivées formelles admissibles d'invariants différentiels. Le reste du chapitre est consacré à la discussion des hypothèses, à l'étude de critères pratiques pour la vérification de telles hypothèses ainsi qu'à des exemples.

20. Faisceaux de Lie

Soit P une variété différentiable de dimension finie et \mathcal{O}_P le faisceau structural de P . Rappelons que le faisceau \underline{TP} des germes de champs de vecteurs est canoniquement isomorphe au faisceau $\chi(\mathcal{O}_P)$ des germes de dérivations de \mathcal{O}_P .

Définition 20.1. Un faisceau de Lie \mathcal{L} sur P est la donnée d'un sous-faisceau en \mathbf{R} -espaces vectoriels de $\underline{TP} \simeq \chi(\mathcal{O}_P)$.

Si $\pi: P \rightarrow M$ est une fibration et \mathcal{L} un faisceau de Lie sur P , nous dirons que \mathcal{L} est un faisceau de Lie sur π . Le faisceau \mathcal{L} est π -projetable si $\mathcal{L} \subset \underline{T(P, M)} \simeq \chi(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_M) =$ faisceau des germes de dérivations de \mathcal{O}_P qui préservent $P \times_M \mathcal{O}_M \subset \mathcal{O}_P$.

Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π . A l'aide du morphisme $\bar{\mathfrak{p}}_k$ (cf. § 15) et pour tout $k \geq 0$ nous définissons le faisceau de Lie $\mathcal{L}_k = \bar{\mathfrak{p}}_k \mathcal{L}$ sur la variété J_k . Le faisceau \mathcal{L}_k est obtenu par prolongement canonique des éléments de \mathcal{L} (en

prenant au besoin des représentants pour les germes). Pour tout $k \geq h \geq 0$, \mathcal{L}_k est ρ_{hk} -projetable et la projection de \mathcal{L}_k est \mathcal{L}_h . Si \mathcal{L} est un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie, il en est de même pour chaque \mathcal{L}_k . On pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ et, si \mathcal{L} est π -projetable, on écrira $\mathcal{L}_{-1} = T\pi\mathcal{L}$. Remarquons que \mathcal{L}_{-1} n'est pas en général un faisceau de Lie sur M .

Pour tout $k \geq 0$, le morphisme *but*

$$\beta: \underline{TJ}_k \rightarrow TJ_k$$

est \mathbf{R} -linéaire. Par conséquent $\Delta_k = \beta(\mathcal{L}_k)$ est un sous-fibré vectoriel avec singularités de TJ_k . Nous envisagerons Δ_k soit comme un sous-fibré soit comme un champ d'éléments de contact (du premier ordre) sur J_k . On a évidemment $T_{\rho_{nk}}\Delta_k = \Delta_h$ pour $k \geq h$. Si \mathcal{L} est un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie et si Δ_k est un fibré de rang (dimension des fibres) localement constant, alors Δ_k est un champ complètement intégrable dont les feuilles intégrales sont les trajectoires du pseudogroupe de transformations finies obtenues par intégration du pseudogroupe infinitésimal \mathcal{L}_k . Observons finalement que le préfaisceau $\Gamma(\mathcal{L}_k)$ des sections locales de \mathcal{L}_k est le préfaisceau des champs locaux de J_k qui coïncident localement avec des éléments $\tilde{\rho}_k\theta$ où θ est une section locale de \mathcal{L} . On voit ainsi que $\Gamma(\mathcal{L}_k)$ est le localisé (ou encore le complété) de $\tilde{\rho}_k(\Gamma(\mathcal{L}))$.

21. Invariants différentiels

Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π . Pour tout $k \geq 0$, indiquons par Δ_k^\perp le sous-fibré (avec singularités) de T^*J_k annulateur de Δ_k .

Définition 21.1. Un invariant différentiel d'ordre $k \geq 0$ de \mathcal{L} est une fonction locale $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ définie dans un ouvert U de J_k telle que df soit une section du fibré Δ_k^\perp .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) f est un invariant différentiel d'ordre k .
- b) Pour tout $X \in \mathcal{L}_k$ avec $\alpha(X) \in U$ on a $\beta(X) \cdot f = 0$.
- c) Pour tout $\xi \in \Gamma(\mathcal{L}_k)$ on a $\xi \cdot f = 0$.
- d) Pour tout $\theta \in \Gamma(\mathcal{L})$ on a $(\tilde{\rho}_k\theta) \cdot f = 0$.

Il est évident que l'ensemble des invariants différentiels d'ordre k est un préfaisceau en \mathbf{R} -algèbres associatives sur J_k que nous indiquons par I_k . Le faisceau associé \mathcal{I}_k est un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de \mathcal{O}_k . Comme les invariants différentiels satisfont à la propriété du recollement, le préfaisceau I_k est complet, c'est-à-dire, $\Gamma(\mathcal{I}_k) = I_k$. Pour tout $Y \in J_k$ on a

$$(\mathcal{I}_k)_Y = \{X \in (\mathcal{O}_k)_Y \mid (\mathcal{L}_k)_Y \cdot X = 0\}.$$

D'autre part, si $f \in I_h$ et $k \geq h$, $f \circ \rho_{hk} \in I_k$. L'application ρ_{hk}^* induit par conséquent un morphisme injectif de I_h dans le préfaisceau I_k restreint aux ouverts ρ_{hk} -saturés de J_k . On en déduit que $J_k \times_{J_h} \mathcal{I}_h$ s'identifie canoniquement à un

sous-faisceau de \mathcal{I}_k . Imitons le procédé de construction de A . Posons

$$\mathfrak{S}_k = J \times_{J_k} \mathcal{I}_k .$$

Pour $k \geq h$, l'application $\rho_{hk}^* : \mathfrak{S}_h \rightarrow \mathfrak{S}_k$ est un morphisme injectif et la famille $(\mathfrak{S}_k, \rho_{hk}^*)$ est inductive. Soit

$$\mathfrak{S} = \lim \text{ind} (\mathfrak{S}_k, \rho_{hk}^*) .$$

Les morphismes canoniques $\mathfrak{S}_k \rightarrow \mathfrak{S}$ étant injectifs nous identifions \mathfrak{S}_k à son image. \mathfrak{S} est un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de A , les \mathfrak{S}_k sont des sous-algèbres de A_k et constituent une filtration croissante de \mathfrak{S} avec $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$.

Définition 21.2. Appelons \mathfrak{S} le faisceau des germes d'invariants différentiels de \mathcal{L} .

Remarquons maintenant que \mathcal{L} est un sous-faisceau de $\chi(\mathcal{O}_0)$ et que $\chi(A_0) \simeq J \times_P \chi(\mathcal{O}_0)$ (cf. § 10). Par conséquent $J \times_P \mathcal{L}$ s'identifie canoniquement à un sous-faisceau de $\chi(A_0)$ que nous noterons par \mathcal{L}_J . De même, les sous-faisceaux \mathcal{L}_k de $\chi(\mathcal{O}_k)$ induisent canoniquement les sous-faisceaux

$$(\mathcal{L}_k)_J = J \times_{J_k} \mathcal{L}_k$$

de $\chi(A_k)$. On voit aussitôt que $(\mathcal{L}_k)_J = \bar{p}_k(\mathcal{L}_J) = p(\mathcal{L}_J)|_{A_k}$ et, pour $k \geq h$, $(\mathcal{L}_k)_J \subset \chi(A_k, A_h)$. Si \mathcal{L} est un faisceau de Lie projectable $\mathcal{L}_J \subset \chi(A_0, \mathbf{B})$.

Proposition 21.1. Pour tout $k \geq 0$ on a $\mathfrak{S} = \{X \in A \mid p(\mathcal{L}_J) \cdot X = 0\}$ et $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S} \cap A_k$.

En général \mathfrak{S} ne caractérise pas \mathcal{L} car \mathfrak{S} est un objet attaché à \mathcal{L} et à la fibration π tandis que \mathcal{L} est un objet attaché à P . Pourtant, lorsque $\dim P \geq 2 \dim M$, \mathfrak{S} nous fournit beaucoup de renseignements sur \mathcal{L} . Signalons toutefois que notre intention est celle d'étudier \mathfrak{S} une fois donnés \mathcal{L} et π , pas le contraire.

Etant donné \mathcal{L} , nous lui associons un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ de \mathfrak{D} (cf. § 10) en posant

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{\partial \in \mathfrak{D} \mid \partial \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}\} .$$

Les éléments de $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ sont les germes de dérivations formelles qui préservent les invariants différentiels de tout ordre et seront appelés \mathcal{L} -admissibles. $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ est filtré par $\mathfrak{D}_k(\mathcal{L}) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}) \cap \mathfrak{D}_k$ et $\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \bigcup_k \mathfrak{D}_k(\mathcal{L})$. Il est vraisemblable que la terminologie *sous-faisceau* pour $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ soit en général un abus de langage car il n'est guère évident que $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ soit un ouvert de \mathfrak{D} . Pourtant, nous verrons que dans les bonnes situations, à savoir, lorsque \mathcal{L} a un nombre suffisamment grand d'invariants différentiels, ceci est toujours le cas (voir § 25).

Proposition 21.2. $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ est un \mathfrak{S} -module et $\mathfrak{D}_k(\mathcal{L})$ est un \mathfrak{S}_k -module pour les restrictions de la loi de A -module de \mathfrak{D} .

Reprenons maintenant l'isomorphisme $\bar{\delta} : \mathfrak{R} \rightarrow \chi(A)$, soit $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ le \mathfrak{S} -sous-

module et R -sous-algèbre de Lie de \mathfrak{R} qui correspond à $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ et $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})$ le \mathfrak{S}_k -sous-module qui correspond à $\mathfrak{D}_k(\mathcal{L})$. On a

$$\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \{ \Phi \in \mathfrak{R} \mid \partial_\theta \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S} \} .$$

Les éléments de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ seront encore appelés admissibles. A l'aide de la première formule fondamentale (voir théorème 7.1 et § 15) on démontre aussitôt la

Proposition 21.3. $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \{ \Phi \in \mathfrak{R} \mid \partial_{[\theta, \sigma]} \mathfrak{S} = 0, \theta \in \mathcal{L}_J \} .$

Cette proposition met en évidence le sous-faisceau (abus de langage!) de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$

$$\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = \{ \Phi \in \mathfrak{R} \mid \partial_\theta \mathfrak{S} = 0 \} .$$

$\mathfrak{R}^0(\mathcal{L})$ est un idéal de la R -algèbre de Lie $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ et un A -sous-module de \mathfrak{R} . En outre $[\mathfrak{R}(\mathcal{L}), \mathcal{L}_J] \subset \mathfrak{R}^0(\mathcal{L})$.

Proposition 21.4. $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \{ \Phi \in \mathfrak{R} \mid [\Phi, \theta] \in \mathfrak{R}^0(\mathcal{L}), \theta \in \mathcal{L}_J \} .$

Indiquons initialement un procédé (peu efficace) pour obtenir des éléments de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$. Soit ξ un champ de vecteurs de J_k défini dans un ouvert U et invariant par \mathcal{L}_k , i.e., $[\xi, \mathcal{L}_k] = 0$. Ceci entraîne que $[\xi, \theta] = 0$ pour toute section locale θ de \mathcal{L} et par conséquent, en utilisant la proposition 21.3, ξ détermine une section locale $\tilde{\xi}$ de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ définie sur l'ouvert $(q_k)^{-1}U$ de J où $q_k : J \rightarrow J_k$ est la projection canonique. $\tilde{\xi}$ est obtenue en prenant les germes de ξ en tout point de U et en passant ensuite à la limite. Lorsque \mathcal{L} est de type fini nous pouvons espérer obtenir par cette méthode un nombre suffisant d'éléments de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$, par exemple un système de générateurs du \mathfrak{S} -module $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ et, dans les bons cas, un système fini dans chaque fibre. Pourtant, lorsque \mathcal{L} est infini, les champs invariants ξ sont trop peu nombreux, en général même inexistantes. Dans ce cas on cherchera les générateurs dans le sous-faisceau

$$\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \{ \Phi \in \mathfrak{R} \mid [\Phi, \theta] = 0, \theta \in \mathcal{L}_J \} .$$

Dans la pratique cette deuxième méthode s'avère très efficace. La proposition 21.4 montre que $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ est un sous-faisceau de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$, et la formule $[f\Phi, \theta] = f[\Phi, \theta] - (p_\theta f)\Phi$ (cf. proposition 7.1 étendue aux faisceaux) montre en plus que $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ est un \mathfrak{S} -sous-module de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$. L'identité de Jacobi dans l'algèbre $\mathfrak{R} \times_J \chi(A_0, B)$ montre finalement que $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ est une R -sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$. Si $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ alors $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ est un idéal de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$. Comme $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ est un \mathfrak{S} -module, pour pouvoir trouver des générateurs de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ dans $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ il faudra que $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$, condition qui n'est pas toujours remplie. En effet,

- i) $\Phi \in \mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) \Leftrightarrow [\partial_\theta, p_\theta] = 0, \forall \theta \in \mathcal{L}_J,$
- ii) $\Phi \in \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \Leftrightarrow [\partial_\theta, p_\theta] \mid \mathfrak{S} = 0, \forall \theta \in \mathcal{L}_J.$

Proposition 21.5. Si $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$, alors $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}(\mathcal{L})$.

Nous verrons plus tard que lorsqu'il y a un nombre suffisant d'invariants

différentiels la condition $\mathfrak{H}^0(\mathcal{L}) = 0$ est toujours remplie.

22. Le théorème de stabilité asymptotique

Nous étudions maintenant le comportement asymptotique des noyaux $\Delta_{k-1,k}$ définis par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Delta_{k-1,k} \xrightarrow{\varepsilon_k} \Delta_k \xrightarrow{T\rho_{k-1,k}} J_k \times_{J_{k-1}} \Delta_{k-1} \longrightarrow 0 .$$

Nous montrerons, sous des hypothèses de régularité assez faibles, que $\Delta_{k,k+1}$ est l'espace déduit (prolongement algébrique) de $\Delta_{k-1,k}$ lorsque k est suffisamment grand. En utilisant des théorèmes connus sur la nullité des groupes de δ -cohomologie, il suffira de montrer que chaque $\Delta_{k,k+1}$ est contenu dans l'espace déduit de $\Delta_{k-1,k}$.

A. Notations. Soit $\pi: P \rightarrow M$ une fibration. Nous indiquerons par $J_\lambda P$ le faisceau \underline{P} des germes de sections locales de π muni de la structure différentiable canonique induite par sa structure d'espace étalé sur M . C'est l'unique structure de variété différentiable sur \underline{P} qui rend la projection source $\alpha: \underline{P} \rightarrow M$ un difféomorphisme local. Nous employons ici les notations d'Ehresmann [9] où l'indice λ se réfère à jet local. La fibration π étant fixée, nous abrégons $J_\lambda P$ par J_λ .

Soit $\eta: E \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\pi} M$ une fibration de Lie (cf. § 11). Nous recopions pour les faisceaux de germes ce que nous avons déjà fait au § 11 pour les variétés de jets infinitésimaux. Soit $J_\lambda E$ le faisceau des germes de sections locales de p et $\tilde{J}_\lambda E$ le faisceau des germes de sections locales de $\eta = \pi \circ p$. Il est clair que la fibration $J_\lambda p: \tilde{J}_\lambda E \rightarrow J_\lambda P$ est un faisceau (espace étalé).

Proposition 22.1. *Il existe une structure unique de faisceau en \mathcal{O}_{J_λ} -modules sur $J_\lambda p: \tilde{J}_\lambda E \rightarrow J_\lambda P$ tel que l'application*

$$(22.1) \quad (X, Y) \in J_\lambda P \times_P J_\lambda E \xrightarrow{\#} YX \in \tilde{J}_\lambda E$$

soit un morphisme de faisceaux en \mathcal{O}_{J_λ} -modules de base J_λ (où YX est la composition de germes).

On remarquera que $\underline{E} = J_\lambda E$ est un \mathcal{O}_P -module donc aussi un $(P \times_M \mathcal{O}_M)$ -module et que $\mathcal{O}_{J_\lambda} \simeq J_\lambda \times_M \mathcal{O}_M \simeq J_\lambda \times_P (P \times_M \mathcal{O}_M)$ d'où la structure évidente de \mathcal{O}_{J_λ} -module sur le faisceau $J_\lambda \times_P J_\lambda E$. En abrégant $J_\lambda \times_M \mathcal{O}_M$ par \mathcal{O}_M on considère $\tilde{J}_\lambda E$ comme faisceau en \mathcal{O}_M -modules de base J_λ . La loi externe s'écrit $[j_\lambda f(x)] \cdot [j_\lambda \tau(x)] = j_\lambda(f\tau)(x)$ où τ est une section locale de η et f une fonction locale de M . Le faisceau $\tilde{J}_\lambda E$ est localement libre sur \mathcal{O}_M le rang local étant celui du fibré E . En effet, $\tilde{J}_\lambda E$ est isomorphe au faisceau $J_\lambda(J_\lambda \times_P E)$ des germes de sections locales du fibré vectoriel $J_\lambda \times_P E$ de base J_λ à l'aide de l'application

$$j_\lambda \tau(j_\lambda \sigma(x)) \in J_\lambda(J_\lambda \times_P E) \rightarrow j_\lambda(\tau \circ \sigma)(x) \in \tilde{J}_\lambda E ,$$

où τ est une section locale de $J_\lambda \times_P E$. De même on définit le morphisme de fibrés vectoriels

$$(22.2) \quad \begin{array}{ccc} J_k(J_\lambda \times_P E) & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{J}_k E \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_\lambda & \xrightarrow{j_k} & J_k \end{array}$$

et ce morphisme est strict (isomorphisme sur chaque fibre).

B. La δ -cohomologie et l'opérateur D de Spencer. Dans cette section nous faisons un bref rappel sur la δ -cohomologie et l'opérateur D de Spencer. Pour les détails nous renvoyons le lecteur à [2], [13], [28], [53], [57], [61], [62], [63], et [64].

Soit K un corps commutatif de caractéristique zero et V, W deux K -espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout couple d'entiers non négatifs k et p on définit l'application K -linéaire

$$(22.3) \quad \delta : \wedge^p V^* \otimes S^k V^* \otimes W \rightarrow \wedge^{l+1} V^* \otimes S^{k-1} V^* \otimes W$$

par la formule

$$(22.4) \quad \begin{aligned} & \delta(\omega \otimes [s_1 \vee \dots \vee s_k] \otimes w) \\ &= \sum_{i=1}^k (s_i \wedge \omega) \otimes (s_1 \vee \dots \vee \hat{s}_i \vee \dots \vee s_k) \otimes w , \end{aligned}$$

où $s_i \in V^*$ et “ \vee ” indique le produit symétrique dans l'algèbre SV^* . En outre on convient que $\wedge^p V^*$ et $S^p V^*$ sont nuls lorsque $p < 0$. Pour tout entier k on obtient le complexe ($n = \dim V$)

$$(22.5)_k \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^k V^* \otimes W & \xrightarrow{\delta} & V^* \otimes S^{k-1} V^* \otimes W & \xrightarrow{\delta} & \\ & & & & \dots & \xrightarrow{\delta} & \wedge^n V^* \otimes S^{k-n} V^* \otimes W \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui est acyclique (exact) lorsque $k > 0$. Un opérateur d'homotopie

$$\wedge^p V^* \otimes S^k V^* \otimes W \rightarrow \wedge^{l-1} V^* \otimes S^{k+1} V^* \otimes W$$

est donné par

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \otimes s \otimes w \mapsto \\ & \sum_{i=1}^l \frac{(-1)^{i+1}}{p+k} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_p) \otimes (\omega_i \vee s) \otimes w . \end{aligned}$$

Remarquons que $\wedge V^* \otimes S^k V^* \otimes W$ admet une structure naturelle de module à gauche sur l'algèbre $\wedge V^*$. Si $\mu \in \wedge^l V^*$ et $\tau \in \wedge^p V^* \otimes S^k V^* \otimes W$, alors

$$\delta(\mu \wedge \tau) = (-1)^l \mu \wedge \delta\tau .$$

En particulier, si $\omega \otimes \tau \in \wedge^p V^* \otimes (S^k V^* \otimes W)$, alors

$$(22.6) \quad \delta(\omega \otimes \tau) = (-1)^p \omega \wedge \delta\tau ,$$

c'est-à-dire, tous les opérateurs δ sont déterminés par

$$\delta : S^k V^* \otimes W \rightarrow T^* \otimes S^{k-1} V^* \otimes W .$$

Donnons nous maintenant une famille de sous-espaces $g_k \subset S^k T^* \otimes W, k \geq 0$, et supposons que

$$(22.7) \quad \delta(g_{k+1}) \subset T^* \otimes g_k .$$

La formule 22.6 entraîne la relation plus générale

$$\delta(\wedge^p V^* \otimes g_{k+1}) \subset \wedge^{p+1} V^* \otimes g_k$$

par conséquent nous obtenons, pour tout $k \geq 0$, le sous-complexe de (22.5)_k

$$(22.8)_k \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g_k & \xrightarrow{\delta} & V^* \otimes g_{k-1} & \xrightarrow{\delta} & \wedge^2 V^* \otimes g_{k-2} \longrightarrow \\ & & & & \dots & \longrightarrow & \wedge^n V^* \otimes g_{k-n} \longrightarrow 0 . \end{array}$$

Soit $H_l^q = H_l^q(g)$ la cohomologie de

$$\wedge^{q-1} V^* \otimes g_{l+1} \xrightarrow{\delta} \wedge^q V^* \otimes g_l \xrightarrow{\delta} \wedge^{q+1} V^* \otimes g_{l-1} .$$

Nous dirons que g_k est p -acyclique lorsque $H_l^q = 0$ pour $l \geq k$ et $0 \leq q \leq p$. Nous dirons que g_k est acyclique ou involutif lorsqu'il est p -acyclique pour tout p . Il est clair que g_k est 0-acyclique pour $k > 0$ (la première flèche δ dans (22.8) est injective) et $H_0^0 = g_0$.

Remarque. Il arrivera dans la suite qu'un même sous-espace g_k fasse partie de plusieurs familles $g = (g_l)_{l \geq 0}$. Pour éviter des confusions, la p -acyclicité de g_k , considéré comme élément d'un certain g , sera exprimée par la p -acyclicité à l'ordre k de g .

Lemme 22.1. *Il existe un entier $k_0 = k_0(g)$ tel que g_{k_0} est 1-acyclique.*

Remarque. L'exactitude de (22.8) _{k_0+l+1} en $V^* \otimes g_{k_0+l}$ entraîne que g_{k_0+l+1} est déterminé par g_{k_0+l} donc par g_{k_0} .

Plus généralement on a le

Lemme 22.2 (δ -Poincaré lemma). *Il existe un entier $k_1 = k_1(g)$ tel que g_{k_1} est involutif.*

Examinons maintenant le cas particulier où $K = \mathbf{R}$, et considérons l'espace vectoriel V en tant que variété différentiable. Comme $T_x V \simeq V$ pour tout $x \in V$, le module des formes différentielles extérieures sur V à valeurs dans l'espace vectoriel W s'identifie canoniquement au module des fonctions $V \rightarrow \wedge V^* \otimes W$. La forme différentielle ω est dite polynomiale si la fonction correspondante est une fonction polynomiale sur V , autrement dit, un élément de $SV^* \otimes \wedge V^* \otimes W \simeq \wedge V^* \otimes SV^* \otimes W$. Un calcul direct montre que l'application δ de (22.3) n'est autre que la différentielle extérieure opérant sur le module des p -formes différentielles polynomiales homogènes de degré k .

Prenons ensuite une variété différentiable M , soit $T = TM$ son fibré tangent et $p: E \rightarrow M$ un fibré vectoriel quelconque. On définit l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre

$$D: \underline{J_k E} \rightarrow \underline{T^* \otimes J_{k-1} E}$$

par la formule $D\tau = j_1(\rho_{k-1,k}\tau) - \iota_k \circ \tau$ où

$$\iota_k: J_k E \rightarrow J_1(J_{k-1} E)$$

est l'injection canonique. $D\tau$ est à valeurs dans $\underline{T^* \otimes J_{k-1} E}$ car la suite

$$0 \longrightarrow T^* \otimes J_{k-1} E \xrightarrow{\epsilon_1} J_1(J_{k-1} E) \xrightarrow{\beta_1} J_{k-1} E \longrightarrow 0$$

est exacte et $\beta_1 \circ D\tau = 0$. On étend D à un opérateur différentiel linéaire du premier ordre

$$D: \underline{\wedge^p T^* \otimes J_k E} \rightarrow \underline{\wedge^{p+1} T^* \otimes J_{k-1} E}$$

en posant

$$(22.9) \quad D(\omega \otimes \tau) = d\omega \otimes \rho_{k-1,k}\tau + (-1)^p \omega \wedge D\tau.$$

Remarquons que $\underline{\wedge^p T^* \otimes J_k E}$ est un module à gauche sur le faisceau $\underline{\wedge^p T^*}$. La famille des opérateurs D est caractérisée de façon unique par les deux propriétés suivantes :

- 1) $D \circ j_k = 0$,
- 2) $D(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \rho_{k-1,k}\tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge D\tau$, où $\tau \in \underline{\wedge^p T^* \otimes J_k E}$ et ω est une forme homogène.

En outre $D^2 = D \circ D = 0$ et le diagramme suivant est commutatif et exact.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S^k T^* \otimes E & \xrightarrow{-\delta} & T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes E & \xrightarrow{-\delta} \dots \xrightarrow{-\delta} & \wedge^n T^* \otimes S^{k-n} T^* \otimes E \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_k & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \underline{E} & \xrightarrow{j_k} & \underline{J_k E} & \xrightarrow{D} & \underline{T^* \otimes J_{k-1} E} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \underline{\wedge^n T^* \otimes J_{k-n} E} \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \rho_{k-1, k} & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \underline{E} & \xrightarrow{j_{k-1}} & \underline{J_{k-1} E} & \xrightarrow{D} & \underline{T^* \otimes J_{k-2} E} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \underline{\wedge^n T^* \otimes J_{k-n-1} E} \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On voit ainsi que la restriction de D aux noyaux n'est autre que $-\delta$ étendu aux germes. Il est possible, par ailleurs, de définir l'opérateur D comme la différentielle extérieure opérant sur les formes différentielles polynomiales (voir [28]).

Donnons nous finalement une famille de sous-fibrés $R_k \subset J_k E$, $k \geq 0$, vérifiant les deux propriétés :

- i) $\rho_{k, k+1} R_{k+1} \subset R_k$,
- ii) $D(R_{k+1}) \subset T^* \otimes R_k$,

où R_k est considéré comme sous-faisceau de $J_k E$. La formule (22.9) entraîne la relation plus générale

$$D(\wedge^p T^* \otimes R_{k+1}) \subset \wedge^{p+1} T^* \otimes R_k$$

et le diagramme précédent se restreint à

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & g_k & \xrightarrow{-\delta} & T^* \otimes g_{k-1} & \xrightarrow{-\delta} \dots \xrightarrow{-\delta} & \wedge^n T^* \otimes g_{k-n} \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (22.10) \quad 0 & \longrightarrow & S_k & \longrightarrow & R_k & \xrightarrow{D} & T^* \otimes R_{k-1} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \wedge^n T^* \otimes R_{k-n} \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_{k-1} & \longrightarrow & R_{k-1} & \xrightarrow{D} & T^* \otimes R_{k-2} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \wedge^n T^* \otimes R_{k-n} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où g_k est le noyau de $R_k \rightarrow J_{k-1} E$, et S_k est le noyau de D . Ce diagramme est commutatif mais en général n'est pas exact. Supposons en plus que, pour tout k , g_k soit un sous-fibré vectoriel (sans singularités) de $S^k T^* \otimes E$, ce qui aura lieu notamment lorsque la suite

$$R_{k+1} \rightarrow R_k \rightarrow 0$$

est exacte ($k \geq 0$). Dans ces conditions, la suite supérieure de (22.10) induit la suite de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow g_k \xrightarrow{-\delta} T^* \otimes g_{k-1} \xrightarrow{-\delta} \cdots \xrightarrow{-\delta} \wedge^n T^* \otimes g_{k-n} \longrightarrow 0 ,$$

et par conséquent la famille de sous-fibrés vectoriels $(g_k)_{k \geq 0}$ définit un sous-complexe de

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S^k T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} \\ \cdots \xrightarrow{\delta} \wedge^n T^* \otimes S^{k-n} T^* \otimes E \longrightarrow 0 , \end{aligned}$$

où le cobord est, fibre par fibre, l'application (22.3). Cette propriété sera utilisée dans la section suivante.

C. La stabilité asymptotique. Soit $\pi: P \rightarrow M$ une fibration et $\eta: E \xrightarrow{P} P \xrightarrow{\pi} M$ une fibration de Lie au dessus de π . Indiquons par $C(E)$ le complexe $C(E) = (C_k^p(E); \delta)$ où

$$C_k^p(E) = J \times_p \wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes E ,$$

$T = TM$ et la différentielle δ , restreinte à la fibre au dessus de $X \in J$, est l'application (22.3)

$$\delta_X: \wedge^p T_x^* \otimes S^k T_x^* \otimes E_y \rightarrow \wedge^{p+1} T_x^* \otimes S^{k-1} T_x^* \otimes E_y$$

avec $x = \alpha(X)$ et $y = \beta(X)$ (cf. début du § 14). Le complexe $C(E)$ est acyclique sauf pour $p = k = 0$.

Prenons en particulier les complexes $C(VP)$, $C(TP)$ et $C(P \times_M TM) = C(TM) = (J \times_M \wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes T; \delta)$. Comme $C_k^p(E) = J \times_{J_k} (J_k \times_P \wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes E)$ il est clair que les flèches verticales gauches du diagramme (14.3) se remontent aux complexes $C(VP)$, $C(TP)$ et $C(TM)$. On obtient ainsi pour tout couple (p, k) les morphismes vectoriels

$$(22.11) \quad C_k^p(VP) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Id} \otimes i} \\ \xleftarrow{\text{Id} \otimes s_k} \end{array} C_k^p(TP) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Id} \otimes T\pi} \\ \xleftarrow{\text{Id} \otimes \sigma_k} \end{array} C_k^p(TM) .$$

Proposition 22.2. *Les morphismes $\text{Id} \otimes i$, $\text{Id} \otimes T\pi$, $\text{Id} \otimes s$ et $\text{Id} \otimes \sigma$ sont des transformations naturelles de complexes (commutent avec δ) et la suite de complexe et morphismes*

$$(22.12) \quad 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Id} \otimes \sigma} \\ \xleftarrow{\text{Id} \otimes T\pi} \end{array} C(TM) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Id} \otimes s} \\ \xleftarrow{\text{Id} \otimes i} \end{array} C(TP) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Id} \otimes s} \\ \xleftarrow{\text{Id} \otimes i} \end{array} C(VP) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta} \\ \xleftarrow{\delta} \end{array} 0$$

est exacte et scindée.

Soit maintenant \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π . Pour $k \geq 0$, Δ_k est un sous-fibré vectoriel éventuellement singulier de TJ_k . Indiquons par $\Delta_{k-1,k}$ le sous-fibré de Δ_k noyau de $T\rho_{k-1,k} : \Delta_k \rightarrow TJ_{k-1}$. La proposition 14.2 montre que $\Delta_{k-1,k}$ peut être considéré comme un sous-fibré de $J_k \times_P S^k T^* \otimes VP$ et la suite

$$(22.13) \quad 0 \longrightarrow \Delta_{k-1,k} \xrightarrow{\varepsilon_k} \Delta_k \longrightarrow J_k \times_{J_{k-1}} \Delta_{k-1} \longrightarrow 0$$

est exacte. Posons $C_l(\mathcal{A}) = (C_k^p(\mathcal{A}))$ où

$$C_k^p(\mathcal{A}) = \begin{cases} J \times_{J_k} \wedge^p T^* \otimes \Delta_{k-1,k}, & k \geq l, \\ J \times_P \wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes VP, & k < l. \end{cases}$$

La proposition 14.2 entraîne que $C_k^p(\mathcal{A}) \subset C_k^p(VP)$ par conséquent $C_l(\mathcal{A})$ est une famille homogène de sous-fibrés du complexe $C(VP)$. Pour chaque $X \in J$ nous indiquons par $C_l(\mathcal{A})_X$ la famille de sous-espaces induite au dessus de X . $C_l(\mathcal{A})_X$ est une famille homogène de sous-espaces vectoriels de

$$C(VP)_X \simeq (\wedge^p T_x^* \otimes S^k T_x^* \otimes VP_y)_{p,k \geq 0}.$$

Moyennant des hypothèses de régularité raisonnables nous montrerons à présent que pour tout $X \in J$ il existe un entier $l(X)$ tel que $C_{l(X)}(\mathcal{A})_X$ est un sous-complexe de $C(VP)_X$ (i.e., stable pour la différentielle δ_X).

L'idée intuitive de la démonstration est la suivante (suggestion faite par B. Malgrange). Soit $\pi : P \rightarrow M$ une fibration et θ un champ de vecteurs local défini dans un voisinage ouvert du point $y_0 \in P$. Soit σ une section locale de π définie au voisinage de $x_0 = \pi(y_0)$ et telle que $\sigma(x_0) = y_0$. Pour calculer le vecteur $(\tilde{p}_k \theta)_{X_k}$, où $X_k = j_k \sigma(x_0)$, il suffit de considérer la section locale $\tau = \theta \circ \sigma$ de la fibration de Lie $\zeta : TP \rightarrow M$ et déterminer $(\tilde{p}_k \theta)_{X_k} = \mathfrak{p}_k(j_k \tau(x_0))$. Prenons des coordonnées locales (x^i) de M et (x^i, y^j) de P de telle sorte que la section σ s'écrive $\sigma : (x^i) \mapsto (x^i, 0)$, autrement dit, $\text{im } \sigma$ est définie par les équations $\{y^j = 0\}$. Posons $\theta = a_i(x, y) \partial / \partial x^i + b_j(x, y) \partial / \partial y^j$. Ceci entraîne que

$$\tau = \theta \circ \sigma = a_i(x, 0) \partial / \partial x^i + b_j(x, 0) \partial / \partial y^j = A_i(x) \partial / \partial x^i + B_j(x) \partial / \partial y^j.$$

Pour que $(\tilde{p}_k \theta)_{X_k} = 0$ il faut et il suffit que $A_i(x_0) = 0$ et $j_k B_j(x_0) = 0$ (cf. les remarques à la suite du corollaire du théorème 13.1). On sait que l'image $(\tilde{p}_k \theta)_{X_k}$ ne dépend que de $j_k A_i(x_0)$ et $j_k B_j(x_0)$, mais la remarque précédente montre en plus que cette image ne dépend que de $A_i(x_0)$ et $j_k B_j(x_0)$. Comme \mathfrak{p}_k applique injectivement la partie verticale $j_k(B_j \partial / \partial y^j)(x_0)$ (cf. proposition 12.2) et que la partie horizontale $A_i(x_0) \partial / \partial x^i$ est toujours contenue dans un espace vectoriel de dimension finie à savoir $T_{x_0} M$, nous pouvons espérer que lorsque θ varie dans un faisceau de Lie \mathcal{L} , les noyaux $\Delta_{k-1,k}$ deviennent, pour k

suffisamment grand, isomorphes aux noyaux des parties verticales d'ordre k de $\theta \circ \sigma$ sur les parties verticales d'ordre $k - 1$ (i.e., les $j_k(B_i \partial / \partial y^i)(x_0)$ avec $j_{k-1}(B_i \partial / \partial y^i)(x_0) = 0$). Lorsque $\mathcal{L} = \underline{TP}$ l'assertion est évidente car la partie verticale de $\theta \circ \sigma$ est toujours de la forme $\theta' \circ \sigma$ avec $\theta' \in \underline{TP}$ un champ local vertical. Nous appliquons ensuite les techniques exposées dans la partie B du § 22.

Faisons maintenant la transcription formelle des considérations précédentes. Pour étudier Δ_k il est utile d'introduire la notion de faisceau de Lie réduit, notion qui a un sens lorsqu'on se donne une fibration π .

Définition 22.1. Un faisceau de Lie réduit sur la fibration $\pi : P \rightarrow M$ est la donnée d'un sous-faisceau en \mathbf{R} -espaces vectoriels du faisceau en \mathcal{O}_{J_λ} -modules $J_\lambda(J_\lambda \times_P TP)$.

Dans A , § 22 nous avons remarqué que $J_\lambda(J_\lambda \times_P TP)$ est isomorphe au faisceau $\tilde{J}_\lambda TP \rightarrow J_\lambda$ par conséquent un faisceau de Lie réduit peut être envisagé comme un sous-faisceau \mathbf{R} -linéaire de $\tilde{J}_\lambda TP$. Prenons maintenant un faisceau de Lie \mathcal{L} sur P . Nous lui associons le faisceau de Lie réduit $L = L(\mathcal{L}) = \#(J_\lambda \times_P \mathcal{L})$ où $\#$ est l'application (22.1). L étant un sous-faisceau \mathbf{R} -linéaire de $J_\lambda(J_\lambda \times_P TP)$ dont les éléments sont des germes de sections locales du fibré $J_\lambda \times_P TP$ de base J_λ , nous posons

$$L_k = J_k L = \{k\text{-jets de sections locales de } L \rightarrow J_\lambda\} .$$

L_k est un sous-fibré éventuellement singulier de $J_k(J_\lambda \times_P TP)$. D'autre part, L est un sous-faisceau \mathbf{R} -linéaire de $\tilde{J}_\lambda TP \rightarrow J_\lambda$ donc un sous-faisceau de $\tilde{J}_\lambda TP \rightarrow M$ (faisceau des germes de sections locales de $\zeta : TP \xrightarrow{q} P \xrightarrow{\pi} M$). En considérant L comme un faisceau de base M , nous posons

$$\tilde{L}_k = \tilde{J}_k L = \{k\text{-jets de sections locales de } L \rightarrow M\} .$$

\tilde{L}_k est un sous-fibré vectoriel éventuellement singulier de $\tilde{J}_k TP$ de base J_k . On relie L_k et \tilde{L}_k à l'aide de l'application (22.2). En effet, on vérifie aussitôt que $\varphi(L_k) = \tilde{L}_k$ et que la restriction $\varphi : L_k \rightarrow \tilde{L}_k$ est un morphisme strict. Reprenons maintenant le morphisme vectoriel surjectif $\#$ de la proposition 11.1. On voit immédiatement que $\tilde{L}_k = \#(J_k \times_P J_k \mathcal{L})$ par conséquent $\Delta_k = \mathfrak{p}_k(\tilde{L}_k)$ où \mathfrak{p}_k est la forme réduite du prolongement holonome (théorème 12.1). Composons ensuite le morphisme φ (22.2) avec \mathfrak{p}_k . On obtient un morphisme noté encore par $\mathfrak{p}_k (= \mathfrak{p}_k \circ \varphi)$

$$\begin{array}{ccc} J_k(J_\lambda \times_P TP) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & TJ_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_\lambda & \xrightarrow{j_k} & J_k \end{array}$$

où la flèche inférieure \mathfrak{p}_k est le quotient de la flèche supérieure. La suite inférieure est exacte en vertu de (22.14) en remarquant que $\ker(\beta \circ \bar{J}_k T\pi) = \Sigma_k(J_k^0 TJ_\lambda)$. En rassemblant (22.16) et (22.18) on obtient la réduction suivante

$$(22.19) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_k^0 TJ_\lambda & \xrightarrow{\Sigma_k} & J_k(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} \Sigma_k(J_k TJ_\lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & J_\lambda \times_{J_k} TJ_k \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \text{Id} \times (\beta \circ \bar{J}_k T\pi) & & \downarrow \text{Id} \\ 0 & \longrightarrow & J_k(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} TJ_\lambda & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & J_\lambda \times_{J_k} TJ_k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

le diagramme étant commutatif et exact. La forme réduite \mathfrak{p}_k du prolongement holonome a été ainsi réduite une seconde fois à l'aide de la scission canonique, cette dernière réduction étant un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Considérons finalement le diagramme commutatif et exact qui est conséquence de (14.1) et des isomorphismes canoniques $T^*J_\lambda \simeq J_\lambda \times_M T^*M$ et $S^k(T^*J_\lambda) \otimes (J_\lambda \times_P VP) \simeq J_\lambda \times_P (S^k T^* \otimes VP) \simeq J_\lambda \times_{J_k} (J_k \times_P S^k T^* \otimes VP)$.

$$(22.20) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S^k(T^*J_\lambda) \otimes (J_\lambda \times_P VP) & \xrightarrow{\text{Id}} & J_\lambda \times_P (S^k T^* \otimes VP) & \longrightarrow & 0 \\ & & \varepsilon_k \downarrow & & \downarrow \varepsilon_k & & \\ 0 & \longrightarrow & J_k(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} TJ_\lambda & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & J_\lambda \times_{J_k} TJ_k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & J_{k-1}(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} TJ_\lambda & \xrightarrow{\mathfrak{p}_{k-1}} & J_\lambda \times_{J_{k-1}} TJ_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Prenons ensuite un faisceau de Lie \mathcal{L} sur π et soit $L \subset J_\lambda(J_\lambda \times_P TP)$ le faisceau de Lie réduit associé. Comme $L_k \subset J_k(J_\lambda \times_P TP)$, son image $\bar{L}_k = [\text{Id} \times (\beta \circ \bar{J}_k T\pi)](L_k)$ (cf. (22.16) et (22.19)) est un sous-fibré vectoriel éventuellement singulier de $J_k(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} TJ_\lambda$ et le diagramme suivant, obtenu par restriction de (22.20), est exact.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \bar{L}_{k-1,k} & \xrightarrow{\text{Id}} & J_\lambda \times_{J_k} \Delta_{k-1,k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varepsilon_k \downarrow & & \downarrow \varepsilon_k & & \\
 (22.21) \quad 0 & \longrightarrow & \bar{L}_k & \xrightarrow{p_k} & J_\lambda \times_{J_k} \Delta_k & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \bar{L}_{k-1} & \xrightarrow{p_{k-1}} & J_\lambda \times_{J_{k-1}} \Delta_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

où $\bar{L}_{k-1,k} \subset S^k T^* J_\lambda \otimes (J_\lambda \times_P VP)$ et $\Delta_{k-1,k} \subset J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP)$. Soit $(L_V)_k = (\bar{J}_k i) \circ S_k(L_k)$ la projection de L_k (ou de \bar{L}_k) dans la composante verticale $J_k(J_\lambda \times_P VP)$. Le diagramme suivant est commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \bar{L}_{k-1,k} & \xrightarrow{\text{inclusion}} & (L_V)_{k-1,k} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (22.22) \quad 0 & \longrightarrow & \bar{\eta}_k & \longrightarrow & \bar{L}_k & \xrightarrow{\text{projection}} & (L_V)_k \longrightarrow 0 \\
 & & \text{incl.} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \bar{\eta}_{k-1} & \longrightarrow & \bar{L}_{k-1} & \xrightarrow{\text{projection}} & (L_V)_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où $\bar{\eta}_k \subset \bar{\eta}_{k-1} \subset T J_\lambda$, $(L_V)_{k-1,k} \subset S^k T^* J_\lambda \otimes (J_\lambda \times_P VP)$ est le noyau de $(L_V)_k \rightarrow (L_V)_{k-1}$ et $\bar{L}_{k-1,k} \subset (L_V)_{k-1,k}$. On voit facilement que si l'une des inclusions est surjective l'autre l'est aussi. Pour tout $X \in J_\lambda$ nous trouvons ainsi une suite décroissante de sous-espaces vectoriels

$$(22.23) \quad \dots \supset (\bar{\eta}_{k-1})_X \supset (\bar{\eta}_k)_X \supset (\bar{\eta}_{k+1})_X \supset \dots$$

de $T_X J_\lambda$. Comme ce dernier est de dimension finie la suite est stationnaire. Ceci démontre le

Lemme 22.3. *Pour tout $X \in J_\lambda$ il existe un entier $k(X)$ tel que l'inclusion*

$$(\bar{L}_{k-1,k})_X \rightarrow [(L_V)_{k-1,k}]_X$$

est un isomorphisme surjectif lorsque $k \geq k(X)$.

Revenons maintenant au problème initial de démontrer que $C_l(\mathcal{D})_X$ est un sous-complexe de $C(VP)_X$ pour l assez grand. Pour ceci considérons l'application

$$\begin{array}{ccc}
 J_\lambda \times_P (\wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes VP) & \xrightarrow{\Phi_k^p = j_\infty \times \text{Id}} & J \times_P (\wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes VP) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 J_\lambda & \xrightarrow{j_\infty} & J
 \end{array}$$

où $J = J_\infty$ et $j_\infty(j_\lambda \sigma(x)) = (j_k \sigma(x))_{k \geq 0}$. Compte tenu des identifications canoniques qui précèdent le diagramme (22.20), cette application se réécrit par

$$\wedge^p (T^* J_\lambda) \otimes S^k (T^* J_\lambda) \otimes (J_\lambda \times_P VP) \xrightarrow{\Phi_k^p} J \times_P (\wedge^p T^* \otimes S^k T^* \otimes VP),$$

et Φ_k^p est un isomorphisme sur chaque fibre (en fait l'identité). Considérons ensuite le complexe $C(J_\lambda \times_P VP) = (C_k^p(J_\lambda \times_P VP); \delta)$ où

$$C_k^p(J_\lambda \times_P VP) = \wedge^p (T^* J_\lambda) \otimes S^k (T^* J_\lambda) \otimes (J_\lambda \times_P VP).$$

La famille $\Phi = (\Phi_k^p)$ est une transformation naturelle du complexe $C(J_\lambda \times_P VP)$ vers le complexe $C(VP)$ qui sur chaque fibre est une équivalence (en fait l'identité). Posons finalement $C_l(L_V) = (C_k^p(L_V))$ où

$$C_k^p(L_V) = \begin{cases} \wedge^p (T^* J_\lambda) \otimes (L_V)_{k-1, k}, & k \geq l, \\ \wedge^p (T^* J_\lambda) \otimes S^k (T^* J_\lambda) \otimes (J_\lambda \times_P VP), & k < l. \end{cases}$$

$C_l(L_V)$ est une famille homogène de sous-fibrés du complexe $C(J_\lambda \times_P VP)$. Le lemme 22.3 et l'exactitude de (22.21) entraînent que

$$(22.24) \quad \Phi[C_l(L_V)_X] = C_l(\mathcal{D})_Y, \quad Y = j_\infty(X),$$

lorsque $l \geq k(X)$. Comme Φ est l'identité sur les fibres (moyennant les identifications canoniques), on réécrit (22.24) par

$$(22.25) \quad C_l(L_V)_X = C_l(\mathcal{D})_Y,$$

où les deux familles sont considérées plongées dans $(\wedge^p T_x^* \otimes S^k T_x^* \otimes VP)_y, p, k \geq 0$. Ceci montre que, lorsque $l \geq k(X)$, $C_l(\mathcal{D})_Y$ est un sous-complexe de $C(VP)_Y$ si et seulement si $C_l(L_V)_X$ est un sous-complexe de $C(J_\lambda \times_P VP)_X$. L'application $j_\infty: J_\lambda \rightarrow J$ étant surjective (théorème de Borel) il suffira de démontrer l'assertion pour $C_l(L_V)_X$. Nous imposons maintenant la première condition de régularité dont le but est pouvoir appliquer les techniques de la section B.

H_1 : Il existe un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$ le fibré $(L_V)_k$ de base J_λ est de rang localement constant (i.e., non singulier).

Remarque. Cette hypothèse est équivalente à supposer que $(L_V)_{k_1}$ et $(L_V)_{k,k+1}$, $k \geq k_1$, sont des fibrés non singuliers.

Lemme 22.4. *Pour tout $l \geq k_1$, $C_l(L_V)$ est un sous-complexe de $C(J_\lambda \times_P VP)$.*

Démonstration. Considérons le complexe (cf. B, § 22)

$$0 \longrightarrow J_\lambda \times_P VP \xrightarrow{j_k} J_k(J_\lambda \times_P VP) \xrightarrow{D} (T^*J_\lambda) \otimes J_{k-1}(J_\lambda \times_P VP) \xrightarrow{D} \dots$$

relatif au fibré vectoriel $J_\lambda \times_P VP$ de base J_λ . Nous allons montrer que la famille $(R_k)_{k \geq 0}$ de base J_λ

$$R_k = \begin{cases} (L_V)_k, & k \geq k_1, \\ J_k(J_\lambda \times_P VP), & k < k_1, \end{cases}$$

vérifie les deux propriétés:

- (i) $\rho_{k,k+1}R_{k+1} \subset R_k$,
- (ii) $D(R_{k+1}) \subset (T^*J_\lambda) \otimes R_k$.

Supposons pour l'instant qu'il en soit ainsi. La famille (R_k) induit un diagramme analogue à (22.10) où la ligne supérieure est formée par les termes $C_h^p(L_V)$ correspondant à la famille $C_l(L_V)$. Comme chaque $C_h^p(L_V)$ est un fibré non singulier (sauf éventuellement pour $h = k_1$), la ligne supérieure de (22.10) induit la suite de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow C_k^0(L_V) \xrightarrow{\delta} C_{k-1}^1(L_V) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C_{k-n}^n(L_V) \longrightarrow 0$$

(où le cas $h = k_1$ est évident car $C_{k_1-1}^p(L_V) = C_{k_1-1}^p(J_\lambda \times_P VP)$). Or ceci veut bien dire que $C_l(L_V)$ est un sous-complexe de $C(J_\lambda \times_P VP)$. Il nous reste donc à démontrer les deux propriétés (i) et (ii). La première est évidente car

$$(22.26) \quad \rho_{k,k+1}[(L_V)_{k+1}] = (L_V)_k .$$

Démontrons ensuite la propriété (ii). Puisque $(L_V)_k$ est un fibré vectoriel non singulier (pour $k \geq k_1$), la suite

$$0 \longrightarrow (T^*J_\lambda) \otimes (L_V)_k \xrightarrow{\varepsilon_1} J_1[(L_V)_k] \xrightarrow{\beta_1} (L_V)_k \longrightarrow 0$$

est exacte. Par conséquent il suffira de montrer que $D\tau \in J_1[(L_V)_k]$ pour tout $\tau \in (L_V)_{k+1}$. La relation (22.26) entraîne tout de suite que $j_1(\rho_{k,k+1}\tau) \in J_1[(L_V)_k]$. Pour montrer que $\iota_{k+1} \circ \tau \in J_1[(L_V)_k]$ remarquons tout d'abord que la scission canonique (22.15) obtenue précédemment par transport de la ligne supérieure de (13.1) peut en fait être obtenue de la façon suivante. A l'aide de définitions

analogues à celles du § 13, on définit la scission canonique (suite exacte scindée) au niveau J_λ

$$(22.27) \quad 0 \overset{\longleftarrow}{\dashrightarrow} J_\lambda \times_P VP \overset{i}{\underset{S}{\dashrightarrow}} J_\lambda \times_P TP \overset{T\pi}{\underset{\Sigma}{\dashrightarrow}} TJ_\lambda \overset{\longleftarrow}{\dashrightarrow} 0 ,$$

où cette fois-ci $\Sigma(v) = (X, T\sigma \circ T\alpha(v))$, $X = j_\lambda \sigma(x)$, $v \in T_X J_\lambda$ et $S(X, u) = (X, u - T\sigma \circ T\pi(u))$. Une vérification directe montre que (22.15) est l'extension canonique aux k -jets de la suite (22.27). La scission (22.27) s'étend aux germes en la scission

$$(22.28) \quad 0 \overset{\longleftarrow}{\dashrightarrow} J_\lambda(J_\lambda \times_P VP) \overset{J_\lambda i}{\underset{J_\lambda S}{\dashrightarrow}} J_\lambda(J_\lambda \times_P TP) \overset{J_\lambda T\pi}{\underset{J_\lambda \Sigma}{\dashrightarrow}} J_\lambda(TJ_\lambda) \overset{\longleftarrow}{\dashrightarrow} 0 ,$$

et cette dernière entraîne une décomposition en somme directe

$$J_\lambda(J_\lambda \times_P TP) = J_\lambda(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} J_\lambda \Sigma[J_\lambda(TJ_\lambda)] .$$

Indiquons par $L_V = (J_\lambda i \circ J_\lambda S)(L)$ la projection de L dans la composante verticale $J_\lambda(J_\lambda \times_P VP)$, L étant le faisceau de Lie réduit associé à \mathcal{L} . Un calcul direct montre que $(L_V)_k = J_k(L_V)$ par conséquent tout $X_k \in (L_V)_k$ s'écrit comme $X_k = j_k \mu(X)$ où μ est une section locale de L_V . On en déduit en particulier que

$$\iota_k X_k = j_1(j_{k-1} \mu)(X) \in J_1[(L_V)_{k-1}] ,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous obtenons ainsi le

Lemme 22.5. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant l'hypothèse H_1 . Pour tout $X \in J$ il existe un entier $l(X)$ tel que $C_l(\Delta)_X$ est un sous-complexe de $C(VP)_X$ lorsque $l \geq l(X)$.*

Ce lemme joint au lemme 22.1 entraîne le

Théorème 22.1 (de stabilité asymptotique). *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant l'hypothèse H_1 . Pour tout $X \in J$ il existe un entier $k_1(X)$ tel que le complexe $C_{l(X)}(\Delta)_X$ est 1-acyclique à l'ordre $k_1(X)$.*

Le lemme 22.2 entraîne de même que pour tout $X \in J$ il existe un entier $k_2(X)$ tel que $C_{l(X)}(\Delta)_X$ est involutif à l'ordre $k_2(X)$. Pourtant cette propriété ne sera utilisée que dans les applications.

Remarquons que le théorème de stabilité asymptotique est un résultat concernant des données au dessus de J ou même au dessus des variétés J_k , par contre la méthode de démonstration utilisée consiste essentiellement à ramener toutes les données au dessus de J_1 . Cette méthode, en soi artificielle, a pour inconvénient majeur le fait que l'hypothèse H_1 , portant sur des fibrés de base J_λ , est à priori de vérification non aisée. Il est pourtant possible de refaire

toute la démonstration en n'utilisant que J est les variétés J_k . Pour ceci on remarquera que le point essentiel de la démonstration est la réduction (22.19) ainsi que le diagramme (22.22) qui permet, pour k assez grand, de remplacer $\Delta_{k,k+1}$ par $(L_V)_{k,k+1}$ et ensuite d'appliquer les méthodes de Spencer (partie B de cette section) à $(L_V)_k$ ce dernier étant un sous-fibré d'un fibré de jets à savoir $J_k(J_\lambda \times_P TV)$. Or, la réduction (22.19) s'obtient également au niveau J_{k+1} en utilisant la suite supérieure de (13.1) et le théorème 13.1. On obtient le diagramme commutatif et exact :

$$(22.29) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_{k+1} \times_M J_k^0 TM & \xrightarrow{\Sigma_k} & (J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP) \times_{J_{k+1}} \Sigma_k(J_{k+1} \times_M J_k TM) & \xrightarrow{\nu_k} & J_{k+1} \times_{J_k} TJ_k \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \text{Id} \times (\beta \circ \tilde{J}_k T\pi) & & \downarrow \text{Id} \\ & & 0 & \longrightarrow & (J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP) \times_M TM & \xrightarrow{\nu_k} & J_{k+1} \times_{J_k} TJ_k \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ensuite, on remarque que $J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{L}_k$ est un sous-fibré de $J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP$ par conséquent se projette en un sous-fibré, noté encore par \bar{L}_k , de $(J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP) \times_M TM$ et le diagramme (22.21) se recopie au niveau J_{k+1} . Finalement, si l'on indique par $(\tilde{L}_V)_k$ la projection de $J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{L}_k$, ou de \bar{L}_k , dans la composante verticale $J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP$ on obtient l'analogie du diagramme (22.22) au niveau J_{k+1} où les $\bar{\eta}_k$ sont tous des sous-fibrés de $J_{k+1} \times_M TM$. L'argument des suites stationnaires subsiste d'où, pour k assez grand, on peut remplacer $\Delta_{k,k+1}$ par $(\tilde{L}_V)_{k,k+1}$, ce dernier fibré étant en fait défini sur J_{k+1} (cf. (13.2)). Reste à appliquer les méthodes de Spencer au sous-fibré $(\tilde{L}_V)_k$ de $J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP$. Or, $\tilde{J}_k VP$ est d'une part un fibré de jets de base M , à savoir, le fibré des k -

jets de sections locales de la fibration de Lie $\eta: VP \xrightarrow{P} P \xrightarrow{\pi} M$ et d'autre part un fibré vectoriel de base J_k . Les méthodes de la partie B de cette section ne s'appliquent pas telles quelles, il est nécessaire de développer des techniques analogues pour les fibrations de Lie. Ceci a été fait dans [23]. On montre en particulier que le complexe des opérateurs D de Spencer ainsi obtenu est canoniquement isomorphe au complexe de Spencer habituel sur J_λ pour le fibré image réciproque (d'où la raison de se placer sur J_λ). Finalement, ces techniques s'appliquent moyennant l'hypothèse de régularité

H'_1 : Il existe un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$ le fibré $(\tilde{L}_V)_k$ de base J_{k+1} est de rang localement constant.

L'hypothèse H'_1 entraîne H_1 car $\varphi[(L_V)_k] = (\tilde{L}_V)_k$ et la restriction

$$\varphi: (L_V)_k \rightarrow (\tilde{L}_V)_k$$

est un morphisme strict (cf. (22.2)). Comme le rang d'un fibré non singulier est constant sur chaque composante connexe de la base, on voit facilement que H_1 entraîne H'_1 c'est-à-dire les deux hypothèses sont équivalentes. H'_1 semble plus maniable.

23. Le théorème de Lie

Le théorème de Lie donne une description du comportement asymptotique (i.e., pour k grand) des invariants différentiels d'un faisceau de Lie \mathcal{L} par rapport aux dérivations formelles admissibles. Ces propriétés ont été découvertes par Sophus Lie qui les trouvait suffisamment évidentes pour ne même pas leur donner un énoncé précis. Arnold Tresse, dans sa thèse [65], a manifesté le souci de les énoncer et démontrer bien que sa présentation soit légèrement obscure surtout en ce qui concerne les hypothèses. Nous allons présenter le théorème sous diverses formes qui sont utiles dans les applications. Les hypothèses peu restrictives manifestent toujours des conditions de régularité.

A. Le prolongement algébrique. A présent il nous est utile de faire quelques considérations de nature algébrique (cf. [2], [17], [30], [48] et [61]). Soit K un corps commutatif de caractéristique zero et V, W deux K -espaces vectoriels de dimension finie. Pour diminuer le nombre d'identifications, nous considérons SV comme l'algèbre des tenseurs symétriques de V (c'est-à-dire plongée dans $\otimes V$) munie de la loi " \vee " définie par l'opérateur de symétrisation où l'on garde le coefficient $1/p!$. Les définitions et constructions qui suivent seront faites par rapport à SV^* car c'est ainsi qu'elles trouvent leur application ultérieure. Néanmoins, toutes ces constructions restent valables lorsqu'on remplace V^* par V et δ par un opérateur analogue.

Soit $E \subset S^k V^* \otimes W$ un sous-espace vectoriel. On définit le *prolongement algébrique* d'ordre l (ou *espace déduit* d'ordre l) de E par la formule

$$(23.1) \quad p_l(E) = [(\otimes^l V^*) \otimes E] \cap [S^{k+l} V^* \otimes W]$$

les deux espaces $(\otimes^l V^*) \otimes E$ et $S^{k+l} V^* \otimes W$ étant considérés plongés dans $(\otimes^{k+l} V^*) \otimes W$. On a $p_0(E) = E$ et on vérifie aisément que $p_r(p_l(E)) = p_{r+l}(E)$. En particulier, si l'on écrit $p_1 = p$, alors

$$(23.2) \quad p_l(E) = p(p \cdots p(E) \cdots)$$

ou le 1-prolongement p est itéré l -fois. Nous allons maintenant donner une deuxième définition équivalente de $p(E)$ qui en vertu de (23.2) fournira une définition récurrente de $p_l(E)$.

Il existe un morphisme K -linéaire unique

$$D : V \rightarrow \chi(SV^*)$$

tel que la dérivation $D_v, v \in V$, prolonge la forme linéaire $v \in \text{Hom}(V^*, K)$. On a

$$D_v : S^k V^* \rightarrow S^{k-1} V^*$$

et

$$(23.3) \quad D_v(s_1 \vee \dots \vee s_k) = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_1 \vee \dots \vee \hat{s}_i \vee \dots \vee s_k ,$$

où $s_i \in V^*$. Si $i(v)$ indique le produit intérieur opérant sur les éléments de SV^* , ces éléments étant considérés comme des formes multilinéaires symétriques sur V , alors $D_v|S^kV^* = ki(v)|S^kV^*$. La dérivation D_v s'étend à un morphisme K -linéaire

$$(23.4) \quad D_v = D_v \otimes \text{Id} : SV^* \otimes W \rightarrow SV^* \otimes W .$$

Lorsque $K = \mathbf{R}$, on voit facilement que $D_v s, s \in SV^* \otimes W$, est la dérivée suivant le vecteur v de la fonction polynomiale s définie sur V (cf. § 22-B). Considérons d'autre part l'injection canonique

$$a : S^{k+1}V^* \otimes W \rightarrow V^* \otimes S^kV^* \otimes W$$

qui consiste à symétriser la partie symétrique de $x \in S^{k+1}V^* \otimes W$ par le sous-groupe de \mathfrak{G}_{k+1} qui laisse fixe la première lettre. Il est clair que x ne change pas et on récolte des tenseurs symétriques d'ordre k . Si l'on considère les espaces $S^{k+1}V^* \otimes W$ et $V^* \otimes S^kV^* \otimes W$ plongés dans $(\bigotimes^{k+1} V^*) \otimes W$, l'application a est tout simplement l'inclusion. Ecrivons $V^* \otimes S^kV^* \otimes W = \text{Hom}(V, S^kV^* \otimes W)$. L'injection a est donnée par

$$(23.5) \quad a(x) : v \in V \mapsto \frac{1}{k+1} D_v(x) \in S^kV^* \otimes W .$$

Reprenons l'application (22.3) dans le cas particulier

$$\delta : S^{k+1}V^* \otimes W \rightarrow V^* \otimes S^kV^* \otimes W .$$

De (22.4), (23.3) et (23.4) on déduit que $\delta(x)(v) = D_v(x)$ par conséquent

$$(23.6) \quad a = \delta / (k + 1) .$$

Ceci dit, posons

$$(23.7) \quad \tilde{p}(E) = \{u \in \text{Hom}(V, E) \mid u(v)(w) - u(w)(v) = 0\} ,$$

où E est identifié à $a(E) \subset \text{Hom}(V, S^kV^* \otimes W)$ donc il y a un sens d'écrire $u(v)(w) = \langle w, u(v) \rangle$. Montrons que $\tilde{p}(E) = a(p(E))$. En effet

$$(23.8) \quad p(E) = \{x \in S^{k+1}V^* \otimes W \mid a(x) \in V^* \otimes E\} ,$$

et par conséquent

$$(23.9) \quad p(E) = \{x \in S^{k+1}V^* \otimes W \mid a(x) \in \text{Hom}(V, E)\} .$$

Ecrivons ensuite $S^k V^* \otimes W = L_{k,s}(V, W)$. Pour que $u \in \text{Hom}(V, L_{k,s}(V, W)) \subset L_{k+1}(V, W)$ soit une $(k + 1)$ -forme symétrique, il faut et il suffit que u soit symétrique en les deux premières variables car elle l'est déjà en les k dernières. Comme $\text{Hom}(V, E) \subset \text{Hom}(V, L_{k,s}(V, W))$ ceci achève la démonstration. La relation (23.7) est la définition classique de l'espace déduit de E . La discussion précédente montre que la suite

$$(23.10) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{p}(E) \xrightarrow{a} V^* \otimes E \xrightarrow{A} \wedge^2 V^* \otimes S^{k-1} V^* \otimes W$$

est exacte où A est l'opérateur d'antisymétrisation en les deux premières variables (où l'on identifie E avec $a(E) \subset V^* \otimes S^{k-1} V^* \otimes W$). A l'aide des formules (22.6) et (23.6), ou encore par un calcul direct, on montre que

$$(23.11) \quad A = -\delta/k .$$

Or, ceci permet de remplacer (23.10) par la suite exacte

$$(23.12) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{p}(E) \xrightarrow{\delta} V^* \otimes E \xrightarrow{\delta} \wedge^2 V^* \otimes S^{k-1} V^* \otimes W .$$

Ce dernier résultat est par ailleurs une conséquence immédiate de (23.8) et de l'exactitude de $(22.5)_{k+1}$. En effet, l'élément $y \in V^* \otimes E \subset V^* \otimes S^k V^* \otimes W$ est de la forme $y = a(x) = \delta(x)/(k + 1)$ avec $x \in S^{k+1} V^* \otimes E$ si et seulement si $\delta(y) = 0$.

Prenons maintenant un faisceau de Lie \mathcal{L} et soit $C_l(\mathcal{L})$ la famille homogène correspondante (cf. § 22). $X \in J$ étant fixé, chaque $C_k^p(\mathcal{L})_X, k \geq l$, s'identifie au sous-espace $\wedge^p T_x^* \otimes (\mathcal{A}_{k-1,k})_{X_k}$ de $\wedge^p T_x^* \otimes S^k T_x^* \otimes VP_y$ où $x = \alpha(X)$, $y = \beta(X)$ et $X_k = \rho_k(X)$. Le lemme 22.5 est équivalent, compte tenu de (22.6), à dire que la première flèche δ de la suite $(22.5)_{k+1}$, avec $V = T_x$ et $W = VP_y$, se restreint pour $k \geq l(X)$ à

$$(23.13) \quad 0 \longrightarrow (\mathcal{A}_{k,k+1})_{X_{k+1}} \xrightarrow{\delta} T_x^* \otimes (\mathcal{A}_{k-1,k})_{X_k} .$$

Or, l'exactitude de (23.12) entraîne que cette dernière propriété est équivalente à

$$(\mathcal{A}_{k,k+1})_{X_{k+1}} \subset \mathfrak{p}(\mathcal{A}_{k-1,k})_{X_k} .$$

Le lemme 22.5 se réécrit par le

Lemme 23.1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant l'hypothèse H_1 . Pour tout $X \in J$ il existe un entier $l(X)$ tel que*

$$(\mathcal{A}_{k,k+1})_{X_{k+1}} \subset \mathfrak{p}(\mathcal{A}_{k-1,k})_{X_k} ,$$

lorsque $k \geq l(X)$.

Remarquons ensuite que la 1-acyclicité de $C_{l(X)}(\mathcal{A})_X$ à l'ordre $k_1(X)$ signifie que la suite

$$(23.14)_k \quad 0 \longrightarrow (\mathcal{A}_{k,k+1})_{X_{k+1}} \xrightarrow{\delta} T_x^* \otimes (\mathcal{A}_{k-1,k})_{X_k} \\ \xrightarrow{\delta} \wedge^2 T_x^* \otimes S^{k-2} T_x^* \otimes VP_y$$

est exacte pour $k \geq k_1(X)$. On trouve ainsi un énoncé équivalent du théorème 22.1.

Théorème 23.1 (de stabilité asymptotique). *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant l'hypothèse H_1 . Pour tout $X \in J$ il existe un entier $k_1(X)$ tel que*

$$(\mathcal{A}_{k,k+1})_{X_{k+1}} = \wp(\mathcal{A}_{k-1,k})_{X_k},$$

lorsque $k \geq k_1(X)$.

B. Relation entre le prolongement algébrique et les dérivations formelles. Reprenons la suite exacte de la proposition 15.2 et considérons $Y \in J_{k+1}$, $X = \rho_{k,k+1} Y \in J_k$, $x = \alpha(X)$ et $y = \beta(X)$. Soit $E \subset [J_k \times_P S^k T_x^* \otimes VP]_X = S^k T_x^* \otimes VP_y$, $\wp(E) \subset [J_{k+1} \times_P S^{k+1} T_x^* \otimes VP]_Y = S^{k+1} T_x^* \otimes VP_y$, $F = \varepsilon_k(E) \subset \ker_X T\rho_{k-1,k}$ et posons $\wp(F) = \varepsilon_{k+1}\wp(E) \subset \ker_Y T\rho_{k,k+1}$. Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille quelconque de fonctions toutes définies dans des voisinages de X et supposons que

$$E = (\ker_X T\rho_{k-1,k}) \cap \ker_X (df_\alpha),$$

où

$$\ker_X (df_\alpha) = \{v \in T_X J_k \mid \langle v, df_\alpha \rangle = 0, \forall \alpha \in I\}.$$

Prenons finalement un système de coordonnées locales (x^i) de M au voisinage de x et indiquons par ∂_i les dérivations formelles associées aux champs de vecteurs $\partial/\partial x^i$ (éléments de \mathcal{R}_{-1}).

Lemme 23.2.

$$\wp(F) = (\ker_Y T\rho_{k,k+1}) \cap \ker_Y (\partial_i df_\alpha)_{\alpha \in I, 1 \leq i \leq \dim M}.$$

La démonstration de ce lemme est une vérification directe en utilisant le diagramme (14.1) et en se plaçant dans le système de coordonnées locales (x^i) . On écrira les équations qui définissent les sous-espaces du premier et du second membre et on vérifiera que ces équations sont équivalentes (cf. [23], [30]).

Prenons ensuite m relèvements locaux $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ de α_k définis dans un voisinage U de X , i.e., $\varphi_i : U \rightarrow TM$, $r \circ \varphi_i = \alpha_k$ et $r : TM \rightarrow M$ la projection canonique. Supposons en outre que $\{\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)\}$ soit une base ou plus généralement un système de générateurs de $T_x M$. Le lemme précédent et la formule (cf. § 5, propriété (6))

$$\partial_{f\phi} = f\partial_\phi + df \wedge i_\phi$$

entraînent le

Lemme 23.3.

$$p(F) = (\ker_Y T\rho_{k,k+1}) \cap \ker_Y (\partial_{\varphi_i} df_\alpha)_{\alpha \in I, 1 \leq i \leq m} .$$

Indiquons finalement par $\underline{\mathcal{R}}_k$ le faisceau des germes de α_k -relèvements dans TM (cf. § 10).

Lemme 23.4.

$$p(F) = (\ker_Y T\rho_{k,k+1}) \cap (\ker_Y (\partial_\varphi df_\alpha), \varphi \in (\underline{\mathcal{R}}_k)_X) .$$

Considérons maintenant un faisceau de Lie \mathcal{L} sur π . Soit $X \in J, X = (X_k)_{k \geq -1}, X_k \in J_k$ et supposons que

a) $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ contient m éléments φ_i tels que $\{\beta\varphi_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est une base de $T_x M$, où β est la projection but pour les germes (cf. § 21).

b) Il existe un entier k tel que

(i) $\varphi_i \in \mathfrak{R}_k, 1 \leq i \leq m,$

(ii) $(\Delta_k)_{X_k} = \ker_{X_k} \{df | f \in \mathcal{F}_k\},$

(iii) $(\Delta_{k,k+1})_{X_{k+1}} = p(\Delta_{k-1,k})_{X_k}.$

Comme $\dim \Delta_k$ est semi-continue inférieurement et comme la dimension d'un noyau est semi-continue supérieurement, on en déduit que l'hypothèse (ii) est équivalente à supposer que Δ_k est de dimension constante et complètement intégrable dans un voisinage de X_k .

Lemme 23.5.

$$(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} = \ker_{X_{k+1}} \{\rho_{k,k+1}^* df, \partial_{\varphi_i} df | f \in \mathcal{F}_k, 1 \leq i \leq m\} .$$

Démonstration. Comme

$$(\Delta_{k-1,k})_{X_k} = (\ker_{X_k} T\rho_{k-1,k}) \cap (\Delta_k)_{X_k} = (\ker_{X_k} T\rho_{k-1,k}) \cap \ker_{X_k} \{df | f \in \mathcal{F}_k\} ,$$

on retrouve, en prenant au besoin des relèvements locaux de α_k qui représentent les germes φ_i , les hypothèses du lemme 23.3. Par conséquent

$$(\Delta_{k,k+1})_{X_{k+1}} = (\ker_{X_{k+1}} T\rho_{k,k+1}) \cap \ker_{X_{k+1}} \{\partial_{\varphi_i} df | f \in \mathcal{F}_k\} .$$

Comme $\partial_{\varphi_i} (\mathcal{F}_k)_{X_k} \subset (\mathcal{F}_{k+1})_{X_{k+1}}$ on a

$$(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} \subset \ker_{X_{k+1}} \{\rho_{k,k+1}^* df, \partial_{\varphi_i} df | f \in \mathcal{F}_k\} = A .$$

Or,

$$T\rho_{k,k+1}(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} = T\rho_{k,k+1}A = (\Delta_k)_{X_k}$$

et

$$(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} \cap \ker_{X_{k+1}} T\rho_{k,k+1} = A \cap \ker_{X_{k+1}} T\rho_{k,k+1} = (\Delta_{k,k+1})_{X_{k+1}}$$

par conséquent $(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} = A$.

Remarque. Le lemme ci-dessus entraîne, par semi-continuité du rang, que Δ_{k+1} est de dimension constante et complètement intégrable dans un voisinage de X_{k+1} (on rappelle que $\partial_\varphi \circ d = d \circ \partial_\varphi$). En plus, il résulte du lemme 23.3 que

$$(\Delta_{k,k+1})_{Y_{k+1}} = p(\Delta_{k-1,k})_{Y_k}$$

pour Y_{k+1} dans un voisinage de X_{k+1} . On voit ainsi que les hypothèses ponctuelles a) et b) entraînent des propriétés locales (ii) et (iii).

Corollaire 1.

$$(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} = \ker_{X_{k+1}} \{\rho_{k,k+1}^* df, \partial_\varphi df \mid f \in \mathcal{F}_k, \varphi \in \mathfrak{N}_k(\mathcal{L})_X\}.$$

Remplaçons ensuite l'hypothèse (iii) par la condition plus forte

$$(iv) \quad (\Delta_{l,l+1})_{X_{l+1}} = p(\Delta_{l-1,l})_{X_l}, \quad l \geq k.$$

Cette hypothèse signifie que $C_k(\Delta)_X$ est un sous-complexe de $C(VP)_X$ qui est 1-acyclique à l'ordre k .

Corollaire 2. Pour tout $l \geq k$ on a

$$(\Delta_l)_{X_l} = \ker_{X_l} \{df \mid f \in \mathcal{F}_l\}$$

et

$$\begin{aligned} (\Delta_{l+1})_{X_{l+1}} &= \ker_{X_{l+1}} \{\rho_{l,l+1}^* df, \partial_{\varphi_i} df \mid f \in \mathcal{F}_l, 1 \leq i \leq m\} \\ &= \ker_{X_{l+1}} \{\rho_{l,l+1}^* df, \partial_\varphi df \mid f \in \mathcal{F}_l, \varphi \in \mathfrak{N}_k(\mathcal{L})_X\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Le lemme 23.5 montre que

$$(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} = \ker_{X_{k+1}} \{df \mid f \in \mathcal{F}_{k+1}\}$$

par conséquent on retrouve pour $(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}}$ les mêmes hypothèses a) et b). On raisonne ensuite par récurrence.

Corollaire 3. Pour tout $l \geq k$

$$(\Delta_l)_{X_l} = \ker_{X_l} \{\rho_{k+s,l}^* \partial_{\varphi_1} \partial_{\varphi_2} \cdots \partial_{\varphi_s} df \mid f \in \mathcal{F}_k, \varphi_i \in \mathfrak{N}_k(\mathcal{L})_X, 0 \leq s \leq l - k\}.$$

Donnons-nous maintenant un système complet $\{f_1, \dots, f_\mu\}$ de germes d'intégrales premières indépendantes de Δ_k au point X_k . Le corollaire ci-dessus est équivalent au

Corollaire 4. Pour tout $l \geq k$

$$(\Delta_l)_{X_l} = \ker_{X_l} \{ \rho_{k+s,l}^* \partial_{\varphi_{i(1)}} \partial_{\varphi_{i(2)}} \cdots \partial_{\varphi_{i(s)}} df_j \mid 1 \leq j \leq \mu, 0 \leq s \leq l - k, 1 \leq i(1), \dots, i(s) \leq m \},$$

où $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X$ vérifiant la condition a).

Corollaire 5. Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π , fixons un élément $X \in J$ et supposons que $\beta(\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X) = T_x M$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (I) Il existe un entier k tel que
 - a) Δ_k est de dimension constante et complètement intégrable dans un voisinage de X_k ,
 - b) $(\Delta_{l,l+1})_{X_{l+1}} = \mathfrak{p}(\Delta_{l-1,l})_{X_l}, l \geq k$.
- (II) Il existe un entier k tel que
 - a) Δ_l est de dimension constante et complètement intégrable dans un voisinage de $X_l, l \geq k$,
 - b) *Idem.*
- (III) Il existe un entier k tel que la formule du corollaire 3 soit vérifiée pour $l \geq k$.
- (IV) Il existe un entier k tel que la formule du corollaire 4 soit vérifiée pour $l \geq k$, où $\{f_1, \dots, f_\mu\}$ est une famille quelconque d'éléments de $(\mathcal{F}_k)_{X_k}$ et $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X$ tel que $\{\beta\varphi_1, \dots, \beta\varphi_m\}$ est une base de $T_x M$.

C. *Les théorèmes de finitude.* La discussion précédente met en évidence la nature des hypothèses qu'il faudra imposer de telle sorte à obtenir de bonnes propriétés pour les invariants différentiels. Tout d'abord nous imposons une condition de régularité et d'intégrabilité pour les Δ_k à savoir

H_2 : Il existe un entier k_2 tel que, pour $k \geq k_2$, le champ d'éléments de contact Δ_k est de dimension localement constante (i.e., Δ_k est un sous-fibré non singulier de TJ_k) et complètement intégrable.

En suite nous imposons une condition qui assure un nombre suffisant de dérivations formelles admissibles,

H_3 : Pour tout $X \in J, \beta(\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X) = T_x M$ où $x = \alpha(X)$. On pose $k_3(X) = \inf \{k \mid \beta(\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X) = T_x M\}$.

Le champ $\Delta_k, k \geq k_2$, définit un feuilletage Φ_k sur J_k dont les feuilles sont les trajectoires du pseudogroupe de transformations finies obtenues par intégration des sections locales du faisceau de Lie \mathcal{L}_k ou encore, les trajectoires du prolongement d'ordre k du pseudogroupe de transformations finies obtenues par intégration des sections locales du faisceau de Lie \mathcal{L} .

Le théorème de Frobenius entraîne en particulier le

Lemme 23.6. Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant l'hypothèse H_2 . Pour tout $k \geq k_2$ et tout $X_k \in J_k$ on a

$$(\Delta_k)_{X_k} = \ker_{X_k} \{df \mid f \in \mathcal{F}_k\}.$$

Remarquons ensuite que la condition d'intégrabilité figurant dans H_2 sera

désormais vérifiée par une classe remarquable de faisceaux de Lie à savoir ceux qui sont stables par rapport au crochet de champs de vecteurs.

Proposition 23.1. *Soit \mathcal{L} un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie de \underline{TP} . Si Δ_k est un sous-fibré non singulier de TJ_k , il est complètement intégrable.*

En effet, $\bar{\rho}_k$ est un morphisme d'algèbres de Lie (cf. § 6 et § 15) par conséquent \mathcal{L}_k est un sous-faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie de \underline{TJ}_k . La conclusion s'en suit car \mathcal{L}_k est un système de générateurs, sur \mathcal{O}_k des germes de champs de vecteurs qui appartiennent à Δ_k .

La proposition 23.1 n'admet pas de réciproque. En effet, il peut se faire que tous les Δ_k soient réguliers et complètement intégrables sans que \mathcal{L} soit stable par le crochet. Pour le voir, prenons le faisceau $\mathcal{L} = \underline{T(P, M)}$ des germes de champs π -projetables. \mathcal{L} est stable par le crochet et la proposition 12.3 nous dit que $\Delta_k = TJ_k$ pour tout $k \geq -1$. Or, il est trivial de construire, par adjonction d'un champ non projectable, un faisceau de Lie $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathbf{R}\xi$ qui n'est plus stable par le crochet (on prendra par exemple $\xi = y_1\partial/\partial x_1$). Les champs Δ'_k correspondants sont tous égaux à TJ_k par conséquent réguliers et complètement intégrables.

L'hypothèse H_3 assure qu'il existe m éléments $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ de $\mathfrak{R}_{k_3(X)}(\mathcal{L})_X$ tel que $\{\beta\varphi_1, \dots, \beta\varphi_m\}$ est une base de T_xM . La fonction $k_3(X)$ n'est pas forcément bornée. Lorsque ceci est le cas et lorsque la fonction $k_1(X)$ du théorème 23.1 est également bornée, le corollaire 5 du lemme 23.5 montre en fait que l'hypothèse H_2 est conséquence de conditions plus faibles portant sur un seul champ Δ_k . De façon précise on a la

Proposition 23.2. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π et supposons que*

- $\sup_X \{k_3(X), k_1(X)\} = \mu < \infty$,
- il existe un entier $l \geq \mu$ tel que Δ_l est de dimension localement constante et complètement intégrable.

Alors l'hypothèse H_2 est vérifiée pour $k_2 = l$.

Les hypothèses étant précisées, nous énonçons maintenant les théorèmes de finitude. On a tout d'abord la forme suivante.

Théorème 23.2 (de finitude). *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant les hypothèses H_i , $1 \leq i \leq 3$. Pour tout $X \in J$ il existe un entier $k(X)$ tel que*

- $(\Delta_k)_{X_k} = \ker_{X_k} \{df \mid f \in \mathcal{F}_k\}$, $k \geq k(X)$,
- $(\Delta_{k+1})_{X_{k+1}} = \ker_{X_{k+1}} \{\rho_{k,k+1}^* df, \partial_\varphi df \mid f \in \mathcal{F}_k, \varphi \in \mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X\}$, $k \geq k(X)$.

Démonstration. Il suffira de prendre pour $k(X)$ le maximum des trois nombres k_2 , $k_3(X)$ et $k_1(X)$ qui figurent respectivement dans les hypothèses H_2 et H_3 et dans l'énoncé du théorème 23.1. Remarquons que dans b) nous pouvons remplacer l'indice k de $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X$ par $k_3(X)$.

Corollaire 1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant les hypothèses H_i et fixons $X \in J$. Soit $\{f_1, \dots, f_\mu\}$ un système fondamental de germes d'intégrales premières de Δ_k au point X_k , $k \geq k(X)$, et $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{R}_{k_3(X)}(\mathcal{L})_X$ telle que $\{\beta\varphi_1, \dots, \beta\varphi_m\}$ soit une base de T_xM , $x = \alpha(X)$. Dans ces conditions on a, pour $l \geq k$, la formule récurrente*

$$(\Delta_l)_{X_l} = \ker_{X_l} \{ \rho_{k+s, l}^* \partial_{\varphi_{i(1)}} \cdots \partial_{\varphi_{i(s)}} df_j \mid 1 \leq j \leq \mu, \\ 0 \leq s \leq l - k, 1 \leq i(1), \dots, i(s) \leq m \}.$$

Considérons maintenant le faisceau $\underline{TJ}_k \simeq \chi(\mathcal{O}_k)$ des germes de champs de vecteurs de J_k et posons par définition

$$' \chi(\mathcal{S}_k) = \{ \xi \in \chi(\mathcal{O}_k) \mid \xi(\mathcal{S}_k) \subset \mathcal{S}_k \}.$$

Pour tout $X \in J_k$, la fibre $' \chi(\mathcal{S}_k)_X$ est une R -sous-algèbre de Lie et $(\mathcal{S}_k)_X$ -sous-module de $\chi(\mathcal{O}_k)_X$ et

$$' \chi(\mathcal{S}_k)_X = \{ \xi \in \chi(\mathcal{O}_k)_X \mid [\xi, \tilde{\mathfrak{p}}_k \theta] |_{\mathcal{S}_k} = 0, \theta \in \mathcal{L}_{\rho(X)} \}.$$

Lorsque $k \geq k_2$, $' \chi(\mathcal{S}_k)$ est un sous-faisceau de $\chi(\mathcal{O}_k)$ au sens topologique car il est égal au faisceau des germes de champs de vecteurs locaux de J_k qui laissent invariant le feuilletage Φ_k , propriété qui se traduit par le fait que $[\xi, \eta]$ est tangent au feuilletage pour tout germe de champ η tangent au feuilletage et par conséquent se traduit par un nombre fini de conditions. On montre également que le morphisme de restriction

$$(23.15) \quad ' \chi(\mathcal{S}_k) \rightarrow \chi(\mathcal{S}_k)$$

est surjectif pour $k \geq k_2$.

La forme suivante du théorème de finitude a été suggérée par J. -L. Koszul.

Théorème 23.3. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant les hypothèses H_i . Pour tout $X \in J$ il existe un entier $k(X)$ tel que la propriété suivante est vérifiée lorsque $k \geq k(X)$:*

Si $\xi \in ' \chi(\mathcal{S}_{k+1})_{X_{k+1}}$ s'annule sur $\rho_{k, k+1}^ \mathcal{S}_k$ et $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X \cdot \mathcal{S}_k$ alors $\xi |_{\mathcal{S}_{k+1}} = 0$, autrement dit, l'image de ξ par le morphisme de restriction (23.15) est nulle.*

Démonstration. Le théorème 23.2 entraîne que tout germe de champ de vecteurs de J_{k+1} nul sur $\rho_{k, k+1}^* \mathcal{S}_k$ et $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X \cdot \mathcal{S}_k$ est tangent au feuilletage Φ_{k+1} par conséquent annule \mathcal{S}_{k+1} . On pourra également remplacer l'indice k de $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X$ par $k_3(X)$.

Remarque. Considérons le cas particulier où $\mathcal{L} = 0$. Dans ce cas $\mathcal{S}_k = \mathcal{O}_k$, $' \chi(\mathcal{S}_k) = \chi(\mathcal{O}_k)$ et $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}_k$. Prenons un système de coordonnées locales (x^i, y^j) adapté à la fibration π et soit (x^i, y_a^j) le système coordonnées correspondant sur J_k (cf. § 4). Comme $\partial_i y_a^j = y_{a+1}^j$ on voit aussitôt que si $\xi \in \chi(\mathcal{O}_{k+1})$ est nul sur $\rho_{k, k+1}^* \mathcal{O}_k$ et $\mathfrak{R}_{-1} \cdot \mathcal{O}_k$, ξ est nul sur un système de coordonnées locales de J_{k+1} par conséquent $\xi = 0$. Le théorème 23.3 est une extension de cette remarque triviale à un faisceau de Lie \mathcal{L} et sera utilisée ultérieurement.

Adoptons les notations du corollaire 1. On obtient le

Corollaire 2. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant les hypothèses H_i et fixons $X \in J$. Pour tout $l \geq k \geq k(X)$ la propriété suivante est vérifiée :*

Si $\xi \in \chi(\mathcal{S}_l)_{X_l}$ s'annule sur $\rho_{k+s,l}^* \partial_{\varphi_{i(1)}} \cdots \partial_{\varphi_{i(s)}} f_j$, $1 \leq j \leq \mu$, $0 \leq s \leq l - k$, $1 \leq i(1), \dots, i(s) \leq m$ alors $\xi|_{\mathcal{S}_l} = 0$.

Nous énonçons finalement le théorème sous la forme de Sophus Lie. Pour ceci, adoptons le langage suivant. Soit M une variété et \mathcal{S} un sous-faisceau du faisceau structural \mathcal{O} de M . Un système de générateurs de \mathcal{S} au point $x \in M$ est une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{S}_x vérifiant la propriété suivante: tout $\varphi \in \mathcal{S}_x$ s'écrit sous la forme $\varphi = F(\varphi_{i(1)}, \dots, \varphi_{i(r)})$ où F est un germe de fonction à r variables et $1 \leq r < \infty$. Une base de \mathcal{S} au point $x \in M$ est un système de générateurs indépendants de \mathcal{S} au point x (i.e., les différentielles $d\varphi_i$ sont linéairement indépendantes au point x). Comme M est supposée de dimension finie, une base aura toujours un nombre fini d'éléments ce nombre étant au plus égal à $\dim M$. On dira qu'une partie $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$ engendre \mathcal{S} si

- (i) $\tilde{\mathcal{S}}$ se projette sur M par la projection du faisceau \mathcal{S} et
- (ii) $\tilde{\mathcal{S}}_x$ est un système de générateurs de \mathcal{S}_x pour tout $x \in M$.

Supposons maintenant que M est muni d'un feuilletage Φ de codimension μ et indiquons par \mathcal{S} le faisceau des germes d'intégrales premières de Φ . En tout point $x \in M$, \mathcal{S} admet une base qu'on appelle d'habitude un système fondamental de germes d'intégrales premières. Toute base a μ éléments et la condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$ d'éléments de \mathcal{S}_x soit une base est que cette famille soit indépendante au point x . Toute base en x s'étend en une base locale donnée par des sections de \mathcal{S} définies au voisinage de x . Une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{S}_x est un système de générateurs si et seulement si le rang des différentielles $d\varphi_i$ au point x est égal à μ . De tout système de générateurs on peut extraire une base. Tout système de générateurs en x s'étend en un système de générateurs locaux définis dans un voisinage de x .

Théorème 23.4 (Lie). Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant les hypothèses H_i . Pour tout $X \in J$ il existe un entier $k(X)$ tel que

- a) \mathcal{S}_k admet une base finie au point $X_k \in J_k$, $k \geq k(X)$,
- b) $[\rho_{k,k+1}^*(\mathcal{S}_k)_{X_k}] \cup [\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X \cdot (\mathcal{S}_k)_{X_k}]$ est un système de générateurs de $(\mathcal{S}_{k+1})_{X_{k+1}}$, $k \geq k(X)$.

Encore ici on pourra remplacer l'indice k de \mathfrak{R}_k par $k_3(X)$. Les notations étant celles du corollaire 1, on a le

Corollaire 3. Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant les hypothèses H_i et fixons $X \in J$. Pour tout $l \geq k \geq k(X)$, la famille $(\rho_{k+s,l}^* \partial_{\varphi_{i(1)}} \cdots \partial_{\varphi_{i(s)}} f_j)$, $i \leq j \leq \mu$, $0 \leq s \leq l - k$, $1 \leq i(1), \dots, i(s) \leq m$ engendre $(\mathcal{S}_l)_{X_l}$.

Le dernier corollaire montre que les invariants différentiels d'ordre $k \geq k(X)$ arbitraire s'obtiennent à partir d'un nombre fini d'invariants d'ordre $k(X)$ à l'aide de dérivations formelles admissibles successives. Ceci est le sens des théorèmes des finitude.

Les énoncés des théorèmes de finitude ainsi que leurs corollaires ont un aspect ponctuel. En prenant des représentants pour les germes, ils peuvent revêtir un aspect local. En effet, remarquons tout d'abord que dans l'énoncé

du théorème 23.2 on peut remplacer $f \in \mathcal{S}_k$ par un système fondamental $\{f_1, \dots, f_\mu\}$ de germes d'intégrales premières au point X_k et $\varphi \in \mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X$ par un système $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ d'éléments de $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})_X$ tel que $\{\beta\varphi_1, \dots, \beta\varphi_m\}$ soit une base de T_xM . Or, si on représente chaque germe f_i par une intégrale première locale F_i définie dans un voisinage de X_k et chaque germe φ_i par une section locale Φ_i de \mathfrak{R}_k définie dans un voisinage de X on voit aussitôt que la fonction $\partial_{\varphi_i}F_j$ est encore une intégrale première dans un voisinage de X_{k+1} car son germe en X_{k+1} est $\partial_{\varphi_i}f_j$. On remarquera pourtant que les sections Φ_i ne peuvent pas en général être choisies admissibles c'est-à-dire ne sont pas forcément des sections de $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L})$ car ce dernier n'est pas en général un faisceau au sens topologique. Le théorème 23.2 se réécrit sous sa version locale par le

Théorème 23.5. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant les hypothèses H_i . Pour tout $X \in J$ et tout entier $k \geq k(X)$ il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que*

- a) $\rho_{k+1,k} : \mathcal{U}_{k+1} \rightarrow \mathcal{V}_k = \rho(\mathcal{U}_{k+1})$ est une fibration,
- b) $(\Delta_k)_{Y_k} = \ker_{Y_k} \{df | f \in \mathcal{S}_k\}$, $Y_k \in \mathcal{V}_k$,
- c) $(\Delta_{k+1})_{Y_{k+1}} = \ker_{Y_{k+1}} \{\rho_{k,k+1}^* df, \partial_{\varphi_i} df | f \in \mathcal{S}_k, 1 \leq i \leq m\}$, $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$.

En effet, a) est une assertion triviale car $\rho_{k+1,k}$ est une submersion, b) est valable pour tout $Y_k \in J_k$ (cf. lemme 23.6), et c) est obtenu en prenant une base locale $\{F_i\}$ d'intégrales premières et en remarquant que $\partial_{\varphi_j}F(F_1, \dots, F_\mu) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}(F_1, \dots, F_\mu) \partial_{\varphi_j}F_i$ est une intégrale première de Δ_{k+1} . On remarquera

qu'il n'est pas possible en général de choisir les ouverts \mathcal{U}_k de telle sorte que $\rho_{k,k+1}(\mathcal{U}_{k+1}) = \mathcal{U}_k$. De même il peut se faire que $k(Y) > k(X)$ pour $Y \in J$ arbitrairement proche de X . C'est la raison pour laquelle la partie c) n'est pas une extension directe de la partie b) du théorème 23.2. Lorsque $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ est un faisceau (cf. § 25) nous pouvons remplacer $\partial_{\varphi_i}df$ par $\partial_\varphi df$, $\varphi \in \mathfrak{R}_k(\mathcal{L})$, le germe de dérivée formelle étant pris au point Y_{k+1} .

Le corollaire 1 se transcrit de la façon suivante.

Corollaire 4. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant les hypothèses H_i , fixons $X \in J$, soit $\{F_1, \dots, F_\mu\}$ un système fondamental d'intégrales premières de Δ_k définies dans un voisinage de X_k , $k \geq k(X)$ fixé, et $\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$ une famille de sections locales de $\mathfrak{R}_{k_0(X)}$ tel que les $\Phi_i(X)$ soient des germes de dérivations formelles admissibles dont les buts induisent une base de T_xM . Dans ces conditions, pour tout $l \geq k$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_l de X_l tel que*

- a) $\rho_{k,l} : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{V}_k = \rho(\mathcal{U}_l)$ est une fibration,
- b) $(\Delta_l)_{Y_l} = \ker_{Y_l} \{\rho_{k+s,l}^* \partial_{\varphi_{i(1)}} \dots \partial_{\varphi_{i(s)}} dF_j | 1 \leq j \leq \mu, 0 \leq s \leq l - k, 1 \leq i(1), \dots, i(s) \leq m\}$, $Y_l \in \mathcal{U}_l$.

On peut réécrire de façon entièrement analogue une version locale des théorèmes 23.3 et 23.4 ainsi que de leurs corollaires.

Remarque. Dans la partie B de cette section nous avons vu que la possibilité de déterminer la géométrie à l'ordre $k + 1$ au point X_{k+1} à l'aide de

celle à l'ordre k au point X_k (i.e., le lemme 23.5) repose essentiellement sur les trois conditions suivantes :

- i) régularité et complète intégrabilité de Δ_k au voisinage de X_k ,
- ii) existence de m germes $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ de variations infinitésimales de α_k au point X_k (germes de relèvements locaux de α_k dans TM au point X_k) qui soient admissibles c'est-à-dire transforment $(\mathcal{S}_k)_{X_k}$ dans $(\mathcal{S}_{k+1})_{X_{k+1}}$ et dont les buts induisent une base de $T_x M$,
- iii) $(\Delta_{k,k+1})_{X_{k+1}} = \mathfrak{p}(\Delta_{k-1,k})_{X_k}$.

Or, ces conditions étant vérifiées aux points X_{k+1} et X_k le sont aussi dans un voisinage et c'est précisément cette propriété qui permet d'écrire les versions locales des théorèmes de finitude. En utilisant la technique des dérivations formelles nous avons montré dans B (voir remarque suivant le lemme 23.5) que ces conditions entraînent la régularité et complète intégrabilité de Δ_{k+1} dans un voisinage de X_{k+1} . Quant à la condition ii), prenons des représentants Φ_i pour les germes φ_i , chaque Φ_i étant une variation infinitésimale locale de α_k définie dans un voisinage de X_k . Comme Δ_k est complètement intégrable, \mathcal{S}_k admet une base locale finie au voisinage de X_k et ceci, joint à la semi-continuité inférieure des rangs, montre qu'il existe un voisinage \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que pour tout point $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$ les germes des Φ_i en Y_{k+1} vérifient les conditions ii). En ce qui concerne la condition iii), son extension à un voisinage de X_{k+1} a été démontré dans B à l'aide des techniques de dérivation formelle (notamment l'utilisation du lemme 23.3). Cependant, cette propriété est une conséquence immédiate de la semi-continuité supérieure des dimensions des groupes de δ -cohomologie considérés comme espaces vectoriels réels. De façon précise, la condition iii) est équivalente à l'exactitude de la suite $(23.14)_k$ aux points X_{k+1} et X_k . Comme Δ_k est Δ_{k+1} sont réguliers, il en est de même du noyau $\Delta_{k,k+1}$ et par conséquent la dimension de l'image de la première flèche δ de $(23.14)_k$ est semi-continue inférieurement par rapport au point de base X_{k+1} . D'autre part, lorsque $\Delta_{k-1,k}$ est régulier la dimension du noyau de la deuxième flèche δ est semi-continue supérieurement par conséquent la dimension du groupe de δ -cohomologie est de même semi-continue supérieurement par rapport à X_{k+1} . Or $\Delta_{k-1,k}$ n'est pas en général régulier car ceci est équivalent à la régularité de Δ_{k-1} . Cependant, puisque Δ_k est régulier la dimension de $\Delta_{k-1,k}$, en tant que noyau, est semi-continue supérieurement et celle du noyau de la deuxième flèche δ de $(23.14)_k$ l'est aussi. Pour voir la dernière assertion on remarquera que le noyau de δ peut s'exprimer comme le noyau d'un nombre fini de formes linéaires dont les coefficients dépendent continûment (en fait de façon C^∞) du point de base X_k . On prendra l'ensemble des formes linéaires qui définissent localement

- a) le noyau de

$$\delta : J_k \times_P T^* \otimes S^k T^* \otimes VP \rightarrow J_k \times_P \wedge^2 T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes VP,$$

b) le sous-fibré éventuellement singulier $T^* \otimes \Delta_{k-1,k}$ de $J_k \times_P T^* \otimes S^k T^* \otimes VP$ (ce qui est possible car $\Delta_{k-1,k} = \Delta_k \cap \ker T\rho_{k-1,k}$ et Δ_k est régulier).

Les considérations ci-dessus montrent en particulier que les conditions i), ii) et iii) entraînent l'existence d'un voisinage ouvert \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que pour tout $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$ on a

$$(\Delta_{k+1})_{Y_{k+1}} = \ker_{Y_{k+1}} \{ \rho_{k,k+1}^* df, \partial_{\theta_i} df \mid f \in \mathcal{I}_k, 1 \leq i \leq m \},$$

ceci étant une extension locale du lemme 23.5.

Prenons finalement un jet $X \in J$ et m éléments admissibles $\varphi_i \in \mathfrak{N}_{k_3(X)}(\mathcal{L})_X$ dont les buts induisent une base de $T_x M$. Soient Φ_i , $1 \leq i \leq m$, des sections locales de $\mathfrak{N}_{k_3(X)}$ définies dans un voisinage de X et telles que $\Phi_i(X) = \varphi_i$. Bien que les sections Φ_i ne soient pas forcément admissibles en les points $Y \in J$ voisins de X , elles induisent à chaque ordre $k \geq k(X)$ des variations infinitésimales locales de α_k qui sont admissibles. De façon précise on a la

Proposition 23.3. *Pour tout $k \geq k(X)$ il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que*

- a) $\rho_{k,k+1}: \mathcal{U}_{k+1} \rightarrow \mathcal{V}_k$ est une fibration,
- b) $(\Delta_{k,k+1})_{Y_{k+1}} = \mathfrak{p}(\Delta_{k-1,k})_{Y_k}$, $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$,
- c) $[\partial_{\theta_i} \mathcal{I}_k]_{Y_{k+1}} \subset (\mathcal{I}_{k+1})_{Y_{k+1}}$, $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$, $1 \leq i \leq m$.

Lorsqu'on s'intéresse uniquement aux propriétés de finitude des invariants différentiels au voisinage d'un jet fixé $X \in J$ il suffira d'avoir des hypothèses de régularité relatives à X . En effet, on peut remplacer H'_1 par

$H'_{1,X}$: Il existe un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$ le fibré $\tilde{L}(\mathcal{V})_k$ de base J_{k+1} est de rang constant au voisinage de X_{k+1} .

Ceci permettra de démontrer les théorèmes 22.1 et 23.1 au point X . On note désormais par $k_1(X)$ l'entier correspondant. L'hypothèse H_3 se remplace par $H_{3,X}$: $\beta(\mathfrak{N}(\mathcal{L})_X) = T_x M$, $x = \alpha(X)$,

et on note par $k_3(X)$ l'entier correspondant. Finalement, la discussion ci-dessus montre que H_2 peut être remplacée par l'hypothèse plus faible (cf. proposition 23.2)

$H_{2,X}$: Il existe un entier $k_2 \geq \max \{k_1(X), k_3(X)\}$ tel que Δ_{k_2} est régulier et intégrable au voisinage de X_{k_2} .

Théorème 23.6 (Lie). *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant les hypothèses ci-dessus au point $X \in J$, et prenons une famille (Φ_i) , $1 \leq i \leq m$, de sections locales de $\mathfrak{N}_{k_3(X)}$ tel que les $\Phi_i(X)$ soient admissibles et induisent une base de $T_x M$. Dans ces conditions, pour tout $k \geq k_2$*

- a) Δ_k est régulier et intégrable au voisinage de X_k par conséquent \mathcal{I}_k admet une base locale finie en tout point voisin de X_k et
- b) il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que
 - i) $\rho_{k,k+1}: \mathcal{U}_{k+1} \rightarrow \mathcal{V}_k = \rho(\mathcal{U}_{k+1})$ est une fibration,
 - ii) $(\Delta_{k,k+1})_{Y_{k+1}} = \mathfrak{p}(\Delta_{k-1,k})_{Y_k}$, $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$,
 - iii) $(\Delta_k)_{Y_k} = \ker_{Y_k} \{ df \mid f \in \mathcal{I}_k \}$, $Y_k \in \mathcal{U}_k$,

- iv) $(A_{k+1})_{Y_{k+1}} = \ker_{Y_{k+1}} \{ \rho_{k,k+1}^* df, \partial_{\phi_i} df \mid f \in \mathcal{F}_k, 1 \leq i \leq m \}, Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1},$
- v) $\{ \rho_{k,k+1}^* f, \partial_{\phi_i} f \mid f \in \mathcal{F}_k, 1 \leq i \leq m \}_{Y_{k+1}}$ engendre $(\mathcal{F}_{k+1})_{Y_{k+1}}, Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}.$

On démontre également les versions locales, relatives au point X , des corollaires précédents.

24. L'hypothèse H_2 , régularité des trajectoires

Nous voulons à présent démontrer un critère de régularité pour les champs d'éléments de contact A_k à l'aide de la notion de caractères introduite par E. Cartan dans son étude des systèmes différentiels extérieurs. Pour ceci, il faudra tout d'abord compléter les considérations algébriques du § 23A. Nous gardons les mêmes notations et nous nous bornons à énoncer une liste de définitions et de propriétés les démonstrations desquelles se trouvent par exemple dans [30], [48] et [61].

Soit $E \subset S^k V^* \otimes W$ un sous-espace vectoriel. Pour abrégier les notations nous écrivons D_v au lieu de $D_v \otimes \text{Id}$. Pour tout $v \in V$ nous posons

$$E(v) = \{ D_v x \mid x \in E \} .$$

$E(v)$ est un sous-espace vectoriel de $S^{k-1} V^* \otimes W$ égal à l'image par la contraction $V \otimes S^k V^* \otimes W \rightarrow S^{k-1} V^* \otimes W$ du sous-espace $v \otimes E$. Plus généralement, pour tout élément $(v_1, \dots, v_r) \in \prod_r V$ nous posons

$$E(v_1, \dots, v_r) = \{ (D_{v_1} x, \dots, D_{v_r} x) \mid x \in E \} .$$

$E(v_1, \dots, v_r)$ est un sous-espace vectoriel de $\prod_r (S^{k-1} V^* \otimes W)$. Pour $r \geq 1$ on définit les entiers

$$\tau_r(E) = \max \left\{ \dim E(v_1, \dots, v_r) \mid (v_1, \dots, v_r) \in \prod_r V \right\} ,$$

$$\sigma_r(E) = \tau_r(E) - \tau_{r-1}(E) \quad \text{où} \quad \tau_0(E) = 0 .$$

Les entiers $\tau_r(E)$ et $\sigma_r(E)$ sont appelés indifféremment les caractères de E . L'espace E sera dit involutif lorsque le sous-complexe de $(\wedge V^* \otimes S^k V^* \otimes W; \delta)$ construit à l'aide de E et des prolongements successifs de E est involutif à l'ordre k (cf. § 22B). Soit $m = \dim V$ et $l = \dim E$. On a les relations suivantes :

1. $\tau_r(E) \leq \tau_s(E), r \leq s.$
2. $\tau_r(E) = l, r \geq m.$
3. $\tau_r(E) = \sum_{k=1}^r \sigma_k(E).$
4. $\sigma_r(E) \geq \sigma_s(E), r \leq s.$
5. $\sigma_r(E) = 0, r > m.$
6. $\sigma_m(E) = l - \tau_{m-1}(E).$

7. $\dim \mathfrak{p}(E) \leq ml - \sum_{r=1}^{m-1} \tau_r(E) = m\tau_m(E) - \sum_{r=1}^{m-1} \tau_r(E)$.
 8. E est involutif si et seulement si $\dim \mathfrak{p}(E) = ml - \sum_{r=1}^{m-1} \tau_r(E)$.
 9. Posons $F = \mathfrak{p}(E)$. Si E est involutif alors F est involutif et on a les relations suivantes entre les caractères de E et ceux de F :

$$\tau_r(F) = r\tau_m(E) - \sum_{k=1}^{r-1} \tau_k(E) \quad r \geq 1 ,$$

$$\sigma_r(F) = \sum_{k=r}^m \sigma_k(E) \quad r \leq m .$$

Prenons maintenant un faisceau de Lie \mathcal{L} sur π , fixons $X \in J$ et supposons que l'hypothèse $H'_{1,X}$ soit vérifiée. Supposons en plus que pour tout $k \geq k_0$ il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que $\Delta_{k,k+1}$ soit le prolongement de $\Delta_{k-1,k}$ en les points de \mathcal{U}_{k+1} . Ceci sera le cas notamment lorsque \mathcal{L} vérifie H_1 et la fonction $k_1(X)$ du théorème 22.1 est semi-continue supérieurement. Soit finalement $k_2(X)$ l'entier défini à la suite du théorème 22.1.

Proposition 24.1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant les conditions précédentes et supposons qu'il existe un entier $h \geq \max\{k_0, k_2(X)\}$ tel que*

- a) Δ_h est régulier au voisinage de X_h ,
 b) $\Delta_{h-1,h}$ est involutif au voisinage de X_h et ses caractères sont constants.
 Alors pour tout $k > h$ il existe un voisinage \mathcal{W}_k de X_k tel que Δ_k est régulier dans \mathcal{W}_k .

Démonstration. En effet, puisque $\Delta_{h,h+1} = \mathfrak{p}(\Delta_{h-1,h})$ en tout point voisin de X_{h+1} , il résulte de la propriété 8 que $\Delta_{h,h+1}$ est régulier au voisinage de X_{h+1} par conséquent Δ_{h+1} l'est aussi. Comme $\Delta_{h,h+1}$ est involutif au voisinage de X_{h+1} (propriété 9) et que les caractères de $\Delta_{h,h+1}$ sont constants on retrouve à l'ordre $h+1$ les mêmes hypothèses que celles imposées à l'ordre h . Une récurrence achève la démonstration.

Remarquons que la constance des caractères τ_r , $r \geq m$ est équivalente à la régularité de $\Delta_{h-1,h}$ (propriété 2) et par conséquent à celle de Δ_{h-1} car Δ_h est supposé régulier. On voit ainsi que dans la proposition ci-dessus on démontre la régularité locale de \mathcal{L} à un certain ordre en supposant la régularité à deux ordres consécutifs inférieurs et la constance des caractères.

25. L'hypothèse H_3

Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie sur π vérifiant l'hypothèse H_3 et soit $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ l'ensemble des éléments \mathcal{L} -admissibles de \mathfrak{R} .

Une première question qui se pose est celle de trouver des conditions moyennant lesquelles $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ soit un sous-faisceau de \mathfrak{R} au sens topologique. Lorsque ceci est le cas, tout élément admissible $\varphi \in \mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ s'étend en une section locale admissible, i.e., une section de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$.

Une deuxième question qui se pose naturellement est la suivante. Fixons

$X \in J$ et soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $m = \dim M$, une famille d'éléments de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ tel que $\{\beta\varphi_1, \dots, \beta\varphi_m\}$ constitue une base de $T_x M$, $x = \alpha(X)$. Une telle famille existe et en fait on peut la choisir dans $\mathfrak{R}_{k_3(X)}(\mathcal{L})_X$. En représentant les germes φ_i par des variations infinitésimales locales de $\alpha_{k_3(X)}$ définies au voisinage de $X_{k_3(X)}$ on voit aussitôt qu'une telle famille $\{\varphi_i\}$ est une base de \mathfrak{R}_X pour la structure de A_X -module. Comme $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ est un \mathfrak{S}_X -sous-module de \mathfrak{R}_X , on peut se demander si la famille $\{\varphi_i\}$ est également une base du \mathfrak{S}_X -module $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$. La réponse est en général négative. En effet, si $\varphi \in \mathfrak{R}^0(\mathcal{L})_X$ et $\varphi \neq 0$, alors φ est une dérivation formelle admissible et pour tout $f \in A$, $f\varphi$ l'est aussi. Comme exemples de cette situation on a les faisceaux $\mathcal{L} = \underline{TP}$ et $\mathcal{L} = \underline{T(P, M)}$. Dans ce cas $\mathfrak{S} = 0$ et $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}$.

Proposition 25.1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie et (φ_i) , $1 \leq i \leq m$, une famille d'éléments de $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})_X$ dont les buts induisent une base de $T_x M$. Dans ces conditions le \mathfrak{S}_X -module $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ est libre et admet pour base la famille (φ_i) .*

Démonstration. Un élément $\varphi \in \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})_X$ s'écrit $\varphi = \sum_{i=1}^m f_i \varphi_i$, où $f_i \in A_X$, et vérifie la relation $[\varphi, \theta] = 0$ pour tout $\theta \in (\mathcal{L}_J)_X$. Or, la formule $[f\varphi, \theta] = f[\varphi, \theta] - (p_\theta f)\varphi$ permet d'écrire

$$0 = [f\varphi, \theta] = \sum_i f_i [\varphi_i, \theta] - \sum_i (p_\theta f_i) \varphi_i = \sum_i (p_\theta f_i) \varphi_i$$

par conséquent $p_\theta f_i = 0$ et $f_i \in \mathfrak{S}$.

Corollaire 1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant l'hypothèse H_3 et supposons que $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ (cette condition étant réalisée en particulier lorsque $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$). Dans ces conditions $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ est un \mathfrak{S} -module libre et admet pour base la famille (φ_i) .*

Représentons \mathfrak{R} par sa notation tensorielle $A \otimes_B \chi(B)$. Si \mathcal{L} vérifie les hypothèses du corollaire ci-dessus, la fibre $\mathfrak{R}(\mathcal{L})_X$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}_X \otimes_{(\mathfrak{S}_\mu)_X} \mathfrak{R}_\mu(\mathcal{L})_X,$$

où $\mu = k_3(X)$ et $\mathfrak{R}_\mu(\mathcal{L})_X$ est libre de rang m sur l'anneau $(\mathfrak{S}_\mu)_X$. Lorsque $k_3(X)$ est une fonction bornée supérieurement par $\eta < \infty$, on obtient l'isomorphisme

$$\mathfrak{R}(\mathcal{L}) \simeq \mathfrak{S} \otimes_{\mathfrak{S}_\eta} \mathfrak{R}_\eta(\mathcal{L}).$$

Cherchons maintenant des conditions suffisantes pour que l'hypothèse H_3 soit vérifiée. Ces conditions fourniront en même temps une réponse affirmative aux deux questions précédentes.

Soit $X_k \in J_k$, $x = \alpha(X_k) \in M$ et prenons un système de coordonnées locales (x^i) au voisinage de x . Nous indiquons par ∂_i la dérivée formelle suivant le champ $\partial/\partial x^i$ (considéré comme élément de \mathcal{R}_{-1}). Supposons qu'il existe m invariants différentiels $\{f_1, \dots, f_m\}$ d'ordre k de \mathcal{L} définis dans un voisinage ouvert U de X_k et considérons la matrice jacobienne (aux dérivées formelles)

$$A = (\partial_i f_j)_{1 \leq i, j \leq m} .$$

C'est une fonction définie dans l'ouvert $\rho_{k, k+1}^{-1}(U)$ et à valeurs dans les matrices $m \times m$. Nous supposons en plus que $\det A(X_{k+1}) \neq 0$ en un point $X_{k+1} \in \rho_{k, k+1}^{-1}(U)$ et par conséquent dans tout un voisinage \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} . Indiquons finalement par \mathcal{U} l'ouvert de J défini par $\mathcal{U} = q_{k+1}^{-1}(\mathcal{U}_{k+1})$ où $q_{k+1} : J \rightarrow J_{k+1}$ est la projection naturelle. $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \geq -1}$ et $\mathcal{U}_{k+h} = \rho_{k+1, k+h}^{-1}(\mathcal{U}_{k+1})$ pour tout $h \geq 1$. Définissons la variation infinitésimale Φ_1 de α_{k+1} par la formule

$$(25.1) \quad \Phi_1 = \det A^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} \partial/\partial x^1 \cdots \partial/\partial x^m \\ \partial_1 f_2 \cdots \partial_m f_2 \\ \cdot \cdots \cdot \\ \partial_1 f_m \cdots \partial_m f_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m a_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

où les coefficients a_1^i sont les cofacteurs des éléments de la première ligne divisés par le jacobien. Φ_1 ainsi que les fonctions a_1^i sont définis sur J_{k+1} dans l'ouvert \mathcal{U}_{k+1} . La dérivée formelle correspondante $\delta_1 = \partial_{\Phi_1}$ est donnée par une formule analogue où les $\partial/\partial x^i$ sont remplacés par les ∂_i . En prenant les germes de Φ_1 en tous les points de \mathcal{U}_{k+1} et en passant à la limite, on obtient une section locale du faisceau \mathfrak{R} définie dans l'ouvert \mathcal{U} . Cette section sera encore notée par Φ_1 . De même la dérivation δ_1 définit par passage à la limite une section δ_1 du faisceau \mathfrak{D} des germes de dérivations formelles et $\delta_1 = \partial_{\Phi_1}$. Montrons qu'on obtient ainsi des sections admissibles.

Proposition 25.2. Φ_1 est une section de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ et $\beta(\Phi_1 Y) \neq 0$ pour tout $Y \in \mathcal{U}$.

Démonstration. Considérons Φ_1 comme une variation infinitésimale de α_{k+1} (relèvement local de α_{k+1} dans TM). Si g est un invariant différentiel d'ordre l défini dans un ouvert contenu dans \mathcal{U}_l , il faudra montrer que $\delta_1 g$ est encore un invariant différentiel de \mathcal{L} ce qui revient à démontrer que $\mathfrak{p}_\theta \delta_1 g = 0$ pour toute section locale θ de \mathcal{L} définie dans un ouvert contenu dans \mathcal{U}_0 . Le résultat s'obtient en calculant directement sur l'expression

$$(25.2) \quad \delta_1 g = \det \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \cdots \partial_m f_1 \\ \cdot \cdots \cdot \\ \partial_1 f_m \cdots \partial_m f_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1 g \cdots \partial_m g \\ \partial_1 f_2 \cdots \partial_m f_2 \\ \cdot \cdots \cdot \\ \partial_1 f_m \cdots \partial_m f_m \end{pmatrix}$$

et en utilisant la formule fondamentale (cf. § 15)

$$(25.3) \quad \partial_i \mathfrak{p}_\theta - \mathfrak{p}_\theta \partial_i = \partial_{[\partial/\partial x^i, \tilde{\theta}]} = \sum_j (\partial_i \tilde{\theta}^j) \partial_j ,$$

où le crochet $[\partial/\partial x^i, \tilde{\theta}]$ est celui de \mathcal{R} , $\tilde{\theta} = (T\pi) \circ \theta = \sum_j \tilde{\theta}^j \partial/\partial x^j$ et les $\tilde{\theta}^j$ sont des fonctions locales de P définies par l'expression coordonnée de θ

$$\theta = \sum_{\lambda} \theta^{\lambda} \partial / \partial y^{\lambda} + \sum_j \tilde{\theta}^j \partial / \partial x^j .$$

Or,

$$(25.4) \quad \mathfrak{p}_{\theta} \delta_1 g = \frac{1}{\det A^2} [(\mathfrak{p}_{\theta} \det A) \det \Omega - \det A (\mathfrak{p}_{\theta} \det \Omega)] ,$$

où Ω est la deuxième matrice de (25.2). Si l'on dérive chaque déterminant colonne par colonne on pourra, en vertu de (25.3), remplacer chaque terme $\mathfrak{p}_{\theta} \partial_i$ par $-\sum_j (\partial_i \tilde{\theta}^j) \partial_j$. En achevant les calculs, on trouve pour le terme entre crochets de (25.4) l'expression

$$-\sum_i \partial_i \tilde{\theta}^i [\det A \det \Omega - \det A \det \Omega] = 0 .$$

La deuxième assertion est équivalente à $\Phi_1(Y_{k+1}) \neq 0$ pour tout $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$. Or, ceci résulte du fait que la matrice

$$(\partial_i f_j)_{1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq m}$$

est de rang $m - 1$ car A est inversible, ou encore du fait que $\delta_1 f_1 = 1$. Ceci achève la démonstration.

Plus généralement définissons pour tout $j, 1 \leq j \leq m$, la variation infinitésimale

$$(25.5) \quad \Phi_j = \det A^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_m f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial / \partial x^1 & \cdots & \partial / \partial x^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_m f_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

où les $\partial / \partial x^i$ se trouvent sur la j -ème ligne. Si on pose $\Phi = (\Phi_1 \cdots \Phi_m)$ et $\partial / \partial x = (\partial / \partial x^1 \cdots \partial / \partial x^m)$, on obtient en notation matricielle

$$(25.6) \quad \Phi = \partial / \partial x \cdot A^{-1}$$

par conséquent les variations infinitésimales Φ_j sont linéairement indépendantes (sur les fonctions de \mathcal{U}_{k+1}) et leurs images $\Phi_j(Y_{k+1})$ déterminent une base de $T_y \mathcal{M}$, $y = \alpha(Y_{k+1})$, pour tout $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$. La propriété ci-dessus résulte encore du fait que

$$(25.7) \quad \delta_j(f_i) = \delta_{ji} \quad \text{où} \quad \delta_j = \partial_{\Phi_j} .$$

Indiquons toujours par Φ_j les sections de \mathfrak{X} définies par les variations infinitésimales (25.5).

Théorème 25.1. *Chaque Φ_j est une section \mathcal{L} -admissible et, pour tout $Y \in \mathcal{U}$, la famille $\{\beta(\Phi_j Y)\}$ est une base de $T_y M$, $y = \alpha(Y)$.*

A ce point il est intéressant de revenir un peu sur les raisonnements de Sophus Lie. Soit $X_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$, $X_{k+1} = j_{k+1}\sigma(x)$ et considérons la section locale $j_k\sigma$ de J_k définie dans un voisinage de x . Son image est une sous-variété de J_k qui sera toujours notée par $j_k\sigma$. Transportons les coordonnées (x^i) de M à la sous-variété $j_k\sigma$ et notons les coordonnées transportées par X^i . De même, restreignons les fonctions f_i à $j_k\sigma$ et notons les fonctions restreintes par F_i . La définition même de la dérivée formelle suivant la variation infinitésimale $\partial/\partial x^i$ (cf. § 5, propriété 8) montre que le vecteur $\lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \partial/\partial x^i)(X_{k+1})$ induit au point X_k n'est autre que $(\partial/\partial X^i)_{X_k}$ par conséquent

$$\partial_i f_j(X_{k+1}) = (\partial F_j / \partial X^i)(X_k) .$$

On en déduit immédiatement que la condition $\det A(X_{k+1}) \neq 0$ est équivalente à supposer que les fonctions $\{F_1, \dots, F_m\}$ sont indépendantes au point X_k et définissent par conséquent un nouveau système de coordonnées de $j_k\sigma$ au voisinage de X_k . Indiquons finalement par ξ_i les vecteurs $\lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \Phi_i)(X_{k+1})$ induits par les variations infinitésimales Φ_i au point X_k . Comme ξ_i est tangent à $j_k\sigma$, on trouve la relation

$$(25.8) \quad \delta_{ij} = \partial_i f_j(X_{k+1}) = \xi_i \cdot f_j(X_k) = \xi_i \cdot F_j(X_k)$$

et ceci montre que

$$(25.9) \quad \xi_i = (\partial/\partial F_i)_{X_k} ,$$

c'est-à-dire les ξ_i sont les dérivées partielles suivant le système de coordonnées (F_i) . On trouve ainsi la relation

$$(25.10) \quad \delta_{ij} g(X_{k+1}) = (\partial G / \partial F_i)(X_k) ,$$

où g est une fonction quelconque définie au voisinage de X_k , et G est sa restriction à $j_k\sigma$.

On peut aussi démontrer la relation (25.9) à l'aide de la formule (25.6). En effet cette formule prise au point X_{k+1} se réécrit, en remontant les vecteurs à $j_k\sigma$, par

$$(25.11) \quad (\xi_1 \cdots \xi_m) = (\partial/\partial X^1 \cdots \partial/\partial X^m)_{X_k} \cdot A^{-1}(X_{k+1}) .$$

Comme $A(X_{k+1})$ est la matrice jacobienne des fonctions F_j par rapport aux coordonnées X^i au point X_k , le second membre de (25.11) n'est autre que $(\partial/\partial F_1 \cdots \partial/\partial F_m)$ car c'est l'expression des nouvelles dérivées par un changement de variables.

L'admissibilité des sections Φ_i ou bien des dérivations δ_i résulte tout simple-

ment de la formule (25.10) car $\delta_i g$ est une fonction invariante en tant que dérivée de la fonction invariante g par rapport à la variable invariante f_i (Sophus Lie [42]).

Cherchons finalement une condition de non nullité du jacobien en termes du champ Δ_k . Pour ceci, indiquons par τX_{k+1} l'espace tangent à $j_k \sigma$ au point X_k . τX_{k+1} est l'image par l'application $(Tj_k \sigma)_x$ de l'espace tangent $T_x M$. En outre, la correspondance $X_{k+1} \rightarrow \tau X_{k+1}$ établit un difféomorphisme entre J_{k+1} et la Grassmannienne des éléments de contact de dimension m de J_k qui sont holonomes et transverses à la fibration α_k .

Proposition 25.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) $\det \Lambda(X_{k+1}) \neq 0$,
- b) *la famille des restrictions $(df_j|_{\tau X_{k+1}})$, $1 \leq j \leq m$, est libre,*
- c) $\ker_{X_k} \{df_j\}_{1 \leq j \leq m} \cap \tau X_{k+1} = 0$.

Réciproquement, on a la

Proposition 25.4. *Prenons un jet $X_{k+1} \in J_{k+1}$, et supposons que*

- a) Δ_k *est régulier et intégrable dans un voisinage de X_k et*
- b) $(\Delta_k)_{X_k} \cap \tau X_{k+1} = 0$.

Dans ces conditions il existent m invariants différentiels d'ordre k de \mathcal{L} , soit $\{f_1, \dots, f_m\}$, définis dans un voisinage ouvert U_k de X_k et un voisinage ouvert $\mathcal{U}_{k+1} \subset \rho_{k,k+1}^{-1}(U_k)$ de X_{k+1} tel que pour tout $Y_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$

$$\ker_{Y_k} \{df_j\}_{1 \leq j \leq m} \cap \tau Y_{k+1} = 0 .$$

En outre, les dérivations correspondantes $\{\delta_j\}$, $1 \leq j \leq m$, sont définies dans \mathcal{U}_{k+1} et déterminent des sections de $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ au dessus de \mathcal{U} .

Corollaire 1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie vérifiant les hypothèses de la proposition. Il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_{k+1} de X_{k+1} tel que*

$$\beta[\mathfrak{R}_{k+1}(\mathcal{L})_Y] = T_y M$$

pour tout $Y \in \mathcal{U} = q_{k+1}^{-1}(\mathcal{U}_{k+1})$ par conséquent l'hypothèse H_3 est vérifiée en Y et $k_3(Y) = k + 1$. En outre, $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L})_Y = 0$ et $\mathfrak{R}(\mathcal{L})|_{\mathcal{U}} = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})|_{\mathcal{U}}$ est un faisceau (au sens topologique) en \mathfrak{S} -modules localement libre de rang m dont une base locale est donnée par les sections Φ_i .

L'assertion $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L})_Y = 0$ résulte aussitôt des relations $\delta_i f_j = \delta_{ij}$.

Théorème 25.1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie, et supposons que Δ_k est régulier et intégrable pour un entier fixé $k \geq 0$. Dans ces conditions, l'hypothèse H_3 est vérifiée en tout point $X \in J$ tel que*

$$(25.12) \quad (\Delta_k)_{X_k} \cap \tau X_{k+1} = 0 .$$

L'ensemble des $X \in J$ vérifiant cette propriété est un ouvert \mathcal{U} de J , et la restriction $\mathfrak{R}(\mathcal{L})|_{\mathcal{U}}$ est un faisceau en \mathfrak{S} -modules localement libre de rang m . En outre, l'ouvert \mathcal{U} est dense dans $q_k^{-1}(\mathcal{U}_k)$.

Pour voir la dernière assertion, remarquons tout d'abord que \mathcal{U}_{k+1} est l'ensemble des $X_{k+1} \in J_{k+1}$ vérifiant (25.12) et que $\mathcal{U} = q_{k+1}^{-1}\mathcal{U}_{k+1}$. Il suffit par conséquent de montrer que \mathcal{U}_{k+1} est dense dans $U_{k+1} = \rho_{k,k+1}^{-1}\mathcal{U}_k$. Comme $\rho_{k,k+1}: U_{k+1} \rightarrow \mathcal{U}_k$ est une fibration, en fait un fibré affine localement trivial (cf. § 19), il suffit même de démontrer la densité dans chaque $\rho_{k,k+1}$ -fibre. Or, si l'on restreint la fonction A à une telle fibre, l'expression coordonnée de $\partial_i f_j$ (cf. propriété 7, § 5) montre que les coefficients de la matrice A sont des fonctions polynomes en les coordonnées (y_α^i) , $|\alpha| = k + 1$. Puisque le jacobien $\det A$ n'est pas identiquement nul son support sera égal à la fibre.

On remarque finalement que la condition (25.12) entraîne l'inégalité $\text{codim } (\Delta_k)_{X_k} \geq n$. In serait utile de savoir en quelle mesure la réciproque est vraie.

26. Les faisceaux de Lie π -verticaux

Nous considérons maintenant une classe de faisceaux de Lie qui apparaissent souvent en géométrie différentielle notamment dans les questions qui font intervenir le prolongement par le but.

Définition 26.1. Un faisceau de Lie \mathcal{L} sur π est dit π -vertical si $T\pi(\theta) = 0$ pour tout élément $\theta \in \mathcal{L}$.

Un faisceau \mathcal{L} est π -vertical lorsque ses éléments sont des germes de champs de vecteurs tangents aux fibres de $\pi: P \rightarrow M$. En termes des faisceaux de structure, \mathcal{L} est vertical si et seulement si

$$\mathcal{L} \subset \{ \theta \in \chi(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_M) \mid \theta(P \times_M \mathcal{O}_M) = 0 \} .$$

En outre, un faisceau vertical est π -projetable et sa projection dans M est nulle.

Pour de tels faisceaux la théorie de Lie se simplifie de façon considérable et, comme nous le verrons ensuite, les théorèmes de finitude sont valables moyennant une hypothèse unique à savoir H_2 .

En effet, prenons un faisceau π -vertical \mathcal{L} . Les propriétés suivantes montrent tout simplement que l'artifice de verticalisation est dans ce cas trivial (cf. § 22).

a) La faisceau de Lie réduit associé L est un sous-faisceau de $J_\lambda VP$ ou encore de $J_\lambda(J_\lambda \times_P VP)$ et $L = L_V$.

b) Pour tout $k \geq 0$, $L_k = \bar{L}_k = (L_V)_k \subset J_k(J_\lambda \times_P VP)$, $\tilde{L}_k = \bar{L}_k = (\tilde{L}_V)_k \subset \bar{J}_k VP$, $\bar{\eta}_k = 0$ et par conséquent l'inclusion $\bar{L}_{k-1,k} \rightarrow (L_V)_{k-1,k}$ du diagramme (22.22) est toujours l'identité (le lemme 22.3 est vrai pour tout $k \geq 0$).

c) Pour tout $k \geq 0$, $\Delta_k \subset VJ_k$ et les suites

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \tilde{L}_k = (\tilde{L}_V)_k \xrightarrow{p_k} \Delta_k \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow L_k = (L_V)_k \xrightarrow{p_k} J_\lambda \times_{J_k} \Delta_k \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \bar{L}_{k-1,k} = (L_V)_{k-1,k} \longrightarrow J_\lambda \times_{J_k} \Delta_{k-1,k} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

sont exactes. Il en résulte que $C_l(L_V) = C_l(\mathcal{A})$ pour tout $l \geq 0$ (cf. (22.24) et (22.25)) et en particulier la stabilité de $C_l(\mathcal{A})$ a lieu en même temps que celle de $C_l(L_V)$.

Les deux premières suites de c) montrent que pour les faisceaux π -verticaux l'hypothèse H_1 (ou H'_1) est équivalente à la condition de régularité dans H_2 , c'est-à-dire, H_1 est une conséquence de H_2 . La régularité du champ \mathcal{A}_k est équivalente à la régularité du fibré L_k (ou encore \tilde{L}_k). La même remarque s'applique pour les hypothèses locales $H'_{1,x}$ et $H_{2,x}$. Si en plus \mathcal{L} est une sous-algèbre de Lie, les hypothèses H_1 et H_2 peuvent être remplacées par l'hypothèse unique

H : Il existe un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$ le fibré L_k (ou \tilde{L}_k) de base J_2 (resp. J_k) est de rang localement constant.

Montrons maintenant que l'hypothèse H_3 est toujours vérifiée. En effet, puisque tout élément $\theta \in \mathcal{L}$ se projette par $T\pi$ en zéro, on voit aussitôt (cf. § 7) que

$$\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) \supset \mathfrak{R}_{-1} = J \times_M \underline{TM} \simeq \chi(\mathbf{B})$$

et $\beta(\mathfrak{R}_{-1})_x = T_x M$. En plus, $\mathfrak{S} \supset \mathbf{B}$ car $\theta(P \times_M \mathcal{O}_M) = 0, \theta \in \mathcal{L}$, est équivalent à $\theta(\mathbf{B}) = 0, \theta \in \mathcal{L}_J$. Ceci entraîne en particulier que $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$ par conséquent

$$\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) \simeq \mathfrak{S} \otimes_{\mathbf{B}} \mathfrak{R}_{-1} \simeq \mathfrak{S} \otimes_{\mathbf{B}} \chi(\mathbf{B}) .$$

Comme \mathfrak{R}_{-1} est un faisceau (au sens topologique) et que $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ est engendré par \mathfrak{R}_{-1} sur l'anneau \mathfrak{S} on en déduit que $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ est un faisceau en \mathfrak{S} -modules localement libre de rang m dont une base locale est donnée par les sections $\partial/\partial x^i$ (ou encore les dérivations ∂_i) provenant d'un système de coordonnées locales arbitraires (x^i) de M . Remarquons finalement que pour toute section locale σ de π , la section $j_k \sigma$ est transverse aux fibres de α_k , autrement dit, $Tj_k \sigma \cap VJ_k = 0$. Puisque $\mathcal{A}_k \subset VJ_k$ il résulte que

$$\tau X_{k+1} \cap (\mathcal{A}_k)_{X_k} = 0$$

pour tout $X_{k+1} \in J_{k+1}$ et tout $k \geq -1$. Les fonctions coordonnées x^i remontées à n'importe quelle variété $J_k, k \geq -1$, constituent m invariants différentiels d'ordre k dont les différentielles sont indépendantes sur tout élément de contact transverse en particulier holonome. La matrice jacobienne A est toujours non singulière, en fait l'identité si A est prise par rapport au système de coordonnées (x^i). Les dérivations admissibles correspondantes δ_i ne sont autres que les ∂_i .

Théorème 26.1. *Soit \mathcal{L} un faisceau de Lie π -vertical. L'hypothèse H_3 est toujours vérifiée avec $k_3(X) = -1, \mathfrak{S} \supset \mathbf{B}, \mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$ et $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ est un faisceau en \mathfrak{S} -modules localement libre de rang m isomorphe à $\mathfrak{S} \otimes_{\mathbf{B}} \chi(\mathbf{B})$ dont une base locale est donnée par les dérivations formelles ∂_i associées à un*

système de coordonnées quelconque de M . Pour que \mathcal{L} satisfasse les théorèmes de finitude il suffit que l'hypothèse H_2 soit vérifiée.

CHAPITRE IV. EXEMPLES

27. Les trois faisceaux triviaux

Soit $\pi : P \rightarrow M$ une fibration. Si $\mathcal{L} = 0$ est le faisceau nul, $\Delta_k = 0$ pour $k \geq -1$, $\mathfrak{S} = \mathcal{A}$ et $\mathfrak{S}_k = \mathcal{A}_k$. En plus $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$ par conséquent $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \mathfrak{R} \simeq \mathcal{A} \otimes_B \chi(\mathcal{B})$ est un faisceau en \mathcal{A} -modules localement libre de rang m dont une base locale est donnée par les dérivations formelles ∂_i . Les théorèmes de finitude sont valables pour $k(X) = 0$. Si \mathcal{L} est le faisceau $\underline{TP} \simeq \chi(\mathcal{O}_P)$ des germes de tous les champs de vecteurs locaux de P ou bien le faisceau $\underline{T(P, M)} \simeq \chi(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_M)$ des germes de champs π -projetables, la surjectivité de $\tilde{\mathfrak{p}}_k$ entraîne que $\Delta_k = TJ_k$ pour $k \geq 0$ ($k \geq -1$ dans le cas projetable) par conséquent $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_k = 0$ pour tout k , $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = \mathfrak{R} \simeq \mathcal{A} \otimes_B \chi(\mathcal{B})$ et $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = 0$. La dernière assertion se démontre comme suit. Prenons un élément $\varphi \in \mathfrak{R}_k$ es soit ψ une variation infinitésimale locale d'ordre k dont le germe au point X_k représente φ . Pour calculer $[\varphi, \theta]$ avec $\theta \in \underline{T(P, M)}$, on représente ψ par un champ de vecteurs ξ défini au voisinage de X_k , c'est-à-dire tel que $\psi = \tilde{\xi} = (T\alpha_k) \circ \xi$ et on calcule $(T\alpha_k) \circ [\xi, \tilde{\mathfrak{p}}_k\theta]$. Dire que $[\varphi, \theta] = 0$ signifie que le germe de $[\xi, \tilde{\mathfrak{p}}_k\theta]$ au point X_k est un germe de champ vertical. Comme $\mathfrak{p}_k(\tilde{J}_kVP) = VJ_k$, on voit aussitôt que les champs $\tilde{\mathfrak{p}}_k\theta$, avec θ un champ π -vertical, engendrent localement tous les champs α_k -verticaux de J_k et par conséquent le champ ξ est localement projetable dans M . On en déduit que (localement)

$$0 = (T\alpha_k) \circ [\xi, \tilde{\mathfrak{p}}_k\theta] = [\xi_M, \theta_M]$$

pour tout champ π -projetable θ et cette relation entraîne $\xi_M = 0$ car θ_M est localement égal à n'importe quel champ de M . Il en résulte que

$$\psi = (T\alpha_k) \circ \xi = \xi_M \circ \alpha_k = 0$$

au voisinage de X_k . Par passage aux germes on trouve $\varphi = 0$. Les théorèmes de finitude sont valables trivialement pour $k(X) = -1$.

Soit \mathcal{L} le faisceau de tous les germes de champs π -verticaux de P , c'est-à-dire,

$$\mathcal{L} = \{ \theta \in \chi(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_M) \mid \theta(P \times_M \mathcal{O}_M) = 0 \} .$$

Comme $\mathfrak{p}_k(\tilde{J}_kVP) = VJ_k$ (cf. proposition 12.2) on a, pour $k \geq -1$, $\Delta_k = VJ_k$,

$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_k = \mathbf{B}$, $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$, $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \simeq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}} \chi(\mathbf{B}) = \chi(\mathbf{B})$. Les théorèmes de finitude marchent pour $k(X) = -1$.

28. Le faisceau \mathcal{L}_b

Soit $P = M \times N$, $\pi : P \rightarrow M$ la première projection et $\pi_2 : P \rightarrow N$ la deuxième. La fibration de base est toujours π . Reprenons les notations et les résultats du § 16, partie a). Nous indiquons par \mathcal{L}_b le sous-faisceau de $T(P, M)$ formé par tous les germes de champs π -verticaux qui sont les relèvements canoniques des champs locaux de N . En d'autres termes, \mathcal{L}_b est le faisceau des germes de champs locaux de P de la forme $(0, \xi)$ où ξ est un champ local de N . Les éléments de \mathcal{L}_b sont les germes à la fois π -verticaux et π_2 -projetables. En termes des faisceaux de structure on a

$$\mathcal{L}_b = \{ \theta \in \chi(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_M) \mid \theta(P \times_M \mathcal{O}_M) = 0 \text{ et } \theta(P \times_N \mathcal{O}_N) \subset P \times_N \mathcal{O}_N \} .$$

Comme \mathcal{L}_b est π -vertical on a toujours $\Delta_k \subset VJ_k$ et en particulier $\Delta_0 = VP$, $\Delta_{-1} = 0$. Le morphisme $p_k^b \circ \#$ du diagramme (16.1) nous montre que Δ_k , $k > 0$, a toujours des singularités et la dimension de $(\Delta_k)_X$ varie en ordre inverse avec le degré de singularité du jet $J_k \pi_2(X)$. Soit $\mathcal{U}_k = (J_k \pi_2)^{-1} \Pi_k(M, N)$ et $\mathcal{U} = \lim \text{proj } \mathcal{U}_k$. L'ensemble \mathcal{U}_k est un ouvert dense de J_k et $\mathcal{U} = q_1^{-1}(\mathcal{U}_1)$ est un ouvert dense de J . Le corollaire de la proposition 16.2 montre que le rang de $\Delta_k | \mathcal{U}_k$ est constant. D'autre part, \mathcal{L}_b est clos pour le crochet de Lie par conséquent les hypothèses sous-jacentes aux théorèmes de finitude sont vérifiées dans \mathcal{U} (cf. § 26). Nous distinguons deux cas.

1er cas: $\dim M \leq \dim N$. Dans ce cas $\Delta_k | \mathcal{U}_k = VJ_k | \mathcal{U}_k$ et par conséquent $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_k = \mathbf{B}$ pour $k \geq -1$ (\mathcal{U}_k est dense dans J_k). Il en résulte que $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}_b) = 0$ et $\mathfrak{R}(\mathcal{L}_b) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L}_b) = \mathfrak{R}_{-1} \simeq \chi(\mathbf{B})$ comme dans le dernier exemple du § 27.

2ème cas: $\dim M > \dim N$. Nous trouvons ici un exemple où l'on pourra utiliser la théorie des chapitres précédents qui dans les exemples antérieurs devenait triviale. En effet, $\Delta_{-1} = 0$, $\Delta_0 = VP$ et $\Delta_k | \mathcal{U}_k \subsetneq VJ_k$, $k > 0$, est proprement inclu et de rang constant. On en déduit que $\mathfrak{S}_{-1} = \mathfrak{S}_0 = \mathbf{B}$ et $\mathfrak{S}_k \supsetneq \mathbf{B}$ pour $k > 0$. En outre, puisque \mathcal{L}_b est un faisceau π -vertical, $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}_b) = 0$, $\mathfrak{R}(\mathcal{L}_b) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L}_b) \supset \mathfrak{R}_{-1} \simeq \chi(\mathbf{B})$ et $\mathfrak{R}(\mathcal{L}_b)$ est un faisceau en \mathfrak{S} -modules localement libre de rang m isomorphe à $\mathfrak{S} \otimes_{\mathbf{B}} \chi(\mathbf{B})$ dont une base locale est donnée par les dérivations formelles ∂_i (cf. théorème 26.1). L'hypothèse H_2 est vérifiée dans \mathcal{U} pour $k_2 = -1$ et l'hypothèse H_1 en est une conséquence car \mathcal{L}_b est π -vertical. On vérifie en fait que le faisceau de Lie réduit associé L est π -vertical et $\tilde{L}_k \subset \tilde{J}_k VP$ est donnée par

$$\tilde{L}_k = (J_k T \pi_2)^{-1} \circ \#(J_k(M, N) \times_N J_k TN) .$$

Or, $\#$ est injectif au dessus de $\Pi_k(M, N)$ et $J_k TN$ est un fibré vectoriel locale-

ment trivial donc \tilde{L}_k est de rang constant, au dessus de \mathcal{U}_k , pour $k \geq -1$.

Montrons finalement que l'entier $k_1(X)$ du théorème de stabilité asymptotique est égal à 1, autrement dit, $\Delta_{k,k+1} = \mathfrak{p}(\Delta_{k-1,k})$ pour tout $k \geq 1$. Il résultera que l'entier $k(X)$ qui intervient dans les théorèmes de finitude est aussi égal à 1 et par conséquent, pour tout $X \in \mathcal{U}$, les invariants différentiels d'ordre $k \geq 1$, définis au voisinage de X_k , seront engendrés par un système fondamental d'ordre 1 défini au voisinage de X_1 . Pour ceci considérons le diagramme commutatif suivant dont toutes les flèches sont des isomorphismes.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{L}_k & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & \Delta_k \\
 (J_k T \pi_2)^{-1} \circ \# \uparrow & & \nearrow (T J_k \pi_2)^{-1} \circ \mathfrak{p}_k^b \circ \# \\
 \Pi_k(M, N) \times_N J_k TN & &
 \end{array}$$

En écrivant ce diagramme à l'ordre k et $k - 1$ on trouve

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{k-1,k} &= (J_k T \pi_2)^{-1} \circ \# (\Pi_k(M, N) \times_N J_{k-1,k} TN) , \\
 \Delta_{k-1,k} &= (T J_k \pi_2)^{-1} \circ \mathfrak{p}_k^b \circ \# (\Pi_k(M, N) \times_N J_{k-1,k} TN) .
 \end{aligned}$$

Comme

$$(28.1) \quad 0 \longrightarrow S^k T^* N \otimes TN \xrightarrow{\varepsilon_k} J_k TN \longrightarrow J_{k-1} TN \longrightarrow 0$$

est une suite exacte (proposition 14.1 appliquée à la fibration de Lie $TN \rightarrow N \xrightarrow{\pi = \text{Id}} N$), on obtient $J_{k-1,k} TN \simeq S^k T^* N \otimes TN$ et on définit les isomorphismes

$$\begin{aligned}
 \psi_k &: \mathcal{U}_k \times_N (S^k T^* N \otimes TN) \rightarrow \tilde{L}_{k-1,k} , \\
 \varphi_k &: \mathcal{U}_k \times_N (S^k T^* N \otimes TN) \rightarrow \Delta_{k-1,k} ,
 \end{aligned}$$

où $\psi_k = (J_k T \pi_2)^{-1} \circ \# \circ \varepsilon_k$, $\varphi_k = (T J_k \pi_2)^{-1} \circ \mathfrak{p}_k^b \circ \# \circ \varepsilon_k$, le produit fibré est pris par rapport à la projection $\pi_2 \circ \beta_k : J_k \rightarrow N$ et \mathcal{U}_k est identifié à $\Pi_k(M, N)$ à l'aide du difféomorphisme $J_k \pi_2$. Comme $VP \simeq P \times_N TN$ on a aussi l'identification

$$J_k \times_N (S^k T^* N \otimes TN) \simeq J_k \times_P [(P \times_N S^k T^* N) \otimes VP] .$$

Puisque

$$\Delta_{k-1,k} \subset J_k \times_P (S^k T^* M \otimes VP)$$

et que $\dim M > \dim N$ il en résulte que $\Delta_{0,1} \subseteq \mathfrak{p}(\Delta_{-1,0})$ car

$$\mathcal{A}_{0,1} \simeq J_1 \times_P [(P \times_N T^*N) \otimes VP] \simeq J_1 \times_P (V^*P \otimes VP)$$

au dessus de \mathcal{U}_1 et

$$p(\mathcal{A}_{-1,0}) = p(\mathcal{A}_0) = p(VP) = J_1 \times_P (T^*M \otimes VP) .$$

Le faisceau \mathcal{L}_\flat étant π -vertical, les complexes $C_l(\tilde{\mathcal{L}}_V) = C_l(\tilde{\mathcal{L}})$ et $C_l(\mathcal{A})$ sont égaux. Nous nous bornons dans la suite à l'étude de $C_l(\tilde{\mathcal{L}})$. Tout d'abord examinons de plus près l'isomorphisme ψ_k en un point $X \in J_k$ et posons $x = \alpha_k(X)$, $y = \beta_k(X)$, $z = \pi_2(y)$. La restriction $(\psi_k)_X$ se réduit à l'isomorphisme vectoriel

$$S^k T_z^* N \otimes T_z N \rightarrow (\tilde{\mathcal{L}}_{k-1,k})_X ,$$

où

$$(\tilde{\mathcal{L}}_{k-1,k})_X \subset S^k T_x^* M \otimes V_y P \simeq S^k T_x^* M \otimes T_z N .$$

Soit $Z = j_k \xi(z) \in (J_{k-1,k} TN)_z \simeq S^k T_z^* N \otimes T_z N$ et posons $X = j_k \sigma(x)$, $s = \pi_2 \circ \sigma$, $Y = j_k s(x)$. Comme $X \in \mathcal{U}_k$ et $J_k \pi_2(X) = j_k s(x)$, on a $\text{rang}_x s = \dim N$. Posons $u = T_x s$ et $W = \ker u$. Par définition

$$\begin{aligned} (\psi_k)_X(Z) &= (J_k T \pi_2)^{-1} \circ \#(j_k s(x), j_k \xi(z)) \\ &= (J_k T \pi_2)^{-1} [j_k(\xi \circ s)(x)] = j_k \tau(x) , \end{aligned}$$

où $\tau = (0, \xi) \circ \sigma$. Or, $j_k \tau(x) \in (\tilde{\mathcal{L}}_{k-1,k})_X$ et $J_k T \pi_2(j_k \tau(x)) = j_k(\xi \circ s)(x) \in J_{k-1,k}(M, TN) \simeq S^k T_x^* M \otimes T_z N$. Comme la restriction de $J_k T \pi_2$ au noyau est égale à $\text{Id} \otimes T \pi_2$, nous pouvons identifier $j_k \tau(x)$ à $j_k(\xi \circ s)(x)$ lorsque nous identifions $V_y P$ à $T_z N$. Choisissons des cartes locales au voisinage de x et au voisinage de z de telle sorte que s lue dans ces cartes soit égale à u (théorème du rang constant). Comme $j_k \xi(z) \in (J_{k-1,k} TN)_z$ on en déduit que

$$j_k(\xi \circ s)(x) = j_k(\xi \circ u)(x) = (\xi \circ u)^{(k)}(x) = {}^t u(\xi^{(k)}(z)) = {}^t u(j_k \xi(z)) ,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}_{k-1,k})_X &= \{ {}^t u(Z) \mid Z \in S^k T_z^* N \otimes T_z N \} \\ &= \{ Y \in S^k T_x^* M \otimes T_z N \mid D_w(Y) = 0, w \in W \} , \end{aligned}$$

où on écrit D_w au lieu de $D_w \otimes \text{Id}$ (cf. § 23, A). Or

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathcal{L}}_{k-1,k})_X &= \{ Y \in S^{k+1} T_x^* M \otimes T_z N \mid D_v Y \in (\tilde{\mathcal{L}}_{k-1,k})_X, v \in T_x M \} \\ &= \{ Y \in S^{k+1} T_x^* M \otimes T_z N \mid D_w D_v Y = 0, v \in T_x M, w \in W \} . \end{aligned}$$

Mais $D_w D_v = D_v D_w$, et la condition $D_v D_w Y = 0$ pour tout $v \in T_x M$ est équivalente à $D_w Y = 0$. On en déduit que

$$\wp(\tilde{L}_{k-1,k})_X = \{Y \in S^{k+1}T_x^*M \otimes T_zN \mid D_wY = 0, w \in W\} = (\tilde{L}_{k,k+1})_{X_{k+1}},$$

où $X_{k+1} \in J_{k+1}$ et $\rho_k(X_{k+1}) = X$. Ceci montre bien que $\Delta_{k,k+1} = \wp(\Delta_{k-1,k})$ pour tout $k \geq 1$, c'est-à-dire, le complexe $C(\Delta)_X = C_0(\Delta)_X$ est 1-acyclique à l'ordre 1 pour tout $X \in \mathcal{U}$.

Montrons ensuite que $\Delta_{k,k+1}$ est involutif (i.e., chaque fibre est involutive) pour tout $k \geq 0$, autrement dit le complexe $C(\Delta)_X$ est involutif à l'ordre 1. En vertu de la 1-acycliticité il suffit de montrer que $\Delta_{0,1}$ est involutif. Posons $(\Delta_{0,1})_{X_1} = E$ et calculons les caractères de E . Or

$$\begin{aligned} E &= \{Y \in T_x^*M \otimes V_yP \mid D_wY = 0, w \in W\} \\ &\simeq (T_xM/W)^* \otimes V_yP \simeq T_z^*N \otimes T_zN, \end{aligned}$$

par conséquent pour tout $v \in T_xM$ tel que $v \not\equiv 0 \pmod{W}$ et pour tout $\omega \in V_yP$ il existe $x \in E$ tel que $D_vx = \omega$. Plus généralement si $v_1, \dots, v_r \in T_xM$ sont linéairement indépendants modulo W (i.e., les projections dans T_xM/W sont indépendantes) et si $\omega_1, \dots, \omega_r \in V_yP$ sont des vecteurs arbitraires, il existe $x \in E$ tel que

$$D_{v_i}x = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Par conséquent on a $\tau_r = rn, 1 \leq r \leq n$, et $\tau_{n+h} = n^2$ pour $h \geq 0$, la dernière égalité résultant du fait que $n + h$ vecteurs de T_xM sont toujours liés modulo W lorsque $h > 0$ ($m = \dim M, n = \dim N = \dim V_yP = \text{codim } W$). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \tau_1 + \dots + \tau_{m-1} &= (n + 2n + \dots + (n - 1)n) + (m - n)n^2 \\ &= mn^2 - \frac{1}{2}(n^3 + n^2). \end{aligned}$$

D'autre part, $\dim E = \dim T_z^*N \otimes T_zN = n^2, \dim \wp(E) = \dim S^2T_z^*N \otimes T_zN = n\binom{n+1}{2}$ et

$$m(\dim E) - \sum_{r=1}^{m-1} \tau_r = \frac{1}{2}(n^3 + n^2) = n\binom{n+1}{2}.$$

Ceci achève la démonstration (cf. § 24).

Il est intéressant de voir l'expression locale des éléments du faisceau de Lie réduit L associé à \mathcal{L}_b . Un élément de L est le germe en un point $x \in M$ de $\theta \circ \sigma$ où θ est une section locale de \mathcal{L}_b et σ une section locale de π . Or $\theta = (0, \xi)$ où ξ est un champ local de N . Identifions $\theta \circ \sigma$ à $T\pi_2 \circ \theta \circ \sigma$ et posons $s = \pi_2 \circ \sigma$; on obtient $T\pi_2 \circ \theta \circ \sigma = \xi \circ s$. Prenons finalement des coordonnées locales (x^i) au voisinage de x et (z^i) au voisinage de $z = s(x)$ de telle sorte que s lue dans ces cartes s'écrive $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ où $m = \dim M, n = \dim N$ et $m > n$ (on suppose bien sûr que $j_k s(x) \in \Pi_k(M, N)$). Dans ces

conditions $\xi = \xi^i(z^1, \dots, z^n)\partial/\partial z^i$ et $\xi \circ s : (x^1, \dots, x^m) \mapsto \xi^i(x^1, \dots, x^n)\partial/\partial z^i$ où les $\xi^i(z^1, \dots, z^n)$ sont des fonctions arbitraires des coordonnées (z^1, \dots, z^n) . On voit ainsi que la fibre de \tilde{L}_k au-dessus du point $j_k\sigma(x)$ n'est autre que $(J_kTN)_z$. Si l'on considère L comme faisceau de base J_iP , la fibre de $L_k = J_kL$ au dessus du point $j_i\sigma(x) \in J_iP$ est aussi isomorphe à $(J_kTN)_z$.

29. Théorie des invariants différentiels pour les faisceaux de Lie de N

Gardons dans ce paragraphe les notations du § 28. Soit \mathcal{N} un sous-faisceau de $TN \simeq \chi(\mathcal{O}_N)$. Le faisceau \mathcal{N} se remonte canoniquement en un sous-faisceau \mathcal{L} de $T(P, M)$ la fibre en un point $y \in P$ étant composée de tous les germes de champs locaux $(0, \xi)$ où ξ est un champ local de N dont le germe en $z = \pi_2(y)$ appartient à \mathcal{N}_z . Si \mathcal{N} est un faisceau \mathbf{R} -linéaire ou un faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie il en est de même du faisceau \mathcal{L} . En outre, \mathcal{L} est un sous-faisceau π -vertical de \mathcal{L}_b isomorphe à $P \times_N \mathcal{N}$ et par conséquent $\mathfrak{S} \supset \mathbf{B} = \mathfrak{S}_{-1}$, $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$ et

$$\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) \simeq \mathfrak{S} \otimes_{\mathbf{B}} \chi(\mathbf{B}) \supset \chi(\mathbf{B})$$

(cf. § 26). L'hypothèse H_3 est toujours vérifiée. Nous nous plaçons désormais dans l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_k)_{k \geq -1}$ de J où $\mathcal{U}_k = (J_k\pi_2)^{-1}II_k(M, N)$, car dans le complémentaire de \mathcal{U}_k la dimension des fibres de Δ_k varie en ordre inverse avec le degré de singularité du jet $J_k\pi_2(X)$ où X est le point de base de la fibre. Comme $J_k\pi_2, TJ_k\pi_2$ et $J_kT\pi_2$ sont des isomorphismes, nous identifions J_k avec $J_k(M, N), \tilde{J}_kVP$ avec $J_k(M, TN)$ et TJ_k avec $TJ_k(M, N)$.

1er cas : $\dim M < \dim N$. Si le morphisme

$$p_k^b \circ \# : II_k(M, N) \times_N J_k\mathcal{N} \rightarrow VJ_k(M, N)$$

est surjectif pour tout k , nous retrouvons la situation triviale du 1er cas § 28, à savoir $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_k = \mathbf{B}, k \geq -1$. Considérons maintenant la situation générale. Puisque \mathcal{L} est π -vertical, les théorèmes de finitude seront valables moyennant la seule hypothèse de régularité H_2 (cf. § 26). Si, en outre, \mathcal{N} est un faisceau en \mathbf{R} -algèbres de Lie, seule la régularité de L_k (ou \tilde{L}_k ou encore Δ_k), pour k assez grand, sera suffisante (§ 26). Comme les applications suivantes sont surjectives

$$\begin{aligned} (J_kT\pi_2)^{-1} \circ \# &: II_k(M, N) \times_N J_k\mathcal{N} \rightarrow \tilde{L}_k, \\ (TJ_k\pi_2)^{-1} \circ p_k^b \circ \# &: II_k(M, N) \times_N J_k\mathcal{N} \rightarrow \Delta_k, \end{aligned}$$

et que p_k^b est un isomorphisme on voit aussitôt que la régularité de \tilde{L}_k ou Δ_k équivaut à la constance locale de la fonction

$$X \in II_k(M, N) \rightarrow \dim (J_k\mathcal{N})_{\beta(X)} - \dim [\ker_X \# \cap (J_k\mathcal{N})_{\beta(X)}].$$

En particulier, si $J_k \mathcal{N}$ est un fibré de rang localement constant, il faut et il suffit que la dimension du noyau de l'application $\#$ restreinte à $\Pi_k(M, N) \times_N J_k \mathcal{N}$ soit localement constante. Remarquons finalement que les hypothèses ci-dessus font intervenir de façon essentielle la situation relative qui comprend la donnée du faisceau \mathcal{N} sur N et celle du couple de variétés (M, N) .

2^{ème} cas: $\dim M \geq \dim N$. Dans ce cas $\#$ et par conséquent $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$ est toujours injectif au dessus de $\Pi_k(M, N)$. La régularité de \tilde{L}_k ou Δ_k est par conséquent équivalente à la régularité du fibré $J_k \mathcal{N}$. L'hypothèse H_2 peut être remplacée par

H: Pour $k \geq k_1$ le fibré $J_k \mathcal{N}$ est de rang localement constant et le faisceau $J_k \mathcal{N}$ est stable pour le crochet de $J_k TN$, c'est-à-dire, $J_k \mathcal{N}$ est une équation de Lie [28], [46].

La deuxième partie de l'hypothèse ci-dessus est équivalente à la condition d'intégrabilité du champ Δ_k . En effet, remarquons tout d'abord, M et N étant de dimension quelconque, que \mathfrak{p}_k^b est un covariant différentiel d'ordre k , au sens d'Ehresmann, relatif à l'action ρ du groupoïde $\Pi_k(M)$ sur les espaces de prolongement $J_k(M, N)$ et $J_k(M, TN)$, c'est-à-dire, le diagramme suivant est commutatif

$$(29.1) \quad \begin{array}{ccc} J_k(M, TN)_x & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k^b} & V_x J_k(M, N) = TJ_k(M, N)_x \\ \rho(Z) \downarrow & & \downarrow T\rho(Z) \\ J_k(M, TN)_y & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k^b} & V_y J_k(M, N) \end{array}$$

où $Z \in \Pi_k(M)$, $x = \alpha(Z)$, $y = \beta(Z)$, $\rho(Z)X = X \cdot Z^{-1}$, et où les indices x et y dans le diagramme ci-dessus indiquent les α -fibres au dessus de x et y respectivement. En particulier, $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$ est aussi un covariant différentiel et le diagramme suivant est commutatif

$$(29.2) \quad \begin{array}{ccc} J_k(M, N)_x \times_N J_k TN & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k^b \circ \#} & V_x J_k(M, N) \\ \rho(Z) \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow T\rho(Z) \\ J_k(M, N)_y \times_N J_k TN & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k^b \circ \#} & V_y J_k(M, N) \end{array} .$$

Ceci entraîne que toute section locale σ de $J_k TN$ au dessus d'un ouvert U de N détermine à l'aide de $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$ un champ de vecteurs de $J_k(M, N)$ défini dans $\beta^{-1}(U)$, tangent aux α -fibres et invariant par l'action de $\Pi_k(M)$. Lorsque $\dim M = \dim N$ on a aussi la réciproque car $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$ est un isomorphisme au dessus de $\Pi_k(M, N)$ et ce dernier est un ouvert dense $J_k(M, N)$. Lorsque $\dim M > \dim N$ la réciproque reste valable pour les champs invariants contenus dans l'image Δ_k du morphisme $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$ car sa restriction au dessus de $\Pi_k(M, N)$ est injective, non surjective et $\Pi_k(M)$ opère transitivement sur les β -fibres de $\Pi_k(M, N)$. Lorsque $\dim M < \dim N$ la réciproque est fautive car l'action de

$\Pi_k(M)$ dans une β -fibre de $\Pi_k(M, N)$ est intransitive. Ensuite, puisque \tilde{p}_k^b préserve le crochet de champs de vecteurs (cf. § 16, a) on déduit que $\tilde{p}_k^b \circ \#$ transforme le crochet de Lie de deux sections de $J_k TN$ en le crochet des champs invariants correspondants. Prenons maintenant un sous-faisceau $\mathcal{N} \subset \underline{TN}$. Les champs correspondants Δ_k , considérés sur $J_k(M, N)$, sont invariants par l'action de $\Pi_k(M)$. Si en plus $\underline{J_k \mathcal{N}}$ est une équation de Lie, le crochet de deux champs de vecteurs images par $\tilde{p}_k^b \circ \#$ de sections de $J_k \mathcal{N}$ (donc invariants et contenus dans Δ_k) est encore un champ invariant de Δ_k par conséquent le champ Δ_k est intégrable lorsque sa dimension est localement constante. Dans le cas présent, où $\dim M \geq \dim N$, on a aussi la réciproque. En effet

$$\tilde{p}_k^b \circ \# : \Pi_k(M, N) \times_N J_k \mathcal{N} \rightarrow \Delta_k$$

est un isomorphisme, les sections de $J_k \mathcal{N}$ se trouvent en correspondance biunivoque avec les champs invariants contenus dans Δ_k et le crochet de champs invariants est encore invariant et correspond au crochet de sections de $J_k \mathcal{N}$. En particulier, si Δ_k est de dimension localement constante, l'intégrabilité de Δ_k est équivalente à la stabilité de ses champs invariants par le crochet. Lorsque \mathcal{N} est un faisceau en algèbres de Lie, l'hypothèse H se réduit en fait à la régularité des fibrés $J_k \mathcal{N}$ car dans ce cas les faisceaux $\underline{J_k \mathcal{N}}$ deviennent automatiquement des équations de Lie.

Remarquons ensuite que l'hypothèse H a un caractère absolu c'est-à-dire ne porte que sur le faisceau de Lie \mathcal{N} indépendamment de la variété M avec $\dim M \geq \dim N$. Il est donc souhaitable de pouvoir trouver la stabilité du complexe $C_i(\mathcal{A})$ ou encore la stabilité des noyaux $\Delta_{k, k+1}$ à l'aide de considérations ne faisant intervenir que le faisceau \mathcal{N} . Nous étudions à présent cette question.

Soit \mathcal{N} un faisceau de Lie sur la variété N et supposons que, pour $k \geq k_0$, le fibré $J_k \mathcal{N}$ est de rang localement constant. Soit \mathcal{L} le relèvement canonique de \mathcal{N} à $P = M \times N$. Comme \mathcal{L} est π -vertical on a $\tilde{\mathcal{L}}_k = (\tilde{\mathcal{L}}_V)_k \subset J_k VP$ et $\tilde{p}_k : \tilde{\mathcal{L}}_k \rightarrow \Delta_k$ est toujours un isomorphisme. Par conséquent les complexes $C_i(\tilde{\mathcal{L}}_V) = C_i(\tilde{\mathcal{L}})$ et $C_i(\mathcal{A})$ sont égaux où $C_i(\tilde{\mathcal{L}}_V)$ est le sous-complexe de $C(VP)$ construit à l'aide des noyaux $(\tilde{\mathcal{L}}_V)_{k, k+1}$ (cf. § 22(C)). La stabilité des $\Delta_{k, k+1}$ peut être lue sur les $\tilde{\mathcal{L}}_{k, k+1}$. Comme $\#$ est injectif la restriction aux noyaux

$$(29.3) \quad (J_k T\pi_2)^{-1} \circ \# : \Pi_k(M, N) \times_N J_{k-1, k} \mathcal{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k-1, k}$$

est un isomorphisme pour tout k où $J_{k-1, k} \mathcal{N}$ est le noyau de $\rho_{k-1, k} : J_k \mathcal{N} \rightarrow J_{k-1} \mathcal{N}$ donc un sous-fibré de $S^k T^*N \otimes TN$ (cf. (28.1)). On démontre par des arguments analogues à ceux du § 28 que

$$(29.4) \quad \tilde{p}(\tilde{\mathcal{L}}_{k-1, k}) = (J_{k+1} T\pi_2)^{-1} \circ \#[\Pi_{k+1}(M, N) \times_N \tilde{p}(J_{k-1, k} \mathcal{N})]$$

pour tout $k > 0$ où \tilde{p} indique le prolongement algébrique. On démontre également que $(\tilde{\mathcal{L}}_{k-1, k})_X$ est involutif si et seulement si $(J_{k-1, k} \mathcal{N})_Z$, $Z = \pi_2 \circ \beta(X)$, est

involutif ($k > 0$). Or ceci entraîne que si $(J_{k-1,k}\mathcal{N})_z$ est stable pour $k \geq k_0 > 0$ alors $(\tilde{L}_{k-1,k})_{X_k}$ est aussi stable pour $k \geq k_0$ où par *stable* nous voulons dire que les noyaux à l'ordre $k + 1$ sont les espaces déduits des noyaux à l'ordre k . Lorsque $\dim M = \dim N$ le résultat ci-dessus est aussi valable pour $k_0 = 0$ car dans ce cas le noyau $W = \ker u$ est nul et tout s'identifie moyennant l'isomorphisme ${}^t u$ (cf. § 28).

Considérons ensuite la famille $C_l(\mathcal{N}) = (C_k^p(\mathcal{N}))$ où

$$C_k^p(\mathcal{N}) = \begin{cases} \wedge^p T^*N \otimes J_{k-1,k}\mathcal{N}, & k \geq l, \\ \wedge^p T^*N \otimes S^k T^*N \otimes TN, & k < l. \end{cases}$$

A l'aide de l'opérateur de Spencer opérant sur les germes de sections du fibré vectoriel $J_k TN$ et moyennant les hypothèses de régularité pour les sous-fibrés $J_k \mathcal{N}$ on démontre que $C_l(\mathcal{N})$, $l \geq k_0$, est un sous-complexe de $C(TN) = (\wedge^p T^*N \otimes S^k T^*N \otimes TN; \delta)$. On en déduit que pour tout $z \in N$ il existe un entier $k_1(z)$ tel que $C_{k_0}(\mathcal{N})_z$ est 1-acyclique à l'ordre $k_1(z)$ et par conséquent les noyaux $(J_{k-1,k}\mathcal{N})_z$ sont stables pour $k \geq k_1(X)$. Remarquons ensuite que tout $X \in J$ induit à l'ordre 1 un morphisme $u(X): T_x M \rightarrow T_x N$, $x = \alpha(X)$ et $z = \pi_2 \circ \beta(X)$, qui est surjectif lorsque $X \in \Pi_\infty(M, N)$ (où l'on identifie J avec $J_\infty(M, N)$). En remontant le complexe $C_l(\mathcal{N})$ à J on définit à l'aide des ${}^t u(X)$ un morphisme de complexes

$$(29.5) \quad {}^t u: J \times_N C_l(\mathcal{N}) \rightarrow C_l(\tilde{L}),$$

qui est injectif au dessus de $\Pi_\infty(M, N)$. Si $\dim M = \dim N$ le morphisme ${}^t u$, restreint à $\Pi_\infty(M, N)$, est un isomorphisme et par conséquent les groupes de cohomologie sont aussi isomorphes. Si $\dim M > \dim N$ l'image par ce morphisme restreint est un sous-complexe de $C_l(\tilde{L})$ strictement inclu. Les résultats sur la stabilité et l'involutivité que nous avons énoncé plus haut entraînent que les groupes de cohomologie H_k^p , $k > 0$, de ces deux complexes sont isomorphes (dont la vérification directe est fort simple) et que $H_k^p[C_l(\tilde{L})_X] = 0$ pour $k \geq h_0$ ($\geq k_0$) et p arbitraire est équivalent à $H_k^p[C_l(\mathcal{N})_z] = 0$ pour $k \geq h_0$ et p arbitraire c'est-à-dire l'ordre d'involutivité de ces deux complexes est le même. Ceci montre que les entiers qui figurent dans les énoncés des théorèmes de finitude peuvent être déterminés par la considération du complexe $C_{k_0}(\mathcal{N})$ indépendamment de M . En outre, si $X, Y \in J$ sont deux jets infinis qui ont le même but dans N , i.e., $\pi_2 \circ \beta(X) = \pi_2 \circ \beta(Y) = z$, les familles $C_l(\tilde{L})_X$ et $C_l(\tilde{L})_Y$ deviennent des sous-complexes à partir du même entier k_0 (celui de $C_l(\mathcal{N})_z$) et la 1-acyclivité ainsi que l'involutivité aura lieu à partir des mêmes ordres (ceux de $C_l(\mathcal{N})_z$). En particulier, les propriétés ci-dessus sont valables pour l'ensemble des éléments de J contenus dans une même β -fibre $\beta^{-1}(y)$, $y \in P$, ce qui n'est pas le cas pour un faisceau de Lie quelconque \mathcal{L} sur P .

30. Théorie des invariants différentiels pour les faisceaux de Lie de M

Reprenons les notations et les résultats du § 16 partie b) et posons $B_N = J \times_N \mathcal{O}_N$ où le produit fibré est pris par rapport à $\pi_2 \circ \beta : J \rightarrow N$. Puisque $P \times_N \mathcal{O}_N$ s'identifie canoniquement au sous-faisceau de \mathcal{O}_P formé par les germes de relèvements de fonctions locales de N par la projection π_2 , on voit que B_N s'identifie à un sous-faisceau en R -algèbres de A et en fait $B_N \subset A_0$. Soit \mathcal{M} un faisceau de Lie sur M et \mathcal{L} le sous-faisceau de $\underline{T(P, M)}$ relèvement horizontal canonique de \mathcal{M} . Si $y \in P$ et $x = \pi(y)$, alors \mathcal{L}_y est l'ensemble des germes, au point y , de champs locaux $(\xi, 0)$ tels que le germe en x de ξ appartient à \mathcal{M}_x . \mathcal{L} est un faisceau de Lie π -projetable, $\mathcal{L}(P \times_N \mathcal{O}_N) = 0$ et $\mathcal{L} \simeq P \times_M \mathcal{M}$. Soit L le faisceau de Lie réduit associé à \mathcal{L} . Comme $\tilde{L}_k \subset \tilde{J}_k HP$ et que

$$J_k T\pi : \tilde{J}_k HP \rightarrow J_k TM \times_M J_k(M, N)$$

est un isomorphisme (cf. (16.2)), on voit par restriction que

$$\tilde{L}_k \simeq J_k \mathcal{M} \times_M J_k(M, N) = J_k \mathcal{M} \times_M J_k .$$

1er cas : $\dim M \leq \dim N$. Le diagramme (16.3) montre que le morphisme

$$(30.1) \quad \mathfrak{p}_k : \tilde{L}_k \rightarrow \Delta_k \subset HJ_k$$

peut être lu par

$$(30.2) \quad \mathfrak{p}_k^s : J_k \mathcal{M} \times_M J_k(M, N) \rightarrow \Delta_k \subset HJ_k(M, N) .$$

Par conséquent si l'on se restreint à l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_k)$ de J , $\mathcal{U}_k = (J_k \pi_2)^{-1} \cdot \Pi_k(M, N)$ et si l'on applique le corollaire 2 de la proposition 16.3 on voit que les morphismes (30.1) et (30.2) sont des isomorphismes. La régularité de Δ_k est équivalente à celle de $J_k \mathcal{M}$ ou \tilde{L}_k . Examinons finalement ce qui arrive avec $(\tilde{L}_V)_k$. Puisque $\dim M \leq \dim N$ les jets de $\Pi_k(M, N)$ sont injectifs et par conséquent pour tout $X_k = j_k \sigma(x) \in \mathcal{U}_k$ on a

$$[T_y(\text{im } \sigma)] \cap H_y P = 0 ,$$

où $y = \sigma(x)$. Ceci entraîne que la restriction de la projection verticale $(J_k i) \circ S_k$ à $\tilde{J}_k HP$ est injective par conséquent l'application (cf. (16.3))

$$(30.3) \quad \tilde{J}_k i \circ S_k \circ \varphi : J_k \mathcal{M} \times_M \Pi_{k+1}(M, N) \rightarrow (\tilde{L}_V)_k$$

est un isomorphisme. Finalement, puisque $\tilde{\mathfrak{p}}_k^s$ préserve le crochet de champs de vecteurs et que (30.2) est un isomorphisme on démontre, en utilisant toujours le fait que \mathfrak{p}_k^s est un covariant différentiel d'ordre k relatif à l'action de $\Pi_k(N)$ et que ce groupoïde opère transitivement sur les α -fibres de $\Pi_k(M, N)$, que les sections de $J_k \mathcal{M}$ correspondent aux champs de vecteurs invariants contenus

dans Δ_k et que le crochet de Lie de sections correspond au crochet de champs invariants. En somme, on a démontré que dans le cas $\dim M \leq \dim N$ les hypothèses H_1 et H_2 sont équivalentes à

H : Pour $k \geq k_1$ le fibré $J_k \mathcal{M}$ est de rang localement constant et le sous-faisceau $\underline{J_k \mathcal{M}} \subset \underline{J_k TM}$ est une équation de Lie [28], [46].

Lorsque \mathcal{M} est une sous-algèbre de Lie de \underline{TM} , l'hypothèse H se réduit à la régularité de $J_k \mathcal{M}$. Observons finalement que (30.2) établit un isomorphisme entre les noyaux $J_{k-1,k} \mathcal{M}$ et $\Delta_{k-1,k}$. On démontre que le morphisme \mathfrak{p}_k^s (cf. (16.3)) restreint aux noyaux est compatible avec les prolongements des noyaux précédents. Ceci entraîne que la stabilité et l'involutivité des noyaux $\Delta_{k-1,k}$ peut être lue sur les noyaux $J_{k-1,k} \mathcal{M}$ la discussion étant semblable à celle du § 29. Si l'on remplace \mathfrak{p}_k^s par l'application (30.3) on obtient des propriétés analogues pour les noyaux $(\tilde{L}_V)_{k-1,k}$. Si l'on prend un jet $X = j_k \sigma(x) \in J_k$ et si l'on pose $y = \sigma(x)$, $s = \pi_2 \circ \sigma$, $z = s(x)$ et $u = T_x s : T_x M \rightarrow T_x N$ alors, moyennant l'identification $V_y P \simeq T_z N$, la restriction de (30.3) aux noyaux est la restriction de l'application

$$(30.4) \quad -\text{Id} \otimes u : S^k T^* M \otimes TM \rightarrow S^k T^* M \otimes TN .$$

Puisque l'application \mathfrak{p}_k^s du diagramme (16.3) restreinte aux noyaux se réécrit comme le composé $\mathfrak{p}_k \circ (J_k i \circ S_k \circ \varphi)$ (\mathfrak{p}_k est nul sur la composante *horizontale*; voir proposition 16.3), on voit de même que la restriction de \mathfrak{p}_k^s (30.2) aux noyaux est donnée par la restriction de (30.4). On peut encore vérifier que (30.4) détermine un isomorphisme du complexe $C_i(\mathcal{M})$ avec $C_i(\tilde{L}_V)$ et $C_i(\Delta)$.

Nous voyons ainsi que dans le cas $\dim M \leq \dim N$ la théorie a un caractère absolu, les hypothèses et les propriétés ne dépendant que du faisceau \mathcal{M} sur la variété source M .

2ème cas: $\dim M > \dim N$. Dans ce cas aucune simplification essentielle ne se présente. L'hypothèse de régularité H_1 est équivalente à la constance locale de la différence

$$\dim (J_k \mathcal{M})_{\alpha(X)} - \dim \ker (30.3)_X$$

et la régularité de Δ_k dans H_2 est équivalente à la constance locale de

$$\dim (J_k \mathcal{M})_{\alpha(X)} - \dim [(J_k \mathcal{M})_{\alpha(X)} \cap (\ker \mathfrak{p}_k^s)_X]$$

ou encore, en vertu du corollaire 1 de la proposition 16.3, à celle de

$$\dim (J_k \mathcal{M})_{\alpha(X)} - \dim [(J_k^0 \mathcal{M})_{\alpha(X)} \cap (\ker \Phi)_X] .$$

Montrons finalement que l'hypothèse H_3 est toujours vérifiée lorsque $\dim M \leq \dim N$. Soit \mathcal{M} un faisceau de Lie sur M et \mathfrak{F} le faisceau des germes d'invariants différentiels associés à \mathcal{L} . Puisque les sections locales de \mathcal{L} sont des champs

de vecteurs horizontaux (contenus dans HP) on voit aussitôt que les relèvements canoniques $g \circ \pi_2$ des fonctions locales g de N sont des invariants différentiels d'ordre zéro de \mathcal{L} et que les relèvements canoniques $g \circ \pi_2 \circ \beta_k$ sont des invariants différentiels d'ordre k . Il en résulte que $\mathcal{B}_N \subset \mathfrak{S}_0$. D'autre part signalons que \mathfrak{S}_{-1} est le faisceau des germes d'intégrales premières de \mathcal{M} .

Nous allons maintenant construire de façon explicite les éléments de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$ et $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$. Indiquons par

$$(30.5) \quad v_k : \mathcal{U}_k \rightarrow \Pi_1(M, N)$$

l'application $v_k = (J_1\pi_2) \circ \rho_{1,k} = \rho_{1,k} \circ (J_k\pi_2)$. Chaque $v_k(X)$, $X \in \mathcal{U}_k$, s'identifie à une application linéaire de rang maximum

$$(30.6) \quad v_k(X) : T_x M \rightarrow T_z N,$$

où $x = \alpha_k(X)$ et $z = \pi_2 \circ \beta_k(X)$. Prenons ensuite une variation infinitésimale locale $\varphi \in \mathcal{R}_{k+1}$ définie dans un ouvert $U \subset \mathcal{U}_{k+1}$ et soit g une fonction locale de N . La définition même de ∂_φ montre tout de suite que

$$(30.7) \quad \partial_\varphi(g \circ \pi_2 \circ \beta_k)(X) = [v_{k+1}(X)(\varphi(X))] \cdot g, \quad X \in U.$$

Par conséquent, si φ est \mathcal{L} -admissible, la dérivation ∂_φ transforme l'invariant différentiel, d'ordre k , $g \circ \pi_2 \circ \beta_k$ en un invariant différentiel d'ordre $k+1$ défini dans U (qui n'est pas forcément le relèvement d'une fonction locale de N). Ceci entraîne que la fonction $\partial_\varphi(g \circ \pi_2 \circ \beta_k)$ est localement constante sur les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} (i.e., les trajectoires des champs prolongés $\tilde{p}_{k+1}\theta$, $\theta \in \mathcal{L}$, ou bien des champs prolongés $\tilde{p}_{k+1}^s\xi$, $\xi \in \mathcal{M}$, ou encore les feuilles intégrales de Δ_{k+1} lorsque ce champ d'éléments de contact est régulier et intégrable). Comme g est une fonction arbitraire de N ceci revient à dire que l'application

$$(30.8) \quad v_{k+1} \cdot \varphi : X \in U \mapsto v_{k+1}(X)(\varphi(X)) \in TN$$

est localement constante sur les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} cette notion ayant un sens car les buts $\pi_2 \circ \beta_{k+1}(X)$ de tous les jets X situés sur une même trajectoire de \mathcal{L}_{k+1} , prolongement par la source de \mathcal{M} , sont égaux.

Proposition 30.1. *Une condition nécessaire pour que le germe, en X_0 , de la variation infinitésimale $\varphi : U \rightarrow TM$ soit admissible, i.e., appartienne à $\mathfrak{R}_{k+1}(\mathcal{L})$, est que l'application (30.8) soit constante sur les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} dans un voisinage de X_0 .*

Montrons ensuite que cette condition nécessaire est également suffisante lorsque $\dim M \leq \dim N$. Pour ceci nous montrerons que les variations infinitésimales φ satisfaisant à la condition ci-dessus vérifient en outre la condition $[\varphi, \theta] = 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{L}$ donc déterminent une section locale de $\mathfrak{R}_{k+1}(\mathcal{L})$. Reprenons les notations du § 15 ainsi que la formule (15.2) où l'on remplacera la variation infinitésimale globale Φ par la variation locale φ . Le point $X \in U$

étant fixé, on indique (cf. § 15) par ϕ_t^{k+1} le groupe local à un paramètre engendré par $\bar{p}_{k+1}\theta$ et par $\phi_t^{k+1}(X)$ la trajectoire $\gamma(t)$ de $\bar{p}_{k+1}\theta$ issue du point X . Puisque θ est π -projetable en $\xi \in \mathcal{M}$, la famille (ψ_t) du § 15 est le groupe local à un paramètre engendré par ξ . La formule (16.4) du prolongement par la source nous donne la relation

$$(30.9) \quad (v_{k+1} \cdot \varphi)[\phi_t^{k+1}(X)] = v_{k+1}(X) \circ [u_t(X)]^{-1}[\varphi \circ \phi_t^{k+1}(X)].$$

Lorsque $\dim M \leq \dim N$ l'application linéaire $v_{k+1}(X)$ est injective par conséquent la formule (30.9) montre que $v_{k+1} \cdot \varphi$ est constant sur la trajectoire γ si et seulement si l'application

$$(30.10) \quad u_t(X)^{-1}[\varphi \circ \phi_t^{k+1}(X)]$$

est constante. Or, ceci est le cas lorsque

$$(\partial/\partial t)\{u_t(X)^{-1}[\varphi \circ \phi_t^{k+1}(X)]\} = 0$$

pour toute valeur de t ou, de façon équivalente (cf. (15.2)), lorsque

$$\mathcal{E}(\varphi, \theta)(Y) = 0$$

pour tout point Y situé sur γ .

Il en résulte que $v_{k+1} \cdot \varphi$ est localement constant sur les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} si et seulement si $\mathcal{E}(\varphi, \theta) = [\varphi, \theta] = 0$ pour tout champ $\theta \in \mathcal{L}$.

Proposition 30.2. *Soit $\dim M \leq \dim N$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le germe, en X_0 , de la variation infinitésimale $\varphi: U \rightarrow TM$ soit admissible, i.e., appartienne à $\mathfrak{R}_{k+1}(\mathcal{L})$, est que l'application (30.8) soit constante sur les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} dans un voisinage de X_0 . En outre, $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ et $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$.*

La dernière assertion résulte trivialement de (30.7) compte tenu du fait que g est une fonction arbitraire de N et $v_{k+1}(X)$ est injectif. Construisons maintenant les éléments de $\mathfrak{R}(\mathcal{L})$, c'est-à-dire, les variations infinitésimales locales $\varphi: U \rightarrow TM$ (k arbitraire) telles que $v_{k+1} \cdot \varphi$ est localement constant sur les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} . Pour ceci supposons que l'hypothèse H soit vérifiée par conséquent les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} ($k \geq k_1 - 1$) sont les feuilles intégrales du champ régulier et intégrable Δ_{k+1} . Soit \mathcal{F} une de ces feuilles. Comme le prolongement est défini par la source on voit immédiatement que $\pi_2 \circ \beta_{k+1}(\mathcal{F}) = z$ est un point fixé de N et que $\text{im } v_{k+1}(X) \subset T_z N$ est indépendant de $X \in \mathcal{F}$. Si φ est admissible, alors $\lambda = v_{k+1} \cdot \varphi$ est une application de U dans TN qui relève $\pi_2 \circ \beta_{k+1}$ (variation infinitésimale de $\pi_2 \circ \beta_{k+1}$) et qui vérifie en plus les deux conditions suivantes :

- a) λ est localement constante sur les feuilles de Δ_{k+1} ,
- b) $\lambda(X) \in \text{im } v_{k+1}(X)$.

Soit $E_{k+1} = \text{im } v_{k+1}$ le fibré vectoriel de base \mathcal{U}_{k+1} dont la fibre en X est égale à $\text{im } v_{k+1}(X)$. Ce fibré est trivial le long des feuilles de Δ_{k+1} . Les applications λ ci-dessus s'identifient aux sections locales du fibré E_{k+1} qui sont constantes le long des feuilles. Réciproquement, une telle section λ détermine une variation infinitésimale admissible φ en posant $\varphi(X) = v_{k+1}(X)^{-1}[\lambda(X)]$. Soit maintenant $X \in \mathcal{U}_{k+1}$ un point fixé, $x = \alpha_{k+1}(X) \in M$, $w \in T_x M$ un vecteur arbitraire et posons $\omega = v_{k+1}(X)(w)$. Pour construire une variation infinitésimale admissible φ telle que $\varphi(X) = w$, on prend une variété (locale) \mathcal{V} transverse au feuilletage défini par Δ_{k+1} qui passe par le point X et on prend une section locale λ_0 du fibré $E_{k+1}|_{\mathcal{V}}$. La section λ_0 s'étend localement en une section admissible λ (i.e., constante le long des feuilles). Ceci démontre bien que H_3 est vérifié. Un argument plus direct est le suivant: on voit facilement que $Y \in \mathcal{V} \mapsto \text{im } v_{k+1}(Y)$ est une application différentiable dans la Grassmannienne de N donc localement il est toujours possible de construire une application différentiable λ_0 qui prend la valeur ω en X et telle que $\lambda_0(Y) \in \text{im } v_{k+1}(Y)$. On étend ensuite λ_0 en une application λ constante le long des feuilles. Remarquons de passage que $\pi_2 \circ \beta_{k+1}: \mathcal{V} \rightarrow N$ est une submersion.

Il est intéressant de construire $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}(\mathcal{L})$ en utilisant directement la formule (15.3). Si $\varphi: U \rightarrow TM$ vérifie la condition $[\varphi, \theta] = 0$, $\theta \in \mathcal{L}$, la discussion précédente montre que la valeur de φ le long d'une courbe intégrale γ de $\tilde{\mathfrak{p}}_{k+1}\theta$ est entièrement déterminée par sa valeur en un point X . Plus précisément on a la relation (cf. (30.10))

$$(30.11) \quad \varphi(\gamma(t)) = \varphi \circ \phi_t^{k+1}(X) = u_t(X)[\varphi(X)] ,$$

qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour que le crochet soit nul. Soit $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ le sous-groupeoïde de Lie de $\Pi_{k+1}(M)$ obtenu par intégration de l'équation de Lie $J_{k+1}\mathcal{M}$ (cf. hypothèse H) ou encore par exponentiation de \mathcal{M} (on intègre les champs de vecteurs sections locales de \mathcal{M} et on prend les $(k+1)$ -jets des transformations locales ainsi obtenues; ceci engendre $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$). La relation (30.11) exprime que φ est un covariant différentiel par rapport à l'action du groupeoïde $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ sur les espaces de prolongement $\mathcal{U}_{k+1} \simeq \Pi_{k+1}(M, N)$ (action standard) et TM (action via $\rho_{1,k+1}$ et $\Pi_1(\mathcal{M}) = \rho_{1,k+1}\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$). Puisque $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ opère sans points fixes sur $\Pi_{k+1}(M, N)$ ($\dim M \leq \dim N$) on peut construire les sections locales φ de $\mathfrak{R}_{k+1}^1(\mathcal{L})$ par un argument de covariance. En effet, on prendra un relèvement arbitraire $\varphi_0: \mathcal{V} \rightarrow TM$ au dessus de α_{k+1} et on l'étendra localement par covariance. Remarquons en outre que la connaissance de $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ est équivalente à la connaissance des trajectoires de Δ_{k+1} ($\dim M \leq \dim N$).

Montrons ensuite que l'hypothèse H_3 est en fait toujours vérifié pour $k \geq 1$ indépendamment de l'hypothèse de régularité H . Pour le voir, prenons le faisceau de Lie $\mathcal{M}' = TM$ et soit \mathcal{L}' le relèvement horizontal canonique de \mathcal{M}' . Le faisceau \mathcal{L}' vérifie l'hypothèse H pour tout $k \geq -1$ donc, en parti-

culier, le champ \mathcal{A}'_1 est régulier et intégrable (cf. corollaire 2 de la proposition 16.3). Par conséquent \mathcal{L}' vérifie H_3 pour $k \geq 1$ et $\beta(\mathfrak{R}_1(\mathcal{L}')) = TM$. Puisque les trajectoires de \mathcal{L}_k sont toujours contenues dans les trajectoires de \mathcal{L}'_k on voit immédiatement que $\mathfrak{R}_k(\mathcal{L}') \subset \mathfrak{R}_k(\mathcal{L})$ par conséquent $\beta(\mathfrak{R}_1(\mathcal{L})) = TM$.

Reprenons les notations introduites à la suite du corollaire 1 de la proposition 25.1. La discussion précédente montre que

$$(30.12) \quad \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \simeq \mathfrak{S} \otimes_{\mathfrak{S}_1} \mathfrak{R}_1(\mathcal{L}) \simeq \mathfrak{S} \otimes_{\mathfrak{S}_1(\mathcal{L}')} \mathfrak{R}_1(\mathcal{L}')$$

au dessus de \mathcal{U} où $\mathfrak{R}_1(\mathcal{L})$ (resp. $\mathfrak{R}_1(\mathcal{L}')$) est isomorphe au faisceau en \mathfrak{S}_1 -modules (resp. $\mathfrak{S}_1(\mathcal{L}')$ -modules) des germes de variations infinitésimales locales d'ordre 1 qui sont $\Pi_1(\mathcal{M})$ (resp. $\Pi_1(M)$) covariantes ou, de façon équivalente, aux variations infinitésimales locales φ telles que $v_1 \cdot \varphi$ est constant sur les trajectoires de \mathcal{L}_1 (resp. \mathcal{L}'_1) ce faisceau étant remonté à \mathcal{U} . En particulier, lorsque $\dim M = \dim N$, $\text{im } v_{k+1}(X) = T_2N$ et par conséquent on obtient déjà un nombre suffisant de variations infinitésimales admissibles d'ordre 1 qui remplissent TM en ne prenant que les applications $\lambda = \eta \circ \pi_2 \circ \beta_1$ où η est un champ de vecteurs local arbitraire de N (les trajectoires de \mathcal{L}_1 sont toujours contenues dans les fibres de $\pi_2 \circ \beta_1$). Ceci montre que, lorsque $\dim M = \dim N$, on a l'isomorphisme

$$(30.13) \quad \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \simeq \mathfrak{S} \otimes_{B_N} \chi(B_N) .$$

Donnons ensuite une façon de construire les dérivations admissibles δ_i (cf. § 25). Pour ceci remarquons que $\mathcal{A}_0 \subset HP$ et que si $X \in J_1$ et $\dim M \leq \dim N$, la condition $X \in \mathcal{U}_1$ est équivalente à $\tau X \cap H_y P = 0$ où $y = \beta(X)$. La proposition 25.3 entraîne que tout $X \in \mathcal{U}_1$ admet un voisinage muni de variations infinitésimales admissibles (Φ_j) , $1 \leq j \leq m$, définies par exemple à l'aide d'une sous-famille à m éléments extraite d'un système fondamental quelconque d'intégrales premières de HP ; ce sont des invariants différentiels d'ordre zéro et en fait constituent les relèvements, par π_2 , des systèmes de coordonnées locales de N . Les variations Φ_j sont également admissibles pour \mathcal{L}' car dans leur expression n'interviennent que les fonctions locales de N qui sont des invariants d'ordre zéro de \mathcal{L}' . La construction ci-dessus n'est autre que l'aspect algorithmique (calculatoire) des constructions intrinsèques précisées auparavant pour \mathcal{L}' .

A ce point il est intéressant de relier la discussion précédente aux formules (7.2) et faire un calcul en coordonnées pour redémontrer la proposition 30.2. Ceci établira un lien avec les textes de Sophus Lie. Pour éviter des calculs excessivement longs nous nous bornons au cas où $k = 1$.

En effet, prenons des coordonnées locales (x^i) au voisinage de $\alpha_1(X)$ et des coordonnées locales (y^j) au voisinage de $\pi_2 \circ \beta_1(X)$. Écrivons $\varphi = a^j \otimes \partial / \partial x^j$ où les a^j ($1 \leq j \leq m$) sont des fonctions définies au voisinage de X . On trouve que $v_1 \cdot \varphi = y^j a^j \otimes \partial / \partial y^j$ ($1 \leq j \leq n$) et l'hypothèse faite sur $v_1 \cdot \varphi$ équivaut à

dire que les fonctions $y_j^i a^j$ sont des invariants différentiels d'ordre 1 de \mathcal{L} . On a par conséquent $\tilde{p}_1 \theta(y_j^i a^j) = 0$ pour toute section locale θ de \mathcal{L} . Or, si $\theta = \theta^i \partial / \partial x^i$, alors (cf. (7.2))

$$\tilde{p}_1 \theta = \theta^i \partial / \partial x^i - y_k^i (\partial \theta^k / \partial x^i) \partial / \partial y_i^k$$

et par conséquent la relation

$$0 = \tilde{p}_1 \theta(y_j^i a^j) = [\tilde{p}_1 \theta(y_j^i)] a^j + y_j^i (\tilde{p}_1 \theta \cdot a^j)$$

s'explique par

$$(30.14) \quad y_k^i (\partial \theta^k / \partial x^j) a^j - y_k^i (\tilde{p}_1 \theta \cdot a^k) = 0 .$$

Calculons $[\varphi, \theta]$. On trouve

$$\begin{aligned} [a^j \otimes \partial / \partial x^j, \theta^i \partial / \partial x^i] &= a^j \otimes [\partial / \partial x^j, \theta^i \partial / \partial x^i] - (\tilde{p}_1 \theta \cdot a^j) \otimes \partial / \partial x^j \\ &= a^j \otimes (\partial \theta^i / \partial x^j) \partial / \partial x^i - (\tilde{p}_1 \theta \cdot a^j) \otimes \partial / \partial x^j \\ &= (a^j \partial \theta^k / \partial x^j - \tilde{p}_1 \theta \cdot a^k) \otimes \partial / \partial x^k . \end{aligned}$$

Or, l'expression du côté gauche de (30.14) prise au point $\pi_2 \circ \beta_1(Y)$ n'est autre que la composante suivant $\partial / \partial y^i$ du vecteur

$$v_1(Y)[(a^j \partial \theta^k / \partial x^j - \tilde{p}_1 \theta \cdot a^k) \partial / \partial x^k] .$$

Ce vecteur est donc nul. Si $\dim M \leq \dim N$ l'application $v_1(Y)$ est injective par conséquent $[\varphi, \theta] = 0$.

Examinons finalement le cas $\dim M > \dim N$. Dans ce cas les éléments de $\mathfrak{N}(\mathcal{L})$ vérifient la condition nécessaire de la proposition 30.1 mais il y a d'autres conditions nécessaires à rajouter. En effet, soit $\varphi: U \rightarrow TM$ une variation infinitésimale d'ordre $k+1$ (quelconque) et posons, suivant les notations du § 5, formule (5.1),

$$\varphi_{k+1} = \lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \varphi): U \rightarrow TJ_k .$$

Prenons en plus une transformation locale ψ de M et indiquons par ψ^{k+1} son prolongement canonique à J_{k+1} défini par

$$\psi^{k+1}(X) = X \cdot [j_{k+1} \psi(x)]^{-1}, \quad x = \alpha(X)$$

(où l'on identifie J_{k+1} à $J_{k+1}(M, N)$). Définissons ensuite la variation infinitésimale $\psi^* \varphi$ par

$$(30.15) \quad \psi^* \varphi(X) = (T\psi)^{-1}[\varphi(\psi^{k+1} X)] .$$

On vérifie facilement, à l'aide de diagrammes commutatifs, que cette définition

est compatible avec le passage à la limite inductive, c'est-à-dire, on a la formule

$$(30.16) \quad \psi^*(\varphi \circ \rho_{k+1,h}) = (\psi^*\varphi) \circ \rho_{k+1,h}, \quad k+1 \leq h.$$

En outre, les relations suivantes sont vérifiées :

$$(30.17) \quad (\partial_\varphi f) \circ \psi^{k+1} = (\psi^{k+1})^* \partial_\varphi f = \partial_{\psi^*\varphi} (f \circ \psi^k),$$

$$(30.18) \quad (\psi^*\varphi)_{k+1}(X) = (T\psi^k)^{-1} \varphi_{k+1}(\psi^{k+1}X),$$

où f est une fonction locale quelconque dont le domaine est contenu dans $\rho_{k,k+1}U$. Supposons maintenant que φ est admissible, que ψ est une transformation obtenue par exponentiation de \mathcal{M} et que Δ_h est régulier et intégrable pour $h \geq k$. Puisque ψ^k préserve les invariants différentiels d'ordre k , les formules (30.16) et (30.17) montrent que $\psi^*\varphi$ est aussi admissible. Supposons en plus que ψ est proche de l'identité (par exemple pour la topologie C^{k+1} dans une carte, ou de façon plus naïve, prenons un voisinage V de $Y = \rho_{k,k+1}X$ adapté au feuilletage et muni d'un système fondamental d'intégrales premières et bornons nous aux transformations ψ telles que ψ^k est une transformation locale de V). Dans ces conditions $f \circ \psi^k = f$ pour tout invariant différentiel f par conséquent la formule (30.17) se réécrit par

$$(30.19) \quad \partial_\varphi f = \partial_{\psi^*\varphi} f$$

ou encore par

$$(30.20) \quad [\varphi_{k+1}(X) - (\psi^*\varphi)_{k+1}(X)] \cdot f = 0.$$

Compte tenu de (30.18) et de la régularité de Δ_k , la dernière formule se transcrit par

$$(30.21) \quad T\psi^k(\varphi_{k+1}X) - \varphi_{k+1}(\psi^{k+1}X) \in \Delta_k(\psi^k Y).$$

Or, ceci montre qu'une variation infinitésimale admissible φ doit vérifier la relation (30.21) le long de petites courbes intégrales donc, par un argument de compacité, le long de toute courbe intégrale $\gamma(t) = \phi_t^{k+1}(X)$ du champ prolongé $\tilde{\mathfrak{p}}_{k+1}\theta$, $\theta \in \mathcal{L}$, c'est-à-dire, on a la relation

$$(30.22) \quad T\phi_t^k(\varphi_{k+1}X) - \varphi_{k+1}(\phi_t^{k+1}X) \in \Delta_k(\phi_t^k Y).$$

De même les variations prolongées $\varphi \circ \rho_{k+1,h}$, $k+1 \leq h$, étant admissibles, doivent vérifier les relations (30.21) et (30.22) au niveau h . En particulier, lorsque $\psi^{k+1}X = X$, la formule (30.21) se réduit à

$$(30.23) \quad T\psi^k(\varphi_{k+1}X) - \varphi_{k+1}(X) \in \Delta_k(Y),$$

cette dernière formule étant valable sans restrictions sur ψ car il en est de même pour (30.19).

Nous pouvons ensuite restreindre les considérations ci-dessus aux $(k + 1)$ -jets. De façon précise, puisque $T_x\psi$ et $T_Y\psi^k$, $Y = \rho_{k, k+1}X$, sont déterminés par $j_{k+1}\psi(x)$ il en est de même pour $\psi^*\varphi(X)$ ainsi que pour tous les termes des formules précédentes calculées en X . Prenons donc $Z \in \Pi_{k+1}(M)$; les formules (30.15), (30.17) et (30.18) se transcrivent respectivement par

$$(30.24) \quad Z^*\varphi(X) = (Z_1)^{-1}[\varphi(X \cdot Z^{-1})],$$

$$(30.25) \quad \langle \varphi_{k+1}(X \cdot Z^{-1}), df \rangle = \langle (Z^*\varphi)_{k+1}(X), Z^*df \rangle,$$

$$(30.26) \quad (Z^*\varphi)_{k+1}(X) = (TZ)^{-1}\varphi_{k+1}(X \cdot Z^{-1}),$$

où $Z_1 = \rho_{1, k+1}Z$ est identifié à une application linéaire tangente, $TZ = T_Y\psi^k$, $Z^*df = (T_Y\psi^k)^*df$ et $(Z^*\varphi)_{k+1}(X) = \lambda_{k+1}(X, Z^*\varphi(X))$. Supposons maintenant que φ est admissible. La formule (30.21) ou (30.22) se transcrit par

$$(30.27) \quad TZ(\varphi_{k+1}(X) - \varphi_{k+1}(X \cdot Z^{-1})) \in \Delta_k(Y \cdot Z^{-1}), \quad Z \in \Pi_{k+1}(\mathcal{M}).$$

Soit $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})_X$ le sous-groupe de $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ formé par les éléments Z tels que $X \cdot Z^{-1} = X$ (l'isotropie en X). La formule (30.23) se réduit à

$$(30.28) \quad TZ(\varphi_{k+1}X) - \varphi_{k+1}(X) \in \Delta_k(Y).$$

Plus généralement, si $Z, W \in \Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ sont des jets vérifiant la condition $X \cdot Z^{-1} = X \cdot W^{-1}$, les relations (30.27) ou (30.28) entraînent

$$(30.29) \quad TZ(\varphi_{k+1}X) - TW(\varphi_{k+1}X) \in \Delta_k(Y \cdot Z^{-1}).$$

Puisque les trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} sont toujours contenues dans les fibres de $\pi_2 \circ \beta_{k+1}$, la condition nécessaire de la proposition 30.1 est une conséquence de (30.29). D'autre part il est facile de démontrer que si la variation infinitésimale φ vérifie la condition (30.27) pour tout X et Z (donc aussi (30.22) pour tout $\theta \in \mathcal{L}$), alors φ_{k+1} est admissible à l'ordre k (i.e., transforme les invariants différentiels d'ordre k en des invariants d'ordre $k + 1$). En effet, on prend une carte feuilletante pour Δ_k et on remarque que la condition (30.27) entraîne que tous les vecteurs $\varphi_{k+1}(W)$, W variant dans une feuille de Δ_{k+1} , se projettent, dans la composante transverse de la carte, suivant un même vecteur v et que les invariants différentiels d'ordre k contenus dans cette carte ne sont autres (localement) que les relèvements des fonctions locales de la composante transverse. Nous obtenons ainsi la

Proposition 30.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la variation infinitésimale $\varphi : U \rightarrow TM$ d'ordre $k + 1$ soit admissible est que (l'analogie*

de) la condition (30.27) soit vérifiée pour toutes les variations prolongées $\varphi \circ \rho_{k+1, h}$, $h \geq k + 1$.

La condition ci-dessus n'est pas d'utilisation commode. Il serait souhaitable de démontrer qu'il existe un entier μ tel que si la condition est satisfaite à l'ordre μ elle le sera aussi à tous les ordres supérieurs. Soit $X \in J_\infty$ et k_1 l'entier à partir duquel $\Delta_h(X_h)$ devient stable. Supposons d'autre part que \mathcal{M} est un pseudogroupe infinitésimal de Lie (clos pour le crochet et les fibrés vectoriels $J_h \mathcal{M}$ sont réguliers pour h assez grand) et soit k_2 l'entier à partir duquel les noyaux $J_{h-1, h} \mathcal{M}$ deviennent stables, autrement dit, k_2 est l'entier à partir duquel le groupoïde $\Pi_{h+1}(\mathcal{M})$ devient (localement) le prolongement canonique du groupoïde $\Pi_h(\mathcal{M})$ (Théorème du prolongement de Cartan-Kuranishi pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires [30]). Dans ces conditions il est vraisemblable que la propriété cherchée sera vérifiée au voisinage de X lorsqu'on prendra $\mu = \max \{k_1, k_2\} + 1$. Supposons pour l'instant qu'il en soit ainsi à l'ordre μ et cherchons à construire des variations infinitésimales admissibles au voisinage de X_μ . Prenons tout d'abord une variété locale \mathcal{V} passant par le point X_μ et transverse aux trajectoires de \mathcal{L}_μ . Prenons ensuite un relèvement local $\varphi_0: \mathcal{V} \rightarrow TM$ au dessus de α_μ qui en chaque point $V \in \mathcal{V}$ est compatible avec la condition (30.28) prise au niveau $k + 1 = \mu$, X étant remplacé par V . Cette condition se traduit par la relation

$$(30.30) \quad TZ[\lambda_\mu(V, \varphi_0 V)] - \lambda_\mu(V, \varphi_0 V) \in \Delta_{\mu-1}(V_{\mu-1}), \quad V \in \mathcal{V}.$$

Propageons finalement le relèvement φ_0 le long des trajectoires de \mathcal{L}_μ de telle sorte à obtenir une variation infinitésimale locale admissible φ d'ordre μ en posant

$$(30.31) \quad \varphi(W) = T\alpha_{\mu-1} \circ T\zeta(W) \circ \lambda_\mu(V, \varphi_0 V) = \zeta_1(W)(\varphi_0 V), \quad W \in \mathcal{W},$$

où V est le point de \mathcal{V} situé sur la trajectoire passant par W et $\zeta: \mathcal{W} \rightarrow \Pi_\mu(\mathcal{M})$ est une application différentiable définie dans un voisinage \mathcal{W} de X_μ , adapté au feuilletage, telle que $V \cdot \zeta(W)^{-1} = W$. L'application ζ s'obtient par des arguments de rang constant relatifs au groupoïde de Lie $\Pi_\mu(\mathcal{M})$. La variation φ ainsi obtenue satisfait la condition (30.27) à l'ordre μ car φ_0 est compatible avec (30.28). L'hypothèse H_3 sera vérifiée en X_μ si et seulement si il est possible de construire un nombre suffisant de relèvements locaux φ_0 que induisent une base de $T_x M$. Or ceci équivaut à dire que, pour tout $V \in \mathcal{V}$ voisin de X_μ , les orbites de $\Pi_\mu(\mathcal{M})_V$ dans le sous-espace τV (voir discussion précédant la proposition 25.3) sont contenues dans les classes d'équivalence de τV modulo $\tau V \cap \Delta_{\mu-1}(V_{\mu-1})$. On remarquera que l'action du groupe d'isotropie complet $\Pi_\mu(\mathcal{M})_W$, via TZ , laisse toujours invariant le sous-espace τW et que si la condition ci-dessus est vérifiée en un point d'une trajectoire elle l'est aussi en tout autre point car les groupes d'isotropie correspondants sont conjugués et tout $Z \in \Pi_\mu(\mathcal{M})$ laisse invariant Δ_μ et transforme τW en $\tau(W \cdot Z^{-1})$. En particulier,

si $\tau X_\mu \cap \Delta_{\mu-1}(X_{\mu-1}) = 0$, la même propriété reste valable dans tout un voisinage de X_μ par conséquent le relèvement φ_0 devra prendre ses valeurs dans l'image par $T\alpha_{\mu-1}$ des points fixes de τV , $V \in \mathcal{V}$, par l'action de l'isotropie $\Pi_\mu(\mathcal{M})_V$, c'est-à-dire, dans l'ensemble des points fixes de TM par l'action de $\rho_{1,\mu}\Pi_\mu(\mathcal{M})_V$. L'hypothèse H_3 ne sera vérifiée que lorsque $\Pi_\mu(\mathcal{M})_V$ opère de façon triviale sur τV et cette propriété sera en fait valable dans tout un voisinage \mathcal{W} de X_μ .

A ce point il est intéressant de reprendre la condition nécessaire et suffisante (30.11) pour que la variation infinitésimale φ d'ordre $k + 1$ détermine une section locale de $\mathfrak{R}_{k+1}^1(\mathcal{L})$. En termes du groupoïde $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})$ cette condition, ou le fait que φ est un covariant différentiel, s'écrit par

$$(30.32) \quad \varphi(X \cdot Z^{-1}) = Z_1 \cdot \varphi(X) \quad , \quad Z \in \Pi_{k+1}(\mathcal{M})$$

d'où, en particulier,

$$(30.33) \quad \varphi(X) = Z_1 \cdot \varphi(X) \quad , \quad Z_1 \in \rho_1 \Pi_{k+1}(\mathcal{M})_X \quad .$$

Or, cette relation exprime que $\varphi(X)$ est un point fixe de $T_x M$ par l'action à l'ordre 1 du groupe d'isotropie $\Pi_{k+1}(\mathcal{M})_X$. Pour construire des éléments φ de $\mathfrak{R}_{k+1}^1(\mathcal{L})$ on prendra une variété transverse \mathcal{V} et un relèvement $\varphi_0: \mathcal{V} \rightarrow TM$ à valeurs dans l'ensemble des points fixes par l'isotropie d'ordre $k + 1$ et, à l'aide de (30.32), on propagera φ_0 le long des trajectoires de \mathcal{L}_{k+1} en une variation locale φ .

Terminons cette section par l'étude d'un exemple qui satisfait trivialement le théorème de Lie mais qui se comporte de façon peu satisfaisante du point de vue de la théorie. Les hypothèses H_i , $1 \leq i \leq 3$, seront vérifiées (H_1 pour $k \geq 0$, H_2 pour $k \geq -1$ et H_3 pour $k \geq 1$) pourtant on trouvera que $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) \neq 0$ et $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = 0$.

Soit $\mathcal{M} = \underline{TM}$, \mathcal{L} son relèvement horizontal canonique et supposons que $\dim M > \dim N$. Puisque $\Delta_k = HJ_k = \ker T(\pi_2 \circ \beta_k)$ dans \mathcal{U}_k (cf. corollaire 2 de la proposition 16.3), les invariants différentiels d'ordre $k \geq 0$ ne sont autres que les relèvements des fonctions locales de N par conséquent $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 = \mathbf{B}_N$ et $\mathfrak{F}_{-1} = 0$. Ceci entraîne en particulier que la condition nécessaire de la proposition 30.1 pour l'admissibilité de φ est également suffisante. D'autre part, puisque les trajectoires de \mathcal{L}_k ne sont autres que les fibres de $\pi_2 \circ \beta_k$ on voit facilement que la condition ci-dessus est équivalente à la condition plus générale (30.27) (les transformations ψ^k commutent avec $\pi_2 \circ \beta_k$ par conséquent TZ commute avec $T(\pi_2 \circ \beta_k)$). Remarquons ensuite que $v_k(X)$ a un noyau non trivial de dimension $m - n$. Or les éléments de $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L})$ sont les germes de variations infinitésimales locales φ telles que $\varphi(X) \in \ker v_k(X)$ ou encore, les sections locales du fibré vectoriel $\ker v_k$ de base \mathcal{U}_k dont la fibre en X est $\ker v_k(X)$; par conséquent $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) \neq 0$. Il est maintenant facile de voir que $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) \subsetneq \mathfrak{R}(\mathcal{L})$. En effet puisque $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{R}(\mathcal{L})$ tout élément $\varphi \in \mathfrak{R}^0(\mathcal{L})$, $\varphi \neq 0$, qui est à crochet nul peut, en vertu de la proposition 7.1, être modifié par une fonction

non invariante f de telle sorte que $f\varphi \in \mathfrak{H}^0(\mathcal{L})$ ne le sera plus.

Montrons ensuite que l'hypothèse H_3 est satisfaite dans \mathcal{U} pour $k \geq 1$. En effect, fixons $X \in \mathcal{U}_k$, prenons un vecteur arbitraire $v \in T_x M$ et posons $w = v_k(X) \cdot v \in T_z N$. Soit $\lambda: U \rightarrow TN$ un relèvement local de $\pi_2 \circ \beta_k$ constant sur les fibres de $\pi_2 \circ \beta_k$ (trajectoires de \mathcal{L}_k) et tel que $\lambda(X) = w$. Un tel relèvement n'est autre que le composé $\xi \circ \pi_2 \circ \beta_k$ où ξ est un champ local de N avec $\xi_z = w$. Comme les valeurs de v_k sont toutes des applications linéaires de rang maximum n , on peut choisir un inverse à droite différentiable v_k^* de v_k dans un voisinage de X ($v_k(Y) \cdot v_k^*(Y) = \text{Id}$) tel que $v^*(X)w = v$. Ceci revient à scinder localement le fibré $\ker v_k$ dans $\mathcal{U}_k \times_M TM$. On prend finalement la variation infinitésimale $\varphi = v^* \cdot \lambda$ qui sera admissible en vertu de la proposition 30.1.

Vérifions maintenant que $\mathfrak{H}^1(\mathcal{L}) = 0$. En effet, si $\varphi: U \rightarrow TM$ est à crochet nul, le vecteur $\varphi(X)$, $X \in U$, doit être d'après la condition (30.33) un point fixe par l'action de $\Pi_{k+1}(M)_X$. Or, ce groupe d'isotropie est non trivial (car $m > n$) et opère aussi de façon non triviale sur $T_x M$. Posons $J_{k+1}\pi_2(X) = j_{k+1}s(x)$. On peut trouver des coordonnées locales (x^i) en x et (z^i) en $z = \pi_2 \circ \beta_k(X) = s(x)$ tel que s lue dans ces coordonnées s'écrit

$$s: (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

(théorème du rang constant). Or, le groupe d'isotropie $\Pi_{k+1}(M)_X$ est l'ensemble des jets $Z \in \Pi_{k+1}(M)$ tel que $j_{k+1}s(x) \cdot Z^{-1} = j_{k+1}s(x)$ donc c'est l'ensemble des jets $Z = j_{k+1}f(x)$ où f est une application feuilletante par rapport à x^1, \dots, x^n , c'est-à-dire, a pour expression locale en les coordonnées (x^i)

$$f: (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n, f^{n+1}(x^j), \dots, f^m(x^j)), \quad 1 \leq j \leq m$$

les fonctions $f^i(x^j)$ étant astreinte à la seule condition $f^i(x) = x^i$. Le groupe $\{T_x f\}$ est égal au groupe G des matrices $m \times m$ inversibles de la forme

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ * & ** \end{pmatrix}.$$

Le seul point fixe de ce groupe est le vecteur nul. Il en résulte que $\mathfrak{H}^1(\mathcal{L}) = 0$. D'autre part, puisque $\beta(\mathfrak{R}_{k+1}(\mathcal{L})) = TM$, les trajectoires de $\Pi_{k+1}(M)_X$ dans τX sont toujours contenues dans les classes d'équivalence modulo $\tau X \cap \Delta_k$ quelque soit $X \in \mathcal{U}_{k+1}$. Ces trajectoires peuvent se déterminer de la façon suivante. Posons $X = j_{k+1}\sigma(x)$. Puisque $s = \pi_2 \circ \sigma$ est de rang maximum, l'application linéaire $T(\pi_2 \circ \beta_k): \tau X \rightarrow T_z N$ est surjective. En plus $\ker [T(\pi_2 \circ \beta_k)|\tau X] = \tau X \cap \Delta_k$ donc les classes d'équivalence modulo $\tau X \cap \Delta_k$ ne sont autres que les images réciproques des vecteurs de $T_z N$. Remarquons ensuite que $T\alpha_k: \tau X \rightarrow T_x M$ est un isomorphisme et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \tau X & & \\
 T\alpha_k \downarrow & \searrow T(\pi_2 \circ \beta_k) & \\
 T_x M & \xrightarrow{T_s} & T_z N
 \end{array}$$

par conséquent $T\alpha_k$ transforme l'image réciproque d'un vecteur $w \in T_z N$ dans τX en l'image réciproque du même vecteur dans $T_x M$. De même la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
 \tau X & \xrightarrow{TZ} & \tau X \\
 T\alpha_k \downarrow & & \downarrow T\alpha_k \\
 T_x M & \xrightarrow{Z_1} & T_x M
 \end{array}$$

montre que les trajectoires de $\Pi_{k+1}(M)_X$ dans τX se projettent par $T\alpha_k$ sur les trajectoires de $\rho_1 \Pi_{k+1}(M)_X \simeq G$ dans $T_x M$. Or, puisque les f sont des transformations arbitraires qui commutent avec s ou, plus simplement, compte tenu de la nature du groupe G , on voit immédiatement que les trajectoires dans $T_x M$ sont précisément les sous-ensembles $\{0\}$, $\ker T_{x^s} - \{0\}$ et $(T_{x^s})^{-1}(w)$ avec $w \neq 0$. En remontant à τX , on trouve que les trajectoires de $\Pi_{k+1}(M)_X$ sont les sous-ensembles $\{0\}$, $\tau X \cap \Delta_k - \{0\}$ et les classes non nulles modulo $\tau X \cap \Delta_k$.

Remarquons finalement qu'il est impossible dans cet exemple de construire une famille de dérivations admissibles non nulles δ_i au sens du § 25 car $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = 0$. En outre, la construction d'une telle famille exigerait l'existence d'au moins m invariants différentiels indépendants tandis que cet exemple ne nous fournit que n .

Les critères d'admissibilité introduits dans ce paragraphe s'étendent, en partie, à la théorie générale exposée au chapitre III.

31. Le faisceau canonique des invariants différentiels de \mathcal{L}

Donnons-nous un faisceau de Lie \mathcal{L} sur la variété P . Pour pouvoir parler d'invariants différentiels de \mathcal{L} il faut se donner une deuxième variété M et là encore nous aurons des théories différentes suivant la façon d'accrocher M à P . Une première façon est celle de considérer une fibration $\pi : P \rightarrow M$; nous obtenons la théorie générale développée dans le chapitre III. Une deuxième façon est celle de prendre la fibration $\pi : M \times P \rightarrow M$ et considérer les invariants différentiels du faisceau $\tilde{\mathcal{L}}$ relèvement π -vertical canonique à $M \times P$ du faisceau \mathcal{L} . En identifiant $J_k(M \times P)$ à $J_k(M, P)$ ceci revient à considérer les invariants

différentiels du faisceau \mathcal{L} sur les variétés $J_k(M, P)$ à l'aide du prolongement *par le but*. Nous obtenons la théorie développée au § 29. Lorsque $\dim M \geq \dim P$ la théorie de Lie est valable moyennant l'hypothèse absolue H ne portant que sur \mathcal{L} . En particulier si nous prenons $M = P$, le faisceau des invariants différentiels $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ ainsi obtenu est canoniquement attaché à \mathcal{L} . Localement, il revient à prendre $M = \mathbf{R}^p$, $p = \dim P$, et réaliser $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ comme faisceau dont la base est le produit de \mathbf{R}^p par la limite projective des espaces de repères de P . Finalement, une troisième façon est celle de prendre la fibration $\pi : P \times M \rightarrow P$ et de considérer les invariants différentiels du faisceau $\tilde{\mathcal{L}}$ relèvement π -horizontal canonique à $P \times M$ du faisceau \mathcal{L} . Ceci revient à considérer les invariants différentiels du faisceau \mathcal{L} à l'aide du prolongement *par la source* c'est-à-dire la théorie développée au § 30. Lorsque $\dim M \leq \dim P$ la théorie de Lie est valable moyennant l'hypothèse absolue H sur \mathcal{L} . Si, en particulier, on prend $M = P$ le faisceau des invariants différentiels $\mathfrak{S}'(\mathcal{L})$ ainsi obtenu est aussi canoniquement attaché à \mathcal{L} . Localement on réalise $\mathfrak{S}'(\mathcal{L})$ comme faisceau dont la base est le produit de \mathbf{R}^p par la limite projective des espaces de corepères de P . Les restrictions de $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ et $\mathfrak{S}'(\mathcal{L})$ à $\Pi_\infty(P)$ sont canoniquement isomorphes à l'aide de l'inversion $X \mapsto X^{-1}$. Le faisceau $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$, ou son dual $\mathfrak{S}'(\mathcal{L})$, joue un rôle important dans l'étude de la structure du faisceau de Lie \mathcal{L} .

32. L'exemple classique

Nous allons maintenant développer un exemple dû à Sophus Lie [41, chap. IV] qui a été repris par Tresse, Medolaghi et Vessiot. Il s'agit d'un exemple très simple qui pourtant contient en soi toutes les subtilités de la théorie.

Soit $P = \mathbf{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z) et $M = \mathbf{R}^2$ muni de (x, y) . Considérons la fibration évidente $\pi : P \rightarrow M$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, et (sur P) considérons le faisceau de Lie \mathcal{L} formé par les germes de champs locaux $\theta = f\partial/\partial x - f'z\partial/\partial z$, où f est une fonction arbitraire de la seule variable x , et f' est sa dérivée. Un calcul direct montre que \mathcal{L} est stable pour le crochet. En outre, \mathcal{L} est un faisceau π -projetable dont la projection \mathcal{L}_{-1} dans M est le faisceau de Lie formé par les germes de champs locaux $f\partial/\partial x$. Les transformations finies du pseudogroupe Γ obtenu par intégration des transformations infinitésimales de \mathcal{L} ont l'expression locale $\varphi : X = f(x)$, $Y = y$, $Z = z/f(x)$, où f est une fonction arbitraire à dérivée non nulle. Le faisceau de Lie réduit est formé par les germes de toutes les sections locales de TP qui sont de la forme

$$\tau : (x, y) \mapsto f(x)\partial/\partial x - f'(x)g(x, y)\partial/\partial z,$$

où f et g sont des fonctions arbitraires, la fonction g correspondant à la section arbitraire $\sigma = q \circ \tau$ de P . Plaçons nous désormais dans l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_k)_{k \geq -1}$ de J défini par la condition $z \neq 0$. On montre facilement que le fibré \tilde{L}_k , $k \geq -1$, est régulier au dessus de \mathcal{U}_k , la dimension des fibres étant $k + 2$.

On remarque que les champs de vecteurs contenus dans les parenthèses sont indépendants de f , i.e., indépendants du champ particulier θ et leur nature résulte seulement de la forme particulière de l'ensemble des champs θ . En outre, le premier champ de chaque parenthèse est un des champs $\partial/\partial x, z\partial/\partial z, z\partial/\partial p, z\partial/\partial r, z\partial/\partial \alpha, \dots$ avec $z \neq 0$. On en déduit que le champ $\Delta_k, k \geq -1$, est régulier de dimension constante $k + 2$ en tout point de \mathcal{U}_k . L'hypothèse H_2 est ainsi vérifiée. En outre, puisque Δ_k et \tilde{L}_k ont le même rang, l'application $\mathfrak{p}_k: \tilde{L}_k \rightarrow \Delta_k$ est un isomorphisme ($k \geq 0$).

Vérifions à présent l'hypothèse H_3 . Indiquons par ∂_x et ∂_y les dérivées formelles associées aux champs $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ de M . Un calcul direct montre que

$$\left[\frac{1}{z} \otimes \frac{\partial}{\partial x}, \theta \right] = \left[\frac{\partial}{\partial y}, \theta \right] = 0$$

pour tout $\theta \in \mathcal{L}$. On obtient ainsi deux dérivations formelles admissibles $\mathfrak{h}_1 = (1/z)\partial_x$ et $\mathfrak{h}_2 = \partial_y$ qui sont des sections globales de $\mathfrak{D}_0(\mathcal{L})$ au dessus de \mathcal{U} . Les variations infinitésimales correspondantes $\Phi_1 = (1/z) \otimes \partial/\partial x$ et $\Phi_2 = \partial/\partial y$ induisent en tout point $X \in \mathcal{U}$ une base $\{\Phi_1(X), \Phi_2(X)\}$ de $T_x M, x = \alpha(X)$, car $z \neq 0$ dans \mathcal{U} . D'après la proposition 25.1 les sections Φ_1 et Φ_2 constituent une base globale du \mathfrak{S} -module $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$ au dessus de \mathcal{U} . Nous verrons plus tard que $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}(\mathcal{L})$. Il est curieux de remarquer que pour $k \geq -1$ la famille de tous les champs de vecteurs locaux de J_k qui sont invariants par \mathcal{L}_k est le faisceau de Lie $\{\varphi\partial/\partial y\}$ de J_k où φ est une fonction locale arbitraire qui localement ne dépend que de la variable y . Tout champ $\varphi\partial/\partial y$ induit la dérivation formelle admissible $\varphi\mathfrak{h}_2 = \varphi\mathfrak{h}_2$ (cf. § 21).

Reste finalement à calculer l'entier à partir duquel commence la stabilité. Or, les formules des champs prolongés montrent que $\Delta_{-1,0} = [\partial/\partial z], \Delta_{0,1} = [\partial/\partial p], \Delta_{1,2} = [\partial/\partial r], \Delta_{2,3} = [\partial/\partial \alpha]$ et de façon générale $\Delta_{k-1,k} = [\partial/\partial \omega]$ où ω est la coordonnée $\partial^k \sigma / \partial x^k$. On voit alors que $(\Delta_{k-1,k})_{X_k}$ s'identifie au sous-espace de $S^k T_x^* M \otimes V_y P$ constitué par les k -formes symétriques s dont le noyau contient $(\partial/\partial y)_x$ c'est-à-dire telles que $i(\partial/\partial y)_x s = 0, x = \alpha(X_k), y = \beta(X_k)$. Ce sous-espace est isomorphe à $S^k \mathbf{R}^* \otimes \mathbf{R}$ car c'est l'ensemble des formes symétriques qui se factorisent à la composante $[\partial/\partial x]_x$ de $T_x M$. Un raisonnement analogue à celui du § 28 nous montre que $\Delta_{k,k+1} = \mathfrak{p}(\Delta_{k-1,k})$ pour $k \geq 1$ et $\Delta_{k-1,k}$ est involutif pour $k \geq 1$.

Calculons maintenant quelques invariants différentiels de \mathcal{L} . Par intégration de $\Delta_k, k \leq 3$, on obtient les systèmes complets d'intégrales premières indépendantes

- d'ordre -1: $\{y\}$
- d'ordre 0: $\{y\}$
- d'ordre 1: $\{y, q/z\}$
- d'ordre 2: $\{y, q/z, t/z, (zs - pq)/z^3\}$
- d'ordre 3: $\{y, q/z, t/z, (zs - pq)/z^3, \delta/z, (\gamma z - pt)/z^3\}$,

$$\beta/z^3 + 3p^2q/z^5 - (3sp + rq)/z^4\}.$$

Posons $y = \mu$, $q/z = \nu$, $t/z = u$, $(zs - pq)/z^3 = v$. La liste des intégrales premières indépendantes se transcrit par

- ordre -1: $\{\mu\}$
- ordre 0: $\{\mu\}$
- ordre 1: $\{\mu, \nu\}$
- ordre 2: $\{\mu, \nu, \eta_2\nu + \nu^2, \eta_1\nu\}$
- ordre 3: $\{\mu, \nu, \eta_2\nu + \nu^2, \eta_1\nu, \eta_2u + u\nu, \eta_2v + 3v\nu, -\eta_1v\}$.

Nous pouvons simplifier cette liste en la suivante (en éliminant les termes superflus ν^2 , $u\nu$ et $3v\nu$)

- ordre -1: $\{\mu\}$
- ordre 0: $\{\mu\}$
- ordre 1: $\{\mu, \nu\}$
- ordre 2: $\{\mu, \nu, \eta_2\nu, \eta_1\nu\}$
- ordre 3: $\{\mu, \nu, \eta_2\nu, \eta_1\nu, \eta_2\eta_2\nu, \eta_2\eta_1\nu, \eta_1\eta_1\nu\}$.

Nous retrouvons ainsi par un calcul direct et pour les ordres 1 et 2 le théorème de Lie qui est valable pour $k \geq 1$. On a la relation $[\eta_1, \eta_2] = -\nu\eta_1$ et

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_{x\mu} & \partial_{y\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x\nu & \partial_y\nu \\ \partial_{x\mu} & \partial_{y\mu} \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{\nu}\eta_1,$$

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_{x\nu} & \partial_{y\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x\nu & \partial_y\nu \\ \partial_{x\mu} & \partial_{y\mu} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\nu^2 - u}{\nu}\eta_1 + \eta_2.$$

Si $\varphi \in \mathfrak{R}^0(\mathcal{L})$, φ doit être de la forme $\varphi = \lambda\partial/\partial x$ où λ est un germe de fonction locale d'un certain J_k car ∂_φ annule l'invariant y . Il en résulte que $\varphi = (\lambda z)\eta_1$ d'où, en appliquant ∂_φ aux invariants obtenus précédemment, on trouve $\lambda = 0$. Ainsi $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = 0$ et par conséquent $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{R}^1(\mathcal{L})$. D'autres exemples se trouvent dans la littérature [41], [42], [50], [67], [68] et notamment le faisceau de Lie $\theta = f\partial/\partial x + f'y\partial/\partial y + f''y\partial/\partial z$, où f est une fonction arbitraire de la variable x . Les transformations finies s'écrivent $X = f(x)$, $Y = yf'(x)$, $Z = z + y(f''(x)/f'(x))$ où f est une fonction arbitraire inversible.

33. Théorie des courbes gauches

Une courbe de \mathbf{R}^3 est un plongement d'un ouvert de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^3 . Posons $P = \mathbf{R}^4$ muni des coordonnées (t, x, y, z) et $M = \mathbf{R}$ muni de la coordonnée t . Soit $\pi: P \rightarrow M$ la projection $(t, x, y, z) \rightarrow t$. Une courbe de \mathbf{R}^3 se représente par une section locale σ de π telle que la fonction $\pi_2 \circ \sigma$ a une dérivée non nulle en chaque point. Soit \mathcal{L} le faisceau de Lie π -projetable défini sur P par l'ensemble des germes de tous les champs locaux $f(t)\partial/\partial t + \theta$, où $f(t)$ est une

fonction arbitraire de t et $\theta = \varphi(x, y, z)\partial/\partial x + \psi(x, y, z)\partial/\partial y + \eta(x, y, z)\partial/\partial z$ est un déplacement infinitésimal générique de \mathbf{R}^3 muni de sa structure euclidienne. On ajoute la composante $f(t)\partial/\partial t$ pour tenir compte des changements de paramétrage des courbes. De la théorie des courbes gauches on connaît tout de suite deux invariants différentiels de \mathcal{L} à savoir la *courbure* (d'ordre 2) et la *torsion* (d'ordre 3); on sait en plus que deux courbes se transforment une dans l'autre par un déplacement de \mathbf{R}^3 si et seulement si les *courbures* et *torsions*, paramétrées par la longueur d'arc se correspondent. Soit \mathcal{U} l'ouvert de J formé par tous les éléments dont le 1-jet est injectif et le 2-jet est à courbure non nulle. Le résultat ci-dessus s'exprime en termes des invariants de \mathcal{L} de la façon suivante: On montre que dans \mathcal{U} les invariants *courbure* et *torsion* engendrent tous les autres au sens du théorème de Lie c'est-à-dire constituent un système fondamental d'invariants différentiels de \mathcal{L} . Cet exemple s'étend aux courbes de \mathbf{R}^n .

Dans [20] le lecteur trouvera une étude des invariants différentiels des courbes gauches relative au groupe des transformations projectives.

Bibliographie

- [1] U. Amaldi, *Introduzione alla teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni*, Libreria dell' Università, Roma, 1942.
- [2] R. Bkouche, *Modules involutifs*, Séminaire sur les structures infinitésimales, Brest, 1967.
- [3] R. J. Blattner, *A theorem of Cartan and Guillemin*, J. Differential Geometry **5** (1971) 295–305.
- [4] C. Buttin & P. Molino, *Théorème général d'équivalence pour les pseudogroupes de Lie plats transitifs*, J. Differential Geometry **9** (1974) 347–354.
- [5] E. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **25** (1908) 57–194; Oeuvres complètes, Partie II, Vol. 2, 719–856.
- [6] —, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, Ann. Mat. Pura Appl. **11** (1932) 17–90; Oeuvres complètes, Partie II, Vol. 2, 1231–1304.
- [7] —, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1922.
- [8] —, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs application géométriques*, Hermann, Paris, 1946.
- [9] C. Ehresmann, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie*, Colloq. Topologie Géom. Différentielle, Strasbourg, 1953, 97–100.
- [10] —, *Esquisses d'un folklore de géométrie différentielle*, Secrétariat Math. Paris, 1967.
- [11] E. Ferreira, *Prolongements et invariants essentiels des pseudogroupes de Lie*, Thèse 3e cycle, Grenoble, 1970.
- [12] F. Gallissot, *Les formes extérieures en mécanique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **4** (1952) 145–297.
- [13] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations*, Ann. of Math. **86** (1967) 246–270.
- [14] —, *Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations*, J. Differential Geometry **1** (1969) 269–307.
- [15] V. Guillemin, *A Jordan-Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras*, J. Differential Geometry **2** (1968) 313–345.

- [16] —, *Infinite dimensional primitive Lie algebras*, J. Differential Geometry **4** (1970) 257–282.
- [17] V. Guillemin & S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.
- [18] —, *Deformation theory of pseudogroup structures*, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 64, 1966.
- [19] M. Halphen, *Sur les invariants différentiels*, Thèse, Paris, 1878.
- [20] —, *Les invariants différentiels des courbes gauches*, J. École Polytech. **28** (1880) 1–102.
- [21] H. H. Johnson, *Classical differential invariants and applications to partial differential equations*, Math. Ann. **148** (1962) 308–329.
- [22] A. Kumpera, *Sur l'intégration d'une classe remarquable de systèmes différentiels automorphes par la méthode de Sophus Lie*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle **9** (1966) 255–280.
- [23] —, *Étude des invariants différentiels attachés à un pseudogroupe de Lie*, Thèse, Paris, 1967.
- [24] —, *Equivalence locale des structures de contact de codimension un*, Canad. J. Math. **22** (1970) 1123–1128.
- [25] —, *Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie*, Lecture Notes in Math. Vol. 392, Springer, Berlin, 1974, 121–162.
- [26] —, *An introduction to Lie groupoids*, Núcleo de Estudos e Pesquisas Científicas, Rio de Janeiro, 1971.
- [27] —, *Sur l'intégration des équations différentielles invariantes par les groupes de Lie*, en preparation.
- [28] A. Kumpera & D. C. Spencer, *Lie Equations, Vol. 1: General Theory*, Annals of Math. Studies, No. 73, Princeton University Press, Princeton, 1972.
- [29] —, *Systems of linear partial differential equations and deformation of pseudogroup structures*, Presses Université de Montréal, 1973.
- [30] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publ. Soc. Mat. São Paulo, 1967.
- [31] —, *On the local theory of continuous infinite pseudogroups*, I, II, Nagoya Math. J. **15** (1959) 225–260, **19** (1961) 55–91.
- [32] P. Libermann, *Sur les pseudogroupes de Lie*, Colloq. Topologie, Strasbourg, 1954–55, 1–20.
- [33] —, *Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959) 409–425.
- [34] —, *Sur les prolongements des fibrés principaux et des groupoïdes différentiables Banachiques*, Presses Université de Montréal, 1971.
- [35] —, *Sur les groupoïdes différentiables et le "presque parallélisme"*, Symposia Math. **10** (1972) 59–93.
- [36] S. Lie, *Begründung einer Invarianten Theorie der Berührungstransformationen*, Math. Ann. **8** (1875) 215–303; Gesam. Abh. Bd. IV, 1–96.
- [37] —, *Über gewöhnliche Differentialgleichungen die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, Archiv for Math. **7** (1882) 443–444; Gesam. Abh. Bd. V, 238–239.
- [38] —, *Über Differentialinvarianten*, Math. Ann. **24** (1884) 537–578; Gesam. Abh. Bd. VI, 95–138.
- [39] —, *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen die eine kontinuierliche, endliche Gruppe gestatten*, Math. Ann. **25** (1885) 77–151; Gesam. Abh. Bd. VI, 139–223.
- [40] —, *Über die Gruppe der Bewegungen und ihre Differentialinvarianten*, Leipzig Ber. **45** (1893) 370–378; Gesam. Abh. Bd. VI, 376–383.
- [41] —, *Zur allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Leipzig Ber. **47** (1895) 53–128; Gesam. Abh. Bd. VI, 320–384.
- [42] —, *Verwertung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen*, I, Leipzig Ber. **47** (1895) 261–322; Gesam. Abh. Bd. VI, 539–591.
- [43] —, *Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen*, Leipzig Ber. **48** (1896) 466–477; Gesam. Abh. Bd. VI, 639–648.

- [44] —, *Geschichtliche Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Gesam. Abh. Bd. VII, 175–216.
- [45] B. Malgrange, *Cohomologie de Spencer (d'après Quillen)*, Secrétariat Math. Orsay, 1965.
- [46] —, *Equations de Lie. I, II*, J. Differential Geometry **6** (1972) 503–522, **7** (1972) 117–141.
- [47] L. Markus, *Group theory and differential equations*, Lecture Notes, University of Minnesota, 1959–60.
- [48] Y. Matsushima, *Sur les algèbres de Lie linéaires semi-involutives*, Colloq. Topologie, Strasbourg, 1954–55.
- [49] P. Medolaghi, *Sulla teoria dei gruppi infiniti continui*, Ann. Mat. Pura Appl. **25** (1897) 179–218.
- [50] —, *Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali*, Ann. Mat. Pura Appl. **1** (1898) 229–264.
- [51] P. Molino, *Sur quelques propriétés des G-structures*, J. Differential Geometry **7** (1972) 489–518.
- [52] —, *Platitudo relative et problème d'équivalence pour les structures infinitésimales transitives*, C.R. Acad. Sci. Paris **276** (1973) 293–295.
- [53] N. Van Quê, *Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17** (1967) 157–223.
- [54] —, *Sur l'espace de prolongement différentiable*, J. Differential Geometry **2** (1968) 33–40.
- [55] —, *Nonabelian Spencer cohomology and deformation theory*, J. Differential Geometry **3** (1969) 165–211.
- [56] W. M. Oliva, *Aspectos geométricos da teoria das equações a derivadas parciais invariantes por pseudogrupos de transformações*, Universidade de São Paulo, 1965.
- [57] D. G. Quillen, *Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations*, Thesis, Harvard University, 1964.
- [58] A. A. M. Rodrigues, *The first and second fundamental theorems of Lie for Lie pseudogroups*, Amer. J. Math. **84** (1962) 265–282.
- [59] —, *Sur le noyau d'un pseudo-groupe de Lie infinitésimal involutif transitif par rapport à une fibration invariante*, C.R. Acad. Sci. Paris **269** (1969) 1154–1155.
- [60] —, *Sur le quotient d'un pseudo-groupe de Lie infinitésimal involutif par une fibration invariante*, C.R. Acad. Sci. Paris **269** (1969) 1211–1213.
- [61] I. M. Singer & S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan. I*, J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.
- [62] D. C. Spencer, *Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups. I, II, III*, Ann. of Math **76** (1962) 306–445, **81** (1965) 389–450.
- [63] —, *Overdetermined systems of linear partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 179–239.
- [64] W. J. Sweeney, *The D-Neumann problem*, Acta Math. **120** (1968) 223–277.
- [65] A. Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations*, Thèse, Paris, 1893; Acta Math. **18** (1894) 1–88.
- [66] E. Vessiot, *Théorie des groupes continus*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **20** (1903) 411–451.
- [67] —, *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations*, Acta Math. **28** (1904) 307–350.
- [68] —, *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration*, Bull. Soc. Math. France **52** (1924) 336–395.